

2°
medio

Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo
con el texto escolar

Clase 32

Matemática



Inicio

El propósito de esta clase es resolver ecuaciones cuadráticas usando el método de la factorización trinomio cuadrado con un término en común.

Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo



¿Cómo se relaciona la factorización con las ecuaciones cuadráticas?

En el ambiente algebraico existe una conexión entre productos notables y en particular con la factorización de trinomios de grado dos. En este sentido se consideran como procesos inversos. Es así como la suma y la multiplicación para encontrar la factorización de un trinomio cuadrado con un término en común.

Trinomio con un término en común

$$x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q)$$



Recordemos que cuando multiplicamos dos números es posible que estemos encontrando el área de un rectángulo. Si multiplicamos los valores de a y b , entonces tendremos el área utilizada en papel fotográfico. $a \cdot b = \text{área}$
En la figura si sumamos la longitud a y la longitud b , obtendremos la mitad del perímetro de la fotografía.
 $a + b = \text{semiperímetro.}$

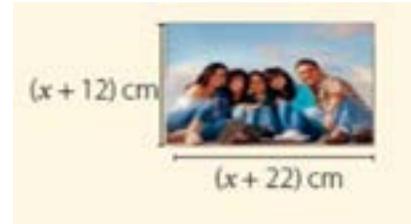
Veamos cómo se relaciona la factorización con las ecuaciones cuadráticas y cómo resolverlas usando la factorización.



Actividad 1:

Resolvamos la siguiente situación

El marco de una fotografía mide $(x+12)$ cm de ancho y $(x+22)$ cm de alto, el tamaño de la foto tiene una superficie de 416 cm^2 . ¿Cuál es el ancho de la foto?



Si se asigna con $x + 2$ el ancho de la foto, podemos calcular el área de la fotografía que es:

$$(x + 12)(x + 22) = 416$$

Analícemos y resolvamos:

A. ¿La expresión $(x + 12)(x + 22) = 416$ es una ecuación cuadrática? ¿Por qué?

B. Si probamos con algunos valores para x , $x = 2$, $x = 4$, $x = 40$, otros. ¿Podemos encontrar alguna solución?

C. Al desarrollar el producto y ordenar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. ¿Qué ecuación obtenemos?

D. La ecuación cuadrática obtenida se puede considerar como un trinomio cuadrado con un término en común ¿Por qué?

E. ¿Puedes factorizar el lado izquierdo de la ecuación? ¿Cuáles son los factores?

$$\boxed{} = 0 \Leftrightarrow \boxed{} \cdot \boxed{} = 0$$

F. Solo observando la igualdad, ¿pueden identificar las soluciones de la ecuación cuadrática? ¿Cuáles son?

G. Utilicemos el **cuadro de ayuda** de la derecha, desarrollemos esa idea para resolver la ecuación. ¿Cuáles son las soluciones?

Ayuda

Factorizar una expresión algebraica es expresarla como producto de dos o más factores, los que pueden ser tanto números como expresiones algebraicas más simples.

Para aplicar este método, la ecuación debe estar escrita igualada a cero antes de factorizar, pues se basa en la relación: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$. Esto es: el producto de dos términos es cero si y solo si al menos uno de ellos es cero.

H. En el contexto del problema, ¿Ambas soluciones son válidas? ¿Cuál es el ancho de la foto?



Vamos a resolver una ecuación cuadrática con forma de trinomio cuadrado con un término en común usando su forma factorizada:

Ejemplo 1: Encontramos la solución de $x^2 - 7x + 12 = 0$

Busquemos los números que multiplicados resultan 12 y sumados resultan -7, veamos

$p \cdot q = 12$	$6 \cdot 2$ 12	$-6 \cdot -2$ 12	$5 \cdot 2,4$ 12	$-5 \cdot -2,4$ 12	$3 \cdot 4$ 12	$-3 \cdot -4$ 12	$-1,5 \cdot -8$ 12	$1,5 \cdot 8$ 12
$p + q = -7$	$6 + 2$ 8	$-6 - 2$ -8	$5 + 2,4$ 7,4	$-5 - 2,4$ -7,4	$3 + 4$ 7	$-3 - 4$ -7	$-1,5 - 8$ -9,5	$1,5 + 8$ 9,5

Observamos que se podría continuar encontrando números que multiplicados nos den 12, sin embargo la suma condiciona esa cantidad a solo un par de números que cumplen con ambas condiciones.

Luego $x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 4) = 0$, nos basamos en la propiedad:
 $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$ de este modo tenemos:

$$\begin{array}{ccc} (x - 3) = 0 & \text{o} & (x - 4) = 0 \\ \text{bien} & & x_2 = 4 \\ x_1 = 3 & & \end{array}$$

Así las soluciones son: 3 y 4

Comprobamos:

- Para $x = 3$, $x^2 - 7x + 12 = (3)^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$ ✓
- Para $x = 4$, $x^2 - 7x + 12 = (4)^2 - 7 \cdot 4 + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$ ✓

Ejemplo 2: Si las soluciones de una ecuación cuadrática son 2 y -10, ¿Cuál es su ecuación?

Si $x = 2$, entonces $(x - 2) = 0$

Si $x = -10$ entonces $(x + 10) = 0$

Por lo tanto la ecuación está dada por: $(x - 2)(x + 10) = 0$, si multiplicamos la expresión obtenemos el trinomio $x^2 + 8x - 20 = 0$, con coeficientes $a = 1$, $b = 8$ y $c = -20$.



Actividad 2:

Considera la siguiente situación: “El cuadrado de un número es igual al triple del número menos diez”

Determina:

1. La ecuación cuadrática que modela el problema:

2. La expresión factorizada de la ecuación:

3. La solución al problema es:



Actividad 3:

Realiza las “*actividades de proceso*” del texto del estudiante de la **página 101**.



En Resumen:

✓ Cuando la ecuación cuadrática sea un trinomio cuadrado con un término en común se puede factorizar como producto de dos expresiones lineales y resolverlas por separado en dos ecuaciones de primer grado. Esto se puede realizar dado que existe una propiedad para todos los números reales a y b se cumple que $a \cdot b = 0$ si y solo si $a = 0$ ó $b = 0$.

✓ La factorización de un trinomio cuadrado con un término en común es parte del proceso para determinar la solución de la ecuación cuadrática.

Cierre



Evaluación

Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1

La expresión factorizada de la ecuación cuadrática $x^2 + 99x = 100$ es:

- a) $(x + 1)(x - 100) = 0$
- b) $(x + 1)(x + 100) = 0$
- c) $(x - 1)(x + 100) = 0$
- d) $(x - 1)(x - 100) = 0$

2

Si -3 y 7 son las soluciones de una ecuación cuadrática, ¿cuál es su expresión?

- a) $(x - 3)(x - 7) = 0$
- b) $(x + 3)(x + 7) = 0$
- c) $(x - 3)(x + 7) = 0$
- d) $(x + 3)(x - 7) = 0$

3

El producto de un número disminuido en 5, multiplicado por el número aumentado en 5, es 24 veces el número. La ecuación cuadrática asociada al enunciado es:

a) $(x - 1)(x - 24) = 0$

b) $(x + 1)(x - 25) = 0$

c) $(x - 5)(x + 5) = 0$

d) $(x - 1)(x - 25) = 0$

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número _____ fue: _____.

2°
medio

Texto escolar

Matemática

Unidad

2

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

Tema 2: ¿En qué consiste la resolución por factorización?

✓ ¿Qué aprenderé?

A resolver ecuaciones cuadráticas por medio de la factorización.

✓ ¿Para qué?

Para resolver problemas cotidianos aplicando la estrategia de factorizar una ecuación cuadrática para obtener dos ecuaciones lineales.

Ayuda

Factorizar una expresión algebraica es expresarla como producto de dos o más factores, los que pueden ser tanto números como expresiones algebraicas más simples.

Para aplicar este método, la ecuación debe estar escrita igualada a cero antes de factorizar, pues se basa en la relación: $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$. Esto es: el producto de dos términos es cero si y solo si al menos uno de ellos es cero.

¿Cómo trabajé el taller?

Individualmente



Grupalmente



¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?

Individualmente



Grupalmente



●● Actividad en pareja

Taller

El marco de una fotografía mide 40 cm de ancho y 28 cm de alto, pero la fotografía misma tiene una superficie de 640 cm^2 . ¿Cuál es el ancho del marco? Si se designa con x el ancho del marco, se puede observar en la imagen que el área de la fotografía es:
 $(28 - 2x)(40 - 2x) = 640$.



1 Analicen y comenten.

- ¿La expresión $(28 - 2x)(40 - 2x) = 640$ es una ecuación cuadrática?, ¿por qué?
- Si prueban con algunos valores para x , ¿pueden encontrar alguna solución? Expliquen.
- Al desarrollar el producto y ordenar de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, ¿qué ecuación se obtiene?

- ¿Se puede simplificar de modo que el coeficiente a sea 1? Si es posible, simplifiquen la ecuación.

2 ¿Pueden factorizar el lado izquierdo de la ecuación?, ¿cuáles son los factores?

$$\boxed{} = 0 \Leftrightarrow \boxed{} \cdot \boxed{} = 0$$

- Solo observando la igualdad anterior, ¿pueden identificar las soluciones de la ecuación cuadrática?, ¿cuáles son? Justifiquen.
- Si uno de los factores es distinto de 0, ¿qué debe cumplir el otro factor para que se cumpla la igualdad?, ¿por qué?
- Apliquen esta idea para resolver la ecuación. ¿Cuáles son las soluciones?
- En el contexto del problema, ¿ambas soluciones son válidas? Expliquen.

3 Observen la siguiente ecuación ya factorizada: $(2x - 20) \cdot (2x - 16) = 0$. ¿Pueden identificar sus soluciones?, ¿cuáles son?

Actividades de proceso

1. ¿Cuánto tiempo demora una pelota en volver al suelo si su altura (en metros) está dada por $h(t) = 90 + 15t - 5t^2$, donde t mide el tiempo transcurrido (en segundos) desde que fue lanzada verticalmente hacia arriba?

PASO 1 Interpreta los datos para escribir la ecuación.

Cuando la pelota está en el suelo, su altura h es 0; por tanto, se reemplaza en la expresión algebraica y se obtiene la ecuación

Si es posible, simplifica la ecuación de modo que el coeficiente para t^2 sea 1.

¿Qué tipo de factorización se puede aplicar? Justifica tu decisión.

Polinomio con término común	Diferencia de cuadrados
Trinomio cuadrado perfecto	Trinomio cuadrado con término común

PASO 2 Factoriza la expresión según corresponda y luego analiza las posibles soluciones.

Entonces = 0

⇔ · = 0

Factor 1 Factor 2

Ya que $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$, podemos separarla en dos ecuaciones:

- = 0, y al resolverla, se obtiene $t_1 =$
Factor 1
- = 0, y al resolverla, se obtiene $t_2 =$
Factor 2

PASO 3 Interpreta las soluciones en el contexto del problema.

- En el caso de $t_1 =$, significa que a los segundos de lanzamiento, la pelota vuelve al suelo.
- En el caso de $t_2 =$, significa que a los segundos de lanzamiento, la pelota vuelve al suelo.

De las soluciones obtenidas, ¿ambas son pertinentes al contexto del problema? Explica.

Ayuda

Factorizaciones

Polinomio con término común
$ap + aq = a(p + q)$
Diferencia de cuadrados
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Trinomio cuadrado perfecto
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
Trinomio cuadrado con término común
$a^2 + (p + q)a + pq = (a + p)(a + q)$

Y él ¿quién es?



Karl-Friedrich Gauss
(1777 - 1855)

Matemático, astrónomo, físico, geodesta e inventor alemán. En 1799, demostró rigurosamente el "teorema fundamental del álgebra" (aunque no fue el primero), que señala que toda ecuación algebraica tiene una solución en números reales o complejos, lo que permite expresar cualquier polinomio como el producto de factores binomiales simples.

Contribuyó en muchos campos: teoría de números, análisis matemático, geometría diferencial, estadística, álgebra, geodesia, magnetismo y óptica, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia han tenido en la historia de esta ciencia.

Tema 2 ¿En qué consiste la resolución por factorización?

Practico

1 Identifica cuál de las ecuaciones tiene las raíces dadas. Escribe SÍ o NO, según corresponda.

a. $x_1 = 2, x_2 = 3$

() $(x - 2)(x + 3) = 0$

() $(x - 2)(x - 3) = 0$

() $(x + 2)(x + 3) = 0$

b. $x_1 = -1, x_2 = -4$

() $(x - 1)(x - 4) = 0$

() $(x + 1)(x + 4) = 0$

() $(x + 1)(x - 4) = 0$

2 Escribe de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ que tenga las raíces dadas en cada caso.

a. $x_1 = 4, x_2 = 7$

R: _____

b. $x_1 = -2, x_2 = 5$

R: _____

c. $x_1 = 10, x_2 = 10$

R: _____

d. $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

R: _____

e. $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{1}{2}$

R: _____

3 Factoriza y resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 - 2x - 35 = 0$

Ecuación: _____

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

b. $x^2 - 6x - 40 = 0$

Ecuación: _____

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

c. $x^2 + x - 30 = 0$

Ecuación: _____

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

d. $x^2 + 15x + 56 = 0$

Ecuación: _____

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

e. $x^2 + 7x + 12 = 0$

Ecuación: _____

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

f. $x^2 + 6x + 5 = 0$

Ecuación: _____

$x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

4 Asocia cada ecuación de segundo grado con una factorización. Para ello, escribe la letra de la tabla correspondiente en cada ecuación.

A $(\sqrt{3}x + 5)(\sqrt{3}x - 5) = 0$	D $(x - \frac{3}{4})(4x + 8) = 0$
B $(2x - 7)^2 = 0$	E $5(x - 3)(x + 8) = 0$
C $(3x - 8)(5x - 2) = 0$	F $10x(x + 4) = 0$

a. $4x^2 - 28x + 49 = 0 \rightarrow \text{_____}$

b. $3x^2 - 25 = 0 \rightarrow \text{_____}$

c. $5x^2 + 25x - 120 = 0 \rightarrow \text{_____}$

d. $4x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow \text{_____}$

e. $10x^2 + 40x = 0 \rightarrow \text{_____}$

f. $15x^2 - 46x + 16 = 0 \rightarrow \text{_____}$

5 Resuelve las ecuaciones del ejercicio anterior.

a. $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

b. $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

c. $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

d. $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

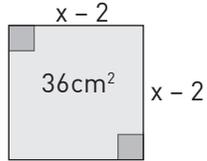
e. $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

f. $x_1 = \text{_____}, x_2 = \text{_____}$

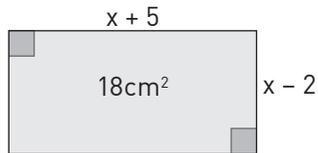
Me desafío

- 1 Con la información de cada figura, plantea una ecuación cuadrática y encuentra, si es posible, la longitud de los lados.

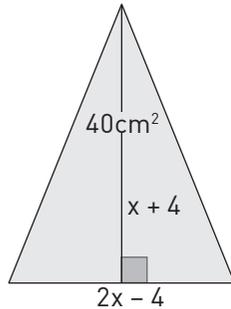
a. R: _____



b. R: _____



c. R: _____



Nota: Resuelve los problemas siguientes planteando una ecuación cuadrática.

- 2 Si la suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos es 302, ¿cuáles son los números?
Ecuación: _____
R: _____
- 3 La suma de los cuadrados de dos números naturales pares consecutivos es 1060. ¿Cuáles son los números?
Ecuación: _____
R: _____
- 4 La diferencia de dos números enteros positivos es 4 y la suma de sus cuadrados es 730. ¿Cuáles son los números?
Ecuación: _____
R: _____

- 5 El lado mayor de un rectángulo excede en 10 cm al lado menor. Si la diagonal mide 50 cm, ¿cuál es el perímetro del rectángulo?

Ecuación: _____

R: _____

- 6 El producto de la edad de una persona por 15 tiene 100 unidades menos que el cuadrado de su edad. ¿Cuántos años tiene la persona?

Ecuación: _____

R: _____

- 7 El área de un rectángulo es de 360 m^2 y el largo excede al ancho en dos unidades. Calcula el perímetro del rectángulo.

Ecuación: _____

R: _____

- 8 Encuentra dos números naturales consecutivos cuyo producto sea 272.

Ecuación: _____

R: _____

- 9 Se tienen tres números consecutivos tales que el mayor dividido por el menor resulta ser $\frac{3}{10}$ el del medio. ¿Cuáles son los números?

Ecuación: _____

R: _____

- 10 La base de un rectángulo es 2 cm mayor que la altura. Si la base y la altura aumentan 1 cm y 2 cm respectivamente resulta otro rectángulo cuya área es 24 cm^2 . ¿Cuáles son las dimensiones de este último?

Ecuación: _____

R: _____

- 11 Los lados de un triángulo miden $x + 3$, $2x - 5$ y $x - 4$. Si el triángulo es rectángulo, ¿cuál es el valor de x ?

Ecuación: _____

R: _____