

TEXTO DEL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA 3°·4°

medio



Gladys Osorio Railef

Patricio Norambuena Morales

María Patricia Romante Flores

Daniela Gaete Pino

Juan Díaz Vergara

Jocelyn Celedón Montiel

Katherine Morales Valderrama

Natalia Ortiz Solís

Patricia Ramírez Fuenzalida

Robbie Barrera Yáñez

Yasna Hurtado Lobos



EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN. PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN.



TEXTO DEL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA 3° · 4° medio

Robbie Barrera Yáñez

Licenciado en Educación de Física y Matemática
Profesor de Estado en Física y Matemática

María Patricia Romante Flores

Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Patricio Norambuena Morales

Licenciado en Educación Matemática y
Computación

Gladys Osorio Railef

Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Katherine Morales Valderrama

Licenciada en Educación Matemática
y Computación

Juan Díaz Vergara

Licenciado en Educación de Física y Matemática
Profesor de Estado en Física y Matemática

Natalia Ortiz Solís

Licenciada en Educación Matemática
y Computación
Profesora de Estado en Matemática
y Computación

Daniela Gaete Pino

Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Patricia Ramírez Fuenzalida

Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Yasna Hurtado Lobos

Licenciada en Educación de Física y Matemática
Profesora de Estado en Física y Matemática

Jocelyn Celedón Montiel

Profesora de Estado de Matemática
y Computación



En el desarrollo del Texto del estudiante de Matemática 3° y 4° medio SM, participó el siguiente equipo:

Dirección editorial

Arlette Sandoval Espinoza

Coordinación área Matemática

Carla Frigerio Cortés

Edición

Gladys Osorio Railef

María Patricia Romante Flores

Patricio Norambuena Morales

Ayudante de edición

Lisset Donoso Vera

Autoría

Gladys Osorio Railef

Patricio Norambuena Morales

María Patricia Romante Flores

Daniela Gaete Pino

Juan Díaz Vergara

Jocelyn Celedón Montiel

Katherine Morales Valderrama

Natalia Ortiz Solís

Patricia Ramírez Fuenzalida

Robbie Barrera Yáñez

Yasna Hurtado Lobos

Consultoría

Daniela Bravo Valdivia

Gabriel Soto Ridd

Katherine Morales Valderrama

Johanna Camacho González

Corrección de estilo y prueba

Víctor Navas Flores

Desarrollo de solucionario

Luz Fuentes Acevedo

Tomás Bralić Muñoz

David Martín Sotomayor

Lisset Donoso Vera

Esteban Fernández Ortega

Katherine Morales Valderrama

Paulina González Núñez

Yaritza Dinamarca

Dirección de arte y diseño

Carmen Gloria Robles Sepúlveda

Coordinación de diseño

Gabriela de la Fuente Garfias

Iconografía

Vinka Guzmán Tacla

Diseño y diagramación

Williams Gálvez Baettig

Fotografías

Banco de imágenes SM

Shutterstock

Wikimedia Commons

Ilustración

Sebastián Lizama

Tomás Reyes Reyes

Jefatura de planificación

Andrea Carrasco Zavala

Gestión de derechos

María Loreto Ríos Melo

Este texto corresponde al tercer y cuarto año de Educación Media y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 193/2019, del Ministerio de Educación de Chile.

© 2019 – SM S.A. – Coyancura 2283 piso 2 – Providencia

ISBN: 978-956-363-723-6 / Depósito legal: 309650

Tercer año de uso facultativo.

Cantidad de uso autorizada: 177.689

Cantidad de ejemplares impresos: 159.920

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

En este libro se utilizan de manera inclusiva términos como "los niños", "los padres", "los hijos", "los apoderados", "profesores" y otros que refieren a hombres y mujeres.

De acuerdo con la norma de la Real Academia Española, el uso del masculino se basa en su condición de término genérico, no marcado en la oposición masculino/femenino; por ello se emplea el masculino para aludir conjuntamente a ambos sexos, con independencia del número de individuos de cada sexo que formen parte del conjunto. Este uso evita además la saturación gráfica de otras fórmulas, que puede dificultar la comprensión de lectura y limitar la fluidez de lo expresado.

En este texto se utilizaron las siguientes familias tipográficas: Aspira nar, Unit Slab Pro y JollyGood Proper.



Presentación

Te damos la bienvenida a tu Texto de Matemática

La matemática es una herramienta fundamental para explicar la mayoría de los avances de nuestra sociedad: es dinámica y creativa, utiliza un lenguaje universal y ha sido desarrollada como medio para aprender a pensar y para resolver problemas.

El texto que tienes en tus manos es un material pensado en ti. Su finalidad es que sigas desarrollando tu capacidad de análisis y estudio para facilitar tu tránsito al mundo laboral y profesional, y que desde allí contribuyas a la comunidad local, nacional y global.

¿Qué aprenderás?

Conocerás el uso de la matemática en diversas situaciones que te permitirán desarrollar y aplicar tus habilidades de argumentar y comunicar, modelar, resolver problemas y representar, además de potenciar tus habilidades tecnológicas.

¿Para qué aprenderás?

Para aplicar los conceptos adquiridos, procedimientos y habilidades en la resolución de problemas reales en diferentes contextos promoviendo el modelamiento matemático de situaciones para tomar decisiones fundamentadas.

¿Cómo aprenderás?

A partir de actividades individuales y colaborativas que integran tus habilidades, conocimientos y actitudes, mediante el uso de herramientas digitales (*softwares*, aplicaciones, graficadores, simuladores, entre otros) y en entornos virtuales, como las redes sociales.

A partir de proyectos que promueven el trabajo colaborativo y que permiten profundizar y desarrollar el conocimiento, razonamiento y pensamiento matemático, fortaleciendo así la creatividad, la comunicación y la valoración de opiniones.

Conoce tu texto

Inicio de Unidad

Unidad **4**

GEOMETRÍA CON COORDENADAS

Geometría

Observa la imagen. Luego, comenta la respuesta con tu curso.

ALMA es el observatorio con el radiotelescopio más grande del mundo, conformado por 64 antenas, que se ubican en el norte de Chile, en la localidad de Chajante, San Pedro de Atacama, a 5000m sobre el nivel del mar.

- ¿AlMA observa la mejor línea posible de cielo. ¿Por qué crees que estas antenas están a la mayor distancia entre ellas?
- ¿Cómo crees que se puede alinear las estrellas en el cielo?, ¿cuál observatorio lo hace al punto (0, 0) en el cielo nocturno?
- Supongamos que estamos sobre un plano cartesiano y que cada antena representa un punto de él. ¿Dónde te situarías para determinar la distancia que existe entre una de ellas y 10? ¿Cuál información sería de utilidad para determinarla?

En esta unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- Resolución de problemas con nociones en el plano cartesiano.
- Resolución de problemas con ecuaciones en el plano cartesiano.



Evaluación diagnóstica

Activo lo que sé

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

- Indica a cuánto equivale cada periodo de tiempo.

a. 30 años	b. 18 meses
• En meses	• En días
• En años	• En trimestres
• En trimestres	• En años
- Calcula el porcentaje perdido en cada caso.

a. 25% de 24	d. 0,5% de 180
b. 18% de 150	e. 75% de 0,19
c. 230% de 80	f. 0,08% de 0,005
- ¿Cuál está descargando una actualización para su celular. Observa su progreso.



Supongamos que la velocidad de descarga es constante, ¿en cuántos minutos más, aproximadamente, terminará el proceso?

- Verónica depositó \$300000 en la cuenta de ahorros de un banco que le ofrece una tasa de interés compuesto anual de 5%. Si no realiza otros depósitos, ¿cuánto dinero tendrá en la cuenta al cabo de 2 años?
- Marta quiere tomar un préstamo a 1 año de \$1000000. ¿Cuál de los bancos de interés es la más conveniente? ¿por qué? Observa la imagen.



Reflexión

- Con respecto a tu desempeño en esta evaluación, ¿cuáles son tus fortalezas y debilidades para comenzar el estudio de esta Unidad?
- ¿Cuál fue la actividad más difícil para tí, ¿y la más fácil?, ¿por qué?

Reflexión

que más le conviene observar la imagen.

b. ¿Cuál de los dos intereses crece más rápido?, ¿cómo lo comprobarías?

Reflexión

- Con respecto a tu desempeño en esta evaluación, ¿cuáles son tus fortalezas y debilidades para comenzar el estudio de esta Unidad?
- ¿Cuál fue la actividad más difícil para tí, ¿y la más fácil?, ¿por qué?

Desarrollo de Unidad

Inicio y desarrollo de Lección

Lección 4

Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica

Función logarítmica

¿Qué es definir un logaritmo? Ingresa con un ejemplo.

¿Cuáles son las propiedades de los logaritmos que se aplican en casos cotidianos?

Actividad

- Lee la siguiente información: Energía, responde.

La intensidad del sonido se mide en vatios por metro cuadrado (W/m^2). La menor intensidad que puede sentir el oído humano, la más débil de audición, es $10^{-12} W/m^2$. A partir de ahí, ¿ver?, comienza el umbral del dolor en el oído. Para comparar un sonido cualquiera con la menor intensidad audible, se utiliza la siguiente función: $10^{(I - 10^{-12})/10}$, donde I es el nivel de intensidad sonora medido en decibelios (dB). Es la intensidad del sonido en W/m^2 en el umbral de audición ($10^{-12} W/m^2$).



- Calcula el nivel de intensidad sonora que des delata el central del dólar. ¿Cuál es el siguiente ejemplo del umbral de audición.

- Encopa 4 situaciones de las que asociar con la magnitud y calcula la intensidad de sonido (debe ser una. Observa el ejemplo para respaldarte por qué).

Se aplica la definición de logaritmo:

- En general, se recomienda que, al estar auditando, no se superen los 80 dB. Sin embargo, muchas personas los sobrepasan hasta los 120 dB.
 - ¿Cuál es la intensidad del sonido de estos magnitud?
 - ¿Cuántas veces mayor es la intensidad de los 120 dB que la recomendada?

Metacognición

2

- Aplica el modelo matemático anterior para conocer el nivel de intensidad sonora (en decibelios) de los siguientes fenómenos.



- Si se sabe que un equipo de sonido tiene una intensidad igual al doble de la de otro, ¿cuál es la diferencia que poseen en decibelios?
- ¿A qué volumen escuchas música? ¿Te has informado de los cuidados que debes tener para no dañar tus oídos?

- Representa la función $f(x) = \log_2 x$. Para ello, realiza lo pedido.
 - Elabora una tabla de valores y grafica la función en el plano cartesiano.
 - A partir de la gráfica, responde:
 - ¿Cuál es el dominio y el recorrido de la función?
 - ¿En qué punto la gráfica se interseca con el eje X?
 - ¿La gráfica interseca al eje Y?
 - ¿Cuál ocurre con los valores de la función cuando aumenta el valor de x ? ¿Es una función creciente o decreciente?

Se define función logarítmica como la función de la forma: $\log_b(x)$, con $b > 0$ y $b \neq 1$.

En ella se tiene que:

- Se define en el conjunto de todos los números reales positivos (\mathbb{R}^+).
- Su recorrido es el conjunto de todos los números reales (\mathbb{R}).
- La gráfica interseca al eje X en el punto (1, 0) no interseca al eje Y, que actúa como asíntota de la gráfica.

Existen varias notaciones o abreviaturas de la notación que son modeladas mediante una función logarítmica. Por ejemplo: la intensidad del sonido, la magnitud de un astro, la escala del pH, entre otros.

Lección 4

Proyecto Logaritmos en la astronomía

¿Qué hacemos? Determinar la magnitud aparente de algunos objetos celestes.

La magnitud aparente mide el brillo de un objeto celeste tal y como es observado por una persona en la Tierra.

En el siglo XIX se clasificaron los estrellas en primera y segunda magnitud según su brillo. Fue el astrónomo inglés Norman Pogson quien descubrió que una estrella de primera magnitud es 100 veces más brillante que una de sexta magnitud. La expresión que define Pogson para la magnitud aparente de los estrellas está dada por:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \left(\frac{I_1}{I_2} \right)$$

Donde m es la magnitud aparente entre las estrellas I_1 e I_2 es la relación de su brillo.

Planifíquemos

Paso 1: En parejas, investigan la magnitud de al menos 6 objetos celestes, entre ellos los que se muestran a continuación.



Paso 2: Determinen cuántas veces más brillante es el Sol que los distintos objetos celestes. Para ello, reemplacen los valores de las magnitudes en la fórmula y dejen expresado $\frac{I_1}{I_2}$. Luego, conecten una tabla para ordenar la información obtenida.

Presentemos y concluamos

Paso 3: Usando las redes sociales, presenten de forma creativa los resultados y las conclusiones que obtuvieron a partir del trabajo realizado.

Para concluir

- ¿Cómo se define una función logarítmica? Explica con un ejemplo.
- ¿Cómo es la gráfica de una función logarítmica? Describe sus características.
- ¿Cuál fue la actividad que te resultó más fácil de realizar? ¿por qué?
- De lo estudiado en esta tema, ¿qué crees que necesitas reforzar?

Cierre de Tema

Usando las conclusiones y las conclusiones que

Si se sabe que un equipo de sonido de otro, ¿cuál es la diferencia que poseen en decibelios?

¿A qué volumen escuchas música? ¿debes tener para no dañar tus oídos?

representa la función $f(x) = \log_2 x$, ¿cuál es el dominio y el recorrido de la función para una tabla de valores?

Para concluir

- ¿Cómo se define una función logarítmica? Explica con un ejemplo.
- ¿Cómo es la gráfica de una función logarítmica? Describe sus características.
- ¿Cuál fue la actividad que te resultó más fácil de realizar? ¿por qué?
- De lo estudiado en este tema, ¿qué crees que necesitas reforzar?

Unidad 2 • Lección 4

Texto del estudiante 3° medio

Presentación.....	3
Conoce tu texto	4

Unidad

1

LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES DE INCERTEZA 8

Activo lo que sé	10
Lección 1: Toma de decisiones aplicando medidas de dispersión de datos.....	11
Medidas de dispersión.....	11
Comparación de conjuntos de datos	15
Antes de continuar	19
Lección 2: Toma de decisiones aplicando probabilidades condicionadas.....	20
Probabilidad condicionada.....	20
Probabilidad total	24
Antes de continuar	27
Síntesis	28
Repaso	29
¿Qué aprendí?.....	30

Unidad

2

MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA DESCRIBIR Y PREDECIR32

Activo lo que sé	34
Lección 3: Modelamiento de fenómenos con la función exponencial.....	35
Función exponencial.....	35
Crecimiento y decrecimiento exponencial.....	40
Antes de continuar	43
Lección 4: Modelamiento de fenómenos con la función logarítmica.....	44
Función logarítmica	44
Relación entre las funciones exponencial y logarítmica.....	49
Antes de continuar	51
Síntesis	52
Repaso	53
¿Qué aprendí?.....	54

Unidad

3

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA 56

Activo lo que sé	58
Lección 5: Resolución de problemas con ángulos en la circunferencia.....	59
Ángulos del centro e inscrito en una circunferencia.....	59
Ángulos interiores y exteriores en la circunferencia.....	63
Antes de continuar	67
Lección 6: Resolución de problemas con segmentos en la circunferencia.....	68
Cuerdas en la circunferencia.....	68
Secantes y tangentes en la circunferencia.....	71
Antes de continuar	75
Síntesis	76
Repaso	77
¿Qué aprendí?.....	78

Unidad

4

UN ÚLTIMO PELDAÑO ALGEBRAICO: LOS NÚMEROS COMPLEJOS 80

Activo lo que sé	82
Lección 7: El conjunto de los números complejos (C).....	83
Conjuntos de los números complejos.....	83
Representación de números complejos.....	86
Módulo y conjugado de un número complejo.....	88
Antes de continuar	91
Lección 8: Resolución de problemas usando la operatoria de números complejos.....	92
Adición y sustracción de números complejos.....	92
Multiplicación de números complejos.....	95
División de números complejos.....	98
Antes de continuar	101
Síntesis	102
Repaso	103
¿Qué aprendí?.....	104

Glosario.....	220
Solucionario.....	222
Rúbricas de actividades	235
Bibliografía.....	255

Presentación.....	3
Conoce tu texto	4

Unidad 1 LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES FINANCIERAS Y ECONÓMICAS 106

Activo lo que sé	108
Lección 1: Toma de decisiones aplicando porcentajes.....	109
Porcentajes en el comercio.....	109
Presupuestos y planificación.....	113
Remuneraciones y descuentos legales	119
Antes de continuar	122
Lección 2: Toma de decisiones aplicando tasas de interés compuesto.....	123
Ahorro e inversiones.....	123
Créditos	127
Antes de continuar	131
Síntesis	132
Repaso	133
¿Qué aprendí?	134

Unidad 2 MODELAMIENTO MATEMÁTICO PARA DESCRIBIR Y PREDECIR 136

Activo lo que sé	138
Lección 3: Construcción de modelos con la función potencia	139
Crecimiento y decrecimiento potencial	139
Función potencia de exponente positivo.....	142
Función potencia de exponente negativo	145
Antes de continuar	148
Lección 4: Construcción de modelos con las funciones seno y coseno.....	149
La circunferencia unitaria.....	149
Funciones seno y coseno	152
Amplitud y periodo	154
Antes de continuar	157
Síntesis	158
Repaso	159
¿Qué aprendí?	160

Unidad 3 LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES DE INCERTEZA 162

Activo lo que sé	164
Lección 5: Toma de decisiones analizando la distribución binomial	165
Valor esperado y varianza de una variable aleatoria	165
Distribución binomial.....	167
Antes de continuar	171
Lección 6: Toma de decisiones analizando la distribución normal.....	172
Variable aleatoria continua	172
Distribución normal.....	174
Distribución normal estándar.....	177
Estimación de la media de una población.....	183
Aproximación normal a la binomial	185
Antes de continuar	187
Síntesis	188
Repaso	189
¿Qué aprendí?	190

Unidad 4 GEOMETRÍA CON COORDENADAS 192

Activo lo que sé	194
Lección 7: Resolución de problemas con rectas en el plano	195
Distancia entre puntos en el plano cartesiano	195
Rectas en el plano	197
Distancia de un punto a una recta	201
Antes de continuar	204
Lección 8: Resolución de problemas con circunferencias en el plano cartesiano.....	205
Ecuación de la circunferencia	205
Posición relativa a las circunferencias.....	209
Antes de continuar	215
Síntesis	216
Repaso	217
¿Qué aprendí?	218

Glosario.....	238
Solucionario.....	240
Rúbricas de actividades	252
Bibliografía.....	255

LA TOMA DE DECISIONES EN SITUACIONES FINANCIERAS Y ECONÓMICAS

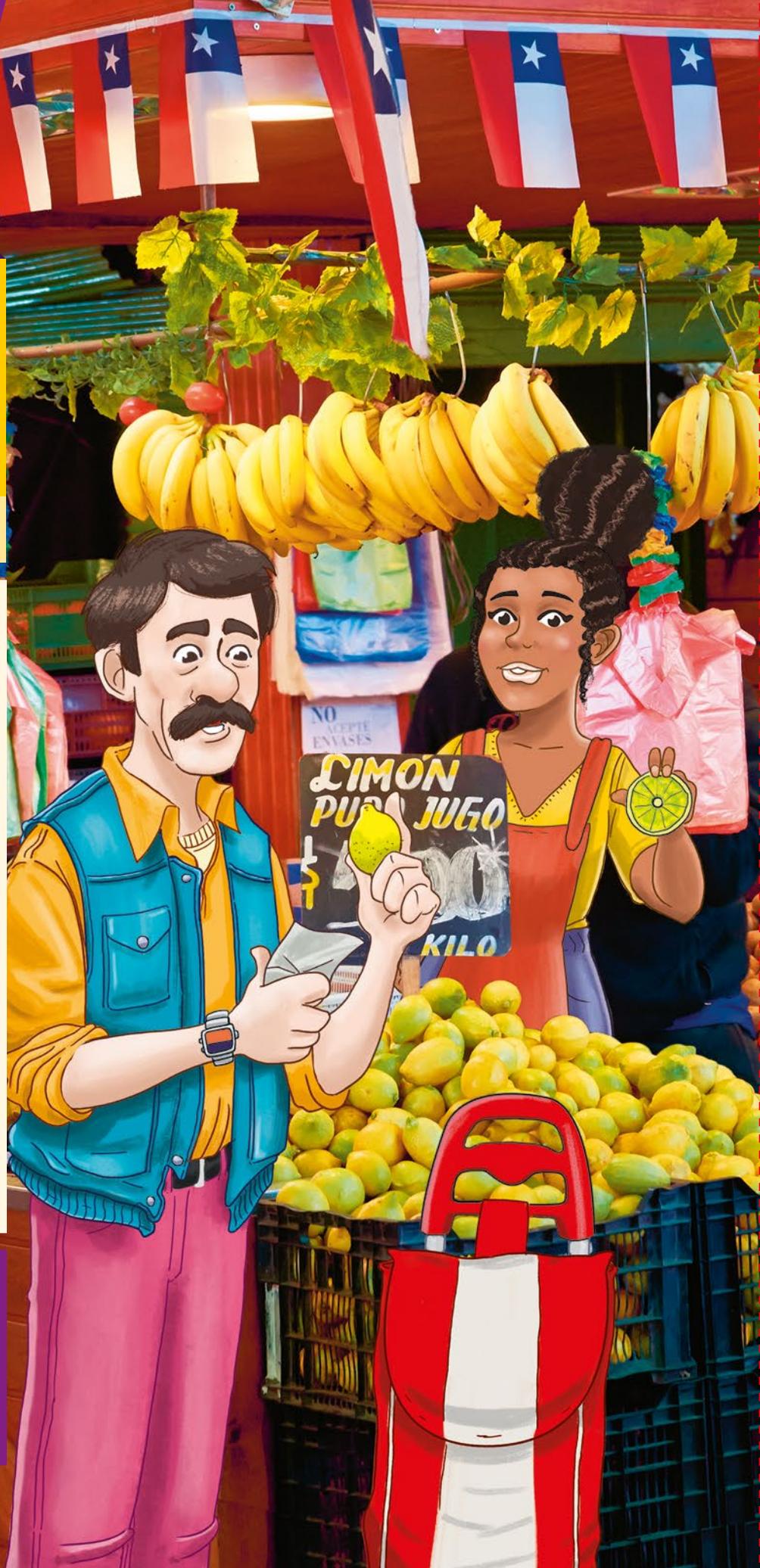
Números

Observa la imagen. Luego, comenta tu respuesta con tu curso.

1. ¿Qué relación puedes establecer entre la Vega Central y el título de la Unidad?
2. ¿De qué manera la economía está presente en la imagen? Nombra diferentes situaciones.
3. ¿Qué decisiones económicas tomas a diario? Da 3 ejemplos.
4. ¿Por qué es necesario tomar decisiones responsables e informadas en situaciones de consumo? Argumenta.
5. Cuando compras algo en el comercio, ¿cómo pagas?
6. Además del pago en efectivo, ¿qué otros medios de pago conoces que se utilicen en el comercio?

En esta Unidad estudiarás y aprenderás acerca de:

- Toma de decisiones aplicando porcentajes.
- Tasas de decisiones aplicando tasas de interés compuesto.





DULCES JUGOSAS
\$ 500
KILO

DULCES OFERTA
\$ 700

PURO * JU
CADA
\$ 500
EL KIL

OFERTA
EN MANZANAS
PINK LADY
\$ 300
EL KILLO

Realiza las siguientes actividades para activar tus conocimientos previos sobre la Unidad.

1. Indica a cuánto equivale cada periodo de tiempo.

a. 90 días:

- En meses
- En años
- En trimestres

b. 18 meses:

- En días
- En trimestres
- En años

2. Calcula el porcentaje pedido en cada caso.

a. 25% de 24.

b. 18% de 150.

c. 120% de 90.

d. 0,5% de 182.

e. 73% de 0,19.

f. 0,08% de 0,005.

3. Cecilia está descargando una actualización para su celular. Observa su progresión.

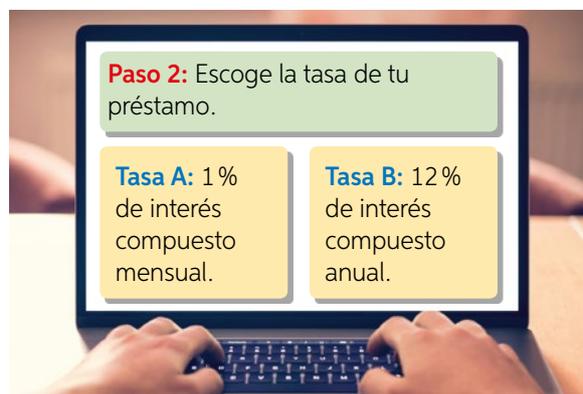


Suponiendo que la velocidad de descarga es constante, ¿en cuántos minutos más, aproximadamente, terminará el proceso?

4. Verónica depositó \$100 000 en la cuenta de ahorro de un banco que le ofreció una tasa de interés compuesto anual de 5%. Si no realiza giros ni depósitos, ¿cuánto dinero tendrá en la cuenta al cabo de 2 años?

5. Martín quiere tomar un préstamo a 3 años de \$3 000 000. ¿Cuál de las tasas de interés es la que más le conviene?, ¿por qué? Observa la imagen.

6. ¿Cuál de los dos intereses crece más rápido?, ¿cómo lo comprobarías?



Reflexiono

- Explica qué estrategias te resultaron más sencillas para calcular porcentajes. Luego, comparte tu respuesta con tu curso.
- ¿Qué fortalezas y debilidades pudiste observar al rendir esta evaluación? Explica.

Porcentajes en el comercio

Objetivo: Comparar ofertas del comercio para tomar decisiones.

¿Qué procedimiento utilizas para calcular el porcentaje de una cierta cantidad? Explica y da un ejemplo.

¿En qué situaciones cotidianas del comercio puedes utilizar el interés simple? Describe 2.

1. Observa y analiza la siguiente situación:



- Intuitivamente, ¿qué oferta escogerías? Fundamenta tu respuesta.
- Para conocer qué oferta es más conveniente, analicemos el procedimiento que se realiza para la primera oferta. Observa:
 - Se define una unidad común de comparación, en este caso, el precio por gramo de piña.
 - Luego, se determina la variación porcentual del precio del producto y se calcula el precio por gramo para el precio original y para el precio en oferta. Observa la tabla:

Primera oferta	Precio	Contenido	Precio por gramo
Original	\$1350	200 g	\$6,75 por gramo
Oferta	\$1215	200 g	\$6,075 por gramo

➤ ¿Cómo calculas el 10% de \$1350? Compara tu estrategia con la de tus compañeros.

- Por lo tanto, en la primera oferta, se obtiene un precio de \$6,075 por cada gramo de piña.
- ¿Cuál es el precio por gramo de la segunda oferta? Utiliza el procedimiento anterior para contestar.
 - A partir de los resultados anteriores, ¿qué oferta conviene escoger?

Aplicar porcentajes en el comercio te servirá para:

- Decidir qué conviene más de una gama de productos.
- Saber cuánto estás gastando o ahorrando al escoger un producto.
- Calcular los descuentos reales de los productos que se ofrecen en el comercio.
- Tener un mejor control de las finanzas.

- ¿Qué situación cotidiana recuerdas en la que hayas utilizado porcentajes para decidir? Descríbela.
- Si necesitas comprar un producto, ¿qué aspectos considerarías para asegurar que la compra que realizarás es la más conveniente?

2. Observa las ofertas. Luego, responde.



¿Qué oferta escogerías para comprar 4 yogures si el precio de cada yogur es \$280?, ¿por qué? Comenta tu respuesta con tus compañeros.

3. Evalúa las afirmaciones de Pedro y Fabiola a partir de lo siguiente: "El precio de un producto aumenta 20% y luego, por una oferta, disminuye 20%."



¿Quién tiene la razón? Fundamenta tu respuesta.

- Para un porcentaje x , ¿qué valor hace la expresión $(1 + x)(1 - x)$ mayor a 1?