

Matemática

**Programa de Estudio para la Educación
de Personas Jóvenes y Adultas**

FORMACIÓN GENERAL

Nivel 1
Educación Media



Matemática

**Programa de Estudio para la Educación
de Personas Jóvenes y Adultas**

FORMACIÓN GENERAL

Nivel 1
Educación Media

Estimados profesores, profesoras y equipos directivos:

Me complace presentar esta nueva versión de los Programas de Estudio para la Educación de Personas Jóvenes y Adultas (EPJA), que busca actualizar y enriquecer la experiencia de aprendizaje de quienes, bajo esta modalidad, buscan retomar sus trayectorias educativas y finalizar la escolaridad.

Los programas que a continuación se presentan ofrecen un marco de acción claro para la gestión pedagógica de docentes y equipos directivos, permitiéndoles orientar su trabajo según las circunstancias específicas en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje, así como las características, necesidades e intereses de los y las estudiantes.

Bajo dicha perspectiva, continuar fortaleciendo la cobertura y abogar por la mejora continua de la EPJA contribuye significativamente a cumplir con la importante misión que tenemos como país de avanzar hacia una educación más pertinente, inclusiva y flexible, que confiera herramientas apropiadas para los desafíos actuales, y promueva el desarrollo de capacidades conducentes a un mayor bienestar y una mejor calidad de vida en nuestra sociedad.

Los Programas están organizados según los Objetivos de Aprendizaje estipulados en las Bases Curriculares de la EPJA, en línea con los aprendizajes significativos que demandan las Habilidades del Siglo XXI. En este esfuerzo, se potencia la formación integral, permitiendo el desenvolvimiento efectivo de cada estudiante en contextos cada vez más exigentes, observando la perspectiva de ciclo vital y de trayectoria educativa.

En esa clave, estos Programas de Estudio no solo ayudan a concretar el anhelo de las personas jóvenes y adultas de finalizar su etapa escolar, sino que también les forma en oficios para el trabajo, y los alienta para que prosigan estudios superiores y enriquezcan su quehacer. Todo esto está mediado por un proceso pedagógico virtuoso, que reconoce las experiencias y proyecto de vida de cada joven y persona adulta como referencias significativas para el trabajo con los contenidos.

Como todo nuestro sistema, la educación para personas jóvenes y adultas afronta desafíos importantes que requieren rigurosidad y empatía. Les invito a seguir orientando su acción pedagógica en esos términos, que quizás son todavía más críticos tratándose de esta modalidad de enseñanza. La EPJA desarrolla una contribución invaluable en el propósito de garantizar e incluso actualizar el derecho a la educación en nuestro país y, de este modo, brindar nuevas oportunidades a quienes desean aportar con sus conocimientos y habilidades al desarrollo de un país donde nadie quede atrás.



Nicolás Eduardo Cataldo Astorga
Ministro de Educación de Chile

Matemática

**Programa de Estudio para la Educación
de Personas Jóvenes y Adultas**

FORMACIÓN GENERAL

Nivel 1 de Educación Media

Resolución Exenta del Ministerio de Educación
N° 12882/2025

Unidad de Currículum y Evaluación
Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

Primera edición: 2026



Contenidos

PRESENTACIÓN

- 8** **Nociones básicas**
- 10** **Habilidades y Actitudes para el siglo XXI**

CONSIDERACIONES GENERALES

- 16** Perfil de Egreso
- 18** Contextualización Curricular
- 19** Inclusión y Diversidad

ORIENTACIONES PEDAGÓGICAS PROGRAMAS DE ESTUDIO EPJA

- 22** **Organización Modular
del Programa de Estudio**
- 22** Módulos Obligatorios
- 25** Módulos Electivos
- 26** Aprendizaje Basado en Proyectos
- 29** Aprendizaje Basado en la Resolución
de Problemas
- 30** **Orientaciones para Evaluar los Aprendizajes**
- 32** **Referencias**

PROPÓSITOS FORMATIVOS DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICA

- 36** Enfoque de la Asignatura
- 36** Estructura Curricular
- 41** Objetivos de Aprendizaje
- 41** Conocimientos Esenciales

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS Y PEDAGÓGICAS

- 44** **Orientaciones Didácticas y Pedagógicas**
- 48** **Referencias**
- 49** **Visión panorámica de los Módulos
del Nivel 1 de Educación Media**
- 50** **Visión panorámica de los Objetivos de
Aprendizaje y Conocimientos Esenciales**

MÓDULOS OBLIGATORIOS DE LA ASIGNATURA

- 56** **Módulo Obligatorio 1**
- 56** Visión panorámica
- 58** Actividad de desempeño 1
- 66** Actividad de desempeño 2
- 74** Actividad de desempeño 3
- 84** Actividad de desempeño 4
- 92** **Módulo Obligatorio 2**
- 92** Visión panorámica
- 94** Actividad de desempeño 1
- 103** Actividad de desempeño 2
- 110** Actividad de desempeño 3
- 118** Actividad de desempeño 4
- 128** **Módulo Obligatorio 3**
- 128** Visión panorámica
- 130** Actividad de desempeño 1
- 137** Actividad de desempeño 2
- 145** Actividad de desempeño 3
- 153** Actividad de desempeño 4
- 162** **Módulo Obligatorio 4**
- 162** Visión panorámica
- 164** Actividad de desempeño 1
- 172** Actividad de desempeño 2
- 179** Actividad de desempeño 3
- 187** Actividad de desempeño 4

MÓDULOS ELECTIVOS DE LA ASIGNATURA

- 196** **Módulo Electivo 1**
- 196** Visión panorámica
- 210** **Módulo Electivo 2**
- 210** Visión panorámica

Presentación

Las Bases Curriculares para la Educación de Personas Jóvenes y Adultas (EPJA) establecen Objetivos de Aprendizaje (OA) de habilidades y actitudes que se integran con conocimientos esenciales, para la comprensión de grandes ideas consideradas relevantes en cada asignatura. El presente programa de estudio es una propuesta de organización curricular que define y desarrolla actividades de desempeño para que los y las estudiantes construyan los aprendizajes establecidos para cada nivel de enseñanza.

Al Ministerio de Educación le corresponde la tarea de elaborar programas de estudio que orienten la implementación de las Bases Curriculares en aquellos establecimientos que no han optado por la elaboración de programas propios. Estos instrumentos constituyen un complemento coherente y alineado con las Bases Curriculares. Además, son una herramienta para apoyar a los y las docentes en el logro de los Objetivos de Aprendizaje y propósitos formativos declarados en cada asignatura y nivel.

Los programas de estudio corresponden a una propuesta que los establecimientos pueden implementar. También pueden ser un referente para aquellas instituciones educativas que deseen elaborar programas de estudio propios, pues son instrumentos que responden a las múltiples realidades educativas provenientes de distintos contextos y que dan origen a una diversidad de aproximaciones didácticas, metodológicas y organizacionales. Estas se expresan en el desarrollo de distintos proyectos educativos, todos válidos mientras permitan el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los programas de estudio proponen al docente una organización de los Objetivos de Aprendizaje, conocimientos esenciales y grandes ideas de acuerdo con el tiempo disponible dentro del año escolar. Además, son una orientación acerca de cómo desarrollar una comprensión profunda y significativa. Se trata de una estimación temporal aproximada y de carácter propositivo, por lo tanto, puede ser adaptada por las y los docentes de acuerdo con la realidad de sus estudiantes y de su establecimiento.

Para apoyar la implementación de las Bases Curriculares, los programas proporcionan orientaciones disciplinares, didácticas y criterios de evaluación formativa que pueden utilizarse como apoyo para las actividades de desempeño sugeridas. Estas actividades permiten a los y las estudiantes poner en “uso” el conocimiento esencial. Para ello, aplican los procedimientos que definen a las habilidades y actitudes declaradas en los Objetivos de Aprendizaje. En consecuencia, las actividades de desempeño permiten construir aprendizajes y recoger evidencias de comprensión. Además, se enriquecen con recomendaciones de recursos didácticos complementarios y bibliografía para docentes y estudiantes. Se enmarcan en un modelo pedagógico cuyo enfoque es el de la comprensión, lo que implica establecer conexiones desde la experiencia de los y las estudiantes al interior de cada disciplina y también con otras áreas del conocimiento. Las actividades de desempeño de los programas ilustran un modelo para que cada docente, en su establecimiento, pueda construir nuevas actividades acordes con las diversas realidades.

Nociones básicas

Objetivos de Aprendizaje de Habilidades y Actitudes Nucleares

Los **Objetivos de Aprendizaje** de estas Bases Curriculares establecen los desempeños terminales esperables para una asignatura determinada en cada nivel escolar y evidencian, de forma clara y precisa, cuál es el aprendizaje que la o el estudiante debe lograr. Se refieren a las habilidades y actitudes fundamentales de cada asignatura, y se constituyen en el núcleo del aprendizaje.

Las **habilidades** son definidas como procesos estratégicos centrales para realizar tareas y para solucionar problemas con precisión y adaptabilidad. Favorecen la transferencia educativa, es decir, la capacidad para utilizar el conocimiento y aplicarlo a nuevos contextos.

Las **actitudes** son disposiciones frente a objetos, ideas o personas, que incluyen componentes afectivos, cognitivos y valorativos que inclinan a las personas a determinados tipos de acciones. Las actitudes que conforman los Objetivos de Aprendizaje se desprenden de los cuatro ámbitos del marco de Habilidades para el siglo XXI, y su inclusión responde a criterios de pertinencia para ser trabajadas integradamente con las habilidades. En los niveles de Enseñanza Básica, se prioriza el desarrollo de actitudes que fomentan la autonomía y la proactividad, mientras que en los niveles de Enseñanza Media predominan aquellas que fomentan la responsabilidad personal y social de los y las estudiantes.

Las actitudes y habilidades se integran en la construcción de los Objetivos de Aprendizaje nucleares, lo que evidencia su interdependencia y su importancia para una formación integral, que permita a las y los estudiantes contar con una combinación de valores, disposiciones, habilidades y conocimientos para enfrentar los desafíos del futuro¹.

¹ OECD (2020). Op. Cit., pág. 5.

Conocimientos esenciales

Los conocimientos esenciales refieren a una red conceptual coherente y rica en conexiones, que permite construir la comprensión sobre los fenómenos y el mundo. El conocimiento entendido como comprensión, permite a los y las estudiantes refinar, transformar o reemplazar ideas preexistentes que han adquirido en su experiencia cotidiana, y moverse con flexibilidad entre visiones generales, detalles, generalizaciones y ejemplos sobre los fenómenos que estudian.

Los conocimientos esenciales son prioritarios e imprescindibles, pues constituyen una base que permite avanzar de manera progresiva en el aprendizaje de cada asignatura, y construir nuevos conocimientos.

Propósito formativo

Los propósitos formativos de cada asignatura definen las finalidades educativas que se busca desarrollar a partir de los Objetivos de Aprendizaje y conocimientos esenciales en cada nivel. Entregan el para qué del aprendizaje y buscan evidenciar cómo cada área contribuye al logro de los objetivos generales de la Educación Media, definidos en la Ley General de Educación.

En estas Bases Curriculares, las **grandes ideas** operan como propósito formativo de cada nivel y orientan la comprensión y la articulación de los Objetivos de Aprendizaje y los conocimientos esenciales.

Enfoque de la asignatura

Explica los principios, teorías y conceptos disciplinares desde los cuales se han construido los aprendizajes de la asignatura. Se presenta una visión actualizada de dichos elementos de acuerdo con el desarrollo de las disciplinas. Se explicitan también los énfasis teóricos y las perspectivas desde las cuales se espera que los y las docentes y estudiantes aborden los conocimientos, habilidades y actitudes incluidos en los Objetivos de Aprendizaje. Asimismo, en esta sección se explican los enfoques didácticos que permiten orientar la implementación de la asignatura en el aula. Esto último se sustenta en los conceptos, teorías y principios pedagógicos de la enseñanza de cada disciplina.

Habilidades y Actitudes para el siglo XXI

La existencia y el uso de la tecnología en el mundo global, multicultural y en constante cambio ha determinado nuevos modos de acceso al conocimiento, de aplicación de los aprendizajes y de participación en la sociedad. Estas necesidades exigen competencias particulares, las que internacionalmente se conocen como **Habilidades para el siglo XXI** y que responden a los diversos requerimientos del mundo actual, como el aprendizaje de nuevas maneras de pensar, aprender, relacionarse con los demás, comunicarse, usar la tecnología, trabajar, participar en la sociedad, desarrollarse como persona y desarrollar la creatividad, entre otras².

Las Habilidades para el siglo XXI son el foco formativo central que propende a la formación integral de los y las estudiantes. Corresponden a un marco de habilidades y actitudes transversales a todas las asignaturas y a partir de las cuales cada una define sus propios aprendizajes disciplinares. Se presentan organizadas en torno a cuatro ámbitos: Maneras de pensar, Maneras de trabajar, Herramientas para trabajar y Maneras para vivir en el mundo.

DESARROLLO DE ACTITUDES

- ▶ Pensar con **perseverancia** y **proactividad** para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.
- ▶ Pensar con **apertura** a distintas perspectivas y contextos, asumiendo riesgos y responsabilidades.
- ▶ Pensar con **consciencia**, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Continúa →

Maneras de pensar

Desarrollo de la creatividad y la innovación

Las personas creativas poseen habilidades de pensamiento divergente, producción de ideas, fluidez, flexibilidad y originalidad. El pensamiento creativo implica abrirse a diferentes ideas, perspectivas y puntos de vista, ya sea en la exploración personal o en el trabajo en equipo. En este ámbito, la enseñanza implica asumir que este tipo de pensamiento puede desarrollarse en todas las instancias de aprendizaje y en varios niveles: imitación, variación, combinación, transformación y creación original. Para lograr esta última, es importante que las y los docentes consideren que es necesario haber desarrollado varias habilidades y que la creatividad también puede enseñarse mediante actividades más acotadas según los distintos niveles.

2 El conjunto de habilidades seleccionadas para las Bases Curriculares de EPJA corresponden a una adaptación de distintos modelos (Binkley et al., 2012; Fadel et al., 2016). Se han organizado en cuatro categorías: Maneras de pensar, Maneras de trabajar, Herramientas para trabajar y Maneras para vivir en el mundo.

- ▶ Pensar con **flexibilidad** para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- ▶ Pensar con **reflexión propia y autonomía** para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.
- ▶ Pensar con consciencia de **que los aprendizajes se desarrollan a lo largo de la vida** y enriquecen la experiencia.
- ▶ Pensar con **apertura hacia otros** para valorar la comunicación como una forma de relacionarse con diversas personas y culturas, compartiendo ideas que favorezcan el desarrollo de la vida en sociedad.

DESARROLLO DE ACTITUDES

- ▶ Trabajar **colaborativamente** en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- ▶ Trabajar con **responsabilidad y liderazgo** en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- ▶ Trabajar con **empatía y respeto** en el contexto de la diversidad, eliminando toda expresión de prejuicio y discriminación.
- ▶ Trabajar con **autonomía y proactividad** en trabajos colaborativos e individuales para llevar a cabo eficazmente proyectos de diversa índole.

Desarrollo del pensamiento crítico

El pensamiento crítico permite discriminar entre informaciones, declaraciones o argumentos, mediante la evaluación de su contenido y pertinencia; cuestionar la información, tomar decisiones y emitir juicios; y reflexionar críticamente acerca de diferentes puntos de vista, tanto de los propios como de los demás, ya sea para defenderlos o contradecirlos sobre la base de evidencias. Contribuye así, además, a la autorreflexión y corrección de errores, además de favorecer la capacidad de estar abierto a los cambios y de tomar decisiones razonadas. El principal desafío en la enseñanza del pensamiento crítico es la aplicación exitosa de estas habilidades en contextos diferentes de aquellos en que fueron aprendidas.

Desarrollo de la metacognición

Corresponde al concepto de “aprender a aprender”. Se refiere a ser consciente del propio aprendizaje y de los procesos para lograrlo, lo que permite auto-gestionarlo con autonomía, adaptabilidad y flexibilidad. El proceso de pensar acerca del pensar involucra la reflexión propia sobre la posición actual, fijar los objetivos a futuro, diseñar acciones y estrategias potenciales, monitorear el proceso de aprendizaje y evaluar los resultados. Incluye tanto el conocimiento que se tiene sobre sí mismo como estudiante o pensador, como los factores que influyen en el rendimiento. La reflexión acerca del propio aprendizaje favorece su comunicación, por una parte, y la toma de conciencia de las propias capacidades y debilidades, por otra. Desde esta perspectiva, favorece el desarrollo de autoestima, disciplina, capacidad de perseverar y tolerancia a la frustración.

Maneras de trabajar

Desarrollo de la comunicación

La comunicación, ya sea escrita, oral o multimodal, requiere crear estrategias y herramientas que se adecuen a diversas situaciones, propósitos y contextos socioculturales, con el fin de transmitir lo que se desea de manera efectiva. La comunicación permite desarrollar empatía, autoconfianza, valoración de la interculturalidad, así como adaptabilidad, creatividad y rechazo a la discriminación.

Desarrollo de la colaboración

La colaboración entre personas con diferentes habilidades y perspectivas faculta al grupo para tomar mejores decisiones que las que se adoptarían individualmente. Además, el trabajo colaborativo entre pares determina nuevas formas de aprender y de evaluarse a sí mismo y a los demás, lo que permite visibilizar los modos en que se aprende. Esto conlleva nuevas maneras de relacionarse en torno al aprendizaje.

La colaboración compromete, a su vez, actitudes clave para el aprendizaje en el siglo XXI, como el liderazgo, la responsabilidad, perseverancia, apertura de mente hacia lo distinto, aceptación y valoración de las diferencias, autoestima, tolerancia a la frustración y empatía.

DESARROLLO DE ACTITUDES

- ▶ **Aprovechar las herramientas** disponibles para aprender y resolver problemas.
- ▶ **Interesarse** por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- ▶ **Valorar las TIC** como una oportunidad para informarse, investigar, socializar, comunicarse y participar como ciudadano.
- ▶ **Actuar responsablemente** al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.
- ▶ **Actuar de acuerdo con los principios de la ética** en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

Herramientas para trabajar

Desarrollo de la alfabetización digital

Promueve el desarrollo del pensamiento computacional, la autonomía y el trabajo en equipo, la creatividad, la participación en redes de diversa índole, y el interés por ampliar los propios intereses y horizontes culturales, mediante el uso responsable de la tecnología para hacer frente a nuevos desafíos, como la ciberseguridad y el autocuidado. La utilización de esta como herramienta de trabajo supone dominar las posibilidades que ofrece, así como darle un uso creativo e innovador que, a la vez, promueva el pensamiento crítico. La alfabetización digital apunta también a la resolución de problemas en el marco de la cultura digital que caracteriza al siglo XXI. Para ello, son útiles las herramientas que entrega la programación, el pensamiento computacional, la robótica e internet, entre otros, para desarrollar habilidades que permitan crear contenidos digitales, informarnos y vincularnos con los demás utilizando la tecnología.

Desarrollo del uso de la información

Dice relación con la eficacia y eficiencia en la búsqueda, el acceso, el procesamiento, la clasificación, la integración, la gestión, la evaluación crítica, el uso creativo y ético, y la comunicación de la información. Implica formular preguntas, indagar y generar estrategias para seleccionar, organizar y comunicar. Tiene además siempre en cuenta tanto los aspectos éticos y legales que la regulan, como el respeto a los demás y a su privacidad. Promueve también el acceso, uso responsable, aplicación eficaz y evaluación crítica de Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), y su uso creativo de acuerdo con distintos propósitos, atendiendo a las características y convenciones de diversos contextos multiculturales.

DESARROLLO DE ACTITUDES

- ▶ **Perseverar** en torno a metas con miras a la construcción de proyectos de vida y al aporte a la sociedad y al país con autodeterminación, autoconfianza y respeto por uno mismo y por los demás.
- ▶ **Participar** asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político, medioambiental, entre otros.
- ▶ **Tomar decisiones razonadas** y que contribuyan al bien común, respetando los derechos humanos, la diversidad y la multiculturalidad.
- ▶ **Actuar con honestidad**, responsabilizándose por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

Maneras de vivir en el mundo

Desarrollo de la ciudadanía local y global

La ciudadanía se refiere a la participación del individuo en su contexto desde una perspectiva política, social, territorial, cultural, económica, medioambiental, entre otras dimensiones. Por ello, es necesaria la interacción eficaz con las instituciones públicas y con iniciativas que apoyen la cohesión social. La participación también implica reflexionar y tener un juicio crítico acerca de los mensajes de los medios de comunicación masiva, de modo de adoptar una postura razonada ante ellos. La conciencia de ser ciudadano promueve el sentido de pertenencia, la valoración y el ejercicio de los principios democráticos, como los derechos humanos y la igualdad, así como asumir sus responsabilidades como tal. En este sentido, el respeto a los demás, a su privacidad, y a las diferencias valóricas, religiosas y étnicas cobra gran relevancia y se relaciona directamente con una actitud empática, de mentalidad abierta y de adaptabilidad.

Desarrollo del plan de vida y carrera

La construcción y consolidación de un proyecto de vida y de una carrera, oficio u ocupación, requiere la capacidad de adaptarse a los cambios para poder desenvolverse en distintos roles y contextos. Para el logro de objetivos personales, es necesario establecer metas, crear estrategias para conseguirlas, desarrollar la autogestión, actuar con iniciativa y compromiso, tener autonomía para ampliar los aprendizajes, poseer autocritica, reflexionar críticamente y disponerse a integrar las retroalimentaciones recibidas. Por otra parte, para lograr estas metas se requiere interactuar con los demás de manera flexible, con la capacidad de trabajar en equipo y negociar para la búsqueda de soluciones. Esto permite el desarrollo de liderazgo, responsabilidad, ejercicio ético del poder y el respeto a las diferencias en ideas y valores.

Desarrollo de responsabilidad personal y social

La responsabilidad personal y social se interrelacionan constantemente. En lo personal, el respeto por los demás y el rechazo a la discriminación, la conciencia acerca de la propia cultura y las relaciones de esta con las del mundo, el compromiso con la propia vida y el contexto inmediato, y el control de la agresión, la violencia y la autodestrucción permiten que las personas se desarrollen de una manera integral. Por otra parte, el compromiso con la propia persona se traduce, a su vez, en una manera sana y activa de relacionarse con los demás, lo que entrega confianza a los otros y permite comunicarse de una manera asertiva, empática, libre de prejuicios, que acepte los distintos puntos de vista y contribuya a mejorar la sociedad en la que vive. Estas habilidades apuntan a ser consciente de sí mismo y de los otros, además de realizar acciones concretas que den cuenta de la responsabilidad que tiene el individuo con su vida y con su entorno.

Consideraciones Generales

Las consideraciones que se presentan a continuación son relevantes para una óptima implementación de los Programas de Estudio. Se vinculan estrechamente con los enfoques curriculares, y permiten abordar de mejor manera los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares.

Perfil de Egreso

La formación habilita al estudiante para conducir su propia vida en forma autónoma, plena y responsable, de modo que pueda desarrollar planes de vida y proyectos personales, continuar su proceso educativo formal mediante la educación superior o incorporarse a la vida laboral.

Los y las estudiantes que egresan de la modalidad de Educación de Personas Jóvenes y Adultas han desarrollado los conocimientos, habilidades y actitudes definidas en el currículum nacional y transfieren sus aprendizajes a distintos ámbitos: social, cultural, cívico, laboral, intelectual y personal. A partir de dichos aprendizajes, son capaces de alcanzar sus metas académicas y laborales; además de construir un proyecto de vida de acuerdo con sus necesidades e intereses, actuando con autonomía y responsabilidad.

El marco de Habilidades para el siglo XXI, los Objetivos Generales de la Ley General de Educación y las Bases Curriculares para la EPJA definen un conjunto de diez competencias que reúnen habilidades, actitudes y conocimientos que los y las estudiantes han adquirido al finalizar el Segundo Nivel de Educación Media de la modalidad. Estas competencias se organizan según los ámbitos de las Habilidades para el siglo XXI, y su relación de tributación con las habilidades y actitudes nucleares de los Objetivos de Aprendizaje. La competencia 1 se refiere al dominio disciplinar de las asignaturas que los estudiantes deberán alcanzar al finalizar la Educación Media.

Dominio disciplinar

1. Aplica conocimientos y habilidades disciplinares de las áreas de lenguaje, matemáticas, ciencias, historia, geografía y ciencias sociales e idioma extranjero inglés en contextos que impliquen aprendizaje y desarrollo personal.

Maneras de pensar

2. Gestiona el proceso de aprendizaje personal por medio de habilidades de metacognición, reflexión y comunicación, demostrando autonomía, motivación y una sólida autoestima y confianza en las propias capacidades para mejorar y enriquecer su desarrollo personal y cognitivo.
3. Identifica problemas, elabora argumentos, considera nuevas ideas, y propone soluciones creativas e innovadoras ante los desafíos que enfrenta.
4. Piensa de manera crítica y elabora puntos de vista y opiniones propias, utilizando evidencia y con una actitud abierta, dispuesta a cuestionar los supuestos y a reconsiderar las propias visiones.

Maneras de trabajar

5. Trabaja de manera colaborativa con otras personas en la resolución de problemas y en el desarrollo de proyectos. Demuestra habilidades interpersonales de comunicación, gestión y monitoreo del trabajo, la capacidad para asumir roles, reconocer fortalezas y aceptar debilidades, y una actitud perseverante para alcanzar los objetivos propuestos.
6. Se comunica efectivamente con otras personas en lengua materna y en una lengua extranjera, con diferentes propósitos y en diversos contextos, por medio de habilidades de comunicación oral, escrita y no verbal, demostrando capacidad de escuchar y comprender distintos mensajes, y una valoración positiva del lenguaje como fuente de enriquecimiento cultural y personal.

Herramientas para trabajar

7. Utiliza Internet y las herramientas digitales de manera efectiva y eficiente. Demuestra habilidades de búsqueda, selección, manejo y producción de información, y capacidad para resolver tareas, además de reconocer los aspectos éticos y legales involucrados en el acceso y uso de la información en ambientes digitales.
8. Demuestra compromiso y capacidad de autogestionar el aprendizaje en las diversas instancias de formación que enfrenta, por medio de habilidades que le permitan desenvolverse en distintos roles y contextos y planificar un proyecto de vida personal y laboral en el tiempo. Desarrolla una disposición favorable al aprendizaje a lo largo de la vida.

Maneras de vivir en el mundo

9. Se relaciona de manera respetuosa, empática y constructiva con otras personas en las diversas instancias de intercambio y colaboración que enfrenta. Demuestra conciencia y reconocimiento de la propia cultura y la de los demás, y una actitud de rechazo a la violencia, la agresión y la discriminación.
10. Demuestra conciencia de los derechos y responsabilidades ciudadanas al relacionarse con sus pares, con la comunidad y con las instituciones públicas, mediante habilidades de interacción eficaz, de participación y toma de decisiones. Muestra un compromiso con el bien común, la cohesión social, los derechos humanos y los principios de la democracia, a nivel local y global.

Contextualización Curricular

La contextualización curricular es el proceso de apropiación y desarrollo del currículum en una realidad educativa concreta. Este se lleva a cabo considerando las características particulares del contexto escolar, por ejemplo, el medio en que se sitúa el establecimiento educativo, la cultura, el proyecto educativo institucional de la escuela y la comunidad escolar, el tipo de formación diferenciada que se imparte (Humanístico-Científica o Técnico-Profesional), lo que posibilita que el proceso educativo adquiera significatividad para los y las estudiantes desde sus propias realidades y facilita, así, el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

El marco de habilidades y actitudes que define esta propuesta permite desarrollar aquellas que facilitan formas de pensar, de vivir en el mundo y de trabajar. Además, entrega herramientas para trabajar que definen el perfil de los y las estudiantes EPJA y que pueden ser utilizadas como estrategias para atender a las necesidades de contextualización de las diferencias que se presentan en las aulas. Los programas de estudio son una propuesta de diseño de clases, de actividades y de evaluaciones flexible, que puede modificarse, ajustarse y transferirse a diferentes realidades y contextos, entre otros:

- ▶ **DIVERSIDAD ETARIA.** Debido a que la edad de los y las estudiantes de Educación de Personas Jóvenes y Adultas puede variar de los 15 a más de 50 años, las actividades propuestas se han diseñado desde un principio de flexibilidad que permita en las aulas ajustarse a las distintas necesidades y posibilidades de estudiantes que no han iniciado o han interrumpido su trayectoria formativa por un corto o un largo periodo de tiempo.
- ▶ **TIPOS DE ESTABLECIMIENTOS.** De acuerdo con las distintas posibilidades originadas por el tipo de establecimiento en las que se implementa la modalidad, como Tercera jornada, Centros de Educación Integrada de Adultos, Establecimientos Educacionales al interior de Recintos Penitenciarios y al interior de Unidades Militares, la implementación didáctica de las actividades propuestas en el programa sugiere el uso de recursos y procedimientos tanto análogos como virtuales.
- ▶ **TRAYECTORIAS FORMATIVAS.** Por diversas razones las trayectorias formativas de los estudiantes EPJA se interrumpen. En consecuencia, la progresión de aprendizajes de las asignaturas que forman parte del Plan de Formación General en sus distintos Niveles de Educación Básica y Educación Media: Lenguaje y Comunicación / Lengua y Literatura, Matemática, Ciencias e Historia, Geografía, Ciencias Sociales y Educación Ciudadana, pueden estar afectadas. Por lo tanto, puede ocurrir que la implementación de los programas de estudio se necesite realizar procesos previos de nivelación, que permitan a las y los estudiantes avanzar en su trayectoria formativa. La implementación del programa se ha diseñado en un tiempo estimativo que, de acuerdo con el plan de estudio, puede ajustarse a las necesidades formativas de los y las estudiantes.

Inclusión y Diversidad

En el trabajo pedagógico, es importante comprender que la diversidad se entiende en términos culturales, sociales, étnicos, religiosos, de género, de estilos de aprendizaje y de niveles de conocimiento y/o de trayectorias escolares. Esta diversidad enriquece los escenarios de aprendizaje y está asociada a los siguientes desafíos:

- Desarrollar aprendizajes significativos que se relacionen con el contexto y la realidad de los estudiantes.
- Crear oportunidades inclusivas para desarrollar el aprendizaje en todos y todas.
- Favorecer y potenciar metodologías integradoras y colaborativas tales como Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas (ABRP).

Atender a la diversidad de estudiantes en sus contextos implica reconocer las necesidades educativas que poseen para así diseñar experiencias de aprendizaje a partir de tiempos, recursos y estrategias que permitan que cada estudiante logre un aprendizaje de calidad. La experiencia y conocimiento que tengan las y los docentes sobre su asignatura y las estrategias que promuevan un aprendizaje profundo, son herramientas para tomar decisiones pertinentes y oportunas respecto de las necesidades de los y las estudiantes.

Para las y los estudiantes con necesidades educativas especiales, el conocimiento de sus profesores y profesoras, así como el apoyo y las recomendaciones de los especialistas, contribuyen a que todos desarrollen al máximo sus capacidades. Algunas orientaciones para considerar:

- Promover ambientes de aprendizaje inclusivos, donde cada estudiante sienta seguridad para participar, experimentar y contribuir de forma significativa a la clase. Se recomienda destacar positivamente las características particulares y rechazar toda forma de discriminación, agresividad o violencia.
- Proveer igualdad de oportunidades y asegurar que los y las estudiantes puedan participar por igual en todas las actividades. Evitar relacionar el trabajo de aula con estereotipos asociados a género, características físicas o cualquier otro tipo de sesgo que provoque discriminación.
- Utilizar diversos materiales, estrategias didácticas y actividades que se adecuen a las singularidades de los y las estudiantes y sus intereses.
- Promover un trabajo sistemático, con actividades variadas para diferentes estilos de aprendizaje y con ejercitación abundante, procurando que todos tengan acceso a oportunidades de aprendizaje enriquecidas.

Orientaciones Pedagógicas Programas de Estudio EPJA

Todas las actividades siguen los pasos que caracterizan el proceso de aprendizaje para la Educación de Personas Jóvenes y Adultas: identificar la necesidad del aprendizaje; crear una estrategia y recursos para alcanzarlos; desarrollar la estrategia y evaluarla. Para aprender, necesitan saber cuál es el propósito de su aprendizaje, aplicar lo aprendido en la vida y ser agentes de su propio aprendizaje, por medio de su experiencia.

La etapa inicial del aprendizaje es de gran importancia. Si bien el o la estudiante puede no estar siempre consciente de lo que necesita aprender, la motivación y el compromiso por el aprendizaje, como un medio para adquirir autonomía y aprender a aprender, pueden operar como incentivos poderosos para encontrar un sentido al aprendizaje escolar. Asimismo, es relevante que participen en el proceso de diseño del aprendizaje. La literatura señala que, en el estudiantado adulto, compartir el control de las estrategias de aprendizaje lo hace más eficaz³. Hacerlos partícipes como agentes de su aprendizaje, satisface su necesidad de conocer y estimula su autoconcepto como los estudiantes independientes⁴.

3 Knowles, M. S., Holton III, E. F., & Swanson, R. A. (2014). *The adult learner: The definitive classic in adult education and human resource development*. London: Routledge, pág. 148.

4 Ibídem.

Organización Modular del Programa de Estudio

Los programas de estudio correspondientes a las Bases Curriculares de la Educación de Personas Jóvenes y Adultas, proponen una estructura modular que organiza los Objetivos de Aprendizaje de habilidades y actitudes, los conocimientos esenciales y las grandes ideas de cada asignatura de acuerdo con las Bases Curriculares aprobadas para la modalidad.

Los módulos se definen como bloques unitarios de aprendizaje que integran habilidades, actitudes y conocimientos requeridos para adquirir desempeños flexibles en una determinada área o asignatura.

Todas las asignaturas, tanto del plan de Formación General como de Formación Instrumental cuentan con programas de estudio modulares para su implementación. En cuanto a la estructura, cada asignatura se organiza por nivel en cuatro módulos obligatorios y dos módulos electivos. Los primeros organizan los Objetivos de Aprendizaje, conocimientos esenciales y grandes ideas de cada nivel, mientras que los segundos ofrecen oportunidades de profundizar en el desarrollo del OA y en la comprensión de las grandes ideas del nivel, por medio del desarrollo de proyectos o la resolución de problemas.

Módulos Obligatorios

En coherencia con las Bases Curriculares, los módulos obligatorios organizan los Objetivos de Aprendizaje, los conocimientos esenciales y las grandes ideas del nivel. Cada módulo presenta cuatro actividades de aprendizaje y evaluación que desarrollan, como foco principal, las habilidades y actitudes de los Objetivos de Aprendizaje del nivel. En las Bases Curriculares para EPJA, las habilidades son entendidas como conocimientos procedimentales que desarrollan destrezas de pensamiento y hábitos de mente que permiten pensar los contenidos en profundidad. Como señala David Perkins (2017)⁵, desarrollar habilidades permite a las y los estudiantes aprender a pensar sobre el conocimiento, ponerlo “en movimiento para hacer conexiones y predicciones”, además de darle forma “para crear nuevos productos y resultados creativos”.

5 Perkins, D. Prólogo a Swartz, R. et al. (2017). Op. Cit., pág. 8.

Organización del Aprendizaje en los Módulos Obligatorios

Los módulos obligatorios organizan el aprendizaje en torno al desarrollo de una actividad de desempeño y actividades de evaluación que se integran. Los elementos que componen estos módulos son:

Visión panorámica del módulo

La visión panorámica de cada módulo presenta la gran idea, los objetivos de aprendizaje y conocimientos esenciales que se necesitan desarrollar para cumplir el propósito formativo del módulo. Por último, se identifica el tiempo semanal y las horas de clase propuestas para abarcar su implementación.

Propósito del módulo

El propósito del módulo responde a tres interrogantes: ¿qué se espera que los y las estudiantes comprendan?, ¿cómo se evidenciará que han comprendido? y ¿cómo tributa el módulo al marco formativo de las Habilidades y Actitudes para el siglo XXI? Para responder a la primera interrogante se explica brevemente la gran idea que se pretende construir en el módulo. Luego, se relacionan explicativamente habilidades, actitudes y conocimientos esenciales que pondrá en uso el o la estudiante para finalmente detallar cómo estos se integran y tributan al marco de Habilidades y actitudes para el siglo XXI.

Ruta de aprendizaje

Secuencia de cuatro actividades de desempeño que describen sintéticamente qué habilidades –procedimientos estratégicos– y actitudes desarrollará el o la estudiante para poner en uso los conocimientos esenciales declarados en el módulo. Cada desempeño se construye identificando qué hace el estudiante –habilidad o procedimiento aplicado– y el conocimiento esencial que se moviliza. El conjunto de actividades de desempeño se integra coherentemente para dar cuenta del propósito formativo general declarado en el módulo.

Actividades de desempeño

Para organizar el desarrollo de las actividades propuestas se utilizan criterios didácticos transversales que guíen flexiblemente a las y los docentes, de modo que puedan transferir la propuesta a sus diferentes contextos. Los criterios utilizados se distinguen por su función didáctica, es decir, la finalidad formativa que se persigue a través de ellos:

- ▶ **SITUACIÓN EXPERIENCIAL.** Permite enmarcar de forma situada un determinado aprendizaje. Activa y engancha el conocimiento previo con el nuevo conocimiento para desarrollar un aprendizaje significativo.
- ▶ **CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO.** Permite ilustrar cómo mediar, a través de una propuesta de selección de recursos y estrategias la adquisición y organización de nuevos conocimientos.
- ▶ **PRÁCTICA GUIADA.** Modela paso a paso la mediación que realiza el o la docente, a través de actividades individuales, plenarias o colaborativas que desarrollan los y las estudiantes, para profundizar en la comprensión de un determinado conocimiento.
- ▶ **PRÁCTICA INDEPENDIENTE.** Detalla las actividades individuales y/o colaborativas que desarrollan los y las estudiantes para realizar desempeños flexibles que permitan profundizar y evidenciar su comprensión. Permite monitorear el proceso de aprendizaje.
- ▶ **INTEGRACIÓN.** Corresponde a una actividad de síntesis que realiza el o la estudiante individualmente para evidenciar la comprensión del propósito declarado para la actividad. Por ejemplo, mediante el uso de ticket de salida.
- ▶ **ORIENTACIONES AL DOCENTE.** En esta sección se aclaran y precisan conceptos disciplinares que se han movilizado a lo largo del módulo. Se realizan sugerencias complementarias sobre el trabajo con adultos y/o estrategias didácticas que puedan facilitar su labor. Se sugieren estrategias para guiar la retroalimentación y la evaluación formativa compartiendo criterios, estrategias de retroalimentación y rúbricas.

Módulos Electivos

Los módulos electivos ofrecen oportunidades de profundizar en el desarrollo de las habilidades y actitudes de los Objetivos de Aprendizaje del nivel y en la comprensión de las grandes ideas. Se desarrollan por medio de metodologías de Aprendizaje Basado en Proyectos y Aprendizaje Basado en Resolución de Problemas. Se organizan en torno a un tema que es planteado como problema o desafío y que permite ampliar el conocimiento esencial, profundizar en la comprensión de las grandes ideas y conectar con los intereses y experiencias de los y las estudiantes.

Los problemas y desafíos podrán ser adaptados a los contextos, intereses y experiencias vitales de los y las estudiantes.

Se sugiere considerar los Objetivos de Desarrollo Sostenible de la Agenda para el Desarrollo Sostenible de la Unesco como foco para orientar los problemas y proyectos a desarrollar en los módulos electivos. Estos temas son⁶:

- | | |
|--|---|
| 1. Fin de la pobreza | 10. Reducción de las desigualdades |
| 2. Hambre cero | 11. Ciudades y comunidades sostenibles |
| 3. Salud y Bienestar | 12. Producción y consumo responsable |
| 4. Educación de calidad ⁷ | 13. Acción por el clima |
| 5. Igualdad de género | 14. Vida submarina |
| 6. Agua limpia y saneamiento | 15. Vida de ecosistemas terrestres |
| 7. Energía asequible y no contaminante | 16. Paz, justicia e instituciones sólidas |
| 8. Trabajo decente y crecimiento económico | 17. Alianzas para lograr los objetivos |
| 9. Industria, innovación e infraestructura | |

Esta metodología debe promover un compromiso activo de la o el estudiante con el aprendizaje, lo cual se logrará si es que el proceso de enseñanza cumple con las siguientes características:

- El aprendizaje favorecido se conecta con sus necesidades o inquietudes;
- El o la estudiante sabe de antemano *qué* aprenderá;
- El o la estudiante considera que este aprendizaje es importante (*por qué* aprender);
- El o la estudiante sabe *cómo* ocurrirá este aprendizaje (plan de trabajo) e idealmente participa en su planeamiento.

6 Recuperado de: <https://es.unesco.org/sdgs>

7 Las Bases Curriculares de EPJA se encuentran alineadas con este objetivo N°4, en tanto apuntan al aprendizaje a lo largo de la vida, y a una educación de calidad para todos.

Estructura del Aprendizaje en los Módulos Electivos

Las metodologías de Aprendizaje Basado en Proyectos y Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas son propuestas que permiten desarrollar habilidades y poner en uso el conocimiento, integrar aprendizajes y promover la curiosidad y la búsqueda activa y creativa de respuestas. Estas metodologías buscan que los y las estudiantes puedan transferir el conocimiento a distintas áreas y/o situaciones de la vida real, por medio de aprendizajes significativos y relevantes. En cada nivel se ilustran dos ejemplos, uno de ABP y otro de ABRP, que podrán servir de modelo para que las y los docentes puedan construir nuevos proyectos o problemas.

Tanto en la Resolución de problemas como en ABP se busca conectar los problemas y preguntas con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) de Unesco, con el fin de reforzar su relevancia y transversalidad.

Aprendizaje Basado en Proyectos

Consiste en la organización de las y los estudiantes en torno a una pregunta o desafío originado a partir de un problema real o que sea significativo, que puede ser concreto o abstracto. Mientras el problema sea más complejo, movilizará e integrará diferentes áreas de conocimiento, lo que favorece la interdisciplinariedad. Para su desarrollo, es deseable que las y los docentes se organicen y planifiquen el trabajo de manera conjunta entre los responsables de diferentes asignaturas.

Existe una serie de elementos que son requisitos para que el diseño de un proyecto permita maximizar el aprendizaje y la participación de las y los estudiantes, de manera que aprendan cómo aplicar el conocimiento al mundo real, cómo utilizarlo para resolver problemas, responder preguntas complejas y crear productos de alta calidad⁸. Estos elementos son:

8 Larmer, J., Mergendoller, J., Boss, S. (2015). *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*. United States: ASCD (Adaptación).

Conocimiento esencial, comprensión y habilidades

El proyecto se enfoca en profundizar en la comprensión del conocimiento, ya que permite desarrollar a la vez los Objetivos de Aprendizaje y las habilidades para el siglo XXI que se requieren para realizar el proyecto.

Se basa en un problema significativo para resolver o en una pregunta para responder. Esto en un nivel adecuado de desafío para alumnas y alumnos, que se implementa mediante una pregunta de conducción abierta y atractiva.

Indagación sostenida

El proyecto implica un proceso activo y profundo a lo largo del tiempo, en el que los y las estudiantes crean preguntas, encuentran y utilizan recursos, hacen cuestionamientos adicionales y desarrollan sus propias respuestas.

Autenticidad

El proyecto tiene como contexto el mundo real. Utiliza procesos, herramientas y estándares de calidad conectados con la realidad y tiene un impacto, ya que creará algo que será utilizado o experimentado por otros, y/o está conectado a las propias preocupaciones, intereses e identidades de las y los estudiantes.

Es importante saber en qué contexto del mundo real puede encontrarse un problema como el planteado y por qué el proyecto puede ser significativo.

Voz y elección del estudiante

Guiados por el o la docente, el proyecto permite a los y las estudiantes tomar algunas decisiones sobre los productos que crean, su funcionamiento y el uso del tiempo.

Gestión y autoorganización

El proyecto exige a los y las estudiantes desarrollar el trabajo en equipo, la comunicación y la resolución de problemas; junto con tomar decisiones sobre el diseño y la implementación del proyecto en sus distintas etapas. Esto implica identificar las competencias y procedimientos que son necesarios para desarrollar un plan de trabajo adecuado al proyecto, y una exploración activa de los recursos y actividades con que cuentan para su desarrollo. Asimismo, reconocer las fortalezas y debilidades con que cuenta cada uno de los miembros para su desarrollo.

Evaluación y retroalimentación

El proyecto brinda oportunidades para que los y las estudiantes reflexionen sobre qué y cómo están aprendiendo. Incluye procesos de evaluación formativa y retroalimentación para que los estudiantes den y reciban comentarios sobre su trabajo, para que revisen sus ideas y productos o realicen una investigación adicional.

Producto público

El proyecto requiere que los y las estudiantes demuestren lo que aprenden, mediante la creación de un producto que se presenta u ofrece a personas que se encuentran más allá del aula.

Considerando estos elementos, los programas proponen un diseño de ABP con la siguiente estructura:

- ▶ **PROBLEMA CENTRAL.** Se describe el problema que origina el proyecto. Busca despertar el interés, predisponer a él o la estudiante para el aprendizaje basado en problemas.
- ▶ **PROPÓSITO.** Propósito formativo del proyecto, es decir, qué se espera que aprendan los y las estudiantes con la realización de este.
- ▶ **OBJETIVOS DE APRENDIZAJE.** Identifica y/o registra qué Objetivos de Aprendizaje de la asignatura y de otras asignaturas del nivel se integran para el desarrollo del proyecto.
- ▶ **PREGUNTAS.** Se proponen preguntas orientadoras, que servirán para diseñar las etapas del proyecto. Son preguntas centrales y generales.
- ▶ **TIPO DE PROYECTO.** Identifica el tipo de proyecto de acuerdo con las asignaturas que participan, por ejemplo, STEM o interdisciplinario.
- ▶ **PRODUCTO.** Identifica el producto que se espera construir colaborativamente en el proyecto para dar respuesta concreta al problema.
- ▶ **HABILIDADES Y ACTITUDES PARA EL SIGLO XXI.** Identifica cuáles son las habilidades y actitudes que se desarrollarán, y a qué ámbito pertenecen.
- ▶ **ETAPAS.** Se realiza un cronograma con las distintas etapas del proyecto. En él se establecen las características de cada etapa, qué hará el o la estudiante y cómo lo realizará. Cada etapa se apoya con recursos y/o ilustraciones.
- ▶ **EVALUACIÓN.** Se comparten criterios de evaluación y rúbricas que guíen y permitan monitorear el desarrollo de los aprendizajes durante la realización del proyecto. Los criterios y las rúbricas deben verificar los aprendizajes de los objetivos que se identificaron para el proyecto, de manera descriptiva y por nivel de logro.
- ▶ **DIFUSIÓN FINAL.** Describe cómo se difundirá el producto e incorporará a la comunidad escolar y/o local.
- ▶ **RECURSOS.** Nombra recursos y los clasifica según su tipo.

Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas

El modelo de Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas que presentan los programas de estudio se organiza en torno a un problema o desafío cognitivo para el que se busca encontrar una solución, mediante el uso del conocimiento y el desarrollo de habilidades. En los programas, un problema se define por una situación o pregunta que presenta restricciones y cuya respuesta no es evidente.

Al resolver problemas, las y los estudiantes utilizan procesos y estrategias que se relacionan con análisis crítico, investigación, evaluación y comunicación; planifican su trabajo y reflexionan sobre la solución que mejor responde a las restricciones que presenta el problema o desafío cognitivo. Como resultado, ponen en uso el conocimiento, lo amplían adquiriendo nuevos conceptos, principios e información, y desarrollan nuevas destrezas de pensamiento crítico y creativo⁹.

La resolución de problemas permite motivar y despertar el interés de los y las estudiantes, desarrolla la autonomía y el trabajo en equipo. Sin embargo, esto requiere que las situaciones o problemas sean significativos y relevantes, y que se puedan visualizar las posibles soluciones. Esta metodología requiere que la o el docente adquiriera un rol activo como guía para monitorear el desarrollo del proceso y orientar el trabajo de sus estudiantes.

El modelo que proponen los programas de estudio para el desarrollo del Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas se compone de los siguientes elementos:

- ▶ **TÍTULO.** Se plantea como una afirmación o pregunta que sintetiza el problema o desafío.
- ▶ **PROPÓSITO.** Busca despertar el interés, predisponer a el o la estudiante para el aprendizaje basado en problemas.
- ▶ **PREPARACIÓN.** Busca contextualizar a los y las estudiantes en la situación que se planteará y/o familiarizarlos con la resolución de problemas y su sistema de trabajo.
- ▶ **PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.** Se expone el problema, considerando la contextualización de este en una situación significativa. Se define con claridad y precisión cuál es el problema; se distinguen conceptos centrales y restricciones que constituyen el problema.
- ▶ **POSIBLES SOLUCIONES.** Se describe cómo se regulará el trabajo colaborativo mediante estrategias que promuevan disposiciones actitudinales positivas y que permitan a los y las estudiantes involucrarse con el problema y buscar soluciones (por ejemplo, la perseverancia), y estrategias de mediación para compartir las soluciones. Se ilustran posibles soluciones.
- ▶ **INVESTIGACIÓN.** Describe cómo mediar el trabajo de investigación y el desarrollo de habilidades de indagación y evaluación; se ilustran recursos que se puedan utilizar y conocimientos disciplinares que se movilizan en la solución del problema.
- ▶ **EVALUAR LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA.** Describe cómo mediar estratégicamente las soluciones propuestas al problema, a partir de las habilidades y la evaluación de las posibles soluciones.
- ▶ **COMUNICACIÓN.** Describe cómo se mediará la comunicación individual y/o colaborativa del problema, según códigos de comunicación pertinentes y característicos de las disciplinas.

9 Swartz, R. (2017). *El Aprendizaje basado en el Pensamiento. Cómo desarrollar en los alumnos las competencias del SXXI* (2017). España: SM. Figura 7-11. Pág. 232. (Adaptación).

Orientaciones para Evaluar los Aprendizajes

La evaluación, como un aspecto intrínseco del proceso de enseñanza-aprendizaje, se plantea en estos programas con un foco formativo al servicio del aprendizaje de los y las estudiantes. Para que esto ocurra, se plantea recoger evidencias que permitan describir con precisión la diversidad existente en el aula para tomar decisiones pedagógicas y retroalimentar a los y las estudiantes. La evaluación desarrollada con foco pedagógico favorece la motivación de los estudiantes a seguir aprendiendo; asimismo, el desarrollo de la autonomía y la autorregulación potencia la reflexión de los y las docentes sobre su práctica y facilita la toma de decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que permitan apoyar de mejor manera los aprendizajes.

Para implementar una evaluación con un foco formativo, se requiere:

- Diseñar experiencias de evaluación que ayuden a los y las estudiantes a poner en práctica lo aprendido en situaciones que muestren la relevancia o utilidad de ese aprendizaje.
- Evaluar solamente aquello que las y los estudiantes efectivamente han tenido la oportunidad de aprender mediante las experiencias de aprendizaje mediadas por el o la docente.
- Procurar que se utilicen diversas formas de evaluar, que consideren las distintas características, ritmos y formas de aprender, necesidades e intereses de los y las estudiantes, junto con evitar posibles sesgos y problemas de accesibilidad para ellos.
- Promover que los y las estudiantes tengan una activa participación en los procesos de evaluación; por ejemplo, al elegir temas sobre los cuales les interese realizar una actividad de evaluación o sugerir la forma en que presentarán a otros un producto; participar en proponer los criterios de evaluación; generar experiencias de auto y coevaluación que les permitan desarrollar su capacidad para reflexionar sobre sus procesos, progresos y logros de aprendizaje.
- Que las evaluaciones sean de la más alta calidad posible; es decir, deben representar de forma precisa los aprendizajes que se busca evaluar. Además, las evidencias que se levantan y fundamentan las interpretaciones respecto de los procesos, progresos o logros de aprendizajes de los y las estudiantes, deben ser suficientes como para sostener de forma consistente esas interpretaciones evaluativas.

El o la docente puede utilizar diferentes métodos para evaluar los Objetivos de Aprendizaje. Para esto, se sugiere emplear una variedad de medios y evidencias, como portafolios, registros anecdóticos, proyectos de investigación grupales e individuales e informes, presentaciones, entre otros. La forma en que se diseñe este tipo de evaluaciones y el modo en que se registre y comunique la información que se obtiene de ellas debe permitir que integren lo formativo y sumativo para retroalimentar tanto la enseñanza como el aprendizaje.

El uso formativo de la evaluación debiera preponderar en las salas de clases, es decir, utilizarse de manera sistemática para reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza, y para tomar decisiones

pedagógicas pertinentes y oportunas que busquen promover el progreso del aprendizaje de todos y todas, considerando la diversidad como un aspecto inherente a las aulas.

El proceso de evaluación formativa que se propone implica articular el proceso de enseñanza-aprendizaje en función de responder a las siguientes preguntas: **¿A dónde voy?** (qué objetivo de aprendizaje espero lograr), **¿Dónde estoy ahora?** (cuán cerca o lejos me encuentro de lograr ese aprendizaje) y **¿Qué estrategia o estrategias pueden ayudarme a llegar a donde tengo que ir?** (qué pasos tengo que dar para acercarme a ese aprendizaje). Este proceso continuo de establecer un objetivo de aprendizaje, evaluar los niveles actuales y luego trabajar estratégicamente para reducir la distancia entre los dos, es la esencia de la evaluación formativa. Una vez que se alcanza una meta de aprendizaje, se establece una nueva meta y el proceso continúa.

Para promover la motivación para aprender, el nivel de desafío y el nivel de apoyo deben ser los adecuados —en términos de Vygotsky (1978), estar en la zona de desarrollo próximo de los y las estudiantes—, para lo cual se requiere que todas las decisiones que tomen profesores y profesoras y los propios estudiantes se basen en la información o evidencia sobre el aprendizaje recogidas continuamente¹⁰.

Como parte de la evaluación formativa, los programas proponen en algunas de las actividades un conjunto de criterios que permiten evaluar el desempeño de los y las estudiantes en un determinado aprendizaje. Estos criterios permiten identificar el lugar en que se encuentran los estudiantes en el desarrollo de las habilidades y la construcción de conocimientos, junto con entregar información que permita a la o el docente tomar decisiones pedagógicas para avanzar hacia el logro de los aprendizajes propuestos¹¹.

Los criterios de evaluación describen el dominio de conceptos, procedimientos y actitudes en los y las estudiantes. En su conjunto, permiten evaluar la comprensión y disposición o inclinación a actuar de acuerdo con el marco de Habilidades y actitudes para el siglo XXI. Cuando se integran en el desarrollo de la clase, los criterios de evaluación permiten generar un mejoramiento continuo del aprendizaje¹².

10 Mineduc (2017). Presentación de Criterios de evaluación, calificación y promoción al Consejo Nacional de Educación. Fundamentos a la propuesta de actualización de criterios y normas de Evaluación, Calificación y Promoción Escolar de estudiantes de Educación Regular presentada por la Unidad de Currículum y Evaluación al Consejo Nacional de Educación. Santiago, pág. 74.

11 Para la construcción de los criterios, se han considerado las orientaciones de la Mesa Covid Universitaria y la normativa vigente para la atención a la diversidad, la inclusión y la flexibilidad en la respuesta educativa contenida en la Ley N° 20.845 de Inclusión Escolar (Art. 1°, núm. i), y como referente los principios del Decreto N° 83 de 2015 y Decreto N° 67 de 2018.

12 Propuestas Educación Mesa Social Covid-19 (2021). Recomendación para una evaluación pertinente en tiempos de crisis. Santiago de Chile, pág. 65.

Referencias

- KNOWLES, M. S., HOLTON III, E. F., & SWANSON, R. A. (2014). *The adult learner: The definitive classic in adult education and human resource development*. London: Routledge.
- LARMER, J., MERGENDOLLER, J., BOSS, S. (2015). *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*. United States: ASCD.
- LEMOV, D. (2014). *Teach like a champion 2.0: 62 techniques that put students on the path to college*. San Francisco: John Wiley & Sons.
- MINEDUC (2017). *Presentación de Criterios de evaluación, calificación y promoción al Consejo Nacional de Educación*. Fundamentos a la propuesta de actualización de criterios y normas de Evaluación, Calificación y Promoción Escolar de estudiantes de Educación Regular presentada por la Unidad de Currículum y Evaluación al Consejo Nacional de Educación. Recuperado de <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/handle/20.500.12365/14655>
- PROPUESTAS EDUCACIÓN MESA SOCIAL COVID-19 (2021). *Recomendación para una evaluación pertinente en tiempos de crisis*. Santiago de Chile. Santiago de Chile.
- SWARTZ, R. (2017). *El Aprendizaje basado en el Pensamiento. Cómo desarrollar en los alumnos las competencias del siglo XXI*. España: SM.
- UNESCO (2015). *La Agenda para el Desarrollo Sostenible*. Recuperado de <https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/development-agenda/>
- UNIVERSIDAD DEL DESARROLLO, CENTRO DE INNOVACIÓN. *Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)*. Recurso web disponible en: <https://innovaciondocente.udd.cl/metodologias-activas/>

Propósitos Formativos de la Asignatura de Matemática

Comprender las matemáticas y aplicar sus conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales es fundamental para los ciudadanos en el siglo XXI. La necesidad de resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, requiere comprender conceptos, desarrollar el razonamiento y aplicar destrezas matemáticas.

Una persona con conocimientos matemáticos reconoce el papel que las matemáticas juegan en el mundo para poder hacer juicios bien fundados y tomar las decisiones que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos¹³. La educación matemática es fundamental para la formación de personas responsables, profesionales capaces, y es la base para desarrollar la capacidad de estudio de otras materias¹⁴. Esta disciplina es, además de una herramienta que se puede utilizar y aplicar, una fuente para el desarrollo del pensamiento, que promueve habilidades y actitudes para la vida.

Con este propósito, la asignatura Matemática para la modalidad de educación de personas jóvenes y adultas busca desarrollar en los y las estudiantes habilidades que les permitan comprender esta disciplina y el papel que esta juega en la cultura y en sus propias vidas, al proporcionar un lenguaje que permite comprender el mundo desde una perspectiva lógica. Esto por medio de la capacidad de modelar la realidad, representarla y resolver problemas con precisión y adaptabilidad. La asignatura busca también desarrollar en los y las estudiantes un pensamiento autónomo y crítico que les permita desenvolverse activamente como ciudadanos, aprender en un mundo incierto y fortalecer el autoconcepto y confianza en su propio razonamiento.

¹³ OECD (2021), *Mathematics performance (PISA) (indicator)*. doi: 10.1787/04711c74-en.

¹⁴ Loos, A. y Ziegler, G.-M. (2015). Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. En R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme y H.-G. Weigand (Eds.). *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin, Heidelberg: Springer doi: 10.1007/978-3-642-35119-8, pp. 3-19.

Enfoque de la Asignatura

La asignatura tiene un énfasis principal en la alfabetización matemática, en el desarrollo de la capacidad de razonamiento matemático y la resolución de problemas en diversos contextos. La alfabetización matemática se entiende como la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en la vida, hacer juicios bien fundados y usar, en forma adecuada, tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas del ámbito personal, social y laboral. En el caso de la población joven y adulta, esto implica reconocer los aprendizajes previos que las personas puedan tener, evaluar y perfeccionar las formas de pensar matemáticamente y los procedimientos, desarrollar la capacidad de modelar y representar la realidad para entenderla.

El aprendizaje de la matemática implica tanto la aplicación de conocimientos y procedimientos como la elaboración de estrategias. Con este fin, la resolución de problemas se presenta como una oportunidad de aprendizaje que está presente en todos los niveles de la asignatura, lo que permite a las y los estudiantes desarrollar progresivamente estrategias y la creatividad para buscar y poner a prueba distintas soluciones. A su vez, podrán reconocer la utilidad que tienen las matemáticas en la vida real, desarrollar la capacidad de resolver problemas de mayor complejidad y transferir las habilidades matemáticas a otras disciplinas.

Por otro lado, la representación en matemática y el transferir o transitar entre lenguajes hablados, visuales, táctiles o sonoros, abre las puertas al trabajo con personas que puedan presentar algunas de las necesidades educativas especiales permanentes y transitorias. Por esto, el desarrollo de esta habilidad es fundamental para la comprensión matemática y el trabajo en clases.

Estructura Curricular

Las Bases Curriculares de Matemática para la EPJA se articulan en torno a Objetivos de Aprendizaje de habilidades y actitudes nucleares. Las actitudes se trabajan de manera transversal e integral con los OA, sin embargo, en cada eje se intencionan ciertos ámbitos de las Habilidades para el siglo XXI dada su pertinencia para el trabajo específico de cada grupo de habilidades. De esta manera se integra en cada Objetivo de Aprendizaje una habilidad y una actitud.

Los Objetivos de Aprendizaje de habilidad y actitud se integran con los conocimientos esenciales del ámbito de los números y las operaciones, álgebra y funciones, geometría, estadística y probabilidades, para favorecer la comprensión de las grandes ideas de la asignatura. Estas operan como propósito formativo de cada nivel y orientan la comprensión y articulación de los Objetivos de Aprendizaje y los conocimientos esenciales.

Los Objetivos de Aprendizaje se organizan en cuatro ejes e integran actitudes de los ámbitos que organizan las Habilidades para el siglo XXI, de acuerdo con un criterio de pertinencia para ser trabajadas integradamente con estas. Estos ejes son:

- Representar
- Modelar
- Argumentar y comunicar
- Resolver problemas

Representar

Se refiere a las formas de expresar conceptos, relaciones y objetos matemáticos provenientes de diferentes contextos. Las representaciones se pueden dar en tres niveles: de manera concreta, pictórica o simbólica. Esta habilidad incluye el crear relatos en base a una expresión matemática simple, ecuación o función, utilizar tablas o esquemas con lenguaje matemático, y transferir una situación de un nivel de representación a otro. También incluye el uso de representaciones propias de la matemática, como la línea recta, el plano cartesiano, la tabla de datos para comprender y explicar tanto procesos como relaciones.

En el primer nivel se espera que las y los estudiantes puedan relacionar el conocimiento intuitivo con una explicación formal de las situaciones, pudiendo transitar de un nivel de representación a otro (concreta, pictórica y simbólica) para luego contrastar la información que ofrecen distintos niveles de representación. En la educación media podrán representar, de manera autónoma, un mismo contenido, transitando entre distintos niveles de representación. Esta progresión favorece el desarrollo de la transferencia, potencia la comprensión de las operaciones, relaciones y conceptos matemáticos, y brinda un significado cercano a las expresiones matemáticas.

Para realizar estas representaciones, se espera que las y los estudiantes extraigan información desde el entorno y elijan distintas formas de expresar esos datos (tablas, gráficos, diagramas, metáforas, símbolos matemáticos, etc.) según sus propias inquietudes o conocimientos previos. Los momentos de desarrollo de estos Objetivos de Aprendizaje deben estar orientados hacia el provecho de las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas, como también al desarrollo de maneras de trabajar con autonomía y proactividad en actividades colaborativas e individuales y así llevar a cabo eficazmente proyectos de diversa índole.

La integración de habilidad y actitud permite dar un enfoque al momento de evaluar la actitud, con énfasis en el uso y la aplicación del ámbito de las Herramientas para trabajar, con el objetivo de representar objetos, procesos y relaciones en matemática. Las herramientas para trabajar incluyen el uso de las TIC y pueden variar desde la utilización apropiada de la regla, el uso de la calculadora o de plataformas o programas que permiten transferir entre niveles de representaciones, así como representar ideas, procesos y relaciones en matemática.

Modelar

Modelar es una habilidad que desarrolla un procedimiento que permite encontrar un modelo que describe matemáticamente una situación del mundo real, lo que permite hacer predicciones, valoraciones y ajustes para, eventualmente, hacer cambios a la realidad o al modelo. Es decir, un modelo expresa acciones o situaciones reales y cotidianas con lenguaje matemático. Cuando este es construido, debe capturar parte de las características de una realidad dinámica para poder estudiarla, modificarla y/o evaluarla. Además, debe permitir buscar soluciones, aplicarlas a otras realidades similares (objetos, fenómenos, situaciones), comparar impactos y encontrar nuevas relaciones de la realidad. Es importante señalar que las habilidades de organizar, componer, crear y ajustar desde la realidad con base en la matemática y viceversa, son el cimiento de la habilidad de modelar. Asimismo, en el proceso de modelar hay algunas nociones de la habilidad de representar y por esto se habla de habilidades que se complementan según el contexto.

Modelar implica también la capacidad de seleccionar, usar, ajustar y evaluar modelos que involucren operatoria; identificar regularidades y generalizar mediante el uso de lenguaje matemático; traducir expresiones realizadas en lenguaje cotidiano a lenguaje matemático y viceversa. En los niveles de Educación Básica, los y las estudiantes aprenderán a seleccionar un modelo según la correspondencia que tenga con la situación real y, luego, usarlo para comprender fenómenos diversos. En base a ello, podrán evaluar la pertinencia de los modelos utilizados en relación con el problema y según sus limitaciones. En los niveles de Educación Media podrán seleccionar y ajustar modelos matemáticos, representar patrones y fenómenos, y resolver problemas cotidianos.

Junto con esta habilidad matemática, se espera que las y los estudiantes desarrollen actitudes del ámbito de las Maneras de trabajar colaborativamente, con responsabilidad y liderazgo, lo cual requiere de propuestas de trabajo en proyectos, así como una organización del tiempo y del trabajo en grupos. Además, se busca incentivar el uso de herramientas para trabajar, lo que permitirá valorar las TIC como una oportunidad para informarse, investigar y comunicarse de acuerdo con los principios de la ética. Actitud en la que los datos juegan un rol fundamental en la comprensión y presentación de la realidad.

Por otra parte, la integración de la habilidad de modelar con el ámbito de Maneras de vivir en el mundo, permite dar un enfoque al momento de trabajar y evaluar la actitud, relevando el modelamiento de situaciones reales. El modelamiento matemático del entorno permite dar respuestas técnicas, resolver problemas logísticos, de presupuesto y organizacionales propios de la construcción de proyectos personales, de la sociedad o de la comunidad en la cual los estudiantes de EPJA están inmersos.

Argumentar y comunicar

La habilidad de argumentar implica comunicar resultados en lenguaje matemático, explicar el razonamiento utilizado para realizar procedimientos, fundamentar conjeturas, comprobar reglas y propiedades, y realizar deducciones. Esta habilidad permite desarrollar la generalización, uno de los procedimientos básicos en la producción del conocimiento de las disciplinas en general y de la matemática en particular.

Los Objetivos de Aprendizaje de este eje buscan desarrollar la capacidad de identificar y, luego, explicar reglas, soluciones propias y procedimientos, entendiendo que el razonamiento matemático es la capacidad de argumentar y obtener conclusiones a partir de premisas o conjeturas.

En el ámbito de la comunicación, por su parte, los y las estudiantes podrán expresar el razonamiento matemático utilizado en la elaboración de conjeturas, procedimientos y resultados. Con ello, podrán fundamentar las conjeturas mediante el uso de lenguaje matemático y realizar demostraciones simples de sus resultados, donde identificarán si en estas hay saltos o errores.

La integración de la habilidad de argumentar y comunicar con el ámbito de las Maneras de trabajar se focaliza en el logro y la verificación de la comunicación en matemática. Se espera que las y los estudiantes de EPJA logren desarrollar tanto la habilidad de argumentar como la de comunicar, y muestren empatía y respeto por las posturas o errores del otro a la hora de desarrollar trabajos colaborativos y en situaciones de argumentación. En particular, en la habilidad de argumentar se espera un procedimiento honesto donde la matemática juegue un rol en el razonamiento lógico, en el proceso y logro de resultados de problemas abiertos o cerrados.

Resolver problemas

La habilidad de resolver problemas es tanto un medio como un fin en la adquisición de habilidades matemáticas. Implica desarrollar otras habilidades que permitan que la resolución se vaya acercando a procesos creativos de búsqueda de soluciones y transferencia de procedimientos, hasta llegar a variar parámetros o condiciones.

Los Objetivos de Aprendizaje de estas Bases progresan de manera que las y los estudiantes complejicen las estrategias utilizadas y, especialmente, la capacidad de transferir los procedimientos y resultados a otras situaciones. En los niveles de Educación Básica, los procedimientos se aplicarán a otras situaciones idénticas a la original y podrán transferirlos a nuevas situaciones. En Educación Media, podrán resolver problemas en los que variarán parámetros o condiciones y observar cómo influyen en los resultados obtenidos. Además, evaluarán el proceso y compararán los cambios.

La habilidad de resolver problemas se enriquece con el trabajo conjunto de las demás habilidades matemáticas, como representar, modelar, argumentar y comunicar, lo que incentiva el desarrollo de la creatividad, la capacidad de identificar nuevos problemas y explicarlos.

Aprender a resolver problemas es un proceso que debe incluir el trabajo colaborativo, dar una respuesta requiere de responsabilidad y honestidad en el reconocimiento del error para poder avanzar. La resolución de problemas se facilita con el uso de las herramientas disponibles y un problema puede ser una meta que lograr o un desafío que da respuestas a la comunidad. Tomar una decisión responde, entre otras cosas, al resultado de una solución a un problema y una postura razonada puede producir cambios positivos en los diferentes ámbitos.

Si bien la habilidad de resolver problemas es una habilidad transversal, requiere también de una intencionalidad y de un acompañamiento para su correcto desarrollo. Se espera que esta habilidad sea trabajada integradamente con el ámbito de Formas de pensar y promueva la actitud de pensar con perseverancia y con flexibilidad para encontrar soluciones a los problemas. Además, se espera que el o la estudiante de EPJA reflexione en torno a sus procedimientos y actúe autónomamente en cuanto a la elección de las estrategias involucradas en la resolución de problemas.

Objetivos de Aprendizaje

Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:

OA 1

Expresar matemáticamente información del entorno y de problemas utilizando diversas representaciones interesándose por las posibilidades que ofrece la tecnología. **(Representar)**

OA 2

Contrastar información entre distintos niveles de representación para un mismo contenido matemático, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA 3

Usar modelos matemáticos dados para comprender fenómenos, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA 4

Expresar acciones y situaciones cotidianas en lenguaje matemático, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA 5

Explicar soluciones propias, procedimientos utilizados, definiciones y reglas, trabajando con empatía y respeto. **(Argumentar y comunicar)**

OA 6

Seleccionar estrategias, y transferir a nuevas situaciones pensando con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones. **(Resolución de problemas)**

Conocimientos Esenciales

- Adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de números enteros.
- Razones y porcentajes.
- Proporciones directas e indirectas.
- Expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones lineales.
- Funciones lineales y afines.
- Área y volumen de prismas rectos con diferentes bases y cilindros.
- Teorema de Pitágoras.
- Experimentos aleatorios, frecuencia absoluta, relativa y la probabilidad.

Orientaciones Didácticas y Pedagógicas

Orientaciones Didácticas y Pedagógicas

Para promover el aprendizaje de la matemática se sugieren las siguientes orientaciones didácticas y pedagógicas:

Aprender comprensivamente en matemática

Entendemos que una persona ha aprendido profundamente un contenido, cuando es capaz de realizar una variedad de operaciones mentales sobre un mismo tópico (Beas, Manterola y Santa Cruz, 1998). Los Objetivos de Aprendizaje y las actividades de desempeño se presentan para lograr la comprensión profunda de la matemática. Se espera que cada estudiante dé explicaciones, muestre evidencias y ejemplos, saque conclusiones, generalice, compare, aplique a nuevas situaciones, establezca analogías, presente la información desde diferentes perspectivas, que utilice el conocimiento para resolver problemas y que profundice en su comprensión estableciendo relaciones.

Para esto es necesario guiar a las y los estudiantes mostrando posibles explicaciones, elaborando evidencias y ejemplificando la forma de transferir a otras situaciones. Se sugiere guiar la realización de las diferentes operaciones mentales que se pueden desarrollar sobre un mismo tópico, en particular, ampliar la memoria mecánica, ya que puede facilitar varios procesos de resolución de problemas que la requieren. Dado que EPJA tiene diversas modalidades y con diferentes accesos a herramientas de trabajo, podría resultar de gran ayuda la memoria mecánica y el uso hábil de las herramientas disponibles, en particular de la calculadora. Por lo tanto, saber de manera directa la operación que se debe utilizar o el conocimiento del procedimiento de varias operaciones puede facilitar la comprensión del tópico matemático que se esté trabajando. En este sentido, se sugiere utilizar una diversidad de estrategias visuales, auditivas y escritas en las prácticas guiadas, que permitan responder a las distintas formas en que los y las estudiantes acceden, procesan y expresan lo aprendido.

Nociones básicas en matemática

Considerar las nociones básicas en matemática significa tener presente las ideas, imágenes y acciones mentales previas de cada estudiante para construir y comprender conocimiento matemático. El o la docente desarrolla en las clases esta construcción de conocimiento desde las experiencias de sus estudiantes hasta llegar a la abstracción y generalización. En ese momento cada estudiante aplica el conocimiento y, luego, transfiere a nuevas situaciones que pueden ser similares o completamente diferentes. Esta caracterización de las nociones básicas en matemática (Vom Hofe y Reyes-Santander, 2021) incluyen la significación matemática del concepto, el establecimiento de representaciones que dejan de ser personales para ser comprendidas desde el lenguaje matemático y la transferencia al mundo real por medio del desarrollo de la habilidad de modelar.

El trabajo con las nociones básicas en EPJA es fundamental para el desarrollo de habilidades matemáticas, dado que las personas jóvenes y adultas ya tienen una noción de lo que podría significar algún conocimiento matemático. Por lo tanto, es necesario indagar cuáles son estas nociones adquiridas y cómo llegar a una noción normativa, que describa interpretaciones comprensibles de conceptos,

definiciones y relaciones matemáticas. Para lo primero, el trabajo con las preguntas propuestas en las actividades de desempeño y las respuestas que dan los y las estudiantes, permite hacer una estructura de las nociones básicas de la clase. Esta información, junto con el desarrollo de la construcción del conocimiento y la práctica guiada de la actividad de desempeño, deberían permitir al estudiantado hacer el recorrido para obtener una noción básica de un concepto matemático.

Carácter progresivo de la asignatura

La educación matemática tiene un carácter progresivo y en espiral. Esto significa que las clases se desarrollan volviendo siempre a los conceptos básicos en diferentes niveles y contextos. El principio en espiral da cuenta de los conocimientos matemáticos previos que se requieren para aprender de manera fluida. Se comienza desde lo más sencillo hasta llegar a lo más complejo. Se vuelve al mismo tema, ampliando y profundizando cada vez más, hasta cerrar completamente el tema, así no se desplazan temas hasta que se tenga todo el conocimiento necesario, se puede empezar siempre con un nivel inicial, preparatorio. Este principio se complementa con el de continuidad de la educación matemática, entendido como la selección y el tratamiento de un tema para que, posteriormente, pueda recibir un nuevo tratamiento y continuar en el siguiente nivel educativo.

Este carácter progresivo nos indica que la construcción del conocimiento tiene antecedentes del nivel anterior y consecuentes para el año siguiente. Se sugiere retomarlos para poder avanzar de un año a otro. En el caso del nivel 1 de Educación Básica y cada vez que se comience un tema que no tiene un antecedente, se recomienda considerar las nociones básicas intuitivas y desde ahí construir un nuevo conocimiento. En este programa se pone a disposición la sección de diagnóstico, que se basa en los conocimientos previos que se requieren para comenzar con la actividad. Se sugiere que, cada vez que sea necesario, se considere un módulo cero de nivelación o dedicar un tiempo para revisar y retomar y, luego, avanzar. En cada tema y su planificación anual, es recomendable utilizar el principio de esquematización progresiva, comenzar con pequeños pasos, aislar las dificultades para reducir la complejidad y lograr el nivel de abstracción que permite una comunicación matemática fluida y comprensiva.

Ejercitar con sentido

Internalizar un concepto requiere de varias acciones. En matemática una de las acciones más reconocidas, como en la educación física, es la ejercitación. Aquí hablamos de ejercitar para lograr una meta. Una ejercitación con sentido se refiere a que los ejercicios propuestos tienen una estructura que permite reconocer la ampliación y profundizar en el conocimiento y la habilidad. La ejercitación sirve y tiene sentido cuando nos lleva, de manera directa, a lograr un objetivo preciso y previamente declarado.

Para lograr una ejercitación con sentido en la mayoría de las prácticas independientes se recomiendan situaciones, problemas y ejercicios en los cuales se presentan variaciones de la instrucción para ejercitar un mismo tópico. En algunos casos, para llevar a cabo esta ejercitación se entregan estrategias de clases o metodologías de trabajo como las estaciones, el trabajo grupal, el trabajo autónomo, el juego de roles o el trabajo de pares. Según Leuders (2005) hay una enseñanza explícita que se consolida con ejercicios básicos directos, necesaria para la adquisición segura del conocimiento y para la ejercitación que requiere de nexos matemáticos más profundos.

Para la práctica independiente y la categorización de los diferentes tipos de ejercitación con sentido se recomienda considerar el siguiente listado:

- Ejercicios básicos directos.
- Ejercicios que combinan otras áreas del conocimiento.
- Ejercicios que requieren de una comprensión profunda y de elaborar conexiones matemáticas.
- Ejercicios que se basan en la proactividad y la experimentación concreta.
- Ejercicios que resultan de la combinación de una conexión matemática con la experimentación concreta y que requieren de inferencias sobre los resultados de un experimento que no están detallados previamente.
- Ejercicios creativos que consideran la modificación de las condiciones iniciales o intermedias o de la creación propia de ejercicios.

La ejercitación supone pensar en los grados de dificultad de los problemas presentados. En este sentido, se sugiere comenzar siempre con un nivel básico y accesible para todas las personas, es decir, que todo el curso pueda responder a este tipo de ejercitación. Un ejercicio puede ser al inicio un problema para el estudiante, esta mirada debe estar siempre desde el punto de vista del estudiantado y no del docente. Luego de una ejercitación, se espera que los problemas sean considerados por los y las estudiantes como un ejercicio o como un problema rutinario. La ejercitación debe ser considerada como un facilitador para la resolución de problemas, más que un trabajo repetitivo y sin sentido.

Los grupos etarios, la motivación y los contextos en matemática

El perfil de egreso de un o una estudiante de EPJA se construye desde todas las asignaturas y a través de todos los años de duración de los estudios. Además, este perfil incluye las experiencias que tiene cada persona en su trayecto de vida. La matemática contribuye como una asignatura que ofrece situaciones basadas en contextos que van desde situaciones familiares, del trabajo, profesionales o del ámbito de las ciencias. Incluso ofrece contextos y oportunidades de aprendizaje que se desarrollan dentro de la matemática misma y con o sin necesidad de tener contextos.

En este sentido, el tener diferentes grupos etarios provee a la clase de una variedad de contextos que pueden ser trabajados y compartidos con los y las estudiantes, desarrollando la empatía y la comprensión de las situaciones vividas por otras personas. La motivación para aprender matemática es un gran desafío para el o la docente y, por este motivo, el desarrollo de una situación experiencial cercana e idealmente vivenciada por algún integrante de la clase, puede ser una fortaleza para enganchar a los y las estudiantes con el tema. Por otra parte, la presentación y la comunicación de la experiencia es clave para motivar a la clase, el desarrollo de las preguntas iniciales y escribir las respuestas considerando todo como un aporte, puede hacer una diferencia en la motivación personal y grupal por aprender matemática.

Diferenciación natural en matemática

En las clases de matemática de EPJA se encuentran diferentes formas de heterogeneidad. Por ejemplo, de género, culturales o étnicas, de edad, según logros de los aprendizajes, por tipo de establecimiento, por condiciones del espacio, según condiciones de libertad, deficiencias y discapacidades intelectuales, de aprendizaje o físicas. Dentro de estas, el docente puede considerar la heterogeneidad como un problema, como un caso normal o como una oportunidad para la enseñanza o para el aprendizaje. Con todas estas posibilidades, la o el docente debe elegir según sus propias capacidades o intereses cuál de ellas puede trabajar de manera objetiva y responsable en sus clases .

Desde la asignatura de matemática se puede considerar la heterogeneidad como una oportunidad de aprendizaje, pero siempre con foco en el nivel de logro de aprendizajes, ya sea para potenciar o nivelar. En esta categoría, se sugieren las siguientes consideraciones que pueden ser incluidas en la práctica independiente como una categorización de los problemas, situaciones y ejercicios presentados:

- Cantidad de ejercicios, más o menos dependiendo de cada estudiante o clase.
- Grado de dificultad, proponer en categorías de 3 a 4 grados diferentes.
- Forma de apropiación o internalización que tiene de preferencia cada estudiante: leer, escuchar, hablar o hacer. Por ejemplo, para algunas personas es suficiente con escuchar una vez, mientras que otras necesitan escuchar varias veces, escribir y complementar en su casa.
- Forma de abordar y presentar los conocimientos conceptuales y procedimentales, incluyendo una variedad de representaciones visuales, auditivas o táctiles.
- Graduar la ayuda y las mediaciones que recibe el o la estudiante, aunque se reconoce que hay quienes necesitan más ayuda para comenzar o durante el trabajo. El desarrollo de la autonomía debe ser el objetivo transversal de profesores y profesoras.
- Variedad en las formas sociales de trabajo: individual, pares o en grupos.
- Graduación del tiempo concedido para un mismo trabajo.
- Dar a elegir entre uno o más ejercicios, problemas o situaciones a desarrollar.

El trabajo con el error en matemática

La actitud de la o el docente frente al error se puede presentar con la metáfora de los errores como una ventana hacia el pensamiento de sus estudiantes. Los errores no se pueden ignorar, porque así no es posible promover el aprendizaje. Estos son una fuente de información acerca del razonamiento de los y las estudiantes, que es el lugar en que el aplican y construyen nuevos aprendizajes. Por otra parte, si el o la docente solo castiga el error, no se avanza. Por lo tanto, se sugiere tomar dicho error y analizarlo para ver cómo es posible ayudar a mejorar la comprensión sobre un tema (Larraín, 2016).

Es muy relevante que las y los docentes conozcan los errores frecuentes. Esto ayuda a que sean capaces de percibir, de manera más clara e inmediata, los errores que cometen sus estudiantes y así puedan manejar hipótesis acerca de qué es lo que los ha generado y, por lo tanto, reaccionar de mejor manera cuando estos ocurren. También es posible anticiparse a algunos de ellos, presentarlos al curso y pensar en conjunto para identificar qué es aquello que es incorrecto. Así, la decisión acerca de cómo tratar un error y hacer un plan de acción para corregirlo, depende de las dos fases anteriores: percibir o identificar el error y, luego, interpretarlo para elaborar hipótesis acerca de sus causas .

Referencias

- BEAS, J., MANTEROLA, M., Y SANTA CRUZ, J. (1998). Habilidades cognitivas y objetivos transversales: un tema para pensar y actuar. *Pensamiento educativo, Revista De Investigación Latinoamericana (PEL)*, 22(1), 175-192. Recuperado de <http://pensamientoeducativo.uc.cl/index.php/pel/article/view/24935>
- LARRAÍN, M. (2016). Comprensión del razonamiento matemático de los estudiantes: una práctica pedagógica inclusiva. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. N° 45. Recuperado de <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/583>
- LEUDERS, T. (2005). Intelligentes Üben selbst gestalten! Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht. *Pädagogik* 57(11).
- LOOS, A. Y ZIEGLER, G.-M. (2015). Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. En Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. y Weigand, H.-G. (Eds.). *Handbuch der Mathematikdidaktik*, Berlin, Heidelberg: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-35119-8
- OECD (2020). *Mathematics performance*, PISA (indicator). Recuperado de https://www.oecd-ilibrary.org/education/mathematics-performance-pisa/indicator/english_04711c74-en doi: 10.1787/04711c74
- VOM HOFÉ, R., Y REYES-SANTANDER, P. (2021). Nociones Básicas: un enfoque didáctico para promover la comprensión del contenido en clase de matemática. En vom Hofe, R. y otros (eds.). *Matemática Enactiva: Aportes para la articulación entre teoría y práctica en la educación matemática*. Barcelona: Grao.

Visión panorámica*

de los Módulos** del Nivel 1 de Educación Media

Módulos Obligatorios

Módulo Obligatorio 1 Nivel 1 EM

El trabajo con los números reales permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito de resolución de problemas.

Módulo Obligatorio 2 Nivel 1 EM

Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.

Módulo Obligatorio 3 Nivel 1 EM

Las propiedades y relaciones geométricas entre objetos y sus distancias permiten resolver problemas que involucran destrezas de visualización espacial

Módulo Obligatorio 4 Nivel 1 EM

La probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza.

Módulos Electivos***

Módulo Electivo 1 Nivel 1 EM

¿Cómo construir modelos matemáticos de situaciones de nuestra realidad?

Módulo Electivo 2 Nivel 1 EM

¿Cómo interpretar y predecir fenómenos de incerteza con la probabilidad?

* Los Programas de Estudio de cada asignatura se organizan por nivel en cuatro módulos obligatorios y dos módulos electivos, de los cuales podrá cursarse al menos uno de acuerdo a las necesidades de las trayectorias formativas de las y los estudiantes.

** Se propone organizar flexiblemente los módulos con una duración de seis semanas cada uno para dar cuenta del cumplimiento de las 36 semanas lectivas del tiempo escolar de la modalidad.

*** En el Programa de Estudio de la asignatura se desarrollarán como opciones dos electivos que profundizan las grandes ideas abordadas en los Módulos Obligatorios.

Visión panorámica

de los Objetivos de Aprendizaje y Conocimientos Esenciales

Módulo Obligatorio 1

Gran idea

El trabajo con los números reales permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito de resolución de problemas.

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA 5

Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. **(Argumentar y Comunicar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Operaciones con números racionales, potencias, raíces y sus propiedades.

Tiempo estimado:

6 semanas (24 horas)

Módulo Obligatorio 2

Gran idea

Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.

Objetivos de aprendizaje

OA 2

Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA 4

Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Productos notables.
- Función y ecuación cuadrática.

Tiempo estimado:

6 semanas (24 horas)

Módulo Obligatorio 3

Gran idea

Las propiedades y relaciones geométricas entre objetos y sus distancias permiten resolver problemas que involucran destrezas de visualización espacial.

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA 6

Realizar demostraciones simples de resultados e identificar en una demostración, si hay saltos o errores, trabajando con empatía y respeto. **(Argumentar y Comunicar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Sistemas de ecuaciones lineales (2x2).
- Homotecias y teorema de Thales.

Tiempo estimado:

6 semanas (24 horas)

Módulo Obligatorio 4

Gran idea

La probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza.

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Probabilidades, regla multiplicativa y regla aditiva.

Tiempo estimado:

6 semanas (24 horas)

Módulo Electivo 2 Aprendizaje Basado en Proyectos

La probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza.

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Probabilidades, regla multiplicativa y regla aditiva.

Tiempo estimado:

6 semanas (24 horas)

Módulo Electivo 4 Aprendizaje Basado en Resolución de Problemas

Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.

Objetivos de aprendizaje

OA 2

Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA 4

Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimiento esencial

- Productos notables.
- Función y ecuación cuadrática.

Tiempo estimado:

6 semanas (24 horas)

Módulos Obligatorios de la Asignatura

Módulo Obligatorio 1

Módulo Obligatorio 2

Módulo Obligatorio 3

Módulo Obligatorio 4

Módulo Obligatorio 1

Visión panorámica

Gran idea

El trabajo con los números reales permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito de resolución de problemas.

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA 5

Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. **(Argumentar y Comunicar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Operaciones con números racionales.
 - Potencias y sus propiedades.
 - Raíces y sus propiedades.
-

Tiempo estimado: 6 semanas (24 horas)

Propósito

En el módulo 1 de la asignatura de matemática del Nivel 1 de Educación Media, se espera que las y los estudiantes comprendan que *el trabajo con los números reales permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito de resolución de problemas*. El aprendizaje de las propiedades y de nuevos números o expresiones de varias operaciones, permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito numérico. Esta información se relaciona con las actividades de trabajo específicas que se podrían dar en la vida laboral o en situaciones científicas y también con la necesidad de ampliar el ámbito numérico para responder a las diferentes demandas en diversas situaciones o problemas. Los y las estudiantes expresan ideas matemáticas mediante la representación simbólica, seleccionan modelos según la situación y fundamentan conjeturas sobre las propiedades de potencias y su relación con las raíces.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 1 desarrollan habilidades que permiten comprender la nueva información y trabajar en contextos numéricos más amplios.

En este nivel se comprende profundamente un tópico cuando se representan raíces y potencias de forma simbólica; cuando se utilizan números adecuados cuando al expresar situaciones de grandes distancias, geométricas o relacionadas con las ciencias; cuando se aplican las propiedades de raíces y potencias para resolver problemas en situaciones contextualizadas; y cuando se transfieren procedimientos para conjeturar sobre los resultados numéricos o para hacer generalizaciones.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 1 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar, las Herramientas para trabajar y las Maneras de trabajar, promoviendo el aprovechar las oportunidades que ofrece la tecnología y las herramientas disponibles para calcular, representar, modelar y conjeturar. Asimismo, este módulo impulsa una actitud proactiva, relevando un método de trabajo y una inquietud e interés por aprender, explorar y describir numéricamente el propio entorno o medio para comprender contextos locales o globales, personales, familiares, científicos, profesionales o lúdicos.

Ruta de Aprendizaje

El trabajo con los números reales permite analizar información numérica de mayor complejidad y ampliar el ámbito de resolución de problemas.

	Actividad de desempeño 1	Representan raíces y sus propiedades de forma pictórica o simbólica para ampliar el ámbito numérico y expresar situaciones laborales específicas relacionadas con el teorema de Pitágoras o el orden de números irracionales.
	Actividad de desempeño 2	Seleccionan y ajustan modelos que requieren de las raíces para su aplicación, variando parámetros y condiciones iniciales para comprar los cambios en los resultados obtenidos, en contextos de salud, como el índice de masa corporal o en contextos de diseño.
	Actividad de desempeño 3	Representan grandes distancias y situaciones científicas utilizando potencias y la escritura científica para calcular de manera más directa y resolver problemas evaluando el proceso.
	Actividad de desempeño 4	Fundamentan conjeturas utilizando los conocimientos de números racionales y de potencias para construir las propiedades de potencias y su relación con las raíces.

Actividad de desempeño

1

Propósito

Esta actividad busca representar raíces y sus propiedades para facilitar el cálculo con ellas. Esto permitirá describir situaciones relacionadas con la construcción o el diseño. La actividad comienza con el teorema de Pitágoras para, luego, continuar con el orden de números y terminar con las propiedades más relevantes de las raíces.

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

Conocimientos esenciales

- Operaciones con números racionales, potencias, raíces y sus propiedades.
-

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

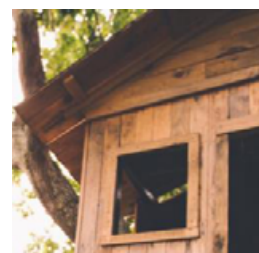
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que verifique los siguientes criterios:

- Determinar la medida del lado faltante de un triángulo rectángulo aplicando el teorema de Pitágoras.
- Utilizar la escuadra u otra herramienta para dibujar un ángulo recto.
- Aproximar decimales al décimo, centésimo o milésimo.
- Utilizar la recta numérica para ubicar números decimales.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta diferentes situaciones relacionadas con la construcción o el diseño de objetos, en las cuales se puede ver involucrado el teorema de Pitágoras y el cálculo de raíces.



Les pide comentar y describir las situaciones. Puede utilizar las siguientes preguntas:

Conexión interdisciplinar

Emprendimiento y

Empleabilidad

OA 3 Nivel 1 y 2 EM

- ▶ ¿Qué se observa en las imágenes?
- ▶ ¿Qué objetos identificas?
- ▶ ¿Qué relación podrían tener estas situaciones con la matemática?
- ▶ ¿Qué recordamos del teorema de Pitágoras?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para introducir el concepto de raíces y el cálculo de ellas, la o el docente puede guiar el proceso de aprendizaje al preguntar:

¿Cuáles serán las medidas más convenientes en la construcción de un techo triangular?



Se sugiere motivar su participación mediante la ejemplificación de la construcción de un techo con un triángulo rectángulo con las medidas estandarizadas de las vigas, en este caso, de largo 2,7 m. Luego, solicitar a otra persona que ejemplifique con una viga de 2,5 m de largo y anotar en la pizarra los datos que faltan en cada caso.

Esquema	Medidas	Cálculos	Respuestas
	Viga de largo 2,7 m.	La viga debe ser la diagonal de un cuadrado de lado a. $a^2+a^2 = 2,7^2$ $2a^2 = 7,29$ $a^2 = 3,645 \quad \sqrt{}$ $\sqrt{a^2} = \sqrt{3,645}$ $a \approx 1,91$	Los listones del techo pueden ser de 1,9 m.
	Viga de largo 2,5 m.	La viga debe ser la diagonal de un cuadrado de lado a. $a^2+a^2 = 2,5^2$ $2a^2 = 6,25$ $a^2 = 3,125 \quad \sqrt{}$ $\sqrt{a^2} = \sqrt{3,125}$ $a \approx 1,77$	Los listones del techo pueden ser de 1,77 m.

También se pueden realizar cálculos para encontrar las medidas del pilar que va en el medio del triángulo, de los palos más pequeños que van en la mitad y que sostienen y dan firmeza a la construcción. Se sugiere formalizar el proceso de calcular la raíz cuadrada como el proceso inverso de elevar al cuadrado. También es recomendable acompañar el cálculo con el uso de la calculadora.

PRÁCTICA GUIADA

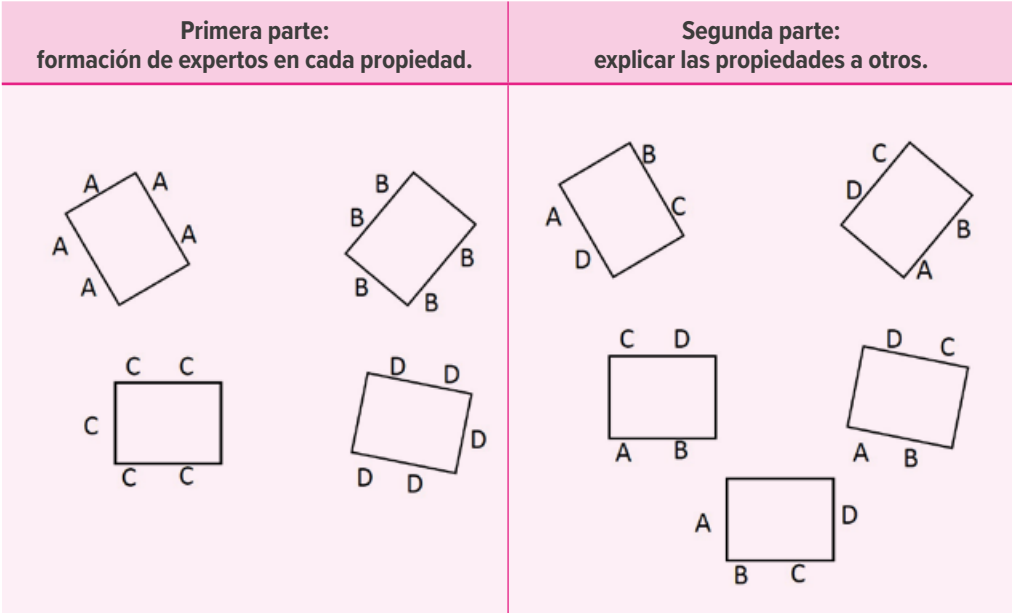
Para guiar la expresión de ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, se sugiere utilizar la recta numérica para ordenar raíces y conjeturar sobre algunas de sus propiedades. Generalizar las propiedades según el contexto y ejemplificar hasta las raíces cúbicas.

En la siguiente tabla se observa un resumen de las posibles preguntas que orientan el proceso de aprendizaje guiado.

Propiedad	Ejemplificación numérica	Preguntas orientadoras
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50}$ $\sqrt{50} \approx 7,07$	▶ ¿De qué otra manera puedo obtener el mismo resultado? ▶ ¿Qué otro ejemplo puedo dar? ▶ ¿Cómo se puede decir esto en palabras?
Aplicación directa en ejercicio numérico		
a) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$ $4\sqrt{2} \approx 5,66$	b) $7\sqrt{3} + \sqrt{75} = 12\sqrt{3}$ $12\sqrt{3} \approx 20,78$	
Propiedad	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\frac{15}{7}}$ $\sqrt[3]{\frac{15}{7}} \approx 1,29$	¿Cuál es la diferencia con la propiedad anterior?
Aplicación directa en ejercicio numérico		
a) $\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{42}{7}} = \sqrt{6} \approx 2,45$	b) $\frac{\sqrt{72}}{2} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{72}{4}} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \approx 4,24$	
Propiedad	Ejemplificación numérica orientadora	Pregunta
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$	¿En qué casos se utiliza esta propiedad?
Propiedad	Ejemplificación numérica	Preguntas orientadoras
$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$	$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$	▶ ¿De qué forma se puede obtener esta propiedad? ▶ ¿Sirve para todas las raíces n-ésimas? ▶ ¿Para qué se aplica esta propiedad?

PRÁCTICA
INDEPENDIENTE

Para resolver un problema de construcción o diseño de figuras, se sugiere hacer un trabajo de puzle con diferentes ejercicios numéricos de aplicación de propiedades. Una posible organización de los grupos podría ser en base al siguiente esquema:



Cada grupo puede organizarse según las propiedades, por ejemplo:

Grupo	Propiedad	Descripción
A	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	Resolver ejercicios de aplicación directa de la propiedad. Se sugiere responder a las preguntas orientadoras y crear al menos un ejercicio. Se resuelve en forma grupal, pero cada miembro debe ser un experto de la propiedad para, luego, explicar en el siguiente grupo de expertos.
B	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	
C	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	
D	$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$	
A, B, C, D	Ejercicios que incluyan más de una propiedad.	El experto de cada propiedad debe explicar a los demás integrantes del grupo cómo y cuándo se utiliza la propiedad que trabajó en la primera parte.

Para retroalimentar la actividad e integrar las distintas propiedades de las raíces con el cálculo de estas para resolver problemas, se sugiere utilizar la lista de chequeo con los siguientes criterios:

LISTA DE CHEQUEO		
	Logrado	Todavía puedo mejorar
CRITERIO 1: Propiedad de la multiplicación de raíces (separar y juntar).	☐	☐
CRITERIO 2: Propiedad de la división de forma directa.	☐	☐
CRITERIO 3: Racionalizar al denominador.	☐	☐
CRITERIO 4: Calcular raíces en problemas reales o de matemática.	☐	☐

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, considere una rúbrica con los siguientes criterios:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Raíces y Propiedades	Aplica una propiedad.	Conoce y aplica las propiedades cometiendo algunos errores.	Conoce y aplica las propiedades de manera adecuada.
	Calcula raíces en ejercicios directos.	Calcula raíces en diferentes tipos de ejercicios numéricos.	Calcula raíces en diferentes tipos de ejercicios numéricos y contextualizados.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares

Entenderemos que representar las raíces es una manera de expresar un número que no es entero, ni racional. Su representación simbólica corresponde a la medida de la diagonal de un cuadrado, mientras que su representación pictórica se relaciona con la construcción de estos cuadrados y de proyectar la diagonal sobre la recta numérica. La realización de este tipo de actividades de dibujar diagonales dependerá del contexto de cada grupo de estudiantes. Es recomendable comenzar con la aplicación a los contextos de construcción y su relación con el teorema de Pitágoras, el cual forma parte de los contenidos del nivel 3 de Educación Básica de EPJA.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere la operatoria con números naturales, enteros, decimales y fracciones, enfocando este módulo introductorio en la estimación de resultados, el uso de la calculadora y la resolución de problemas en diferentes contextos. Puede utilizar la secuencia procedimental disponible en la ficha pedagógica de la habilidad propuesta en <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/discover?query=Aprender+a+pensar+matem%C3%A1ticamente>

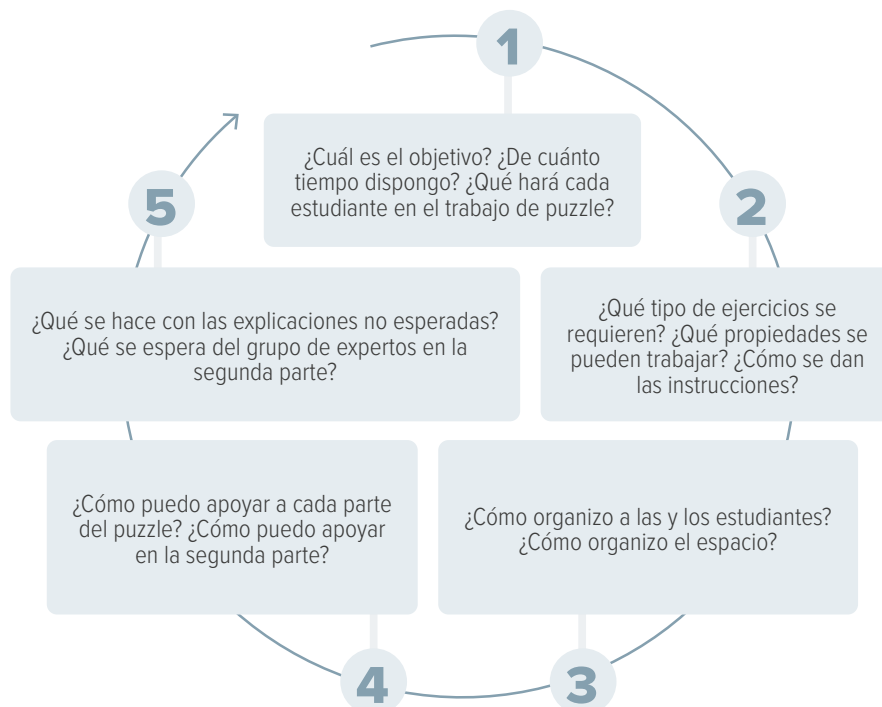
También se puede revisar la infografía de la habilidad de resolver problemas, disponible en https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-334293_recurso_pdf.pdf

Actitudes

Para apoyar el desarrollo de la actitud de utilizar las herramientas disponibles, se sugiere el uso de la calculadora y las aproximaciones a la centésima para así dar sentido numérico a la raíz. También, se recomienda utilizar herramientas propias de la construcción, como escuadra de tacón o sombrero, escuadra de carpintero y la falsa escuadra.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo del puzzle

Puede utilizar las siguientes preguntas para guiar la implementación del trabajo:



Anexo

SITUACIÓN 1 **Construcción de** **muebles inclinados**

Camila es diseñadora de muebles y quiere crear intencionalmente muebles inclinados. Para lograrlo con precisión, puede usar el teorema de Pitágoras al diseñar las partes inclinadas. Por ejemplo, si diseña una repisa o una pata inclinada, puede formar un triángulo rectángulo donde conoce la altura (cateto opuesto) y la base (cateto adyacente), y así calcular la longitud exacta de la parte inclinada (hipotenusa). Esto le permite asegurar que las piezas encajen correctamente y tengan la inclinación deseada. Crea una situación que refleje lo anterior, usando cálculos y dibujos.

SITUACIÓN 2 **Dibujo técnico**

Javier estudia dibujo técnico y debe realizar una tarea con medidas precisas. Al revisar su trabajo, se da cuenta de que las esquinas de los cuadrados y rectángulos no forman ángulos de 90° , lo que indica que las figuras no están correctamente trazadas. Para corregir este problema, puede aplicar el teorema de Pitágoras: midiendo las diagonales de los rectángulos o cuadrados y verificando si cumplen con la relación de Pitágoras. Si las medidas de los lados no coinciden con esa relación, sabrá que hay un error en los ángulos o longitudes y podrá ajustar su dibujo para lograr ángulos rectos precisos. ¿Cómo puede Javier utilizar el teorema de Pitágoras para comprobar si se forman ángulos rectos y corregir su dibujo técnico?

SITUACIÓN 3 **Elaboración de** **puzles de madera**

Luisa y Roberto elaboran puzles de madera y necesitan diseñar piezas que encajen perfectamente para formar cuadrados o rectángulos. Para lograr precisión en las dimensiones, especialmente en las diagonales de las piezas, pueden usar el teorema de Pitágoras y aplicar raíces cuadradas. Por ejemplo, si conocen los lados de un rectángulo, pueden calcular la diagonal al usar la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los lados. Así aseguran que las piezas encajen sin errores. ¿De qué manera pueden Luisa y Roberto usar el cálculo de raíces cuadradas para asegurarse de que las piezas de sus puzles encajen perfectamente al formar cuadrados o rectángulos?

SITUACIÓN 4 **Siempre derecho**

Emilio trabaja en la construcción con estructuras de aluminio y una de sus tareas más importantes es asegurar que todo quede perfectamente nivelado y vertical. Si detecta una desnivelación, puede formar un triángulo rectángulo imaginario entre la base (horizontal), la altura (vertical) y la parte inclinada que representa el error de nivelación. Midiendo dos de estos lados, puede usar el teorema de Pitágoras para calcular el tercero y así corregir la desviación, garantizando que las estructuras estén bien alineadas. ¿Cómo puede Emilio aplicar el teorema de Pitágoras para detectar y corregir una desnivelación en una estructura? ¿Qué medidas debe tomar para formar el triángulo rectángulo que le permita hacerlo?

SITUACIÓN 5 **Ubicación de las raíces** **en la recta numérica**

Matea y Mateo han realizado ciertos cálculos a partir de las medidas de madera que tienen. Para hacer cortes necesitan ordenar las siguientes raíces en la recta numérica $\sqrt{7}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$ ¿Cómo podrías ayudar si en esos momentos no tienes calculadora?

SITUACIÓN 6 **Sin clavos**

Isabel es experta en realizar cortes precisos de madera para construir sin necesidad de clavos, encajando las piezas a la perfección. Para lograr que los ángulos y encajes sean exactos, especialmente en uniones en diagonal o en estructuras trianguladas, el conocimiento del teorema de Pitágoras y de las raíces cuadradas es fundamental. Le permite calcular con precisión las longitudes de cortes diagonales a partir de medidas horizontales y verticales, asegurando que cada pieza encaje sin error. ¿Por qué es importante que Isabel domine el teorema de Pitágoras y el cálculo de raíces cuadradas al realizar sus cortes de madera?

Actividad de desempeño 2

Propósito

En esta actividad los y las estudiantes representarán raíces y aprenderán sobre sus propiedades para facilitar el cálculo con ellas. Esto les permitirá describir situaciones relacionadas con la construcción o el diseño. La actividad comienza con el teorema de Pitágoras, continúa con el orden de números y termina con las propiedades más relevantes de las raíces.

Objetivos de aprendizaje

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Raíces y sus propiedades.
-

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

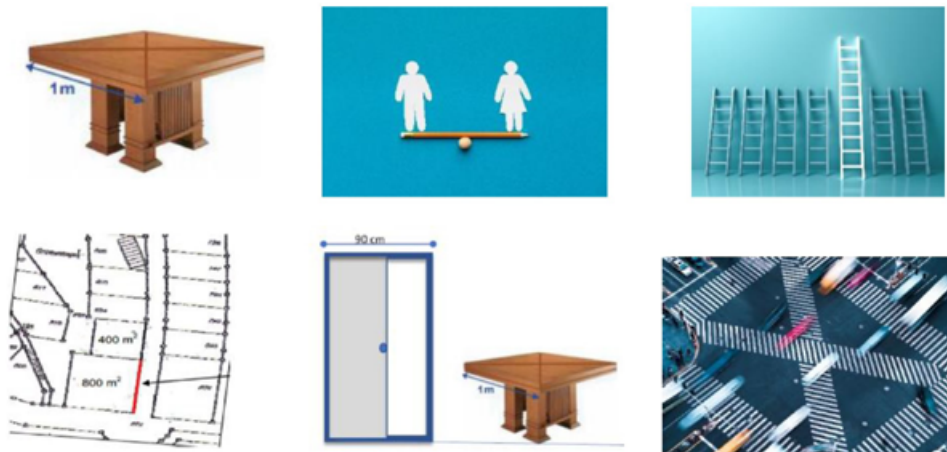
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que verifique los siguientes criterios:

- Aplicar fórmulas de perímetro, área, volumen y velocidad, comprendiendo el contexto y reemplazando los datos según corresponda al problema.
- Resolver ecuaciones lineales sencillas comprendiendo el sentido de la igualdad al realizar la misma operación en ambos lados de la ecuación.
- Utilizar la calculadora para encontrar el valor de una raíz aproximando a la décima, centésima o milésima.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta diferentes situaciones en las que se debe calcular la raíz para resolver un problema. Puede ver algunas ideas en el anexo y variar los parámetros o las condiciones. También puede aplicar una fórmula dada.



Conexión interdisciplinar

Emprendimiento y
Empleabilidad
OA 3 Nivel 1 y 2 EM

Algunas de las preguntas que pueden promover el levantamiento del problema y de sus posibles condiciones son:

- ▶ ¿Cuál podría ser el problema?
- ▶ ¿Cuáles podrían ser las condiciones?
- ▶ ¿Cuáles son las variables en juego?
- ▶ ¿Habrá alguna fórmula o teorema que se pueda utilizar?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para construir el conocimiento sobre variar las condiciones y comparar los cambios en los resultados, se sugiere trabajar con un caso de aplicación de la fórmula de masa corporal como el que se describe a continuación:

Mary Carmen estudia podología y el profesor le ha pedido calcular la altura de una persona utilizando el índice de masa corporal para hacerse una idea de lo que este índice describe.



El o la docente ejemplifica cómo determinar la altura de un paciente con su IMC y masa. Por ejemplo, un hombre con un índice de masa corporal de $24 \frac{kg}{m^2}$ y $65kg$. Se continúa con el pensamiento de Mary Carmen sobre el significado de este índice y del procedimiento utilizado.



¡Ahora sí!			
Datos	Cálculo	Respuesta	Imagen mental
IMC = $24 \frac{kg}{m^2}$ Masa = $72kg$	$E = \sqrt{\frac{72}{24}}$ $E \cong \sqrt{3} \cong 1,73$	La persona mide 1 metro con 73 centímetros.	
IMC = $24 \frac{kg}{m^2}$ Masa = $65kg$	$E = \sqrt{\frac{65}{24}}$ $E \cong \sqrt{2,71} \cong 1,65$	La persona mide 1 metro con 65 centímetros.	
IMC = $24 \frac{kg}{m^2}$ Masa = $58kg$	$E = \sqrt{\frac{58}{24}}$ $E \cong \sqrt{2,42} \cong 1,56$	La persona mide 1 metro con 55 centímetros.	

Finalmente, la o el docente promueve la comparación de diferentes masas de personas, pero con igual índice de masa corporal, aplicando la fórmula, utilizando la calculadora y aproximando a la centésima. Para ello, el docente se puede apoyar de los casos de Mary Carmen que se presentan en la siguiente imagen:

PRÁCTICA GUIADA

Para guiar la comprensión de la aplicación de fórmulas, en primer lugar, retome el índice de masa corporal y su definición a partir de las respuestas a las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Qué es el IMC?
- ▶ ¿Para qué se necesita la raíz cuadrada?
- ▶ ¿Cómo utilizamos la fórmula para saber la estatura de una persona que tiene un IMC de $25 \frac{kg}{m^2}$ y un peso de $75kg$?

En segundo lugar, transfiera los conocimientos de esta situación a otra completamente diferente, pero con un problema que incluya una fórmula que requiera el uso de la raíz cuadrada. Por ejemplo, el cálculo de la velocidad¹³ para evitar accidentes y la ubicación de señales de tránsito o de semáforos.

¡A unos 25 metros se encuentra una tortuga!



¿A qué velocidad como máximo debo ir para alcanzar a frenar?

$$Velocidad = \sqrt{Distancia \cdot 100}$$

La distancia está en metros y la velocidad se obtiene en $\frac{km}{h}$

¹³ El concepto de rapidez y velocidad son tratados desde la física de manera diferente. Se considera que la rapidez hace referencia a la distancia recorrida por un objeto en un determinado tiempo y la velocidad es el desplazamiento de un objeto en una dirección en un determinado tiempo, en este caso se considera una magnitud vectorial. El caso lineal que se produce en el desplazamiento de un auto o distancia recorrida coincide con la magnitud del vector y con la medida escalar y se puede decir que rapidez y velocidad son sinónimos. Se utilizará velocidad dado que en lo coloquial es el término que se usa en contextos automovilísticos.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Se sugiere hacer un trabajo personal que incluya las impresiones de cada estudiante en un cómic similar al desarrollado en el caso de Mary Carmen, pero para comprender la velocidad necesaria para evitar accidentes, comparando diferentes distancias y resultados. Un problema orientador podría ser el trabajo que hace la Sección de Investigación de Accidentes de Tránsito (SIAT) en el caso de accidentes de tránsito. Una posible organización de las partes del cómic para este problema podría ser la siguiente:

Situación	Estructura del cómic	
	Partes	Preguntas
▶ En un accidente de tránsito se necesita calcular la velocidad de un auto conociendo la distancia de frenado para saber si el conductor excedió el límite de velocidad en el lugar del accidente. ▶ Calcule la velocidad de un auto que tenía una distancia de frenado de 225 metros y compare con otras distancias en las que pudo haber estado el letrero de tránsito o señales de advertencia.	Impresiones personales iniciales sobre la fórmula, los conceptos, los datos que son necesarios y la forma de proceder.	▶ ¿Qué significa la fórmula? ▶ ¿Qué es la velocidad? ▶ ¿Cuáles son los datos? ▶ ¿Qué se hace con los datos?
	Desarrollo del problema, identificación de los pasos, indicaciones sobre las partes que no se comprendieron o las que se consideran más fáciles de abordar.	▶ ¿Cuáles son los pasos? ▶ ¿Cómo organizo el trabajo? ▶ ¿Qué partes no comprendí bien? ¿Qué entendí a la perfección?
	Comparación con otras distancias de frenado y con la ubicación de señales de tránsito o señales de advertencia. Probar sistemáticamente con otras distancias de frenado para comparar con la velocidad del accidente obtenida.	▶ ¿Qué puedo hacer para comprender mejor? ▶ ¿Cómo organizo la comparación de los diferentes resultados? ▶ ¿Qué distancias de frenado puedo considerar?

Para retroalimentar este trabajo en términos del aprendizaje de la aplicación de fórmulas y de la variación de parámetros para comparar los resultados obtenidos, se sugiere utilizar la mentalidad de crecimiento del estudiante a sí mismo:

MENTALIDAD DE CRECIMIENTO		
Mis logros fueron	Mis errores que me ayudaron a mejorar fueron:	¿Qué haré para seguir mejorando?
▶ Elaborar un cómic utilizando mi propio proceso de comprensión del problema. ▶ Calcular raíces para resolver un problema real. ▶ Comprender la necesidad de calcular la distancia de frenado.	▶ Utilizar diferentes unidades de medidas, me permitió ver algunas simplificaciones del problema. ▶ Digitar mal en la calculadora me ayudó a comprender velocidades mayores o menores a $100 \frac{km}{h}$ y los efectos en la distancia de frenado.	▶ Organizar siempre el desarrollo del problema en tres partes, marcando la información entregada y pensando para qué me sirve, aplicando una fórmula y elaborando una respuesta.

<https://www.curriculumnacional.cl/porta/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Criterio	Novato	Intermedio	Senior
Aplicación de la fórmula	Utiliza los datos en la fórmula sin relacionarlos.	Utiliza los datos en la fórmula identificando parámetros y variables.	Evalúa los datos en la fórmula según las necesidades de la situación identificando parámetros y variables.
Cálculo de la raíz	Calcula las raíces de manera directa en un solo caso.	Calcula raíces en diferentes casos.	Calcula raíces en diferentes casos y según las necesidades de la situación.
Aproximaciones	Escribe el número decimal con algunas cifras luego de la coma.	Aproxima el número decimal según las reglas de la aproximación.	Aproxima el número decimal según las reglas de la aproximación y según se indica a la décima, centésima o milésima.
Uso de unidades de medida	Reconoce las unidades de medida.	Utiliza las unidades de medida de manera indiferente.	Utiliza las unidades de medida según corresponda escribiéndolas en la respuesta.
Variación	Identifica la variable del problema.	Identifica la variable del problema y utiliza diferentes valores para evaluar en la fórmula.	Identifica el parámetro y la variable del problema y utiliza diferentes valores para evaluar en la fórmula y si es necesario cambia el parámetro según las condiciones de la situación.
Comparación	Escribe resultados de una y otra situación.	Elabora una tabla con los resultados de una y otra situación identificando algunas diferencias.	Compara los resultados obtenidos identificando las diferencias o similitudes.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares

Entenderemos que desarrollar la habilidad de resolver problemas implica varias etapas, entre ellas, la aplicación de una fórmula para responder frente a situaciones que la requieren. El reconocer la variable y los parámetros de la fórmula es una etapa que requiere de la comprensión de la situación y la evaluación de diferentes valores para, luego, comparar diferentes resultados. La comparación requiere de una ejemplificación de cómo proceder y de lo que se espera como respuesta luego de comparar o probar con los diferentes valores en la fórmula. Se sugiere entregar la información con las unidades de medida que corresponden a la situación y que no requieran de ninguna transferencia a otras unidades de medida y solo dependiendo del contexto es recomendable incluir este paso de transferencia de unidades de medida.

Actitudes

Para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con perseverancia y proactividad se sugiere estimular las preguntas que puedan hacer sus estudiantes en la etapa de la práctica guiada. Por ejemplo, al ofrecer la palabra según el orden en el listado del curso y al esperar preguntas como: ¿Cómo se hace en este caso? ¿Qué ocurre si cambio esto? Si no hay preguntas de este tipo, entonces se sugiere comenzar las frases relevando las frases “en este caso se procede...”, “si cambio esto ocurre lo siguiente...”. También se recomienda dar tiempo a la etapa de la práctica independiente para que cada estudiante persevere en cumplir con el objetivo de la tarea. Determine con anterioridad el tiempo que tomaría toda la actividad para dividir y cerrar las clases en momentos previamente establecidos.

**Orientaciones para
organizar e implementar
la elaboración de cómics
en matemática**

Se sugieren las siguientes consideraciones para aplicar esta actividad:

Motivación	¿Qué se puede hacer?
Tiene una gran representación visual del conocimiento.	Presente un modelo de cómic y destaque el conocimiento que presenta.
Muestra lo esencial.	Marque las frases cortas y las expresiones de los personajes en el cómic.
Es más fácil de recordar una secuencia gráfica que contiene información clave.	Marque los momentos clave del cómic y, una vez realizado esto, presente el cómic nuevamente y pregunte por lo que recuerdan de esta nueva lectura.
Los y las estudiantes se involucran con su historia y su pensar de lo que están aprendiendo.	Se sugiere dar las ideas iniciales de lo que se espera, como también el contexto. No evalúe creatividad en esta asignatura.
Desarrolla la idea de diálogos o monólogos.	Si es necesario limite la cantidad de personajes que deben aparecer. Por ejemplo, no más de dos en una primera etapa.
Ayuda a la organización de ideas y pensamientos.	Marque en el ejemplo las ideas centrales y la forma en que están organizadas. Puede ser de manera secuencial en el tiempo.
El uso de imágenes transmite significado al tema.	Converse sobre los estados de ánimo que se quieren reflejar en el cómic que se presenta como modelo.
Relaciona matemática con el desarrollo de habilidades de otras asignaturas.	Póngase de acuerdo con los y las docentes de artes visuales y lenguaje para la creación del cómic.
La secuenciación promueve la comprensión del contenido.	La historia y el desarrollo de fórmulas puede ser mejor comprendido al utilizar el cómic. En él, marque todas las fórmulas, las ecuaciones, los datos numéricos. Destaque con color los procedimientos y algoritmos realizados.
Sirve como herramienta de valoración y evaluación.	Si hay una presentación o publicación de los cómics elaborados, esto permitirá valorar el trabajo y evaluar la comprensión del tema.

Anexo

Se sugiere complementar con el apoyo de los siguientes recursos y según el contexto:

https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-83393_recurso_.pdf.pdf

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Ejes/Ciencias-Naturales/Biologia/70198:CN08-OA-06>

Actividad de desempeño

3

Propósito

Esta actividad busca representar números de grandes y pequeños órdenes de magnitud transitando entre el lenguaje natural, la multiplicación y las potencias para el caso de las potencias de exponente positivo y para el de los exponentes negativos, en contextos de la astronomía, biología y la medicina homeopática. En esta actividad los y las estudiantes aprenderán a evaluar el proceso de la resolución de problemas abiertos, donde la estimación y la aplicación de la notación científica puede facilitar los cálculos y la comprensión de las grandes cantidades.

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Operaciones con números racionales, potencias, raíces y sus propiedades.

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

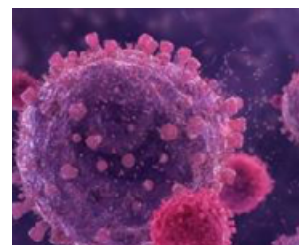
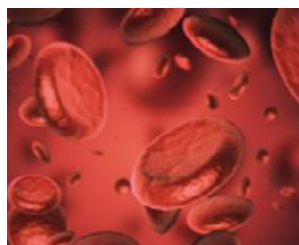
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que verifique los siguientes criterios:

- Reconocer la propiedad de la conmutatividad de la multiplicación en ejemplos directos.
- Aplicar la distributividad en ejemplos directos.
- Multiplicar por múltiplos de 10.
- Relación entre fracciones con denominadores de múltiplos de 10 y los decimales.
- Operatoria básica con decimales.
- Reconocer el concepto de razones y el significado de 1 es a 3 en contextos sencillos.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta diferentes situaciones relacionadas con grandes distancias u objetos minúsculos, donde se usa la notación científica para motivar el tema.



Pide comentar y describir las situaciones, guiándose por las siguientes preguntas:

Conexión interdisciplinar
Ciencias Naturales
OA 3 Nivel 1 EM

- ▶ ¿Qué idea se puede relacionar con las imágenes?
- ▶ ¿Qué números crees que pueden estar relacionados con estas ideas?
- ▶ ¿Cómo podemos expresar estos números?
- ▶ ¿Qué relación podrían tener estas situaciones con la noción de potencia?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para introducir el concepto de potencias y el cálculo de ellas, la o el docente podría guiar el proceso de aprendizaje al preguntar:

¿Cuál es la distancia desde la Tierra a Marte? ¿Cómo se podría escribir esta distancia de forma más corta?



Luego, explica la respuesta distinguiendo entre el mínimo de 56 millones de kilómetros, que se logra cada 16 años y el máximo de aproximadamente 400 millones de kilómetros de distancia. Además, destaca la importancia de la escritura de los números para hacer cálculos y comprender mejor el sistema solar. Explica el uso de la notación científica en los siguientes ejemplos:

- 56 millones de kilómetros = $56 \cdot 1\,000\,000\text{ km} = 5,6 \cdot 10\,000\,000\text{ km} = 5,6 \cdot 10^7\text{ km}$
- 400 millones de kilómetros = $400 \cdot 1\,000\,000\text{ km} = 4 \cdot 100\,000\,000\text{ km} = 4 \cdot 10^8\text{ km}$

A partir del ejemplo, la o el docente explica la multiplicación por 10 o múltiplos de 10 asociada a cada unidad de medida y que denominan múltiplos o divisiones del metro, entendiendo que el metro es una unidad basal y que las otras unidades de medidas se obtienen al multiplicarlo o dividirlo. Se sugiere comenzar de mayor a menor hasta llegar al metro, asociando la cantidad de ceros con el exponente de la potencia y relevando la idea de la distancia que se puede trabajar con estas potencias de 10.

Unidad de medida	Escritura completa	Escritura abreviada: potencia	Mediciones concretas
Petámetro (aprox. 1 año luz)	1 000 000 000 000 000 m aproximadamente	10^{15}	
Terámetros	1 000 000 000 000 m	10^{12}	
Gigámetro	1 000 000 000 m	10^9	
Megámetro	1 000 000 m	10^6	
Kilómetro	1 000 m	$10 \cdot 10^2 = 10^3$	
Hectómetro	100 m	$10 \cdot 10 = 10^2$	
Decámetro	10 m	10^1	
Metro	1 m	10^0	

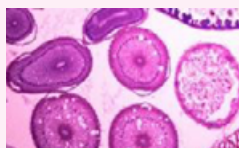
Para ampliar el conocimiento e introducir el concepto de potencias con exponente negativo, la o el docente podría realizar las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Cuál es la distancia utilizada diariamente?
- ▶ ¿Podrías medir la distancia de un sol a otro en kilómetros? ¿Cómo harías los cálculos?
- ▶ ¿Qué pasa con las cantidades inferiores a un metro?
- ▶ ¿Qué te imaginas más pequeño que un centímetro?
- ▶ ¿Cómo anotamos las distancias menores a un metro?

Puede explicar la notación y las potencias por medio de la multiplicación y la división, destacando el uso de unidades de medidas de uso diario como el milímetro, el centímetro, el metro o el kilómetro. También, explicar la cantidad de veces que se repite un metro en un kilómetro por medio de la frase un kilómetro son **1 000** metros, lo cual se puede escribir como **1 km = 1 000 m** o en potencias como **1 km = 10³ m**.

En el caso de grandes cantidades, se debe especificar que no es óptimo determinar la distancia del Sol a otra estrella en kilómetros y que es preferible el uso de potencias como el megámetro, el gigámetro o el año luz. Relevar que, para hacer los cálculos, los científicos utilizan las potencias, ya que es más fácil trabajar con estas y se “ahorran ceros”.

A continuación, la o el docente explica desde las grandes cantidades a las pequeñas distancias comenzando con el metro, hasta llegar a las medidas relacionadas con la nanotecnología. Esto dará sentido a la medida y al uso de las potencias a nivel científico.

Unidad de medida	Escritura completa	Escritura abreviada: potencia	Mediciones concretas
Metro	1 m	10 ⁰ m	
Decímetro	0,1 m	$\frac{1}{10} = 10^{-1}$ m	
Centímetro	0,01 m	$\frac{1}{100} = 10^{-2}$ m	
Milímetro	0,001 m	$\frac{1}{1\ 000} = 10^{-3}$ m	
Micrómetro	0,000001 m	$\frac{1}{1\ 000\ 000} = 10^{-6}$ m	
Nanómetro	0,000000001 m	$\frac{1}{1\ 000\ 000\ 000} = 10^{-9}$ m	
Picómetro	0,000000000001 m	$\frac{1}{1\ 000\ 000\ 000\ 000} = 10^{-12}$ m	Estructura atómica de la materia 
Femtómetro	0,0000000000000001 m	$\frac{1}{1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000} = 10^{-15}$ m	
Attómetro	0,000000000000000001 m	$\frac{1}{1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000} = 10^{-18}$ m	

Relacionar las potencias de diez con las medidas de pequeños elementos y la división con las potencias de enteros negativos. Luego, explicar la construcción del siguiente esquema para resumir lo que se ha visto hasta ahora sobre la representación de magnitudes por medio de potencias, decimales y fracciones.

- **Potencias con exponentes positivos de 10:**

$$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$$

$$10^9 = 1\,000\,000\,000$$

$$10^6 = 1\,000\,000$$

$$10^3 = 1\,000$$

$$10^2 = 100$$

$$10^1 = 10$$

$$10^0 = 1$$

- **Potencias con exponentes negativos de 10:**

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^{-2} = 0,01$$

$$10^{-3} = 0,001$$

$$10^{-6} = 0,000001$$

$$10^{-9} = 0,000000001$$

PRÁCTICA GUIADA

Para guiar la representación de la multiplicación y la división por múltiplos de 10 usando las potencias y la notación científica, se sugiere resolver un problema asociado a los medicamentos homeopáticos de manera directa, por ejemplo:

¿Cuál es la cantidad de la sustancia activa en un medicamento homeopático?



¿Cómo se podría escribir en notación científica?

Los medicamentos homeopáticos vienen en diferentes denominaciones de potencias, las cuales tienen relación con la dilución y la agitación en el proceso de elaboración. Mientras mayor potencia tenga el medicamento, tendrá una mayor dilución de la sustancia activa a nivel molecular. Por ejemplo, en las potencias homeopáticas D_{24} (donde “D” indica una escala de potencias de 10) o C_{12} (donde C indica una escala de potencias de 100) se alcanza una relación de dilución de $1:10^{24}$, lo que quiere decir que hay 1 parte de sustancia activa en 10^{24} partes de la solución; algo así como una gota de sustancia activa en una piscina olímpica. Así la sustancia activa de un medicamento homeopático depende de la potencia en la cual se ha clasificado el producto, por ejemplo, D_4 o C_2 alcanza una relación de $1:10^4$ lo que significa que hay una parte de la sustancia activa en 10 000 partes de solución. En otras palabras, una gota de sustancia activa en medio litro de solución.

Para guiar la evaluación de procesos y la comprobación de resultados en la resolución de problemas, se sugiere trabajar con problemas de estimación con números grandes. El objetivo no es representar números exactos, pero sí potencias exactas, es decir, identificar y representar órdenes de magnitud. Para esto se consideran los problemas de Fermi y un trabajo sin calculadora que permita trabajar la habilidad de estimar, el redondeo con sensatez y la rigurosidad en la escritura científica que favorecerá la comparación de las magnitudes obtenidas.

El almacenamiento digital



Cuando compras una memoria USB, disco duro o celular, la capacidad de almacenamiento se expresa en potencias de 10:

$$1 \text{ kilobyte (KB)} = 10^3 = 1\,000 \text{ bytes}$$

$$1 \text{ megabyte (MB)} = 10^6 = 1\,000\,000 \text{ bytes}$$

$$1 \text{ gigabyte (GB)} = 10^9 = 1\,000\,000\,000 \text{ bytes}$$

$$1 \text{ terabyte (TB)} = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000 \text{ bytes}$$

Por ejemplo, si tienes una memoria de 256 GB, significa que puede almacenar aproximadamente:

$$256 \cdot 10^9 = 256\,000\,000\,000 \text{ bytes.}$$

Una empresa necesita almacenar 5 copias de una base de datos, y cada copia ocupa 3,2 gigabytes (GB). Si el servidor tiene una capacidad total de 1 terabyte (TB): ¿Cuántas copias completas puede almacenar como máximo sin superar su capacidad? Expresa los cálculos utilizando potencias de 10.

PRÁCTICA
INDEPENDIENTE

Se sugiere hacer un trabajo personal de desarrollo de un problema de Fermi que al terminar se presentará al curso. Para ello, sugiera las siguientes consideraciones:

- Estimar algunos tamaños.
- Calcular sin calculadora y usando la notación científica.
- Utilizar Internet para la investigación.
- Prestar especial atención a la conversión correcta de las unidades de superficie y volumen.

Algunas ideas para desarrollar son:

- La distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente $1,5 \cdot 10^8$ km. Si una nave viaja a $3 \cdot 10^4 \frac{km}{h}$: ¿Cuánto tardaría en llegar al Sol?
- Una bacteria mide aproximadamente $2 \cdot 10^{-6}$ metros de longitud. ¿Cuántas bacterias caben en un centímetro?
- Si un país tiene una deuda de $2,3 \cdot 10^{12}$ dólares y su población es de $3,3 \cdot 10^8$ personas: ¿Cuál es la deuda promedio por persona?
- Un archivo de $8 \cdot 10^9$ bytes se transfiere por Internet a una velocidad de $2 \cdot 10^6$ bytes por segundo. ¿Cuánto tiempo tarda en descargarse?
- Una solución contiene una sustancia activa en concentración $5 \cdot 10^{-4}$ gramos por mililitro. ¿Cuántos gramos hay en 250 ml?

Para retroalimentar la actividad y el aprendizaje de la representación y de resolver problemas relacionados con potencias, se sugiere utilizar la lista de chequeo con los siguientes criterios:

LISTA DE CHEQUEO		
	Logrado	Todavía puedo mejorar
CRITERIO 1: Escribir información utilizando la notación científica.	☐	☐
CRITERIO 2: Transferir la multiplicación o la división de múltiplos de 10 a potencias.	☐	☐
CRITERIO 3: Resolver problemas utilizando la notación científica.	☐	☐
CRITERIO 4: Estimar, multiplicar y dividir utilizando las potencias.	☐	☐

<https://www.curriculumnacional.cl/porta/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Representación	Escribe potencias.	Transfiere información a notación científica.	Transfiere información a notación científica, identificando el sentido de la potencia en base 10.
	multiplica y divide por múltiplos de 10 usando la calculadora.	Identifica la multiplicación por múltiplos de 10 con la notación en potencias de base 10 y exponente positivo.	Relaciona la multiplicación por múltiplos de 10 con la notación en potencias de base 10 y exponente positivo y la división por múltiplos de 10 con la notación en potencias de base 10 y exponente negativo.
Resolver problemas	Describe la información entregada utilizando alguna potencia.	Trabaja la información utilizando las potencias y la notación científica.	Trabaja la información utilizando las potencias y la notación científica y da respuesta a la pregunta planteada.
	Estima situaciones entregando la información en palabras.	Estima situaciones entregando la información en notación científica.	Estima situaciones entregando la información inicial y la respuesta en notación científica.
Contextos	Reconoce similitudes en los contextos de las unidades de medida para la longitud.	Reconoce similitudes en diferentes contextos y utiliza las nociones de grandes número.	Reconoce similitudes en diferentes contextos y transfiere según corresponda las nociones de grandes o pequeños números.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares

Para desarrollar la habilidad de representar el mismo contenido, en este caso las potencias, se sugiere comenzar con lo que ya saben, con multiplicar y dividir por 10, realizando un recorrido desde los grandes números a los más pequeños, utilizando en este caso, las grandes o pequeñas distancias y sus unidades de medida. No es necesario que los y las estudiantes se aprendan estos nombres de memoria o que hagan transferencia entre las unidades de medida, pero sí es importante que conozcan y reconozcan cómo se utilizan las potencias y sus beneficios para hacer estimaciones en situaciones locales o globales. La notación en potencias implica ampliar el lenguaje matemático e incluir la base y el exponente como elementos que la definen.

Actitudes

Para apoyar el desarrollo de la actitud de valorar las TIC como una oportunidad, se sugiere utilizar la calculadora en los momentos que se indiquen. Puede ser al final de la práctica independiente y solo como medio para aclarar las comparaciones que se realizan luego de la estimación de las cantidades. En esta actividad, valorar el uso de la calculadora significa verla como un apoyo para verificar las ideas y no como un medio para realizar los cálculos. Por otra parte, el investigar para obtener estimaciones en los problemas tipo Fermi significa valorar las TIC como medios para obtener información de lugares, personas y objetos. Para apoyar la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar las ideas, se sugiere invitar a consultar en enciclopedias o Internet, para así mejorar las estimaciones realizadas en primera instancia.

Orientaciones para
organizar e implementar
el trabajo personal

Se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal:

Independencia	Pensar las soluciones y los caminos para obtener resultados por cuenta propia.
Confiar en lo que se sabe	Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otras personas.
Trabajar a su propio nivel	En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar a ritmo propio.
Practicar la autorregulación	Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento pedir ayuda directa a un compañero o la o el docente.

Anexo

SITUACIÓN 1
Problemas de cálculo

Los siguientes problemas se pueden resolver sin necesidad de una calculadora. Solo hay que sumar o restar los exponentes. Sin embargo, puede usarla para comprobar el resultado. Determina el resultado exactamente a un dígito.

- ¿Cuántos segundos hay en un día?
- ¿Cuántos corpúsculos contienen 6 litros de sangre si en promedio 1 mm³ contiene 5 millones corpúsculos?
- Si 12 g de carbono contienen $6,02 \cdot 10^{23}$ partículas. ¿Cuántas partículas contiene 1 kg de carbono?
- 3 cm³ de agua contienen 10^{23} partículas. ¿Cuántas partículas contiene un litro de agua?
- Un cable de fibra óptica mide $3,2 \cdot 10^6$ milímetros de largo. ¿Cuál es su longitud en kilómetros?

SITUACIÓN 2
Puntos de apoyo
en lo concreto

Crea una lista que muestre diferentes longitudes, desde 0,1 milímetros (mm) hasta 100 000 kilómetros (km). Para cada una, busca un ejemplo u objeto del mundo real que tenga aproximadamente ese tamaño.

Por ejemplo:

- 0,1 mm → Grosor de una hoja de papel.
- 1 mm → Diámetro de la punta de un lápiz mecánico.

Continúa con otras unidades (1 cm, 10 cm, 1 m, 10 m, etcétera) y, en cada caso, escribe un objeto representativo. Esta actividad te ayudará a entender la escala de los tamaños y cómo usamos potencias de 10 para expresarlos.

SITUACIÓN 3 La leyenda del ajedrez y las potencias de 2

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram.



En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente consternado. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un buen día un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: el ajedrez.

Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado: jugó y jugó y su pena, en gran parte, desapareció. Sissa lo había conseguido. Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que, como recompensa, pidiera lo que deseara.

— Sissa, quiero recompensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado —dijo el rey.

El sabio contestó con una inclinación.

— Soy bastante rico como para poder cumplir tu deseo más elevado —continuó diciendo el rey—. Di la recompensa que te satisfaga y la recibirás.

Sissa continuó callado.

— No seas tímido —le animó el rey—. Expresa tu deseo. No escatimaré en nada para satisfacerlo.

— Grande es tu magnanimidad, soberano. Pero concédeme un corto plazo para meditar la respuesta. Mañana, tras maduras reflexiones, te comunicaré mi petición.

Cuando al día siguiente Sissa se presentó de nuevo ante el trono, dejó maravillado al rey con su petición, sin precedente por su modestia.

— Soberano —dijo Sissa—, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez.

— ¿Un simple grano de trigo? —contestó admirado el rey.

— Sí, soberano. Por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32...



Luego de leer el cuento:

- calcula la cantidad y masa de trigo que se obtiene en la última casilla;
- calcula el largo del tren que tendría que cargar todo el trigo;
- compara el largo del tren con la circunferencia de la Tierra.

Actividad de desempeño

4

Propósito

En esta actividad se busca que las y los estudiantes realicen una conjetura sobre la forma de escribir y encontrar un valor determinado utilizando las potencias y, luego, hallar fundamentos que validen o refuten la conjetura planteada. En este camino hacia la comprensión las y los estudiantes construyen nuevas propiedades y las aplican en problemas que tienen diferentes niveles. Se espera que esto se convierta en un procedimiento rutinario y que las propiedades sean utilizadas como fundamentos para futuras conjeturas.

Objetivos de aprendizaje

OA 5

Fundamentar conjeturas usando conocimientos matemáticos, trabajando colaborativamente. **(Argumentar y Comunicar)**

Conocimientos esenciales

- Potencias y sus propiedades.
- Raíces y potencias.

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

Se sugiere realizar un diagnóstico previo para organizar la actividad y al grupo curso según sus diferentes niveles, para esto se puede utilizar los siguientes criterios para este nivel de EPJA:

- Reconocer la propiedad de la conmutatividad de la multiplicación en ejemplos directos.
- Aplicar la distributividad en ejemplos directos.
- Multiplicación y división de enteros.
- Operatoria básica con decimales.
- Potencias de base 10 con exponente entero.
- Notación científica.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta la situación de crecimiento de la levadura de hongos, indicando que las levaduras son organismos unicelulares que desempeñan un papel importante en la fase inicial de la producción de alimentos y bebidas alcohólicas. En determinadas condiciones, las células de levadura de hongos se multiplican tan rápidamente que a la primera hora la masa duplica su volumen.

Conexión interdisciplinar
Ciencias Naturales
OA 1 Nivel 1 EM



El o la docente les pide conjeturar sobre la expresión matemática que permite determinar el volumen de la masa, transcurrida una media hora. Algunas preguntas que pueden apoyar la elaboración de una conjetura para este caso son:

- ▶ ¿Cuáles son las condiciones iniciales?
- ▶ ¿Qué significado tiene la base de la potencia?
- ▶ ¿Qué significado tiene el exponente de la potencia?
- ▶ ¿Cómo expresamos el crecimiento del volumen de la masa en dos horas?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para introducir la relación entre las potencias y raíces se sugiere encontrar fundamentos para la conjetura realizada anteriormente y que permite expresar el volumen de la masa cuando ha transcurrido una media hora. Para esto, comience con la base de la potencia, en este caso ya no es de base **10**, es base **2** y establezca la diferencia con la cantidad inicial de masa. Se sugiere considerar **9,6 mg** de masa para notar la diferencia entre la potencia, la variable, en este caso el tiempo en horas, y la constante.

La tabla que se presenta a continuación tiene un orden lineal. Se sugiere comenzar según las respuestas entregadas por la clase, deteniéndose en los conceptos nuevos, esto podría significar que se comience con la segunda o tercera fila.

Tiempo en horas	Masa	Escritura en potencias	Frases de apoyo a la construcción del conocimiento
0	9,60 mg	$9,60 \cdot 2^0 = 9,60$	▶ Propiedad de $2^0=1$ ▶ Base 2, se duplica. ▶ Exponente 0, no ha transcurrido el tiempo aún, inicio.
$\frac{1}{2}$	13,55 mg	$9,60 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \approx 13,55$	▶ Propiedad de $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, en general definir $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ▶ Base 2, se duplica la masa. ▶ Exponente $\frac{1}{2}$, ha transcurrido media hora
1	19,20 mg	$9,60 \cdot 2^1 = 19,20$	▶ Propiedad de $2^1 = 2$ ▶ Base 2, se duplica la masa ▶ Exponente 1, ha transcurrido una hora.
2	38,40 mg	$\begin{aligned} 9,60 \cdot 2^1 \cdot 2^1 \\ &= 9,60 \cdot 4 \\ &= 9,60 \cdot 2^2 \\ &= 38,40 \end{aligned}$	▶ Propiedad de $2^1 = 2$ ▶ Propiedad de $2^1 \cdot 2^1 = 2^2$ ▶ Base 2, se duplica la masa, se cuadruplica luego de dos horas. ▶ Exponente 2, han transcurrido dos horas.

PRÁCTICA GUIADA Para elaborar los fundamentos y lograr la comprensión de las y los estudiantes de estas ideas matemáticas, se sugiere una explicación que siempre refiera a la definición de la potencia, es decir, señalar que el exponente indica cuántas veces se multiplica la base con ella misma y haciendo un énfasis en los casos de exponente negativo, donde su significado será dividir según la base y especificando el caso especial de exponentes fraccionarios, donde se debe extraer raíz.

En la siguiente tabla se presenta un resumen de las posibles preguntas que orientan el proceso de aprendizaje guiado.

Propiedad	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^6 \cdot 3^5 = 3^{6+5} = 3^{11}$	▶ ¿De qué forma se puede obtener esta propiedad? ▶ ¿Sirve para todos los exponentes? ▶ ¿Para qué se aplica esta propiedad?
Explicación detallada en un ejercicio numérico		
$4^3 \cdot 4^5 = 4^{3+5} = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^8$		
Propiedad 2	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(7^3)^2 = 7^{3 \cdot 2} = 7^6$	¿En qué casos se utiliza esta propiedad?
Propiedad 3	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$a^n \div a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$4^5 \div 4^7 = \frac{4^5}{4^7} = 4^{5-7} = 4^{-2}$ $\frac{4^5}{4^7} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}$ $= \frac{1}{4 \cdot 4} = 4^{-2}$	▶ ¿De qué otra manera se puede obtener esta propiedad? ▶ ¿Sirve para todos los exponentes? ▶ ¿Para qué se aplica esta propiedad?
Propiedad 4	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1\ 000$	▶ ¿De qué otra manera puedo obtener el mismo resultado? ▶ ¿Qué otro ejemplo puedo dar? ▶ ¿Cómo se puede decir esto en palabras?
Propiedad 5	Ejemplificación numérica	Pregunta orientadora
$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$\frac{6^4}{3^4} = \left(\frac{6}{3}\right)^4 = 2^4 = 16$	¿Cuál es la diferencia con la propiedad anterior?
Aplicación directa en ejercicio numérico		
▶ a) $\frac{4^3}{7^3} = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343} \approx 0,187$ ▶ b) $\frac{15^5}{30^5} = \left(\frac{15}{30}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \approx 0,031$		
Casos especiales		
$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$ por lo tanto: $1^n = 1$		
$0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$ por lo tanto: $0^n = 0$		
0^0 no está definido		
$a^1 = a$ y $a^0 = 1$ con $a \neq 0$		

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Se sugiere hacer estaciones de trabajo para la comprensión de las propiedades aplicando a situaciones similares, para que describan con sus propias palabras y revisen las soluciones de manera autónoma. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Definición de potencia con exponente positivo hasta 3.	Tarjetas con imágenes de figuras que representen longitudes, áreas y volúmenes.	Tarjetas con imágenes de figuras que representen longitudes, áreas y volúmenes.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con imágenes y para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas.
Definición de potencia con exponente positivo.	Tarjetas con imágenes de situaciones que requieren de grandes números.	Identifica la base, el exponente y da significado a la potencia.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con imágenes y para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas.
Propiedad 1 Multiplicación de potencias de igual base.	Hoja con la explicación de la propiedad y tres ejemplos resueltos de forma detallada en tres niveles distintos de dificultad.	Resuelve seis ejercicios y verifica tus resultados con la hoja de solución, busca tus errores y corrígelos utilizando otro color de lápiz.	Sobre la pared se encuentra pegada la hoja con la explicación (tipo infografía) de la propiedad y en la mesa hay una hoja de trabajo con 9 ejercicios (3 de cada nivel), en otra parte de la pared se encuentran las soluciones.
Propiedad 2 Potencias de potencias.	Hoja con la explicación de la propiedad y tres ejemplos resueltos de forma detallada en tres niveles distintos de dificultad.	Resuelve seis ejercicios y verifica tus resultados con la hoja de solución, busca tus errores y corrígelos utilizando otro color de lápiz.	Sobre la pared se encuentra pegada la hoja con la explicación (tipo infografía) de la propiedad y en la mesa hay una hoja de trabajo con 9 ejercicios (3 de cada nivel), en otra parte de la pared se encuentran las soluciones.
Propiedad 3 División de potencias de igual base.	Tres tarjetas cada una con el desarrollo de un ejercicio y de diferentes niveles de dificultad.	Describe con tus propias palabras la propiedad utilizada y relaciona con las potencias de exponente negativo.	Sobre la mesa se encuentran las tarjetas y, además, una hoja de trabajo para que cada estudiante escriba su descripción de la propiedad y dé un ejemplo de la relación que tiene con las potencias de base negativa.
Propiedad 4 Multiplicación de potencias de igual exponente.	Hoja con la explicación de la propiedad y tres ejemplos resueltos de forma detallada en tres niveles distintos de dificultad.	Resuelve seis ejercicios y verifica tus resultados con la hoja de solución, busca tus errores y corrígelos utilizando otro color de lápiz.	Sobre la pared se encuentra pegada la hoja con la explicación (tipo infografía) de la propiedad y en la mesa hay una hoja de trabajo con 9 ejercicios (3 de cada nivel), en otra parte de la pared se encuentran las soluciones.
Propiedad 5 División de potencias de igual exponente.	Tres tarjetas cada una con el desarrollo de un ejercicio y de diferentes niveles de dificultad.	Describe con tus propias palabras la propiedad utilizada y relaciona con las potencias de exponente negativo.	Sobre la mesa se encuentran las tarjetas y, además, una hoja de trabajo para que cada estudiante escriba su descripción de la propiedad y dé un ejemplo de la relación que tiene con las potencias de base negativa.
Ejercicios combinados	Hoja de trabajo con distintos ejercicios en los que se combinan las propiedades y en tres niveles de dificultad.	Identifica la propiedad utilizada para resolver seis ejercicios. Verifica tus resultados con la hoja de solución, busca tus errores y corrígelos con un lápiz de otro color.	Sobre la mesa se encuentra una hoja de trabajo con 9 ejercicios (3 de cada nivel) y en otra parte de la sala está la hoja con las soluciones en las cuales aparece el fundamento de la propiedad utilizada y de cada paso para llegar a la respuesta.

Se sugiere hacer variaciones de estas estaciones relacionadas con el tipo de exponente. Comience con exponentes enteros positivos, continúe con enteros negativos y, luego, con exponentes fraccionarios.

Para retroalimentar la actividad y desarrollar la búsqueda de fundamentos se sugiere utilizar la diana:

Mueve el pin al nivel que corresponde para cada criterio.		● Excelente ● Bueno ● Medianamente logrado ● Puede mejorar
CRITERIO 1: Describo el significado de potencia para cualquier base y cualquier exponente.		
CRITERIO 2: Aplico la propiedad de la multiplicación en todos los casos.		
CRITERIO 3: Aplico la propiedad de la división en todos los casos.		
CRITERIO 4: Relaciono las raíces con las potencias.		

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN
FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

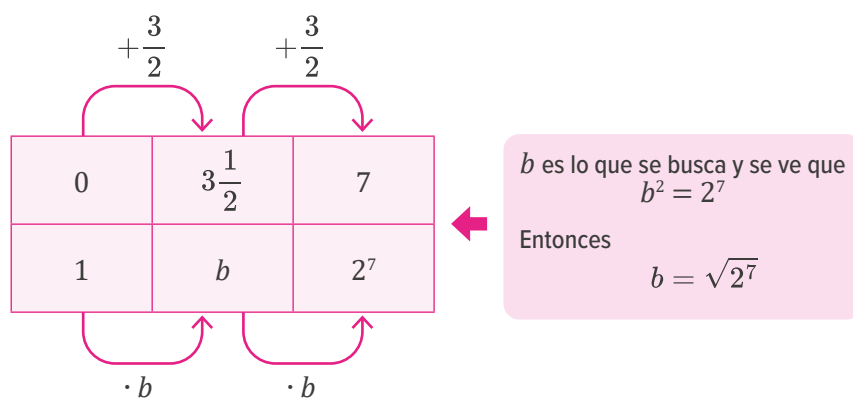
Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Potencias y sus propiedades	Aplica una propiedad.	Conoce y aplica las propiedades cometiendo algunos errores.	Conoce y aplica las propiedades de manera adecuada en diferentes niveles de dificultad.
	Calcula potencias en ejercicios variados aplicando las propiedades.	Calcula potencias en diferentes tipos de ejercicios numéricos.	Calcula potencias en diferentes tipos de ejercicios numéricos y contextualizados.
Raíz y potencia	Transfiere de potencia a raíz en algunos casos.	Transfiere de potencia a raíz y de raíz a potencias en algunos casos.	Transfiere de potencia a raíz y de raíz a potencias en todos los casos que sea necesario.
Contextos	Relaciona situaciones asociadas a exponentes positivos.	Relaciona situaciones asociadas a exponentes positivos y negativos.	Relaciona situaciones asociadas a exponentes positivos, negativos y racional.

Orientaciones al docente

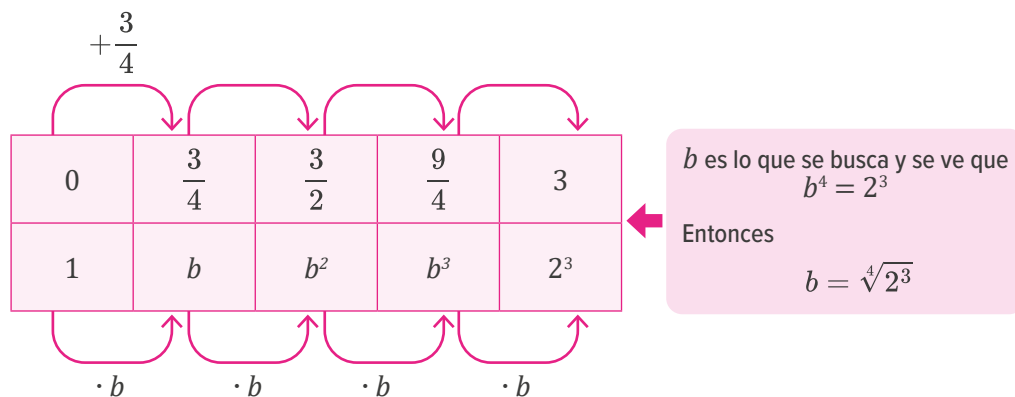
Para unificar conceptos disciplinares

Entenderemos que la habilidad de argumentar requiere de varios procesos previos, entre ellos la búsqueda de fundamentos para validar o refutar una conjetura. En este caso la actividad busca presentar y utilizar las propiedades como fundamentos para validar una conjetura inicial. La aplicación de las propiedades en diferentes problemas permitiría comprenderlas para, luego, utilizarlas en la resolución de problemas o en las explicaciones y también en procesos más complejos como la argumentación.

Se sugiere transferir la situación del crecimiento de media hora de la levadura de hongos a una situación más compleja. Pregunte qué pasaría luego del crecimiento inicial de $3\frac{1}{2}$ horas y comenzando con un volumen de 1 cm^3 , utilizando potencias conocidas, como se ve en el esquema para responder, que después de 3 horas y media el tamaño de la levadura es de aproximadamente $11,31 \text{ cm}^3$.



En la misma dirección se sugiere explicar la transferencia a otras potencias fraccionarias, como $\frac{3}{4}$. Utilice el mismo ejemplo de la levadura.

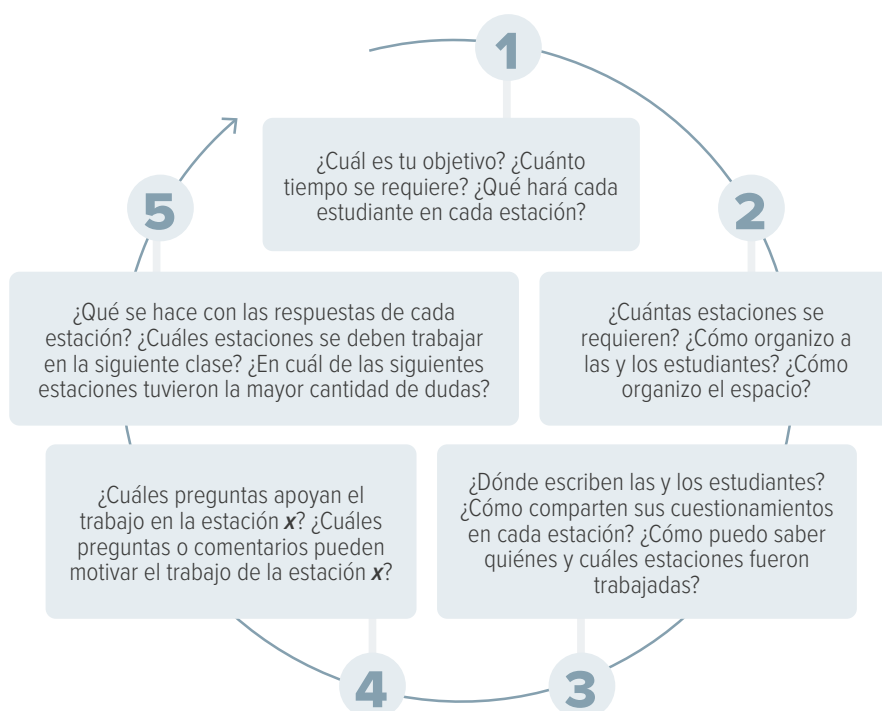


Actitudes

Luego del trabajo personal y para apoyar el desarrollo de la actitud de trabajo colaborativo, se sugiere compartir los resultados y ofrecer momentos para explicar entre ellos la forma de abordar los problemas de las estaciones.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones

Se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Anexo

SITUACIÓN La salmonela

Por la mañana, Juan había comido una hamburguesa en la ciudad. Por la noche se sintió muy débil. A la mañana siguiente presentaba síntomas como diarrea, vómitos y fiebre. El médico al que llamaron diagnosticó una intoxicación alimentaria. La carne picada se había contaminado con bacterias. Era salmonela (Salmonella).



Fuente: wikipedia.org

La salmonela solo se elimina con una cocción o fritura prolongada. Por lo tanto, existe riesgo de infección cuando se comen huevos y productos cárnicos crudos o calentados brevemente. Es especialmente arriesgado si los alimentos que contienen salmonela se dejan en una habitación caliente. Dado que el número de bacterias se duplica cada hora, diez bacterias pueden convertirse en diez millones de bacterias en pocas horas, una cantidad que puede ser mortal.

Utiliza las potencias para encontrar la cantidad de bacterias de salmonela luego de $5\frac{3}{4}$ h. Considera que al inicio hay solo una bacteria.

Módulo Obligatorio 2

Visión panorámica

Gran idea

Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.

Objetivos de aprendizaje

OA 2

Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA 4

Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Productos notables.
 - Función y ecuación cuadrática.
-

Tiempo estimado: 6 semanas (24 horas)

Propósito

En el módulo 2 de la asignatura de matemática del Nivel 1 de Educación Media, se espera que los y las estudiantes comprendan que **las funciones, las expresiones algebraicas y los procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambios en diferentes ámbitos de nuestra realidad**. Describen el mundo con sus propias palabras y complementan para precisar, objetivar y predecir fenómenos y comportamientos cercanos con modelos y soluciones obtenidas por medio de la matemática.

Los Objetivos de Aprendizaje del Módulo 2 están orientados al desarrollo de las habilidades de representar, modelar y resolver problemas. En este contexto, cada estudiante selecciona y ajusta modelos de función cuadrática de acuerdo con las características del fenómeno o la situación planteada. Asimismo, evalúan la pertinencia del modelo utilizado, comparándolo con otros modelos posibles y con la realidad, identificando sus limitaciones y realizando ajustes razonados cuando corresponde.

Además, exploran la variación de los parámetros de funciones cuadráticas y de expresiones algebraicas —como los productos notables— para analizar los cambios en los resultados, resolver ecuaciones cuadráticas y comparar distintas estrategias de solución. La habilidad de representar se fortalece mediante la transformación entre distintos

registros: desde expresiones algebraicas a gráficos o tablas, y viceversa.

Finalmente, resuelven problemas aplicando la fórmula general de la ecuación cuadrática, evalúan el proceso seguido y verifican la validez de sus resultados y soluciones. Consolidan así un enfoque reflexivo y crítico frente a los procedimientos utilizados.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 2 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar y las Herramientas para trabajar, promoviendo la perseverancia en torno a metas individuales o grupales, la postura razonada y relacionada con el sentido de realidad para ajustar o evaluar modelos y regresando siempre a la situación real para dar una respuesta. Este módulo desarrolla en las y los estudiantes el pensamiento proactivo, especialmente para enfrentar lo nuevo, y el pensar con flexibilidad para reelaborar las ideas propias o las de otros. Este módulo promueve la valoración de las TIC como un medio para obtener información y trabajar la información para obtener nuevas representaciones, imágenes visuales del comportamiento de las situaciones y fenómenos de la realidad. De esta forma, cada estudiante aprenderá, explorará y describirá el mundo funcionalmente para comprender contextos locales o globales, personales, familiares, científicos, profesionales o lúdicos.

Ruta de Aprendizaje

Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.

●	Actividad de desempeño 1	Seleccionan y ajustan modelos asociados a la función cuadrática según diferentes fenómenos, transitando entre los diferentes niveles de representación.
●	Actividad de desempeño 2	Varían los parámetros de la función cuadrática, amplificando ax^2 , sumando una constante ax^2+c o bien $(x+b)^2$; $(x-b)^2$ para visualizar los efectos gráficamente y evaluar los modelos según la situación.
●	Actividad de desempeño 3	Representan y evalúan modelos comparándolos entre sí para resolver problemas y determinar soluciones utilizando los productos notables.
●	Actividad de desempeño 4	Resuelven problemas evaluando el proceso de ecuaciones cuadráticas y comprobando resultados.

Actividad de desempeño

1

Propósito

Esta actividad busca que los y las estudiantes modelen una situación utilizando la función cuadrática y así comprendan la relación que existe entre la expresión algebraica, su gráfico y la situación. La actividad también considera la aplicación a situaciones similares, geométricas o sin contexto, para dar seguridad en la transferencia del nuevo conocimiento. Esta actividad comienza con el escenario de una caída libre con aceleración, como la de un clavadista, y sin aceleración, como la de los paracaidistas, para continuar con contextos geométricos.

Objetivos de aprendizaje

OA 2

Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

Conocimientos esenciales

Función cuadrática; Expresiones del tipo $f(x)=x^2$ y $f(x)=a \cdot x^2$.

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico relacionado con:

- Multiplicar racionales negativos.
- Elaborar tablas de valores a partir de la expresión algebraica de la función lineal y viceversa.
- Describir las características de la función lineal, pendiente e intersecciones con el eje x e y.
- Resolver ecuaciones lineales sencillas comprendiendo la relación con el gráfico de la función.
- Utilizar la calculadora para encontrar el valor de una potencia.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta la situación de caída libre con aceleración, con la cual se puede construir la función cuadrática y contrastarla con la función lineal de caída libre sin aceleración.

Conexión interdisciplinar

Ciencias Naturales
OA 1 Nivel 1 EM

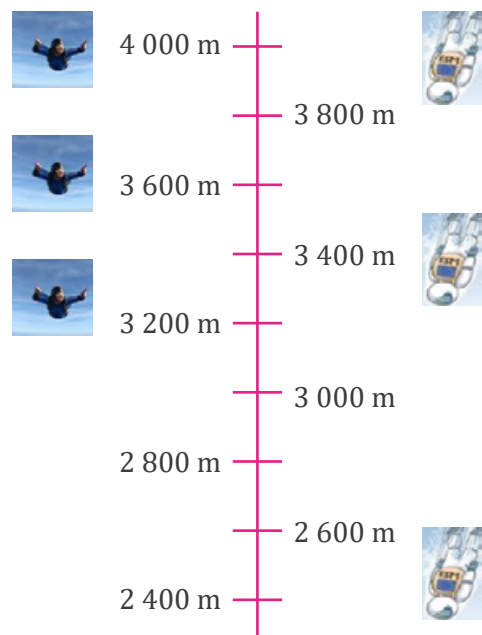


Algunas de las preguntas que pueden promover el levantamiento del problema y de sus posibles condiciones son:

- ▶ ¿Qué diferencias hay en las imágenes?
- ▶ ¿Podemos describir la caída con una función lineal?
- ▶ ¿Cómo tendríamos que elegir la pendiente y la intersección con el eje y?
- ▶ ¿De qué otra manera podríamos representar la caída?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para construir el conocimiento, se sugiere comparar las situaciones lineales y cuadráticas por medio de los valores y las características que hagan notar que, por ejemplo, el cambio de posición es constante cuando la caída es sin aceleración, y es creciente cuando la caída es con aceleración. Destaque que la linealidad se relaciona con lo proporcional y lo cuadrático responde a una multiplicación por la misma variable. Por ejemplo, en el esquema, a la izquierda se ve un paracaidista en la fase de velocidad constante, sin aceleración, y a la derecha se ve un paracaidista que, debido a su posición corporal, aumenta la velocidad y desciende con aceleración. La secuencia de fotos en columnas muestra posibles posiciones de la caída en iguales lapsos de tiempo.



Explique la primera columna como un movimiento rectilíneo uniforme (MRU), donde en tiempos iguales el paracaidista caería distancias iguales. Este movimiento se modela con una función lineal. La segunda columna muestra un movimiento rectilíneo uniforme acelerado (MRUA), donde en tiempos iguales la velocidad aumenta en cantidades iguales, por lo que las distancias recorridas aumentan cuadráticamente. Este movimiento se modela con una función nueva, denominada cuadrática.

Función lineal:

<i>x</i>	10	20	30
<i>y</i>	200 metros recorridos	400 metros recorridos	600 metros recorridos
$f(t) = 20 \cdot t$			

Función cuadrática:

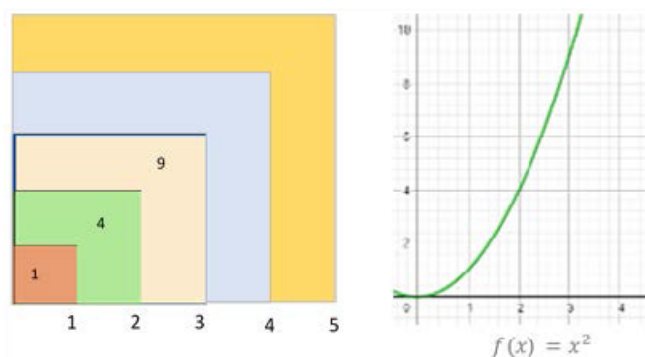
<i>x</i>	10	20	30
<i>y</i>	200 metros recorridos	800 metros recorridos	1 800 metros recorridos
$f(t) = 2 \cdot t^2$			

Destaque las simplificaciones que se han realizado a ambos modelos, indicando que responde a partes de una verdadera caída y a deportes que tienen diferentes características físicas de vuelo. Se sugiere representar ambos modelos en un mismo gráfico para hacer notar las diferencias entre lo lineal y lo cuadrático. También, es recomendable explicar el factor 2 y el 20 en cada una de las expresiones algebraicas que definen la función.

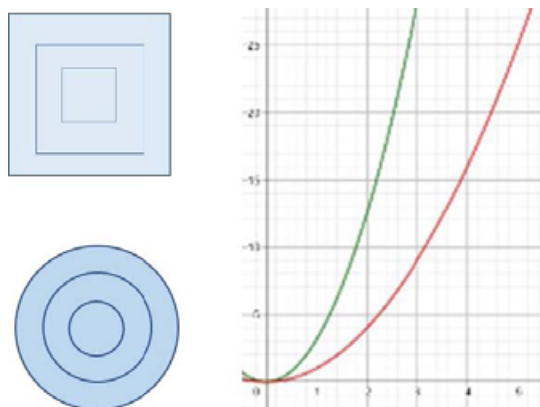
PRÁCTICA GUIADA

Se sugiere dividir la práctica guiada en dos partes. La primera para ejemplificar la función cuadrática sencilla $f(x)=x^2$ y la segunda para explicar el factor que podría acompañar la expresión algebraica de la función $h(x)=a \cdot x^2$. Para que los y las estudiantes tengan una situación cercana y conocida para elaborar la tabla y el gráfico de la función $f(x)=x^2$, relacione el origen de la función con el vértice de la parábola, y el área de los cuadrados según su lado.

x	1	2	3	4	5	0,5	1,2	2,2
$f(x)$	1	4	9	16	25	0,25	1,44	4,84



En la segunda parte, se sugiere explicar las funciones cuadráticas del tipo $h(x)=ax^2$ presentando el gráfico de dos funciones f y h del área de un cuadrado en dependencia de su lado x y el área de un círculo en dependencia del radio x .



Se sugiere elaborar la tabla de la función f verificando que corresponde al área del cuadrado, explicando la relación con la expresión simbólica $f(x)=x^2$ de esta función. Trabajar en el intervalo $[0,4]$ y en tramos de 0,5 unidades. Explicar el gráfico rojo como la representación de la función f del área del cuadrado, porque se pueden registrar los puntos $(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16)$ y puntos intermedios, como $(2,5, 6,25)$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16

Se recomienda elaborar la tabla de la función h verificando que corresponde al área del círculo, explicando la relación con la expresión simbólica de esta función. Trabajar en el intervalo $[0,4]$ en tramos de 0,5 unidades y una aproximación de $\pi=3$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$h(x)$	0	0,75	3	6,75	12	18,75	27	36,75	48
$h(x) = \pi x^2$									

Se sugiere explicar y comparar la elaboración de las funciones cuadráticas a partir de las tablas, teniendo presente que la expresión x^2 siempre está presente en las funciones cuadráticas.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	36	16	4	0	4	16	36

- $g(x) = 4 \cdot x^2$
- $g(1) = 4 = 4 \cdot 1^2$ para los demás valores de x se tiene la misma regularidad.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

- $h(x) = -1 \cdot x^2$
- $h(1) = -1 = -1 \cdot 1^2$ para los demás valores de x se tiene la misma regularidad.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$l(x)$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

- $l(x) = 0,5 \cdot x^2$
- $l(1) = 0,5 = 0,5 \cdot 1^2$. Para los demás valores de x se tiene la misma regularidad.

x	-4	-2	0	2	4
$m(x)$	24	6	0	6	24

- $m(x) = 1,5 \cdot x^2$
- $m(2) = 6 = 1,5 \cdot 2^2$. Para los demás valores de x se tiene la misma regularidad.

**PRÁCTICA
INDEPENDIENTE**

Se sugiere hacer un trabajo de estaciones para profundizar la comprensión de las relaciones entre la función en sí, la tabla de los valores de x con $f(x)$ y el gráfico. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Definición de la función cuadrática, distinguir de una relación, función lineal y otros.	Tarjetas con imágenes de funciones que representen funciones cuadráticas, lineales y otras que no sean función ni funciones de otro tipo.	Identifica si es función, marca el máximo y el mínimo; y si hay una simetría u otros elementos que te llamen la atención.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con imágenes y para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas. Para cada estación el o la docente tiene hojas con las respuestas correctas. Las entrega a cada estudiante que demuestra que terminó la estación.
Relación entre la tabla, la expresión algebraica de la función y los valores x y $f(x)$.	Tarjetas con tablas de funciones con unos 10 valores, con algunas celdas vacías. Otras tarjetas con las expresiones algebraicas de las funciones.	Relaciona la tabla con una función y completa los datos faltantes.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con tablas y otras con expresiones algebraicas de funciones. Para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas.
Relación entre la tabla y el gráfico de algunas funciones cuadráticas.	Tarjetas con tablas de funciones con unos 10 valores, con algunas celdas vacías. Otras tarjetas con gráficos de funciones.	Relaciona la tabla con el gráfico de una función y estima con este los valores que faltan. Verifica a través de cálculos.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con tablas y otras con los gráficos de las funciones. Para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas.
Relación entre la tabla y la expresión algebraica de la función cuadrática.	Tarjetas con expresiones algebraicas de distintas funciones cuadráticas. Otras tarjetas con los gráficos de las funciones.	Relaciona cada expresión funcional con el gráfico de una función. Estima con el gráfico tres valores y comprueba a través de cálculos.	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con expresiones funcionales de distintas funciones cuadráticas y otras con los gráficos de las funciones. Para cada estudiante hay una hoja de trabajo donde puede anotar sus respuestas.
Graficar a partir de funciones y tablas.	Tarjetas con expresiones funcionales y tablas de distintas funciones cuadráticas.	Grafica en un sistema de coordenadas los pares ordenados de la tabla y de la expresión funcional..	Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con tablas y expresiones funcionales cuadráticas. Para cada estudiante hay una hoja de trabajo con tablas y sistemas de coordenadas donde pueda dibujar y entregar sus respuestas.

Se sugiere hacer variaciones de estas estaciones relacionadas con los valores de x dados en las tablas. Comience con enteros positivos, continúe con enteros negativos y, luego, con los valores fraccionarios.

Para retroalimentar la actividad personal en las estaciones, se sugiere utilizar la retroalimentación escalera metacognitiva:

ESCALERA METACOGNITIVA	
¿Qué aprendí?	Función cuadrática: ecuaciones de distintas funciones cuadráticas, relación de x y el valor $f(x)$, tabla de valores y su gráfico.
¿Cómo lo aprendí?	A través de las estaciones, siguiendo los pasos, relacionando las tarjetas,- corrigiendo mis errores.
¿Qué me ha resultado más fácil, más difícil, más novedoso?	Dibujar, calcular, describir situaciones de la vida matemáticamente.
¿En qué otras ocasiones puedo usarlo?	Entender otras leyes de la naturaleza.

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN
FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Gráficos	Reconoce el gráfico de funciones lineales.	Reconoce el gráfico de funciones lineales.	Distingue funciones lineales de cuadráticas e identifica las cuadráticas de otras funciones no lineales.
Fuención cuadrática	Reemplaza valores en una función cuadrática $f(x)$, dando valores a x y reemplazando por otro valor en la expresión algebraica.	Calcula el valor $f(x)$ de una función cuadrática dada, dando valores a x y reemplazando a x por este valor.	Calcula el valor $f(x)$ de una función cuadrática cualquiera, dando valores a x y reemplazando a x por este valor y viceversa.
Tabla, gráfico y función	Reconoce la relación entre tabla y gráfico o de algunos casos particulares.	Reconoce la relación entre tabla, gráfico y expresión algebraica en la mayoría de los casos.	Transita entre expresión funcional, tabla y gráfico para cualquier función cuadrática.
Contextos	Relaciona situaciones asociadas a factores positivos.	Relaciona situaciones asociadas a factores positivos y negativos.	Relaciona situaciones asociadas a factores positivos, negativos y racional.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares

Entenderemos que representar una función significa transitar desde un registro tabular a un registro gráfico y viceversa, como también transitar desde la expresión funcional al gráfico, con o sin elaborar una tabla y transitar desde la tabla a la expresión funcional y viceversa, entendiendo que hay transiciones son más difíciles para los y las estudiantes que otras. La comprensión del entorno utilizando las funciones cuadráticas es un paso que se debe construir desde lo que ya se sabe, en este caso, la comparación con la función lineal y las nociones básicas de asignación, de cambio y de objeto matemático.

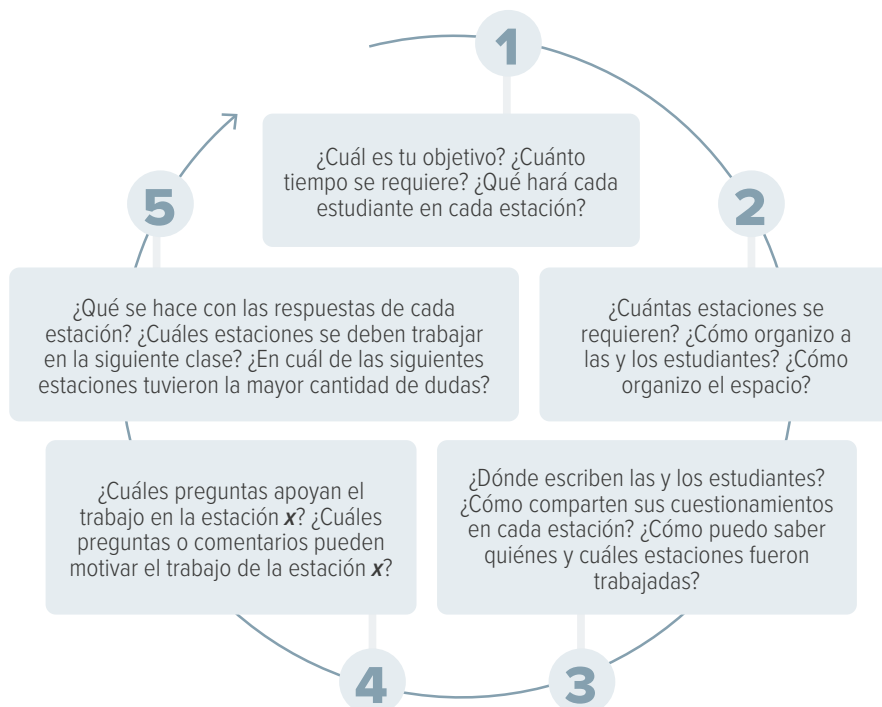
Se sugiere planificar un módulo cero que considere la operatoria con naturales, fracciones y decimales de los módulos anteriores, con foco en la identificación de datos dentro de un problema. También se sugiere incluir las proporciones directas y la función lineal que fueron trabajadas en el módulo 2 del Nivel 3 de Educación Básica, enfocándose principalmente en representar los datos y en modelar diferentes situaciones.

Actitudes

Para apoyar el desarrollo de la actitud de valorar las TIC como una oportunidad, se sugiere utilizar herramientas disponibles como graficadores online, calculadora e información disponible para completar conocimientos relacionados con la función cuadrática. Para desarrollar la perseveración en torno a metas, se recomienda elaborar tablas y gráficos con uso de medios tecnológicos, y de forma manual usando papel milimetrado. Procure retroalimentar la prolijidad del trabajo manual.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones

Se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Anexo

SITUACIÓN
¿usar o no usar
paréntesis?

¿Cuáles expresiones representan la misma función?

- $f(x) = -x^2$
- $g(x) = (-x)^2$
- $h(x) = x^2$

Conversen en parejas sobre el uso de paréntesis y el significado que tienen al elevar el cuadrado.

¿Será cierto que las expresiones $g(x) = (-x)^2$ y $h(x) = x^2$ representan la misma función porque $(-x)^2 = x^2$ y que esto se tiende a olvidar con facilidad?

Actividad de desempeño 2

Propósito

Esta actividad busca que los y las estudiantes modelen situaciones cuadráticas y evalúen los modelos obtenidos comparándolos entre sí, como también variar parámetros, condiciones iniciales y de los valores obtenidos por la función para comparar gráficamente los resultados. Esta actividad comienza con la aceleración de diferentes automóviles y la forma en que se describe el recorrido de ellos en una posible carretera, la forma en que influyen las condiciones iniciales en la expresión funcional como en la gráfica de la función cuadrática.

Objetivos de aprendizaje

OA 4

Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Función cuadrática; Expresiones del tipo $f(x) = ax^2$; $g(x) = x^2 + c$ y $h(x) = (x+b)^2$

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Orden de las operaciones con números racionales y las potencias de ellos.
- Uso de paréntesis en operatoria combinada y con potencias.
- Elaboración de tablas de valores y gráfico de funciones lineales.
- Elaboración de tablas de valores y gráfico de pares ordenados asociados a funciones cuadráticas simples.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta la situación de aceleración de automóviles y la descripción de la distancia recorrida según una función cuadrática, entendiendo que el factor de velocidad se obtiene al dividir en dos el factor de la función cuadrática. Se sugiere apoyar con imágenes y preguntas para sondear sobre los conocimientos intuitivos que se tienen sobre la aceleración.

Conexión interdisciplinar
Ciencias Naturales
OA 1 Nivel 1 EM



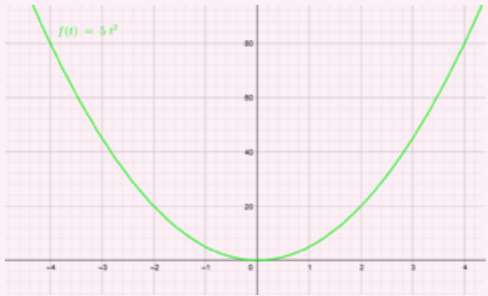
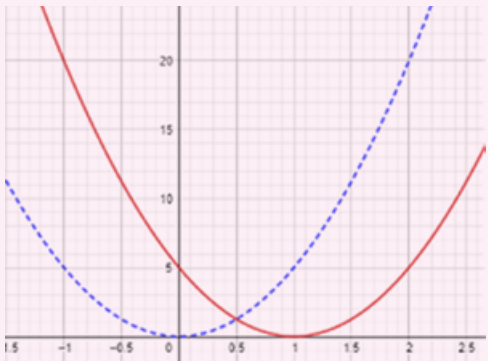
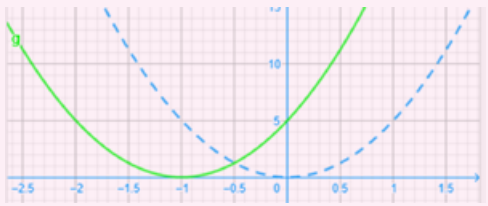
Algunas de las preguntas que pueden ayudar a la construcción del conocimiento podrían ser:

- ▶ ¿Qué ocurre cuando aceleramos?
- ▶ ¿Qué tanto podemos acelerar con estos medios de transporte?
- ▶ ¿Cómo afecta la aceleración a la distancia que se recorre?
- ▶ ¿Cómo podríamos describir la relación entre aceleramiento y distancia?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para introducir la evaluación de modelos de función cuadrática, se sugiere explicar la elaboración de gráficos y el significado del cambio de parámetros en la función, el gráfico y el contexto. En particular, se recomienda continuar con la aceleración según el tipo de auto y dentro de un rango aceptable de tiempo. En este caso es recomendable no pasar de los 10 segundos y considerar que la función que describe la distancia recorrida en términos del tiempo $f(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ implica que el auto inicie su movimiento desde el reposo, se verifica que para $t = 0$ se tiene $f(0) = 0$. Según el caso de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA), la aceleración a se mantiene si se excluye la resistencia del aire. En estas situaciones y para facilitar la comprensión, se sugiere entregar un factor de la parábola que ya incluya la aceleración del auto, según cada modelo. Esto permite trabajar las funciones sin incluir otros términos, como **0,5** de la fórmula de la aceleración.

Simplifique el modelo dejando fuera la resistencia del aire y cualquier efecto de equilibrio como la velocidad terminal. Tampoco considere las características del camino (material, por ejemplo, asfalto o nieve) ni su forma (curvas o rectas, subidas o bajadas).

Situación	Modelo	Gráfico de la función
Auto de carrera en la línea de partida 	$f(t) = 5t^2$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $f(t)$ es la distancia recorrida. ▶ 5 es el factor que incluye la aceleración del auto.	 Condiciones de la función: valores positivos
Auto de carrera 50 metros más atrás de la línea de partida con fines de entrenamiento.	$g(t) = 5t^2 - 50$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $g(t)$ es la distancia recorrida. ▶ 5 es el factor de aceleración del auto. ▶ -50 es la posición inicial, es decir, partir 50 metros más atrás de la línea de partida.	 Condiciones de la función: valores positivos
Dos autos de carreras del mismo modelo, uno parte un segundo después que el otro.	$f(t) = 5t^2$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $f(t)$ es la distancia recorrida. $h(t) = 5(t - 1)^2$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $h(t)$ es la distancia recorrida. ▶ -1 ha comenzado un segundo después que el otro. ▶ 5 es el factor de aceleración de ambos autos.	 Los efectos que se dan previo al momento de partida no son significativos en la situación
Dos autos de carreras del mismo modelo, uno parte un segundo antes que el otro.	$f(t) = 5t^2$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $f(t)$ es la distancia recorrida. $l(t) = 5(t + 1)^2$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $l(t)$ es la distancia recorrida. ▶ +1 ha comenzado un segundo antes que el otro. ▶ 5 es el factor de aceleración de ambos autos.	

Comparar

Cambios en las condiciones iniciales, comenzar detrás de la línea de partida.

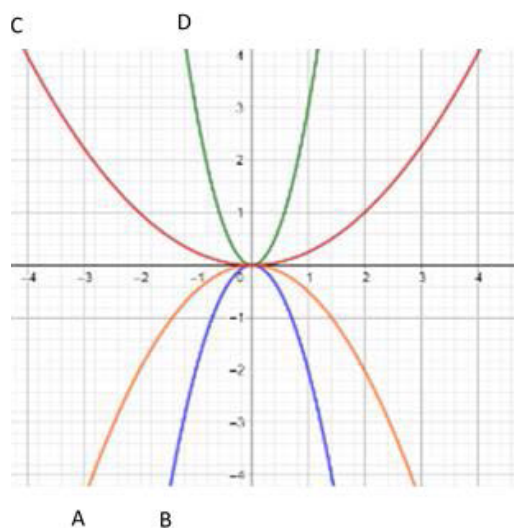
Efectos en la expresión funcional, tiene una constante negativa.

Movimientos del gráfico, traslación en sentido vertical, el vértice se desplaza **50 unidades**, en este caso, **50 metros** hacia abajo por el eje y , se obtiene $g(t)$.

Traslación del eje en sentido horizontal de la función $f(t)$ que está relacionado con el tiempo de partida, de **1 segundo** hacia la derecha o izquierda en el eje x , se obtiene la función $h(t)$ o $l(t)$.

PRÁCTICA GUIADA

En esta parte, se sugiere guiar la evaluación de modelos trabajando de manera abstracta, explicando diferentes problemas de variación de parámetros, en los que la constante es positiva o negativa, teniendo de referencia la función $f(x)=x^2$. Para esto, se recomienda considerar en el plano cartesiano los gráficos **A**, **B**, **C** y **D** de cuatro funciones cuadráticas y asignar las expresiones funcionales que correspondan.



- ▶ $f(x) = 3 \cdot x^2$
- ▶ $g(x) = -0,5 \cdot x^2$
- ▶ $h(x) = -2 \cdot x^2$
- ▶ $k(x) = 0,25 \cdot x^2$

- ▶ Explicar la asociación refiriéndose a la función $f(x) = x^2$ y con ejemplos de las justificaciones del tipo:
- ▶ El gráfico **A** representa la función g con $g(x) = -0,5 \cdot x^2$, porque es cóncavo hacia abajo tiene un factor a negativo. Se elige el factor $a = -0,5$, porque el gráfico es menos estrecho hacia la dirección negativa del eje y .
- ▶ El gráfico **B** representa la función h con $h(x) = -2 \cdot x^2$, porque es cóncavo hacia abajo tiene un factor a negativo. Se elige el factor $a = -2$, porque el gráfico es más estrecho hacia la dirección negativa del eje y .
- ▶ El gráfico **C** representa la función k con $k(x) = 0,25x^2$, porque es cóncavo hacia arriba tiene un factor a positivo. Se elige el factor $a = 0,25$, porque el gráfico es menos estrecho hacia la dirección positiva del eje y .
- ▶ El gráfico **D** representa la función f con $f(x) = 3x^2$, porque es cóncavo hacia arriba tiene un factor a positivo. Se elige el factor $a = 3$, porque el gráfico es más estrecho hacia la dirección positiva del eje y .

PRÁCTICA
INDEPENDIENTE

Se sugiere un trabajo individual con la tabla de comparación presentada en la construcción del conocimiento. En cada caso describa los modelos y grafique para describir lo que ha ocurrido con la gráfica inicial. Un posible listado de funciones que se pueden considerar es:

Medio de transporte	Modelo funcional
	$f(t) = 5,6t^2$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $f(t)$ es la distancia recorrida. ▶ Dar sentido a $k(t)$ que se obtiene al trasladar $f(t)$ en 3 unidades a la derecha en el eje x $k(t) = 5,6(t-3)^2$
	$f(t) = 4,8t^2$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $f(t)$ es la distancia recorrida. ▶ Dar sentido a $k(t)$ que se obtiene al trasladar $f(t)$ en -2 unidades a la izquierda en el eje x $k(t) = 4,8(t+2)^2$
	$f(t) = 10t^2$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $f(t)$ es la distancia recorrida. ▶ Dar sentido a $k(t)$ que se obtiene al trasladar $f(t)$ en 0,5 unidades a la derecha en el eje x $k(t) = 10(t-0,5)^2$
	$f(t) = 2t^2$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $f(t)$ es la distancia recorrida. ▶ Dar sentido a $k(t)$ que se obtiene al trasladar $f(t)$ en 200 unidades hacia abajo en el eje y $k(t) = 6,5t^2-200$
	$f(t) = 6,5t^2$ ▶ t es el tiempo transcurrido. ▶ $f(t)$ es la distancia recorrida. ▶ Dar sentido a $k(t)$ que se obtiene al trasladar $f(t)$ en 5 unidades hacia arriba en el eje y $k(t) = 6,5t^2+5$

Para retroalimentar la actividad y el aprendizaje de la evaluación de modelos relacionados con funciones cuadráticas, se sugiere utilizar la lista de chequeo con los siguientes criterios:

LISTA DE CHEQUEO		
	Logrado	Todavía puedo mejorar
CRITERIO 1: Puedo relacionar las formas de la parábola con el respectivo factor a.	☐	☐
CRITERIO 2: Puedo relacionar el traslado de la parábola en dirección vertical con el respectivo sumando.	☐	☐
CRITERIO 3: Puedo relacionar el traslado de la parábola en dirección horizontal con el respectivo sumando.	☐	☐
CRITERIO 4: Puedo reconocer el punto vértice en la forma canónica..	☐	☐

<https://www.curriculumnacional.cl/porta/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN
FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Modelo	Escriben una función que incluye sin relación alguna los elementos de tiempo, factor y exponente.	Escriben una función que relaciona los elementos de tiempo, factor y exponente según la situación.	Escriben una función que relaciona los elementos de tiempo, factor y exponente según la situación y las modificaciones que se hacen a las condiciones iniciales.
Gráfico	Grafican puntos o curvas en el plano cartesiano.	Grafican la función cuadrática en el plano cartesiano.	Grafican la función cuadrática en el plano cartesiano y la trasladan horizontal o verticalmente para obtener nuevos gráficos según las nuevas condiciones de la situación.
Contextos	Identifican datos del contexto.	Dan sentido a los datos según el contexto e identifican limitaciones del gráfico.	Dan sentido a los datos según el contexto, identifican limitaciones del gráfico y relacionan la expresión funcional y el gráfico con el contexto.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares

Para desarrollar la habilidad de modelar con el mismo contenido, en este caso las funciones cuadráticas, se sugiere comenzar con los conocimientos previos relacionados con graficar para ampliar el tipo de modelos cuadráticos que se pueden tener según la situación. Profundice en los términos vértice y simetría de la parábola, tema que puede ser abordado desde las limitaciones que tiene el modelo según la realidad. Para esto se puede marcar el vértice y la línea de simetría de la parábola en el plano cartesiano.

Actitudes

Para apoyar el desarrollo de la actitud de asumir posturas razonadas se sugiere la presentación de algunos trabajos personales en los cuales se explicitan los límites del modelo según la situación y se dan argumentos basados en la situación real.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal

Se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:

Independencia	Pensar las soluciones y los caminos para obtener resultados por cuenta propia.
Confiar en lo que se sabe	Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otras personas.
Trabajar a su propio nivel	En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar a ritmo propio.
Practicar la autorregulación	Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento pedir ayuda directa a un compañero o la o el docente.

Actividad de desempeño

3

Propósito

Esta actividad busca desarrollar los productos notables como una posibilidad que facilita la solución de ecuaciones cuadráticas. Para esto, se desarrolla la habilidad de representar los productos notables por medio de figuras geométricas y de funciones cuadráticas que representan el área, comenzando con una situación habitual de marcado de terreno.

Objetivos de aprendizaje

OA 2

Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA 4

Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas).**

Conocimientos esenciales

- Productos notables.
 - Función cuadrática.
-

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Desarrollo de la propiedad distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Factorizar utilizando la propiedad distributiva $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- Multiplicación de números enteros y monomios.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

Un constructor compra un terreno cuadrado cuyo valor por metro cuadrado no se conoce, pero se sabe que:

1. El precio total del terreno (en millones de pesos) sigue la relación cuadrática:
 $p(x) = -2x^2 + 80x$ donde x es la longitud de un lado del terreno en metros.
2. El área del terreno está dada por $A(x) = x^2$

Conexión interdisciplinar

Emprendimiento
y Empleabilidad
OA 3 Nivel 1 y 2 EM

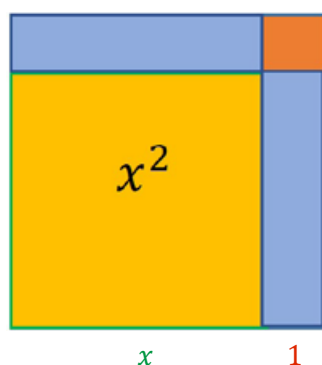


Algunas de las preguntas que pueden orientar la necesidad de construir nuevo conocimiento son:

- ▶ ¿Para qué valor de x el precio $p(x)$ es máximo?
- ▶ ¿Cuál es el valor por metro cuadrado cuando el precio es máximo?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Se plantea una situación donde el precio de un terreno cuadrado no es fijo, sino que varía según el tamaño de sus lados, siguiendo una relación cuadrática. El objetivo es analizar cómo cambia el valor del terreno en función de sus dimensiones, identificando el punto donde el precio alcanza su máximo valor. Para resolverlo, se requiere comprender el comportamiento de una función cuadrática (parábola), determinar su vértice (que representa el precio máximo) y relacionar este valor con el área del terreno para calcular el costo por metro cuadrado en ese escenario óptimo. El problema combina conceptos geométricos (área de un cuadrado) con análisis funcional (propiedades de funciones cuadráticas), mostrando una aplicación práctica de las matemáticas en la valoración de terrenos.

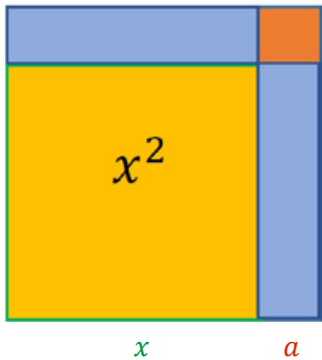


$$(x + 1)^2 = ?$$

Motivar la representación del binomio del cuadrado con la función cuadrática en la cual se ve el área en función del lado, utilizando la imagen y variando ambos sumandos del paréntesis para reforzar la construcción de la fórmula del cuadrado del binomio.

x	x^2	x	$(x + 1)^2$
10	100	10	$(10 + 1)^2 = 121$
20	400	20	$(20 + 1)^2 = 441$
30	900	30	$(30 + 1)^2 = 961$
50	2 500	50	$(50 + 1)^2 = 2 601$
100	10 000	100	$(100 + 1)^2 = 10 201$
200	40 000	200	$(x + 1)^2 = 40 401$

Se sugiere generalizar la situación proponiendo una nueva en la que no se sabe ni cuántos metros se van a comprar, ni cuántos metros se quieren agregar. Releve que la estructura de la imagen se mantiene y muestre una nueva forma de expresar el término al cuadrado.



$(x + a)^2 = ?$

A partir de la imagen, se sugiere determinar la medida de la superficie de los rectángulos y del cuadrado más pequeño para dar sentido a la expresión generalizada.

x	x^2	a	$(x + a)^2 = (x + a) \cdot (x + a)$
10	100	1	$(10 + 1) \cdot (10 + 1) = 100 + 10 + 10 + 1 = 121$
20	400	2	$(20 + 2) \cdot (20 + 2) = 400 + 40 + 40 + 4 = 484$
30	900	3	$(30 + 3) \cdot (30 + 3) = 900 + 90 + 90 + 9 = 1 089$
50	2 500	4	$(50 + 4) \cdot (50 + 4) = 2 500 + 200 + 200 + 16 = 2 916$
100	10 000	5	$(100 + 5) \cdot (100 + 5) = 10 000 + 500 + 500 + 25 = 11 025$
200	40 000	6	$(200 + 6) \cdot (200 + 6) = 40 000 + 1 200 + 1 200 + 36 = 42 436$

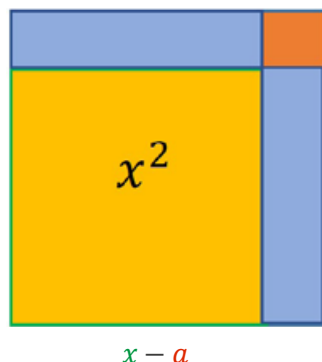
Complementar el desarrollo de las tablas y lo que se ha descubierto en el dibujo con la propiedad distributiva:

$$(x + a) \cdot (x + a) = x^2 + x \cdot a + x \cdot a + a^2$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot a + a^2$$

CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO

Se recomienda variar las condiciones iniciales de la situación, suponiendo ahora que al terreno le ha quitado un metro y pida deducir lo que se debe quitar o agregar.



$$(x - a)^2 = ?$$

Las preguntas que orientan la construcción del cuadrado de la diferencia de un binomio podrían ser:

- ▶ ¿Cuánto miden los lados del cuadrado inicial?
- ▶ ¿Cuánto mide el área de los rectángulos que han sido eliminados?
- ▶ ¿Hay áreas iguales?
- ▶ ¿Cómo podemos relacionar la medida del área del cuadrado inicial y del obtenido por recortes?
- ▶ ¿Qué pasa cuando olvidamos las medidas y queremos expresar el área de ambos cuadrados?
- ▶ ¿Cuántos cuadrados es posible ver en la figura completa?

Aplicar la regularidad de los productos notables, comenzando con lo conocido y agregando un pequeño grado de dificultad cada vez, desarrollando el cuadrado de la diferencia de un binomio al cuadrado o indicando que es una transformación de productos a expresiones en sumas.

- $(x-1)^2$
- $(p-q)^2$
- $(3r-s)^2$
- $(4u-3w)^2$

Explicar el desarrollo del cuadrado de una diferencia de un binomio sugerido a continuación, refiriéndose a la propiedad de distributividad y explicitando en lenguaje natural o en expresiones generales su desarrollo. Por ejemplo “Todas las sumas tienen dos cuadrados, uno de la primera variable y otro de la segunda variable, tiene un **menos** que corresponde a menos dos veces el producto del primero por el segundo término”.

$$\begin{aligned}
 (a - b)^2 &= (a - b) \cdot (a - b) = (a + (-b)) \cdot (a + (-b)) \\
 &= (a + (-b)) \cdot a + (a + (-b)) \cdot (-b) \\
 &= a \cdot a + (-b) \cdot a + a \cdot (-b) + (-b) \cdot (-b) \\
 &= a \cdot a - b \cdot a - a \cdot b + b \cdot b \\
 &= a^2 - 2ab + b^2
 \end{aligned}$$

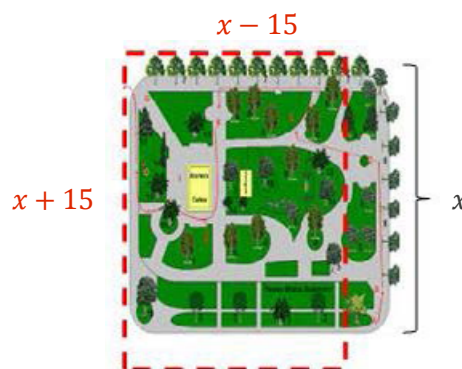
PRÁCTICA GUIADA

Explicar el desarrollo de un problema de urbanización, por ejemplo: una plaza tiene la forma de un cuadrado. Debido a un proyecto de tránsito, se quita una franja de 15 metros de un lado y se agranda el rectángulo resultante por 15 metros.



- Confeccionar un bosquejo de la modificación.
- Elaborar dos expresiones algebraicas equivalentes que representan el área de la plaza modificada. La plaza original tiene el lado x .
- Verificar si la plaza modificada tiene el mismo contenido de área o no.

Explicar el bosquejo indicando las expresiones algebraicas de las nuevas medidas en conjunto con el rectángulo punteado que tiene la forma de la plaza modificada.



Explicar la expresión algebraica $(x + 15) \cdot (x - 15)$ y las formas de obtener el resultado, ya sea al multiplicar término a término o bien al aplicar un producto notable para obtener $x^2 - 225$.

Elaborar la respuesta considerando lo que había antes y la pregunta: la nueva plaza tiene 225 m^2 menos que la plaza original.

**PRÁCTICA
INDEPENDIENTE**

Se sugiere hacer un trabajo de estaciones para memorizar los productos notables. Algunas de las estaciones sugeridas son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Ejercicios relacionados con $(a+b)^2$.	Hoja con ejercicios y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotar, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.
Ejercicios relacionados con $(a-b)^2$.	Hoja con ejercicios y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotar, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.
Ejercicios relacionados con $(a+b)(a-b)$.	Hoja con ejercicios y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotar, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.
Ejercicios variados relacionados con los dos productos notables.	Hoja con ejercicios y hoja con las soluciones. Cálculo mental, por ejemplo, $26^2 = (20+6)^2$ o $(30-4)^2$ utilizando la fórmula.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotar, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.
Ejercicios variados relacionados con los tres productos notables.	Hoja con ejercicios y hoja con las soluciones de problemas de aplicación.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotar, solucionar y corregir con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 20 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.

Se sugiere hacer variaciones de estas estaciones relacionadas con los valores “a” y “b” dados en los productos notables. Comience con enteros positivos, continúe con enteros negativos y, luego, valores fraccionarios. También se recomienda variar las potencias de la variable o la combinación de variables con sus respectivas potencias que quedan en el producto notable.

EVALUACIÓN
FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere aplicar la siguiente rúbrica:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Producto notable $(a+b)^2$	Reconoce que se debería aplicar el producto notable.	Aplica el producto notable de forma correcta.	Reconoce, aplica y varía en ambos sentidos el producto notable.
Producto notable $(a-b)^2$	Reconoce que se debería aplicar el producto notable.	Aplica el producto notable de forma correcta.	Reconoce, aplica y varía en ambos sentidos el producto notable.
Producto notable $(a+b)(a-b)$	Reconoce que se debería aplicar el producto notable.	Aplica el producto notable de forma correcta.	Reconoce, aplica y varía en ambos sentidos el producto notable.
Productos notables	Reconoce cuál de los productos en cuál situación.	Aplica el producto notable correcto y de forma correcta.	Reconoce cuál es el producto notable, aplica el correcto y varía en ambos sentidos.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares

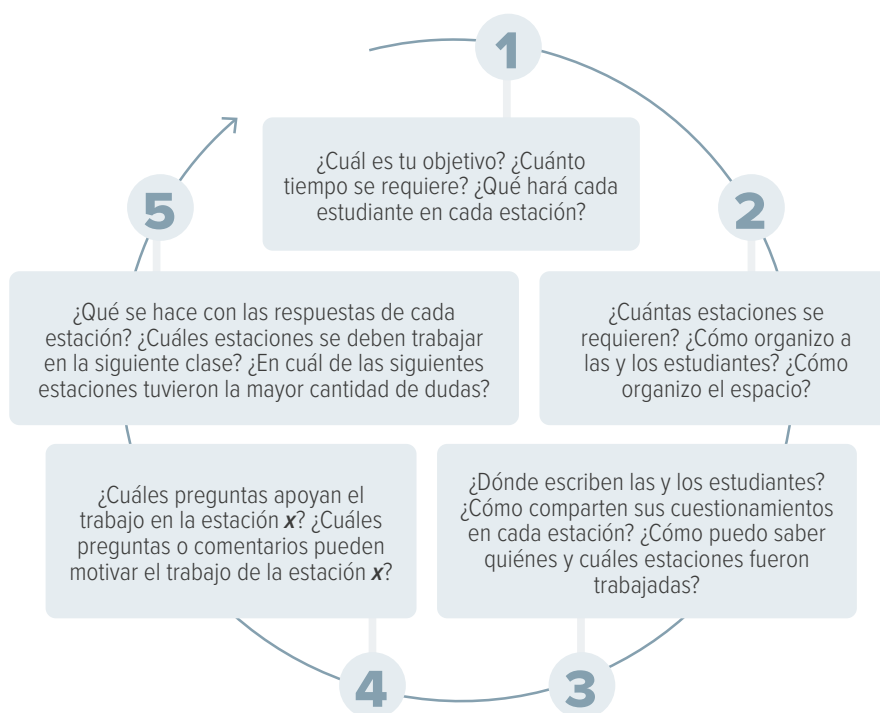
En este caso, entenderemos que representar es transitar desde un nivel concreto a un nivel pictórico y, luego, simbólico. Para esto, se utiliza la noción de función y la de variabilidad de los elementos que están involucrados para generalizar los posibles valores de la superficie que se quiere comprar, mostrada en la situación experiencial inicial. La correspondencia como función se deja de lado en el momento que se hace la variación del segundo sumando, en este momento se trata de generalizar y trabajar con los productos notables conocidos.

Actitudes

Para apoyar el desarrollo de valorar las TIC como una oportunidad, se sugiere permitir el uso de la calculadora en la elaboración de las tablas, para facilitar los descubrimientos y poder generalizar los productos notables. Mantenga una conversación sobre lo que significa tener un metro más por lado en el terreno y la importancia que esto tiene al momento de marcar el terreno. Resalte la labor del topógrafo y la matemática que permite una toma de decisiones razonadas y que contribuye al bien común de los vecinos del terreno. Trabaje la actitud de pensar flexiblemente para reelaborar las ideas, promoviendo la elaboración de tablas y en los cambios de las condiciones iniciales del terreno.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones

Se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Actividad de desempeño

4

Propósito

Esta actividad busca resolver problemas de ecuaciones cuadráticas, variando parámetros y condiciones para comparar los diferentes resultados. Se comienza con el lanzamiento de la bala, se trata el tema de ganancias y pérdidas en la producción, se ven los casos de la ecuación, la intersección con el eje x , las rectas que son paralela al eje x y su intersección con la función cuadrática. Se finaliza con la fórmula que resuelve cualquier ecuación cuadrática.

Objetivos de aprendizaje

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Función cuadrática.
- Ecuación cuadrática.

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Graficar la función cuadrática.
- Aplicar los productos notables.
- Resolver ecuaciones lineales.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

Conexión interdisciplinar

Educación Física y Salud
OA 1 Nivel 1 y 2 EM

El objetivo es motivar la resolución de problemas con la ecuación de segundo grado por medio de situaciones del lanzamiento de la bala y la necesidad de incluir términos técnicos para dar respuestas a la técnica propia del deporte.



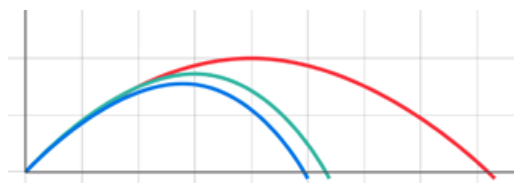
Algunas de las preguntas que pueden motivar el conocimiento de este deporte son:

- ▶ ¿Cuáles son las condiciones del lanzamiento de la bala?
- ▶ ¿Con qué función podemos describir la distancia horizontal con la altura vertical de la trayectoria de la bala?
- ▶ ¿Cómo se decide quién gana?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Se sugiere construir el conocimiento de representar y variar parámetros en una ecuación cuadrática, presentando una situación de tres trayectorias de un lanzamiento de balas. El punto de partida es la mano del atleta cuando la bala sale de la mano.

¿Qué características tiene el lanzamiento que gana?



Algunas otras preguntas que pueden aportar a iniciar la elaboración de una ecuación son:

- ¿Qué tienen en común las tres trayectorias?
- ¿En qué difieren?
- ¿Cuál es el punto más interesante de la trayectoria?
- ¿Qué relación existe entre el vértice de la parábola y el largo del lanzamiento?

Explicar el lanzamiento de la bala desde el conocimiento cotidiano, indicando que los competidores tienen un punto de partida común y se diferencian según el ángulo con el cual se inicia el lanzamiento, por lo que se concluye que todas las trayectorias son parábolas.

Relacionar la trayectoria con una función cuadrática y su vértice con los ceros que determinan el largo del lanzamiento. En el sentido deportivo, el punto más interesante de la trayectoria es el segundo cero, ya que este determina quién gana. Una conjetura que las y los estudiantes pueden formular es que mientras más alto esté el vértice, más largo es el lanzamiento.

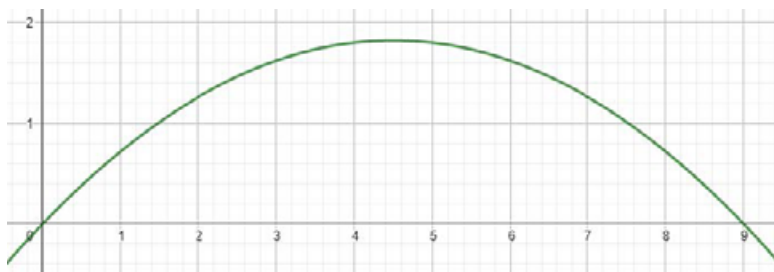
A continuación, resuelven una ecuación cuadrática en un contexto deportivo:

En un certamen regional de atletismo la trayectoria del lanzamiento de la ganadora, con 11 metros de distancia, fue captada por una cámara lenta con estroboscopio. Mediante un programa se convirtieron los puntos de la trayectoria en una función cuadrática del tipo:

$$f(x) = -0,09x^2 + 0,81x$$

¿Por qué el factor a del término cuadrático es negativo?

El o la docente releva las respuestas y su relación con el gráfico, destacando que se debe tener un factor a negativo dado que la concavidad del lanzamiento es en dirección negativa del eje y .



Determinar gráficamente las intersecciones de la curva con el eje x a partir de la gráfica adjunta denominando estos como los “ceros de la función” y verificar algebraicamente los resultados provenientes del gráfico, como se muestra a continuación:

$$-0,09x^2 + 0,81x = 0 \text{ ó } x(-0,09x + 0,81) = 0$$

De aquí se tiene que $x = 0$ o bien $(-0,09x + 0,81) = 0$ de donde se obtiene que

$$x = \frac{0,81}{0,09} = 9$$

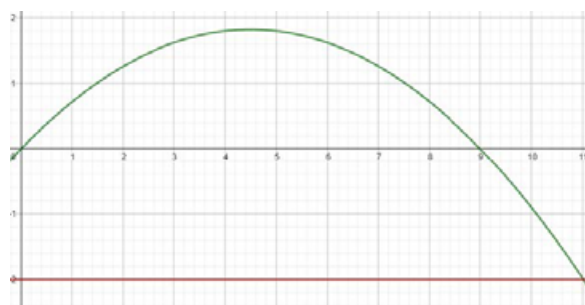
A partir de lo que se obtuvo, se concluye que el primer cero se tiene en $(0,0)$ y el segundo en $(9,0)$. En base a esta solución, las y los estudiantes reflexionan de acuerdo con la pregunta:

¿Por qué el segundo cero no coincide con la distancia del lanzamiento de 11 m?

El o la docente releva las respuestas que indican que el punto de partida no está a la altura del suelo ($h = 0$), dado que la bala sigue la trayectoria hasta tocar el suelo. Realizado este análisis, agrega una nueva pregunta:

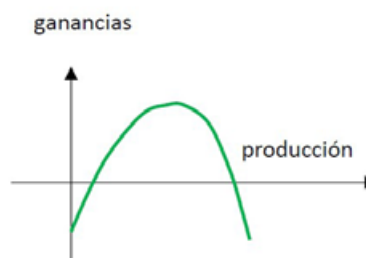
¿Cómo se puede determinar gráficamente el largo del lanzamiento al considerar una altura de $h = 2$ m (brazo estirado de la atleta sobre el suelo)?

Se espera que los y las estudiantes concluyan que se requiere un gráfico con una paralela horizontal de 2 m debajo de la altura de partida, como se ilustra a continuación:



PRÁCTICA GUIADA

Motivar la resolución de problemas relacionados con otras situaciones diferentes a los lanzamientos, por ejemplo, las situaciones de ganancias y de producción. Explicar el gráfico que muestra en forma esquemática la relación que puede existir entre las ganancias generadas por la producción de una mercadería en dependencia de la cantidad producida.



Algunas de las preguntas que pueden motivar la resolución de este tipo de problemas son:

- ¿Cómo se puede describir el gráfico?
- ¿Cómo se interpreta la situación en la cual todavía no se ha producido nada?
- ¿Qué indica el vértice en este tipo de situaciones?

Explicar la forma del gráfico de las ganancias como una función cuadrática cuyo gráfico tiene una concavidad en dirección negativa del eje y . Cuando no se produce nada, las ganancias son negativas y significan pérdidas. La función tiene un valor máximo que significan ganancias máximas, luego, las ganancias continúan en baja, llegan a cero y se convierten en pérdidas.

Explicar el gráfico de una función que modela las ganancias de un producto en dependencia de la cantidad x producida.



Se sugiere guiar el desarrollo del problema por medio de preguntas y respuestas. Considere que muchas de estas respuestas solo las conoce cada docente y que la modelación, en este tipo de respuestas, es parte del aprendizaje.

- ¿Qué significa que el gráfico siga debajo del eje x ?
Las ganancias son negativas porque quedan costos y hay pérdidas.
- ¿En qué intervalo de la cantidad producida hay ganancias?
En el intervalo $]4,20[$ el gráfico está por encima del eje x .
- Verificar que la función g con $g(x) = -x^2 + 24x - 80$ modela las ganancias.
Se basa en la coincidencia de 3 puntos especiales

$$P(0,-80) \quad g(0) = -80$$

$$Q(4,0) \quad g(4) = 0$$

$$R(20,0) \quad g(20) = 0 \text{ o el vértice } S(12,64) \quad g(12) = 64$$

Para determinar los ceros se procede desde lo conocido para obtener una fórmula general. Lo conocido en este caso es despejar la x .

Procedimiento	Ecuación
Despejar la ecuación en una parte con la variable x y otra parte sin esta variable.	$ax^2 + bx + c = 0$ $ax^2 + bx = -c$
Multiplicar la ecuación con $4a$ para evitar la división por a y poder completar mejor el cuadrado.	$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$
Completar la parte izquierda al cuadrado de una suma (producto notable).	$(2ax)^2 + 2 \cdot 2abx = -4ac$
Se suma b^2 en ambos lados.	$(2ax)^2 + 2 \cdot 2abx + b^2 = -4ac + b^2$
Se escribe la parte izquierda como producto notable.	$(2ax+b)^2 = b^2-4ac$
Se saca la raíz cuadrada de ambas partes.	$\sqrt{(2ax+b)^2} = \sqrt{b^2-4ac}$
Se considera el primer caso positivo.	$(2ax+b) = \sqrt{b^2-4ac}$ $2ax = -b + \sqrt{b^2-4ac}$
Se dividen ambos lados por $2a$.	$x = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Procedimiento	Ecuación
Se representa la solución con subíndice.	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Se considera el segundo caso negativo.	$-(2ax + b) = \sqrt{b^2 - 4ac}$ $(2ax + b) = \sqrt{b^2 - 4ac}$ $2ax = -b - \sqrt{b^2 - 4ac}$
Se dividen ambos lados por $2a$.	$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Se representa la solución con subíndice.	$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Se sugiere explicar que es posible proceder con los pasos presentados anteriormente o aprenderse de memoria la fórmula:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Explicar la aplicación de la fórmula en el caso particular de la función de la ganancia $g(x) = -x^2 + 24x - 80$, identificando los parámetros a , b y c .
Con $a = -1$, $b = -24$, $c = -80$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-24) + \sqrt{(-24)^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 80}}{2 \cdot (-1)} = 20$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-24) - \sqrt{(-24)^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 80}}{2 \cdot (-1)} = 4$$

Agregar una función lineal que representa costos adicionales por cantidad de unidades producidas a la función mencionada anteriormente. Mostrar entonces que los puntos de intersección pasan a ser las intersecciones con el eje x , aplicando una transformación equivalente donde solamente cambian los valores de las variables.

$$-x^2 + 24x - 80 = 5x$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 24x - 5x - 80 = 5x - 5x$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 19x - 80 = 0$$

Se sugiere explicar la resolución de problemas rutinarios apoyándose en la elaboración del gráfico para representar y verificar los cálculos en los siguientes tres casos:

Ecuación	Ceros	Gráfico de la función asociada
$-0,5x^2 - 3x - 2,5 = 0$	$a = -0,5 \quad b = -3 \quad c = -2,5$ $x_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 4 \cdot 1,25}}{-1}$ $= \frac{3 + \sqrt{4}}{-1}$ $= \frac{3 + 2}{-1} = -5$ $x_2 = \frac{3 - 2}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$	
Dos soluciones diferentes		
Ecuación	Ceros	Gráfico de la función asociada
$-0,5x^2 - 3x - 4,5 = 0$	$a = -0,5 \quad b = -3 \quad c = -3,5$ $x_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 4 \cdot 2,25}}{-1} = \frac{3 + 0}{-1}$ $= -3$	
Una solución o dos soluciones iguales		
Ecuación	Ceros	Gráfico de la función asociada
$-0,5x^2 - 3x - 5,5 = 0$	$a = -0,5 \quad b = -3 \quad c = -5,5$ $x_1 = \frac{3 + \sqrt{9 - 4 \cdot 2,75}}{-1} = \frac{3 + \sqrt{-2}}{-1}$ $\sqrt{-2}$ no es número real	
Sin soluciones reales, el gráfico no se interseca con el eje x.		

**PRÁCTICA
INDEPENDIENTE**

Se sugiere hacer un trabajo de estaciones retomando la intersección de dos rectas y aumentando el nivel de dificultad, desde lo aprendido anteriormente, hasta llegar a la intersección de dos parábolas. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Intersección de dos rectas.	Cuarteto del gráfico de dos funciones, sus respectivas tablas, sus ecuaciones y la solución. (punto de intersección).	En parejas o grupos pequeños, junten las cuatro cartas sobre la mesa y cuando tengan seguridad jueguen al cuarteto.	Tener un código de verificación en las cartas para que los y las estudiantes puedan verificar fácilmente si los "adversarios" juntaron las cartas correctas.
Intersección parábola - eje X.	Hoja con ejercicios (con un ejemplo dado al inicio) y hoja con las soluciones.	Sigue los pasos del ejemplo dado arriba. Encuentra las intersecciones y corrige con la hoja de soluciones.	Una hoja con unos 20 ejercicios que pueden sacar de la estación y otra con las soluciones. Esta se entrega una vez que se revise que cada estudiante hizo su trabajo.
Intersección parábola - recta.	Hoja con ejercicios (con un ejemplo dado al inicio) y hoja con las soluciones.	Sigue los pasos del ejemplo dado arriba, encuentra las intersecciones y corrige con la hoja de soluciones.	Una hoja con unos 20 ejercicios que pueden sacar de la estación y otra con las soluciones. Esta se entrega una vez que se revise que cada estudiante hizo su trabajo.
Intersección parábola - parábola.	Cuarteto del gráfico de dos funciones, sus respectivas tablas, sus ecuaciones y la solución (puntos de intersección).	En parejas o grupos pequeños junten las cuatro cartas sobre la mesa y cuando tengan seguridad, jueguen al cuarteto de forma normal.	Tener un código de verificación en las cartas para que los y las estudiantes puedan verificar fácilmente si los "adversarios" juntaron las cartas correctas.

Para retroalimentar la actividad y el aprendizaje de la aplicación de la fórmula de segundo grado, se sugiere utilizar la retroalimentación grupal:

RETROALIMENTACIÓN GRUPAL		
Criterios con mayor porcentaje de logro	Criterios con menor porcentaje de logro	Sugerencias para mejorar
Planteamiento de la ecuación y comprensión del contexto. Asociar las condiciones iniciales a una función lineal o cuadrática.	Recordar y aplicar la fórmula para encontrar la solución a una ecuación cuadrática.	Iguala la expresión a cero. Juntar los términos semejantes y marcar con colores los términos a , b y c en la ecuación y en la fórmula.

<https://www.curriculumnacional.cl/porta/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN
FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Estación	Inicial	Intermedio	Avanzado
Intersección parábola - eje X.	Reconoce que se debería aplicar la formula.	Hace las transformaciones equivalentes que corresponden y aplica la fórmula de forma correcta.	Hace las transformaciones equivalentes que corresponden, aplica la fórmula de forma correcta y llega al resultado correcto.
Intersección parábola - recta.	Reconoce que se debería aplicar la formula.	Realiza las transformaciones equivalentes que corresponden y aplica la fórmula de forma correcta.	Hace las transformaciones equivalentes que corresponden, aplica la fórmula de forma correcta y llega al resultado correcto.
Intersección parábola - parábola.	Reconoce los gráficos y lo relaciona con las tablas de valores.	Relaciona los gráficos con alguna otra representación.	Relaciona los gráficos con las tablas de valores, las ecuaciones y la solución con el punto de la intersección, que está representado por el valor x que se obtiene con la ecuación.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares

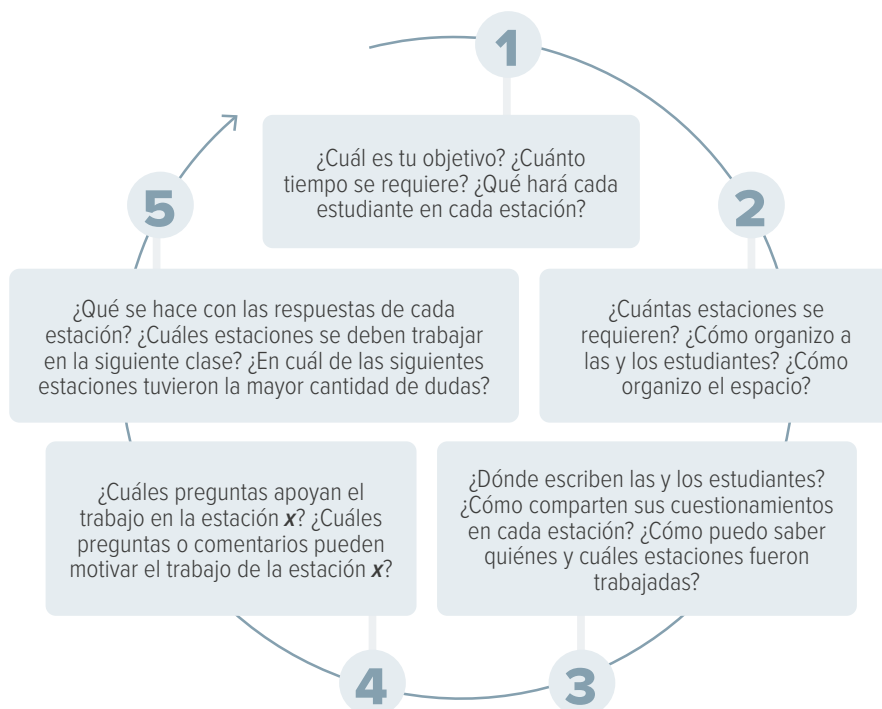
Entenderemos que el desarrollo de la habilidad de resolver problemas implica una serie de otras habilidades. En este caso, la variación de parámetros o de condiciones iniciales de un problema que afectan en la aplicación y comprensión de una fórmula. Se sugiere explicar algebraicamente la obtención de la fórmula y explicar las condiciones para tener una única solución, dos diferentes o ninguna. Sobre la construcción del conocimiento, se recomienda tener en cuenta que la situación se refiere al lanzamiento de balas. La primera pregunta se refiere a los parámetros comunes de las tres trayectorias, punto de partida que se verifica gráficamente en el punto inicial, el ángulo del lanzamiento que coincide en las tres trayectorias y las formas parabólicas incluyendo la simetría en los lanzamientos. La segunda aborda las diferencias de los lanzamientos. En los gráficos, son los diferentes vértices y las diferentes intersecciones con el eje horizontal, que corresponde al largo del lanzamiento. La tercera pregunta hace referencia a los vértices, que son los puntos más interesantes en cada trayectoria porque, debido a la simetría, los vértices definen el largo del lanzamiento.

Actitudes

Para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con perseverancia y proactividad, en el trabajo con estaciones incluya el juego y la corroboración de los resultados obtenidos por el equipo por parte de los pares. También puede anotar en su cuaderno las soluciones y los pasos que están involucrados en el desarrollo de la fórmula y no simplemente anotar las soluciones.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones

Se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



Visión panorámica

Gran idea

Las propiedades y relaciones geométricas entre objetos y sus distancias permiten resolver problemas que involucran destrezas de visualización espacial.

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA 6

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Argumentar y comunicar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**.

Conocimientos esenciales

- Sistemas de ecuaciones lineales (2 x 2).
 - Homotecias.
 - Teorema de Thales.
-

Tiempo estimado: 6 semanas (24 horas)

Propósito

En el módulo 3 de la asignatura de matemática del Nivel 1 de Educación Media, se espera que los y las estudiantes comprendan que las propiedades y las relaciones geométricas entre objetos y sus distancias permiten resolver problemas que involucran destrezas de visualización espacial. Se entiende que la comprensión se logra cuando cada estudiante realiza varios procesos desde lo experiencial hasta lo abstracto y simbólico de la matemática, expresado en este caso por las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, las homotecias y en particular por el teorema de Tales.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 3 desarrollan las habilidades de representar, resolver problemas, argumentar y comunicar. En particular, en este módulo se desarrolla la expresión de los sistemas de ecuaciones lineales en el plano cartesiano y utiliza elementos geométricos para expresar la homotecia. Además, selecciona modelos lineales según el fenómeno y el modelo homotético para proyecciones y proporciones. También se trabaja la variación de parámetros y de condiciones iniciales para resolver problemas y descubrir las propiedades homotéticas, para finalmente realizar demostraciones simples

sobre el teorema de Tales y otras propiedades. En el caso de la homotecia y su relación con las proyecciones, se espera que las y los estudiantes evalúen el esquema con la realidad, que comprueben los resultados y soluciones dadas según esta, y comparen los objetos reales con las proyecciones y sus medidas.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 3 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar, las Maneras de trabajar y las Maneras de vivir en el mundo. Promueven el desarrollo de varias actitudes, como la de perseverar en torno a metas, por ejemplo, en la resolución de un problema o en la elaboración de esquemas que den una idea geométrica de la situación. También se desarrolla la actitud de aprovechar las herramientas disponibles, como calculadoras, reglas, transportador y compás, como también los objetos técnicos que puedan estar a su alcance. Esta actividad brinda oportunidades para desarrollar la actitud de pensar con perseverancia y proactividad en la búsqueda de soluciones y en el desarrollo de algunas demostraciones sobre el teorema de Tales. También el trabajo respetuoso y empático que se pueda dar entre pares al momento de presentar soluciones y demostraciones.

Ruta de Aprendizaje

Las propiedades y relaciones geométricas entre objetos y sus distancias permiten resolver problemas que involucran destrezas de visualización espacial.

	Actividad de desempeño 1	Expresar situaciones utilizando el plano cartesiano y ecuaciones lineales, para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y dar respuestas a los problemas planteados.
	Actividad de desempeño 2	Resolver problemas expresando situaciones en el plano cartesiano y ecuaciones lineales, para resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y dar respuestas a los problemas planteados.
	Actividad de desempeño 3	Variar parámetros o condiciones iniciales para descubrir las propiedades homotéticas.
	Actividad de desempeño 4	Realizar demostraciones simples sobre el teorema de Tales y otras propiedades de la homotecia, identificando en una demostración, si hay saltos o errores.

Actividad de desempeño

1

Propósito

En esta actividad las y los estudiantes expresarán situaciones a través de funciones lineales con dos incógnitas y las representarán en el plano cartesiano para dar respuestas a problemas del diario vivir. Esta actividad comienza con la solución pictórica de un problema para, luego, avanzar en grado de dificultad y continuar con la solución esquemática de ecuaciones lineales 2×2 .

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

Conocimientos esenciales

- Sistema de ecuaciones lineales (2×2).

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Hacer tablas de valores de ecuaciones lineales.
- Graficar ecuaciones lineales.
- Revisar pendiente e intersecciones con los ejes.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta la imagen de dos impresoras y pide opinar sobre el contexto en el cual se pueden utilizar las funciones lineales.



Algunas de las preguntas que pueden promover la modelación de las funciones son:

Conexión interdisciplinar
Educación Financiera
OA 3 Nivel 1 y 2 EM

- ▶ ¿Cuál podría ser la diferencia entre las impresoras?
- ▶ ¿En qué contexto podría ser interesante para nosotros?
- ▶ ¿Qué variables podrían tomarse en cuenta?
- ▶ ¿Cómo podríamos visualizar los costos asociados a la impresión?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para introducir la representación se sugiere precisar con datos la situación y dar una respuesta particular. Luego, llegar a lo general de los procesos que permiten obtener solución a un sistema 2x2.

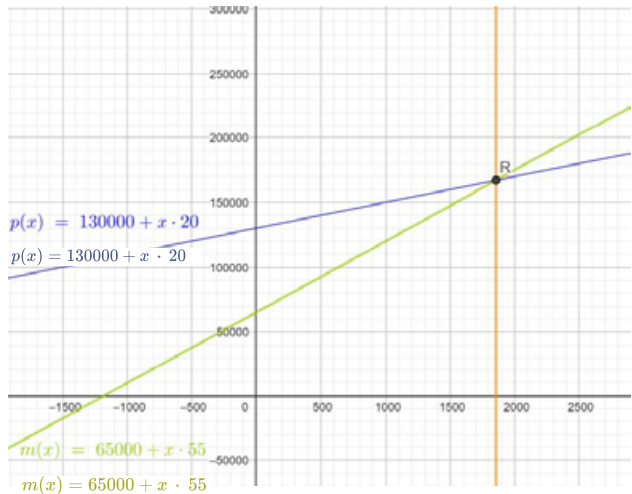
Un secretario está muy interesado en reducir los costos asociados a la impresión que hay en la oficina.

Para esto, le han encargado hacer un presupuesto. Una impresora multifuncional cuesta \$65 000 y cada hoja impresa cuesta \$55, mientras un modelo más profesional cuesta \$130 000 con un precio por hoja impresa de \$20.

¿Cuál de las dos impresoras es más eficiente?

Impresora 1	Impresora 2
▶ Gasto fijo: \$65 000 ▶ Gasto variable: \$55 por cada hoja	▶ Gasto fijo: \$130 000 ▶ Gasto variable: \$20 por cada hoja
x: es la cantidad de hojas. y: es el gasto de impresión en términos de la cantidad de hojas	

Se sugiere que antes de resolver, se grafiquen ambas situaciones $y = 65\,000 + 55x$ para la primera impresora, y $y = 130\,000 + 20x$ para la segunda impresora.



Para motivar el desarrollo algebraico se recomienda preguntar sobre la línea vertical que se ha marcado en el gráfico y su relación con la solución.

I	$y = 130\,000 + 20x$	x : cantidad de hojas impresas.
II	$y = 65\,000 + 55x$	y : costo de la impresión.
Igualando		
I = II $130\,000 + 20x = 65\,000 + 55x$		$- 65\,000$
$\Leftrightarrow 65\,000 + 20x = 55x$		$-20x$
$\Leftrightarrow 65\,000 = 35x$		$: 35$
$\Leftrightarrow 1\,857,14 \approx x$		
Reemplazando en I		
$\Leftrightarrow y = 130\,000 + 20 \cdot 1\,857,14$ $y \approx 167\,142,8$		
Dar sentido a la solución según el contexto		
x es la cantidad de hojas, y es el precio que se ha gastado, la solución es un par $(1\,857,14 \mid 167\,142,8)^*$ que se lee en este contexto como:		* Por razones de presentación se escribe en vez de una coma entre las coordenadas el símbolo " ".
► El gasto de ambas impresoras coincide cuando se comienza a imprimir la página número 1 857 y el gasto es de \$167 143 . A partir de ese momento, la impresora profesional es más económica.		

Se sugiere utilizar el mismo contexto de la compra de impresoras para trabajar casos en que se tienen otras posibles soluciones: la misma recta con infinitas soluciones y rectas paralelas con ninguna solución.

PRÁCTICA GUIADA

El o la docente motiva otra estrategia para solucionar dos ecuaciones lineales donde la situación se plantea en sumas de múltiplos de las variables. Se recomienda diferenciar con el caso anterior, donde la presentación de problema ya implicaba una solución por igualación, pues la variable gasto estaba despejada.

¿Cuánto cuesta una entrada de niño y una de adulto?

Familia Saavedra



- ▶ 1 niño y 2 adultos
- ▶ Costo total de las entradas al cine: \$12 000

Familia Reyes



- ▶ 3 niños y 2 adultos
- ▶ Costo total de las entradas al cine: \$18 000

I	$x + 2y = 12\,000$	x : precio de la entrada de niño.
II	$3x + 2y = 18\,000$	y : precio de la entrada de adulto
Transformaciones equivalentes		
I	$-x - 2y = -12\,000$	$\cdot (-1)$
II	$3x + 2y = 18\,000$	
Reduciendo a una variable		
I + II	$2x = 6\,000$	$: 2$
$\Leftrightarrow$	$x = 3\,000$	$: 35$
Reemplazando en II		
II	$3 \cdot 3\,000 + 2y = 18\,000$	
	$y = 4\,500$	
Dar sentido a la solución según el contexto		
x es el precio de la entrada de niño, y es el precio de la entrada de adulto, la solución es un par $(3\,000, 4\,500)$ que se lee en este contexto como:		
▶ El costo de una entrada al cine de un niño cuesta 3 000 pesos y el costo de una entrada de adulto cuesta 4 500 pesos.		

Se sugiere graficar las rectas y encontrar la solución de manera visual para reforzar la idea de solución algebraica y visual. Para esto, convierta las ecuaciones a la forma normal (I) $y = -\frac{1}{2}x + 6\,000$ (II) $y = -\frac{3}{2}x + 9\,000$ y grafique con una calculadora científica que de una tabla de valores.

PRÁCTICA
INDEPENDIENTE

Proponga un trabajo de pares en que cada integrante resuelve y comenta el método de solución que ha elegido según el contexto. En la tabla se muestra un ejemplo de camino a seguir para cada problema.

Igualar	Reducción
Dos velas se consumen lentamente. Como la vela roja es mucho más fina que la azul, se reduce más rápidamente. Al principio de la observación, la vela azul tiene 12 cm de altura y la roja 18 cm. Ya se ha observado que en una hora la vela azul se consume en 6 mm y la roja en 9 mm de manera uniforme. ¿Después de cuánto tiempo tienen la misma altura?	Dos tazas de café y un trozo de torta cuestan \$8 000. Tres tazas de café y cuatro trozos de torta cuestan \$20 000. ¿Cuánto cuesta una taza de café y un trozo de torta?

Para retroalimentar la actividad y el aprendizaje de la representación y de resolver problemas relacionados con funciones cuadráticas, se sugiere utilizar la lista de chequeo con los siguientes criterios:

LISTA DE CHEQUEO		
	Logrado	Todavía puedo mejorar
CRITERIO 1: Puedo traducir las situaciones a una expresión algebraica.	☐	☐
CRITERIO 2: Puedo transformar la ecuación lineal a la forma normal ($y = m \cdot x + n$).	☐	☐
CRITERIO 3: Puedo resolver el sistema de ecuaciones lineales.	☐	☐
CRITERIO 4: Puedo poner el resultado en el contexto dado.	☐	☐

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

**EVALUACIÓN
FORMATIVA**

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Estación	Inicial	Intermedio	Avanzado
Representación	Dibuja gráficos a partir de una tabla	Dibuja gráficos a partir de una tabla.	Modela distintas situaciones con distintos sistemas de ecuaciones, elabora tablas y gráficos a partir de las funciones y la solución.
Resolver problemas	Describe la información entregada utilizando algún sistema de ecuaciones.	Trabaja la información utilizando sistemas de ecuaciones adecuadamente.	Trabaja la información utilizando sistemas de ecuaciones adecuadamente y da respuestas a las preguntas planteadas.
	Estima situaciones entregando la información en palabras.	Estima situaciones entregando la información en sistemas de ecuaciones.	Estima situaciones entregando la información en sistemas de ecuaciones adecuadamente y da respuestas a las preguntas planteadas.
Contextos	Reconoce similitudes en los contextos de sistemas de ecuaciones.	Reconoce similitudes en diferentes contextos y utiliza sistemas de ecuaciones adecuadamente.	Reconoce similitudes en diferentes contextos y transfiere según corresponda la resolución con distintas estrategias de varios sistemas de ecuaciones adecuadamente.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares

Entenderemos que expresar ecuaciones utilizando diferentes representaciones, es parte de la habilidad de representar. Esto significa transferir las ecuaciones y su solución desde el sistema de ecuaciones al gráfico y viceversa. Dentro de este proceso, se requiere de la transferencia entre la situación y la expresión algebraica que describe la situación. Este paso es el primero del ciclo de modelación y la actividad lo incluye, pero no lo considera como un foco. Entonces, en caso de ser necesario, se sugiere precisar este paso, marcando las frases y asociando con flechas o colores las partes de la expresión algebraica con el texto, dando énfasis a la asignación de las variables y al sentido de la igualdad según el contexto.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere las ecuaciones lineales trabajadas en los módulos 2 y 3 del nivel 3 de Educación Básica y centrarse en las habilidades de resolver problemas y de modelar situaciones utilizando la ecuación lineal. También es recomendable incluir algunos elementos de traslaciones o rotaciones de figuras en el plano, enfocándose en dibujar en el plano cartesiano y en la habilidad de representar.

Actitudes

Para apoyar el desarrollo de la actitud de aprovechar las herramientas disponibles, se sugiere realizar gráficos manuales con regla y papel cuadriculado; y gráficos digitales con uso de algún programa de fácil acceso. En ambos casos, destaque la prolijidad, el tipo de escala a utilizar, el uso de la notación correcta de los ejes y la asignación de nombres a las funciones.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal

Se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:

COLABORAR	Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.
	Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo. Entregar una rúbrica con los criterios y dejar unos dos minutos para revisar las comprensión de las instrucciones.
	La evaluación es grupal y se sugiera no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.
	Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos ya sea de forma aleatoria por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupos y cantidad de la clase.
	Decida con anterioridad los momentos en que los y las participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que harán, como también el momento en que los grupos se escuchan entre sí.

Actividad de desempeño 2

Propósito

Esta actividad busca expresar situaciones a través de funciones lineales con dos incógnitas y representar el sistema de ecuaciones lineales y su solución en el plano cartesiano para dar respuestas a problemas del diario vivir. La actividad comienza conociendo otras estrategias para resolver ecuaciones lineales 2×2 y continúa con la elección y variación de las estrategias, incluida la solución gráfica. Al determinar el punto de intersección de ambas rectas se introduce una estrategia simbólica de igualación de las ecuaciones de un sistema 2×2 de ecuaciones lineales. Además, a partir de la representación gráfica se puede concluir sobre la existencia de una solución, la no-existencia o la existencia de infinitas soluciones del sistema.

Objetivos de aprendizaje

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**.

Conocimientos esenciales

- Sistema de ecuaciones (2×2).

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Aplicación de la propiedad distributiva.
- Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- Transformaciones equivalentes.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN
EXPERIENCIAL

El o la docente presenta una situación de compras de productos que permita elaborar un sistema de ecuaciones para determinar valores unitarios.

¿Cuánto cuesta cada ovillo y cada crochet?



30 ovillos??

30 ovillos y 2 crochet

30 ovillos y dos crochet a
\$16 600

30 ovillos??

El ovillo es \$300 más
barato

El ovillo es \$300 más
barato que el crochet??

Si, eso

Conexión interdisciplinar

Emprendimiento
y Empleabilidad
OA 1 Nivel 1 y 2 EM

Conexión interdisciplinar

Educación Financiera
OA 1 Nivel 1 y 2 EM

Algunas de las preguntas que pueden motivar el cambio de estrategia para solucionar el sistema de ecuaciones son:

- ▶ ¿Qué información entrega el chat?
- ▶ ¿Qué ecuaciones lineales describen la situación?
- ▶ ¿Cómo podemos resolver eficientemente el sistema de ecuaciones lineales?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para introducir el procedimiento de sustituir una variable por otra, la o el docente podría explicar la resolución del problema de la situación experiencial, señalando que, aunque es posible resolver con los métodos de igualación y reducción, en este caso el método de sustitución es más efectivo y rápido. Se utiliza cuando hay información de un dato en relación a otro, es decir, una ecuación ya está dada con una variable despejada o muy cerca a estar despejada. Además, podría recordar a sus estudiantes que finalmente todos los caminos tienen que llegar al mismo resultado y que lo más importante no es resolver rápido, sino que hacerlo de manera correcta.

Elaboración de las ecuaciones		
	30 ovillos y 2 crochet $\Rightarrow 30x + 2y$	
	30 ovillos y dos crochet a \$16 600 $\Rightarrow 30x + 2y = 16\,600$	x : precio de un ovillo. y : precio de un crochet.
	El ovillo es \$300 más barato que el crochet?? $\Rightarrow x = y - 300$	
Sistemas de ecuaciones		
I	$30x + 2y = 16\,600$	x : precio de un ovillo.
II	$x = y - 300$	y : precio de un crochet.
Sustituir		
II en I	$30(y - 300) + 2y = 16\,600$	
Resolver la ecuación lineal		
	$30y + 2y = 16\,600$	
$\Leftrightarrow$	$32y = 25\,600$	$ + 9\,000$
$\Leftrightarrow$	$y = 800$	$: 32$
Reemplazando en II		
II	$x = 800 - 300$ $x = 500$	
Dar sentido a la solución según el contexto		
x es el precio de un ovillo, y es el precio de un crochet, la solución es un par $(500, 800)$ que se lee en este contexto como:		
► El costo de un ovillo es de \$500 pesos y el costo de un crochet es de \$800 pesos.		

PRÁCTICA GUIADA Para guiar el proceso de elección de la estrategia la o el docente explica el contenido de la siguiente tabla:

Table with 2 columns: Criterio para elegir la estrategia, Estrategia por utilizar. It lists three cases of systems of linear equations and the recommended solving strategies.

Se sugiere presentar a continuación, el siguiente problema. Se espera que las y los estudiantes elijan su estrategia y grafiquen para encontrar o comprobar la solución.

El Sr. Sánchez paga un total de 820 dólares por 2 tabletas del mismo precio y una funda protectora. La funda protectora es 260 dólares más barata que una tableta.

¿Cuánto cuesta una tableta? ¿Cuánto cuesta la funda protectora?

Table showing the step-by-step solution to the problem. It includes sections for: Elaboración de las ecuaciones, Sistemas de ecuaciones, Sustituir, Resolver la ecuación lineal, Reemplazando en II, and Dar sentido a la solución según el contexto.

**PRÁCTICA
INDEPENDIENTE**

Se sugiere hacer un trabajo de estaciones para profundizar la comprensión de las relaciones entre la función y la ecuación, y con la tabla de los valores de x con $f(x)$ y el gráfico. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Graficar funciones lineales y resolver a través de la intersección.	Hoja con ejercicios para graficar y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotar, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 5 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.
Igualar un sistema de ecuaciones con dos variables.	Hoja con ejercicios para igualar y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotar, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 10 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.
Resolver un sistema de ecuaciones con dos variables a través de una adición (resta).	Hoja con ejercicios para resolver sumando y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotar, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 10 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.
Resolver un sistema de ecuaciones con dos variables reemplazando una variable.	Hoja con ejercicios para resolver reemplazando y hoja con las soluciones.	Memoriza la tarea, vuelve a tu puesto para anotar, soluciona y corrige con la hoja de soluciones.	Hoja con unos 10 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.
Ejercicios mixtos.	Hoja con ejercicios mixtos y hoja con las soluciones.	Identifica cuál estrategia es más rápida o fácil para resolver el ejercicio, después soluciona.	Hoja con unos 5 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.
Ejercicios de aplicación.	Hoja con ejercicios mixtos y hoja con las soluciones.	Convierte la situación dada en dos ecuaciones lineales, identifica cuál estrategia es más rápida o fácil para resolver el ejercicio, después soluciona.	Hoja con unos 5 ejercicios colgada en la pizarra y otra hoja con las soluciones colgada en otra parte de la sala.

Se sugiere hacer variaciones de estas estaciones relacionadas con los factores en los sistemas de ecuaciones dados en las hojas de los ejercicios.

ESCALERA METACOGNITIVA	
¿Qué aprendí?	Resolver un sistema de ecuaciones lineales de varias formas.
¿Cómo lo aprendí?	A través de las estaciones, siguiendo los pasos dados subiendo el grado de dificultad.
¿Qué me ha resultado más fácil, más difícil, más novedoso?	Dibujar, calcular, resolver, traducir problemas del diario vivir.
¿En qué otras ocasiones puedo usarlo?	Describir situaciones de la vida real, resolviendo de esa manera problemas.

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Estación	Inicial	Intermedio	Avanzado
Gráfico.	Grafica líneas rectas en el plano cartesiano	Grafica las ecuaciones del sistema de ecuaciones asociando cada una de ellas a la función afín en el plano cartesiano.	Grafica las ecuaciones del sistema de ecuaciones asociando cada una de ellas a la función afín en el plano cartesiano y resuelve el sistema de ecuaciones gráficamente.
Igualación de ecuaciones con dos variables.	Logra hacer la transformación correcta para tener los números de un lado de la ecuación.	Logra hacer las transformaciones correctas para tener los números de un lado y la variable del otro lado de la ecuación.	Logra hacer las transformaciones correctas y resuelve el sistema de ecuaciones de forma correcta.
Adición de dos ecuaciones.	Encuentra el valor del factor a multiplicar para sumar las ecuaciones y reducir la cantidad de variables.	Encuentra el valor del factor a multiplicar para sumar las ecuaciones y reducir la cantidad de variables. Multiplica la ecuación según el factor considerando todos los términos de la ecuación.	Encuentra el valor del factor a multiplicar para sumar las ecuaciones y reducir la cantidad de variables. Multiplica la ecuación según el factor considerando todos los términos de la ecuación, suma para reducir a una variable y resuelve el sistema de ecuaciones.
Reemplazo de una variable.	Despeja la variable de forma correcta.	Despeja la variable y la reemplaza en la otra ecuación de forma correcta.	Despeja la variable, la reemplaza en la otra ecuación y resuelve el sistema de ecuaciones de forma correcta.
Ejercicios mixtos.	Identifica con cuál estrategia sería más rápido o fácil resolver el sistema de ecuaciones.	Identifica con cuál estrategia sería más rápido o fácil resolver el sistema de ecuaciones y soluciona el sistema de ecuaciones con ayuda.	Identifica con cuál estrategia sería más rápido o fácil resolver el sistema de ecuaciones y soluciona el sistema de ecuaciones de forma correcta.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares

Entenderemos que la habilidad de resolver problemas se desarrolla de varias maneras. Una de ellas es evaluando el proceso y comprobando las soluciones. En esta actividad se promueve un trabajo sistemático, que permite evaluar el procedimiento y entregar una estructura para resolver los problemas, además de las estrategias para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2.

Actitudes

Para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar, se sugiere tener a disposición las tres estrategias para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2 dando la oportunidad para que cada estudiante utilice aquella que más le acomoda para resolver y que, de manera independiente, comprenda el valor de las sugerencias que se dan para la elección de la estrategia, es decir, que pruebe y que decida por sí mismo cual es la mejor.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal

Se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:

COLABORAR	Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.
	Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo. Entregar una rúbrica con los criterios y dejar unos dos minutos para revisar la comprensión de las instrucciones.
	La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.
	Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos ya sea de forma aleatoria por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupos y cantidad de la clase.
	Decida con anterioridad los momentos en que los y las participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que harán, como también el momento en que los grupos se escuchan entre sí.

Anexo

SITUACIÓN 1 **El albergue juvenil**

Para el viaje de fin de año, la encargada decide ir a un albergue juvenil. Para tomar mejor su decisión llama por teléfono y anota: **18** habitaciones de cuatro y **6** camas. En total, pueden alojarse **84** jóvenes. Cuando lo comenta, se empiezan hacer los grupos, pero le asalta una duda: ¿Cuántos grupos de cuatro o de seis se pueden armar?

SITUACIÓN 2 **El viaje a China**

En un cuento chino aparece la siguiente historia: cinco bueyes y dos ovejas cuestan ocho piezas de oro, dos bueyes y ocho ovejas cuestan ocho piezas de oro. ¿Cuál es el precio de cada animal?

SITUACIÓN 3 **Un problema de Adam Ries**

Dos personas quieren comprar un caballo por **11** florines.

A le dice a B: “Dame un tercio de tu dinero y yo le añadiré el mío y pagaré el caballo”.

B le dice a A: “Dame una cuarta parte de tu dinero, y yo le añadiré el mío y pagaré el caballo”.

Ahora pregunto: ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

Actividad de desempeño

3

Propósito

Esta actividad busca variar parámetros o condiciones iniciales y descubrir las propiedades homotéticas. Comienza con una situación experiencial de la vida cotidiana de un técnico forestal y se espera que las y los estudiantes se motiven a conocer la utilidad de las matemáticas en el quehacer profesional. Se espera una traducción de la situación al contexto matemático con un croquis, para finalmente encontrar las condiciones y relaciones para aplicar la homotecia.

Objetivos de aprendizaje

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Homotecias.

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

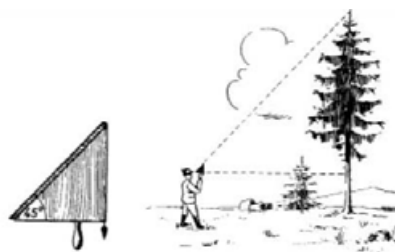
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Medidas de triángulos.
- Aplicación del teorema de Pitágoras.
- Aplicación de la razón y proporciones.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta una situación propia de un técnico forestal: medir la altura de árboles, ya sea para calcular la necesidad de corte o para calcular el volumen del aserradero. Se contextualiza comentando que, para determinar la altura de los árboles, se suele utilizar el denominado triángulo del silvicultor: tras apuntar a un árbol con el triángulo, teniendo el triángulo derecho y con la ayuda de un plomo colgando en un hilo desde la esquina derecha arriba, es posible determinar la altura de los árboles.



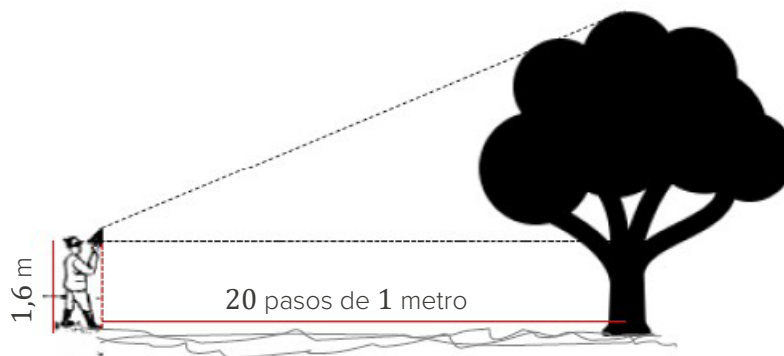
FUENTE: <https://www.weilerbach-rsplus.de/Hausaufgaben/Hausaufgabe20200420114606.pdf>

Algunas de las preguntas que pueden motivar la introducción de los conceptos relacionados a la homotecia son:

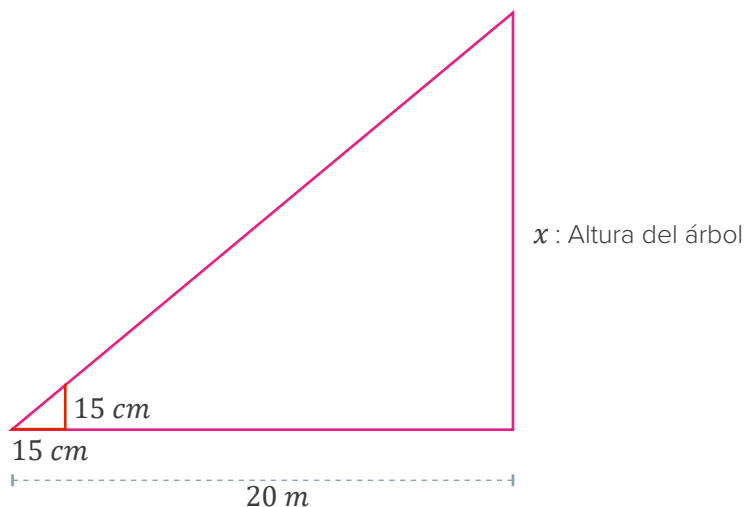
- ▶ ¿Qué instrumento se está utilizando?
- ▶ ¿Qué medidas son conocidas?
- ▶ ¿Qué medidas se pueden conocer?
- ▶ ¿De qué manera se podría encontrar la altura del árbol?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para construir el conocimiento de las homotecias se sugiere describir el procedimiento utilizado por el técnico forestal para conocer la altura de un árbol, utilizando un ejemplo concreto como el sugerido a continuación:



El o la docente explica la necesidad de conocer las características o medidas del instrumento para determinar la altura del árbol y cómo la proporción ayuda a resolver el problema. Para esto, se sugiere hacer un esquema de la situación, incluyendo las medidas del instrumento, relevando el uso del plomo para obtener la medida de 90° y lograr un triángulo semejante.



La medida del árbol se obtiene sumando la altura de $1,6\text{ m}$ que corresponde a la altura a la que se encuentran los ojos del silvicultor con respecto al suelo. En este caso y debido a las características del instrumento, el silvicultor sabe que la altura del árbol tendrá 20 m más la altura del piso a sus ojos:

$$20 + 1,6 = 21,6$$

En caso de no contar con un triángulo isósceles de 90° , se sugiere desarrollar la expresión que describe la altura:

$$\text{Altura} = \text{distancia} \cdot \frac{\text{cateto vertical}}{\text{cateto horizontal}} + \text{altura de los ojos}$$

En esta actividad puede reforzar la noción de triángulos semejantes cuando tienen los mismos ángulos. También se puede generalizar a partir de este procedimiento y de la expresión:

$$\frac{\text{Altura}}{\text{distancia}} = \frac{\text{cateto vertical}}{\text{cateto horizontal}}$$

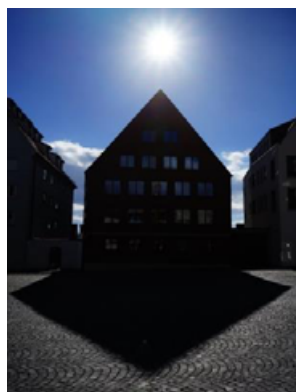
Se sugiere preguntar: ¿Funcionaría este procedimiento si el árbol está torcido? Esta permite establecer la noción de paralelismo como condición dentro de esta proposición.

PRÁCTICA GUIADA

Para guiar la comprensión del concepto de homotecia, se sugiere realizar el paso a paso de un problema que se puede abordar de muchas maneras y que en este caso requiere considerar un mismo rayo de sol que se proyecta sobre dos objetos diferentes.

Nicolás le pide a su hijo Bastián que pinte la fachada de una casa. Para hacer el cálculo de la mano de obra, se necesita conocer el área del frontis que se compone de un rectángulo con un triángulo isósceles. Para calcular el área, se requiere conocer la altura de la casa desde la base hasta el techo. Nicolás se pone frente a la casa y se desplaza verticalmente hacia ella mirando que el final de su sombra quede justo al final de la sombra de la casa, hasta que los límites de ambas sombras coincidan. Cuenta los pasos desde los dos puntos hasta la casa y responde a su padre Nicolás rápida y precisamente, sin ayuda de la tecnología cuánto costará.

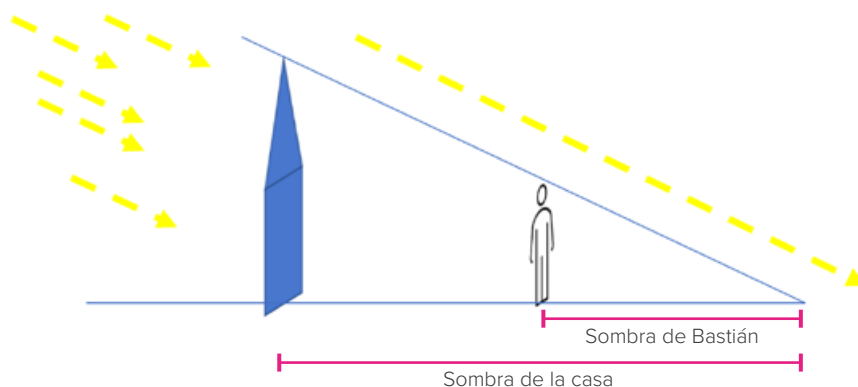
¿Cómo lo hizo Bastián para responder?



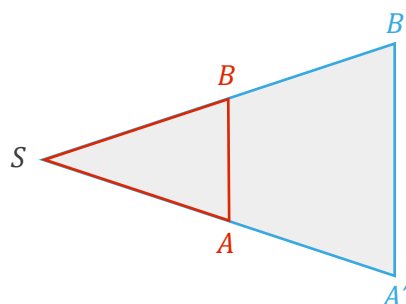
Se espera que las y los estudiantes primero hagan un dibujo para encontrar un camino hacia una respuesta adecuada. El o la docente podría guiar el proceso por medio de las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Cuál es la estrategia de Bastián?
- ▶ ¿Qué más tiene que saber o haber hecho Bastián antes de responder?
- ▶ ¿Para qué mide las distancias?
- ▶ ¿Qué se puede observar en el dibujo?
- ▶ ¿Qué tienen en común los triángulos dibujados?

Se espera que las y los estudiantes vean en el triángulo del silvicultor la proyección de la homotecia y la misma proyección en el problema de Nicolás y Bastián, cuando las puntas de las sombras están en el mismo punto, el mismo rayo sobre la cabeza y sobre la punta de la casa.



Ahora puede aplicar las propiedades de una homotecia cuyo centro se encuentra en el límite de las sombras. Se miden los segmentos necesarios contando los pasos respectivos. Se considera que el sol está detrás de la casa. Se sugiere explicar de manera sencilla y previo a resolver el problema de Bastián y Nicolás, la forma de determinar un valor k de una homotecia, considerando primero la homotecia de un segmento.



Tener en cuenta la homotecia con centro S del segmento $\overline{AB}$ y la imagen $\overline{A'B'}$ relevando el hecho de que $AB \parallel A'B'$ indicando que las medidas deben estar en cierta relación, denominada factor de homotecia, y que se debe cumplir en la razón entre varios segmentos. El factor k se obtiene dividiendo la distancia $\overline{A'S}$ por $\overline{AS}$:

$$k = \frac{\overline{A'S}}{\overline{AS}}$$

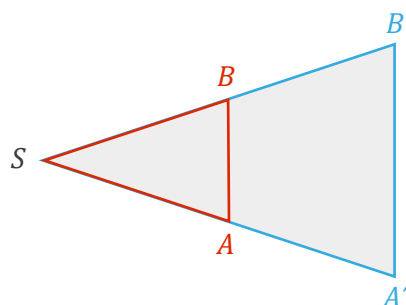
El factor k de una homotecia es el número con el cual se multiplican los largos de todos los lados de una preimagen para obtener los largos de todos los lados de la imagen proyectada.

$$\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$$

Se sugiere ejemplificar numéricamente cómo se encuentra el factor de homotecia. Si el segmento $\overline{AB} = 3 \text{ cm}$ y $\overline{A'B'} = 6 \text{ cm}$. Determinar el factor k de la homotecia considerada.

$$k = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{6}{3} = 2$$

También, explicar la aplicación del factor de homotecia, indicando que el significado del factor $k = 2$ para los otros segmentos. Esto significa que se debe ubicar el centro S para que se cumpla la homotecia, es decir, se debe cumplir que el segmento $\overline{SA} = 2 \overline{SA'}$ y el segmento $\overline{SB} = 2 \overline{SB'}$.



Esta es una forma para construir la relación entre los segmentos:

$$\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Releve las condiciones: esto siempre ocurre cuando hay dos rectas que se intersectan y dos que son paralelas.

Para volver al problema anteriormente dado, la o el docente aclara que hay varias transformaciones que se pueden obtener de la igualdad y varias posibles maneras de obtener otra igualdad correcta. Finalmente lo reduce a una posible regla para recordar:

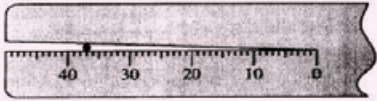
$$\frac{\text{Segmento largo}}{\text{Segmento corto}} (\text{Seg.paralelos}) = \frac{\text{Segmento largo}}{\text{Segmento corto}} (\text{Seg.intersección})$$

Se sugiere desarrollar el problema de Nicolás y Bastián, considerando que Bastián tiene **150 cm** de altura, su sombra a esa hora es de **3 m** de longitud y la sombra de la casa es de **20 m** de longitud.

PRÁCTICA
INDEPENDIENTE

Se sugiere hacer un trabajo personal, que incluya la etapa de realización del esquema, determinación del factor de homotecia, aplicación para encontrar un lado y presentación de otras proporciones que se cumplen en el problema.

¿Qué grosor tiene el cable si la apertura del corte es de **2 mm** de ancho?



FUENTE: <https://www.weilerbach-rsplus.de/Hausaufgaben/Hausaufgabe20200420114606.pdf>

Nota: el punto negro dentro del instrumento de medición representa un cable cortado.

Esquema	Factor de la homotecia	Aplicación de la homotecia
	$\frac{2}{50} = 0,04$ $\rightarrow k = 0,04$ ► Esta es una homotecia que tiene factor 0,04. ► Se cumple: $0,04 \cdot 37 = 1,48$	$\frac{2}{50} = \frac{d}{37}$ $\rightarrow d = 1,48 \text{ mm}$ ► La medida del grosor del cable es de 1,48 mm.

Para retroalimentar la actividad personal del desarrollo del problema, se sugiere utilizar la mentalidad de crecimiento:

MENTALIDAD DE CRECIMIENTO		
Mis logros fueron	Mis errores que me ayudaron a mejorar fueron:	¿Qué haré para seguir mejorando?
▶ Ver la homotecia en el problema. ▶ Diseñar un camino para encontrar la solución, elaborar un esquema geométrico. ▶ Encontrar el factor k de la homotecia. ▶ Resolver el problema.	▶ No relacionar bien los valores dados con las variables. ▶ No fijarme en la pregunta. ▶ Elegir una estrategia equivocada. ▶ Error en el cálculo. ▶ No dar una respuesta al problema.	▶ Buscar/verificar/corregir mis errores. ▶ Resolver otros problemas parecidos.

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Estación	Inicial	Intermedio	Avanzado
Datos iniciales del problema.	Identifica datos y realiza un cálculo.	Identifica los datos y calcula el factor k .	Identifica los datos, calcula el factor k y llega al resultado correspondiente.
Homotecia.	Encuentra en el problema qué tiene que ver con la homotecia.	Relaciona de forma correcta las partes dadas del problema con la homotecia para resolverlo.	Relaciona de forma correcta las partes dadas del problema con la homotecia para resolverlo y observa que el diámetro del círculo no está exactamente vertical en el corte.
Variaciones.	Identifica cambios en el factor k dados en las condiciones iniciales.	Determina el desarrollo del problema de la homotecia según las nuevas condiciones dadas.	Determina el desarrollo del problema de la homotecia según las nuevas condiciones dadas y conjetura sobre el posible resultado.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares	Entenderemos que la resolución de problemas requiere del desarrollo de estrategias. En este caso la homotecia y sus condiciones permiten ampliar la forma de encontrar los datos de objetos que están en nuestro alrededor. La variación de las condiciones permite verificar la validez de la propiedad homotética, suponiendo que no hay perpendicularidad y la variación de parámetros permitirá encontrar diferentes factores de la homotecia. En ambos casos, se sugiere guiar la comparación por medio de una conversación sobre los cambios y efectos en los resultados cuando se realizan estas variaciones.
Actitudes	Para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con perseverancia y proactividad, se sugiere, ejemplificar los pasos “esquema – factor – aplicación de la propiedad – respuesta” para promover la perseverancia y lograr lo esperado. Por otra parte, se recomienda promover la proactividad mediante la presentación de problemas similares en la aplicación de la propiedad de la homotecia.
Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal	Se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:

Independencia	Pensar las soluciones y los caminos para obtener resultados por cuenta propia.
Confiar en lo que se sabe	Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otras personas.
Trabajar a su propio nivel	En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar a ritmo propio.
Practicar la autorregulación	Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento pedir ayuda directa a un compañero o la o el docente.

Actividad de desempeño 4

Propósito

En esta actividad los y las estudiantes realizarán demostraciones simples de resultados e identificarán en una demostración, si hay saltos o errores a través de un trabajo grupal. Esta actividad profundiza el tema de la homotecia ampliando a los teoremas de Tales, para desarrollar variadas herramientas para el diario vivir que permitan aproximar longitudes, áreas o volúmenes, en casos donde no hay formas de medir directamente.

Objetivos de aprendizaje

OA 6

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Argumentar y comunicar)**

Conocimientos esenciales

- Teoremas de Tales.
-

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

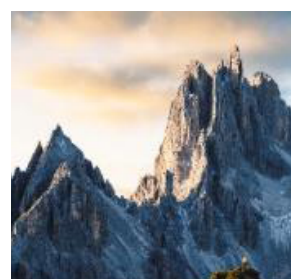
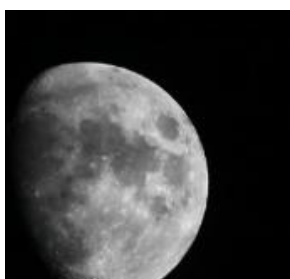
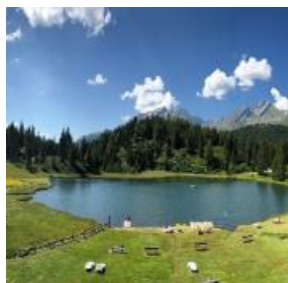
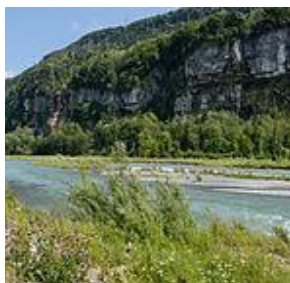
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Aplicación de la proporcionalidad.
- Utilización de la regla de tres.
- Resolver ecuaciones lineales.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta diferentes situaciones relacionadas con situaciones reales, en las cuales por distintas razones no se pueden medir longitudes, áreas o volúmenes de forma directa y es necesario recurrir a las propiedades de la homotecia.



Conexión interdisciplinar
Ciencias Naturales
OA 1 Nivel 1 EM

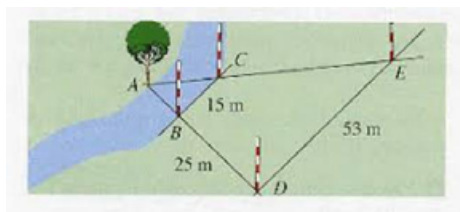
Algunas de las preguntas que pueden motivar la aplicación de la homotecia y en el cómo se podría hacer son:

- ▶ ¿Qué se quiere medir?
- ▶ ¿Cuál sería el punto de referencia?
- ▶ ¿A cuáles medidas puedo tener acceso?
- ▶ ¿De qué forma nos podría ayudar el triángulo del silvicultor?
- ▶ ¿Por qué se puede confiar en esta medida?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para introducir la realización de demostraciones simples, se sugiere comenzar con una aplicación numérica del teorema de Tales, por ejemplo:

¿Cómo se puede determinar el ancho del riachuelo?



Los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ tienen las medidas dadas y con el teorema de Tales se puede determinar el ancho del río:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{53}{15} \approx 3,5$$

Dado que hay una homotecia y los segmentos $\overline{BC}$ es paralelo a $\overline{DE}$, se tiene que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \approx 3,5$$

Con el redondeo resulta:

$$\overline{AD} = 3,5 \overline{AB}$$

Además, según el dibujo: $\overline{AD} = \overline{AB} + 25 \rightarrow 3,5 \overline{AB} = \overline{AB} + 25$

$$3,5 \overline{AB} - \overline{AB} = 25$$

$$\overline{AB} (3,5 - 1) = 25$$

$$\overline{AB} = \frac{25}{2,5} = 10$$

Con lo que se concluye que el ancho del riachuelo $\overline{AB}$ es de aproximadamente **10 m**.

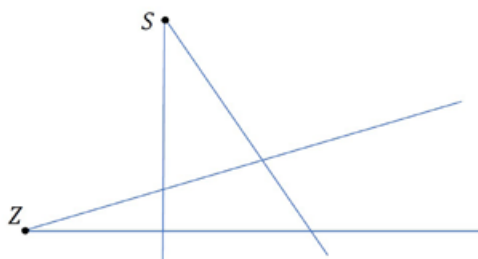
Para presentar el teorema de Tales y su demostración, se sugiere promover la conversación en torno a las preguntas: ¿Cómo podemos estar seguros de la veracidad de este teorema de Tales? ¿Qué dice este teorema?.

Características de la homotecia con centro en Z y factor k :

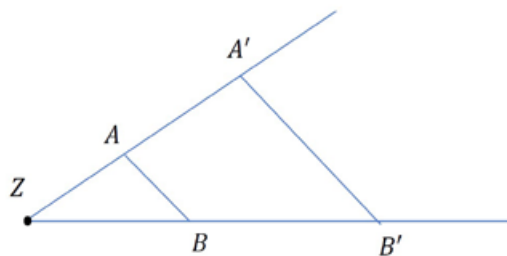
- Z es el único punto fijo.
- Cada punto P con $P \neq Z$ tiene una imagen asignada de la siguiente manera: P' se encuentra sobre la recta generada por el segmento $\overline{ZP}$ y $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$
- Las imágenes de segmentos o de rectas siguen siendo segmentos o rectas. La medida del segmento imagen es k veces más largo que la preimagen. Cada recta es transformada en una recta paralela.
- La medida de los ángulos queda invariante.
- La razón de proporcionalidad es invariante.

Propiedad 1: Cada recta es transformada en una recta paralela

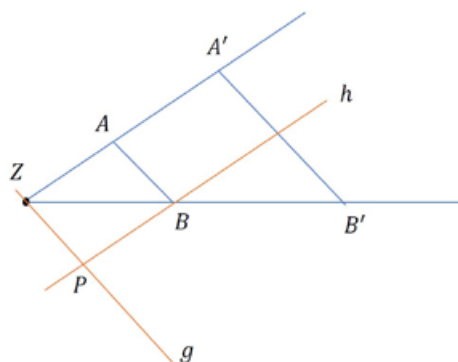
Demostración: Supongamos que una imagen de una recta se corta en un punto S . Entonces hay dos puntos fijos Z y S , lo cual contradice la primera característica de la homotecia. Con esto, tenemos que hay una contradicción y no hay otro punto fijo y las rectas deben ser paralelas.



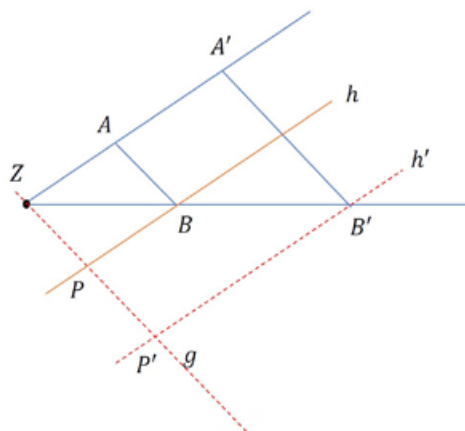
Propiedad 2: La imagen de un segmento que ha sido transformado por la homotecia de centro Z y factor de homotecia k , es k veces más largo que el segmento original.



Demostración: Construyamos una recta g paralela a AB y que contenga a Z y una recta h que sea paralela a ZA y que contenga a B .



Así, se tiene el paralelogramo $ZPBA$ y $\overline{AB} = \overline{ZP}$ extendamos el segmento $\overline{ZP}$ en un factor k , entonces se tiene $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$ y $\overline{PB}$ tiene una imagen $\overline{P'B'}$



Así, se tiene que:

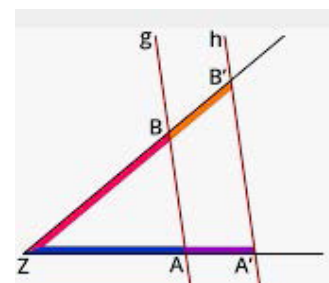
$$g \parallel AB \quad h \parallel ZA \quad h \parallel h'$$

Con esto se tiene que $Z'P'B'A'$ es un paralelogramo y se cumple que:

$$\overline{A'B'} = \overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP} = k \cdot \overline{AB}$$

PRÁCTICA GUIADA

Motivar el descubrimiento de otras propiedades por medio de los conocimientos adquiridos sobre las homotecias, relevando el factor de la homotecia y la razón entre los segmentos que se mantiene. Para demostrar el teorema de Tales, se sugiere presentar en un dibujo con segmentos de color azul, morado, rojo y naranja, la homotecia de un segmento



Algunas de las preguntas que pueden orientar el desarrollo del descubrimiento del primer teorema de Tales son:

- ▶ ¿Qué transformación geométrica se representa?
- ▶ ¿Qué posición mutua tienen las rectas g y h ?
- ▶ ¿Qué razón se mantiene?
- ▶ ¿Qué se hace para encontrar el factor?

Si se conocen todas las medidas: ¿De cuántas maneras podrías encontrar el factor de la homotecia?

Se sugiere guiar la demostración, relevando los pasos que están involucrados. En ningún caso se espera que los y las estudiantes realicen demostraciones de manera independiente, más bien se espera que comprendan el procedimiento de una demostración y el porqué de cada paso.

Primer teorema de Tales: Si $g \parallel h$ entonces:

$$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$$

También se cumple que:

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

Demostración: determinando la razón

$$k = \frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}}$$

Se define una homotecia de centro Z y factor k , la imagen de B bajo esta homotecia es B^* y se tiene que $A'B^* \parallel AB$ y $A'B' \parallel AB$ entonces $A'B^* \parallel A'B'$ como comparten el mismo punto A' se tiene que $B' = B^*$ y con esto se cumple que:

$$k = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}}$$

Igualando el factor k , se tiene el primer teorema de Tales.

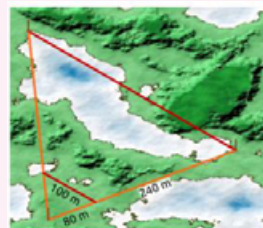
Se sugiere mencionar el recíproco del primer teorema de Tales y el segundo teorema de Tales, para el cual no se cumple el recíproco. En ambos casos se recomienda presentar la demostración para comprender los pasos que están involucrados.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Organice un trabajo grupal con diferentes ejercicios de aplicación de los teoremas de Tales y diferenciar según niveles de dificultad. Para desafiar de igual forma a cada estudiante, para el trabajo grupal se recomienda formar grupos homogéneos en rendimiento matemático.

Dificultad 1

Se mide la longitud de un lago inaccesible. Las líneas rojas son paralelas entre sí. Introduzca el valor a continuación.

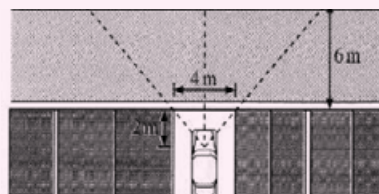


<https://mathe.aufgabenfuchs.de/flaeche/dreieck/strahlensatz.shtml>

Dificultad 2

Una patrulla de policía se encuentra en una entrada.

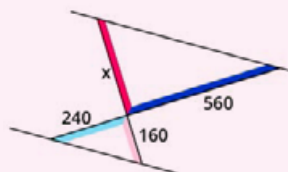
- ▶ ¿Cuántos metros del lado opuesto de la carretera puede ver?
- ▶ ¿Cuántos metros puede ver si se acerca **1 m** a la carretera?



<https://www.weilerbachrsplus.de/Hausaufgaben/Hausaufgabe20200420114606.pdf>

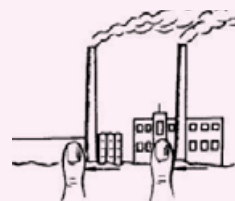
Dificultad 3

Calcule la distancia entre los pueblos que se encuentran en el punto A y B.



Dificultad 4

El salto del pulgar cuando se mira con un ojo u otro es una regla empírica para estimar la distancia a un objeto o de su tamaño. La regla establece que la anchura por la que el pulgar "salta" sobre el objeto observado cuando el ojo cambia, es una décima parte de la distancia.



<https://www.weilerbach-rsplus.de/Hausaufgaben/Hausaufgabe20200420114606.pdf>

Dos chimeneas de una fábrica están a **600 m** del observador. Al apuntar, su distancia lateral corresponde exactamente a un salto del pulgar. La distancia entre los ojos del observador es de **6,5 cm**, la distancia ojo-pulgar es de **65 cm**. ¿Cuál es la distancia real de las chimeneas?

Dificultad 5

Si uno cierra el ojo izquierdo y el derecho alternadamente, el pulgar, sostenido en posición vertical con el brazo extendido, parece dar un salto en el terreno.

Sara tiene la longitud del brazo de **64 cm** y la distancia entre los ojos de **6,4 cm**. Ella estima con esa técnica que el ancho de un muro que se encuentra en frente es de **5 m**. ¿A qué distancia del muro está Sara si la estimación es correcta?

**EVALUACIÓN
FORMATIVA**

Para retroalimentar la actividad grupal se sugiere utilizar Valoro - Sugiero:

VALORO - SUGIERO	
Valoro de tu trabajo...	Te sugiero...
▶ Escribir en cada paso de la demostración tus comentarios propios sobre lo que se está haciendo. ▶ Aplicar las proposiciones de Tales para hacer un esquema y resolver los problemas.	▶ Probar con ejemplos numéricos para ver si funciona la proposición planteada. ▶ Comenzar con el problema de menor dificultad, así tendríamos otros problemas resueltos, nos hubiésemos demorado menos en estos más fáciles.

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares	Entenderemos que la habilidad de argumentar y comunicar matemáticamente tiene varias componentes, una de ellas es hacer demostraciones y comprender los pasos que se realizan. En esta actividad, el foco es mostrar las condiciones para que las proposiciones se cumplan y presentar una demostración. No se espera que cada estudiante demuestre proposiciones nuevas a las que se presentaron de manera guiada, sino que aplique las proposiciones y verifique las condiciones iniciales para que se cumpla la propiedad.
Actitudes	Para apoyar el desarrollo de la actitud de trabajar colaborativamente, se sugiere promover un trabajo con empatía y respeto por los demás, particularmente en la toma de decisiones sobre el problema a resolver, la distribución del trabajo y la escucha respetuosa de las posibles soluciones. Trabajar colaborativamente en matemática significa resolver problemas por partes, donde cada colaboración que se realiza contribuye a formular una respuesta, cada idea se evalúa grupalmente para clasificarla o reorientarla según el problema o situación. Trabajar colaborativamente es pensar en conjunto sobre los caminos y procedimientos para lograr el objetivo. Se sugiere motivar el trabajo colaborativo indicando que todas las ideas y contribuciones son bienvenidas cuando se revisan en conjunto.
Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal	Se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:

COLABORAR	Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.
	Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo. Entregar una rúbrica con los criterios y dejar unos dos minutos para revisar la comprensión de las instrucciones.
	La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.
	Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos ya sea de forma aleatoria por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupos y cantidad de la clase.
	Decida con anterioridad los momentos en que los y las participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que harán, como también el momento en que los grupos se escuchan entre sí.

Módulo Obligatorio 4

Visión panorámica

Gran idea

La probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza.

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Probabilidades, regla multiplicativa y regla aditiva.
-

Tiempo estimado: 6 semanas (24 horas)

Propósito

En el módulo 4 de la asignatura de matemática del Nivel 1 de Educación Media, se espera que los y las estudiantes comprendan que **la probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza**. Se entiende que la comprensión de la probabilidad se basa en nociones intuitivas y que se quiere relacionar la intuición con lo teórico para caracterizar las situaciones que nos rodean y que se relacionan con lo azaroso, la incertidumbre o incerteza. Este módulo considera situaciones cercanas a cada estudiante, que son parte de nuestra cultura, como también situaciones que son propias de la matemática y que permiten abstraer en un contexto simplificado el concepto probabilístico que caracteriza a esa clase de situaciones.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 4 desarrollan la habilidad de resolver problemas mediante el conocimiento y la aplicación del cálculo de probabilidades y las reglas multiplicativa y aditiva. En particular, la variación de parámetros y condiciones iniciales para un mismo experimento permitirá comparar la probabilidad en un caso u otro. También permitirá identificar la aplicación de la regla

que se requiere según un caso o el otro. El uso de las conjunciones y, o en la construcción del conocimiento permiten hacer una transferencia entre lo verbal y simbólico, y diferenciar entre la necesidad de aplicar una regla u otra. El uso del árbol de probabilidad es un apoyo para la comprensión y organización de la información, permite ampliar el pensamiento probabilístico y evaluar el proceso por el cual se obtiene una respuesta. Además, deja comparar las diferentes posibilidades o caminos que se describen en la situación.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo 4 desarrollan las actitudes del siglo XXI del ámbito de las Maneras de pensar, promoviendo la actitud de perseverar frente a tareas o metas específicas que se presentan en las actividades y la proactividad por medio de la orientación hacia el cambio y la anticipación de panoramas. También se fomenta el desarrollo de un pensamiento flexible para reelaborar las ideas. En este sentido el uso de esquemas, como el árbol de probabilidad ayuda a flexibilizar y reelaborar con facilidad las diferentes respuestas.

Ruta de Aprendizaje

¿Cómo estudiamos las situaciones de incerteza?

●	Actividad de desempeño 1	Variar parámetros o condiciones iniciales de problemas aleatorios relacionados con la regla de Laplace para comparar cambios en los resultados.
●	Actividad de desempeño 2	Evaluar el proceso y comprobar resultados utilizando árboles de probabilidad para representar y comprobar resultados asociados a la regla multiplicativa.
●	Actividad de desempeño 3	Evaluar el proceso y comprobar resultados utilizando árboles de probabilidad para representar y comprobar resultados asociados a la regla aditiva.
●	Actividad de desempeño 4	Variar condiciones parámetros iniciales o de problemas aleatorios relacionados con la regla multiplicativa o aditiva para comparar cambios en los resultados.

Actividad de desempeño

1

Propósito

En esta actividad las y los estudiantes representarán y variarán parámetros o condiciones iniciales de problemas aleatorios relacionados con la regla de Laplace para comparar cambios en los resultados. Esta actividad comienza con simples juegos aleatorios, como se ven en las fondas o ramadas a lo largo de Chile en las fiestas patrias.

Objetivos de aprendizaje

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Probabilidades (Regla de Laplace).
-

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

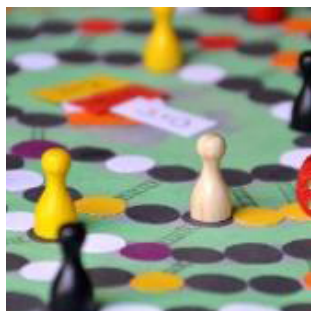
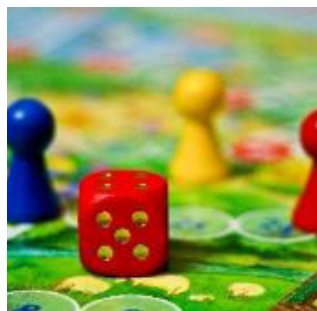
En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Conversión de fracciones a decimales.
- Conversión de decimales a porcentajes.
- Conversión de fracciones a porcentajes.
- Relación entre el círculo, el ángulo, la fracción y el porcentaje.
- Aplicación de la regla de tres.
- Identificación del vocabulario evento, frecuencia absoluta, frecuencia relativa y lista de recuento o tabla de datos.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta situaciones de juegos de azar y se centra particularmente en la rueda de la fortuna, la cual se puede encontrar, probablemente, en la mayoría de las fondas o ramadas de Chile.

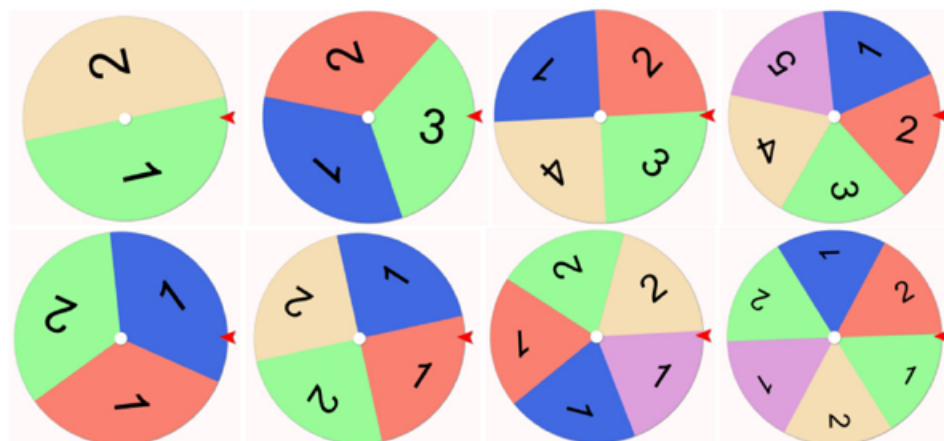


Para introducir el concepto de un experimento aleatorio, podría realizar las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Cuáles juegos aleatorios conocen?
- ▶ ¿Cómo sería una rueda de la fortuna donde las posibilidades de ganar son iguales?
- ▶ ¿Con cuáles otros experimentos se podría comparar?
- ▶ ¿Por qué la rueda de la fortuna es muy popular en estas fiestas?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para construir el conocimiento sobre variar las condiciones y comparar los cambios en los resultados, se sugiere trabajar con diferentes ruedas de la fortuna. En las imágenes se muestran diferencias en referencia a los números.



A través de preguntas la o el docente construye o recuerda definiciones para homologar el vocabulario, diferenciando entre la primera y la segunda fila de ruedas. Algunas de las preguntas son:

- ▶ ¿Qué tipo de experimento se puede realizar con estas ruedas?
- ▶ ¿Podemos predecir el resultado?

Experimento aleatorio: es un experimento en el que no se puede predecir previamente el resultado. Por ejemplo, la rueda de la fortuna, el lanzamiento de dados, el ludo, la rifa, la lotería, la ratonera, el tiro de argollas.

- ▶ ¿Qué característica tienen todas las ruedas?
- ▶ ¿Qué tienen en común con el lanzamiento de una moneda?
- ▶ ¿Qué tienen en común con el lanzamiento de un vaso plástico?

Experimento aleatorio equiprobable: todas las partes que componen el objeto tienen la misma probabilidad de salir, en muchos casos es una figura regular. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda es comparable con la primera rueda de la primera fila y el lanzamiento de un vaso no es equiprobable, es más probable que caiga de lado a que caiga parado.

- ▶ ¿Qué objetos entran en juego en la rueda?
- ▶ ¿Cuál es el universo de todas las posibilidades?

Espacio muestral: son todos los posibles resultados del experimento. En nuestro ejemplo, el espacio muestral estaría compuesto por estos resultados: obtener un 1, obtener un 2, obtener un 3, se anota $\Omega = \{1, 2, 3\}$ o bien $\Omega = \{\text{azul}, \text{rojo}, \text{verde}\}$.



- ▶ ¿Qué entendemos por suceso o evento?
- ▶ ¿Qué suceso es probable, posible o imposible?
- ▶ ¿Qué diferencia un suceso de otro?

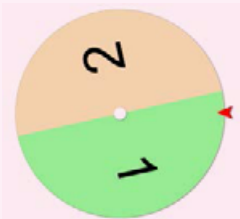
Suceso o evento: es cualquier subconjunto del espacio muestral. Algunos sucesos podrían ser: obtener un 3, obtener un número impar, en general un suceso es cualquier subconjunto del conjunto sigma. Por ejemplo

- A: la rueda se detiene en el 1.*
- B: la rueda se detiene en el 2.*
- C: la rueda se detiene en el 3.*
- D: la rueda no se detiene en ninguno.*
- E: la rueda se detiene en el 1 o en el 2.*
- F: la rueda se detiene en el 1 o en el 3.*
- G: la rueda se detiene en el 2 o en el 3.*
- H: la rueda se detiene en el 1, 2 o 3.*

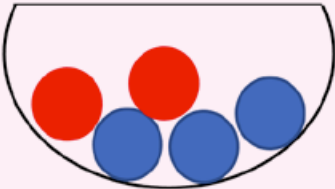
Dentro de los sucesos destacamos cuatro tipos:

- **Suceso seguro:** es el suceso o evento que siempre se verifica. Por ejemplo, un suceso seguro sería obtener un número natural menor que 4. En nuestro ejemplo será el suceso H.
 - **Suceso imposible:** es el suceso que no se puede obtener nunca. En la rueda de la fortuna de ejemplo, un suceso imposible sería obtener un número mayor que 7.
 - **Suceso probable:** son todos aquellos sucesos que son posibles de salir. En nuestro ejemplo sería, A, B, C, D, E, F y G.
 - **Suceso complementario:** el suceso probable y contrario a un suceso o que se verifica cuando no se verifica el suceso A, se denomina suceso complementario de A. En nuestro ejemplo, A: *la rueda se detiene en el 1*. El complemento es E: *la rueda se detiene en el 1 o en el 2*. El complemento de A se anota $\bar{A}$.
- ¿Cómo se calcula la probabilidad de ocurrencia de un evento?
 ► ¿Siempre es posible calcular esta probabilidad?
 ► ¿Por qué podría ser interesante de saber la probabilidad de un suceso?
- **Regla de Laplace:** en el caso de que todos los sucesos probables de un experimento aleatorio tengan la misma probabilidad de ocurrir, se define la probabilidad de un suceso A como el cociente entre el número de resultados favorables de que ocurra el suceso A en el experimento y el número de resultados posibles del experimento.

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables de } A}{\text{Total de casos posibles}}$$

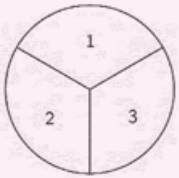
Experimento	Cálculo de probabilidades
	A = "obtener el 1" ($A = \bar{B}$) $360^\circ : 2 = 180^\circ$ $\frac{1}{2}$ (1) $P = \left(A \right) = \frac{1}{2} = 0,5 ; 50 \% ; 180^\circ$ $\frac{1}{2}$ (2) $B = \text{"obtener el 2"} \quad (B = \bar{A})$ $P = \left(B \right) = \frac{1}{2} = 0,5 ; 50 \% ; 180^\circ$
	A = "obtener el 1" $360^\circ : 3 = 120^\circ$ $\frac{1}{3}$ (1) $P = \left(A \right) = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} ; 33,\bar{3} \% ; 120^\circ$ $\frac{1}{3}$ (2) $B = \text{"obtener el 2"}$ $P = \left(B \right) = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} ; 33,\bar{3} \% ; 120^\circ$ $\frac{1}{3}$ (3) $C = \text{"obtener el 3"}$ $P = \left(C \right) = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} ; 33,\bar{3} \% ; 120^\circ$

PRÁCTICA GUIADA Se sugiere hacer una transferencia de un tipo de experimento a otro, identificando las diferencias y similitudes y utilizando el lenguaje propio para el desarrollo del pensamiento probabilístico. Para esto, se recomienda realizar una tabla comparativa.

Experimento 1	Experimento 2
Hacer rodar una rueda de la fortuna, numerada del 1 al 4. Cuando se detiene, la flecha marca un número. 	Lanzar un dado de cuatro lados, el número que sale en la punta es el número que se considera como evento. 
La estructura de forma de los objetos es diferente, el tipo de acción que se realiza en un caso es rodar y en el otro es lanzar.	
La probabilidad de obtener un 2 como resultado es: $P(2) = \frac{\text{Casos favorables de } A}{\text{Total de casos posibles}} = \frac{1}{4}$	
Hacer rodar una rueda de la fortuna, numerada con 1 y 2. Cuando se detiene, la flecha marca un número. 	Sacar una bolita de una urna, donde todas las bolitas tiene el mismo tamaño y masa, pero diferente color, 2 rojas y 3 azules. 
La estructura de los objetos es diferente, en su forma y en el material, las acciones difieren entre rodar y sacar.	
La probabilidad de tener un 2 o el color rojo es: $P(2) = P(R) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Total de casos posibles}} = \frac{2}{5}$	

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Se sugiere hacer un trabajo grupal con al menos 4 integrantes con diferentes experimentos aleatorios que permitan aplicar la regla de Laplace, donde cada experimento sea tratado por al menos tres grupos. Se espera una parte experimental de la probabilidad, donde el experimento se realice de manera concreta, utilizando la frecuencia relativa, el porcentaje y el cálculo teórico, aplicando el teorema de Laplace, de manera que, al finalizar, los grupos presenten los resultados en un plenario. Se sugiere, complementar el experimento con la ley de los grandes números, que es el teorema fundamental de la teoría de la probabilidad. Este señala que, si repetimos muchas veces, tendiendo al infinito un mismo experimento aleatorio, la frecuencia de que suceda un cierto evento tiende a ser una constante.

Juego	Cálculo de la probabilidad
Lanzamiento de moneda, al menos unas 50 veces.	 Cara $\frac{1}{2} = 0,5 ; 50 \%$ Sello $\frac{1}{2} = 0,5 ; 50 \%$
Lanzar dados de 4, 6, 8, 10, 12 y 20 lados, al menos unas 100 veces.	 $\frac{1}{4}$ 1 $p = \binom{1}{1} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \%$ $\frac{1}{4}$ 2 $p = \binom{2}{2} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \%$ $\frac{1}{4}$ 3 $p = \binom{3}{3} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \%$ $\frac{1}{4}$ 4 $p = \binom{4}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \%$
Rueda de la fortuna, girar al menos unas 100 veces.	 A = "obtener el 1" $\frac{1}{3}$ 1 $p = \binom{1}{A} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} ; 33,\bar{3} \%$ B = "obtener el 2" $\frac{1}{3}$ 2 $p = \binom{2}{B} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} ; 33,\bar{3} \%$ C = "obtener el 3" $\frac{1}{3}$ 3 $p = \binom{3}{C} = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} ; 33,\bar{3} \%$

Para retroalimentar la actividad grupal de elaborar una presentación sobre un juego aleatorio y la determinación de la probabilidad, se sugiere utilizar la retroalimentación grupal:

RETROALIMENTACIÓN GRUPAL		
Criterios con mayor porcentaje de logro	Criterios con menor porcentaje de logro	Sugerencias para mejorar
▶ Trabajar en conjunto. ▶ Utilizar los fuertes de quienes integran el grupo. ▶ Dejar que se expresen las demás personas. ▶ Llegar a un acuerdo.	En la presentación de los resultados: ▶ Hablar claramente / entendible. ▶ Utilizar imágenes de apoyo.	▶ Estudiantes dominantes tendrían que escuchar al resto del grupo. ▶ Estudiantes con timidez deberían hacer más esfuerzos para ser escuchados.

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Juego/Experimento	Describen en pocas palabras el experimento.	Describen de forma clara el experimento y su realización.	Describen de forma detallada el experimento, su realización y lo respaldan visualmente.
Probabilidad	Presentan en su discurso el desarrollo del experimento.	Presentan en su discurso, de forma clara, el desarrollo del experimento, los cálculos y los resultados.	Presentan en su discurso, de forma detallada, el desarrollo del experimento, los cálculos, los resultados y lo respaldan visualmente.
	Utilizan tablas y cálculos para determinar la probabilidad.	Utilizan tablas, frecuencias relativas, porcentajes y la regla de Laplace para determinar la probabilidad.	Utilizan tablas, frecuencias relativas, porcentajes, la regla de Laplace para determinar la probabilidad y relacionan la probabilidad del experimento con el cálculo de Laplace.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares

Para desarrollar la comprensión del concepto de probabilidad, se recomienda partir de los conocimientos previos de sus estudiantes, utilizando representaciones familiares como fracciones, decimales y porcentajes, y estableciendo conexiones entre ellas. Mediante actividades prácticas basadas en tablas de conteo, donde se consoliden los resultados de los y las estudiantes podrán observar empíricamente cómo las frecuencias relativas se aproximan a las probabilidades teóricas. Esto les permitirá contrastar la diferencia entre experimentos equiprobables (donde aplica Laplace) y aquellos donde los eventos no tienen la misma probabilidad.

El enfoque no requiere que realicen todas las pruebas físicamente, sino que analicen los datos recolectados para identificar patrones, simplificar cálculos y llegar a conclusiones aplicables en contextos cotidianos. Así, se prioriza la comprensión conceptual sobre la repetición mecánica de ejercicios, enfatizando cuándo es válido usar el enfoque de Laplace y cuándo se necesitan otros modelos probabilísticos.

Se sugiere planificar un módulo cero que considere los experimentos aleatorios, frecuencia absoluta, relativa y la probabilidad del módulo 4 del Nivel 3 de Educación Básica, y enfocarse en la resolución de problemas, la modelación y la representación de la información.

Actitudes

Para apoyar el desarrollo de la actitud de valorar las TIC como una oportunidad, se sugiere utilizar la calculadora en los momentos que se indiquen: al final de la práctica independiente y solo como medio para verificar resultados. En esta actividad, valorar el uso de la calculadora significa verla como un apoyo para verificar las ideas y no como un medio para realizar los cálculos. Por otra parte, ocupar la computadora como generador de experimentos aleatorios, a través de distintos sitios web, significa valorar las TIC como medios para generar resultados.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal

Se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:

COLABORAR	Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.
	Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo. Entregar una rúbrica con los criterios y dejar unos dos minutos para revisar la comprensión de las instrucciones.
	La evaluación es grupal y se sugiere no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.
	Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos ya sea de forma aleatoria por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupos y cantidad de la clase.
	Decida con anterioridad los momentos en que los y las participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que harán, como también el momento en que los grupos se escuchan entre sí.

Actividad de desempeño 2

Propósito

Esta actividad busca evaluar el proceso y comprobar resultados asociados a la regla multiplicativa utilizando árboles de probabilidad. Se espera relacionar el uso de la conjunción con la propiedad multiplicativa, con énfasis en la ocurrencia de dos sucesos y la visualización del camino que se recorre en el árbol de probabilidad para describir verbalmente lo que está ocurriendo

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Regla multiplicativa.
-

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Cálculo de probabilidad utilizando la regla de Laplace.
- Multiplicación de fracciones.
- Multiplicación de decimales.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta un menú de restaurant y la probabilidad de elección de comidas, para transferir los conocimientos de probabilidades a otras situaciones que no sean necesariamente de juegos y que introduzcan la noción de probabilidad para la toma de decisión.

Conexión interdisciplinar
Emprendimiento
y Empleabilidad
OA 3 Nivel 1 y 2 EM



Conexión interdisciplinar
Educación Financiera
OA 2 Nivel 1 y 2 EM

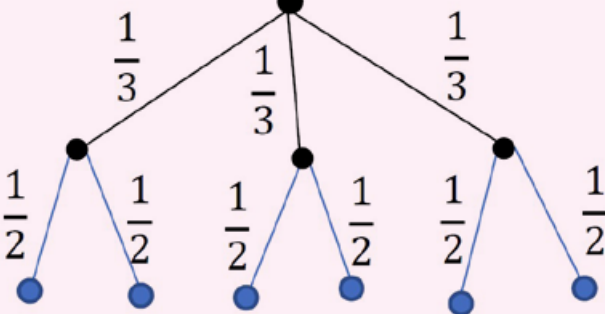
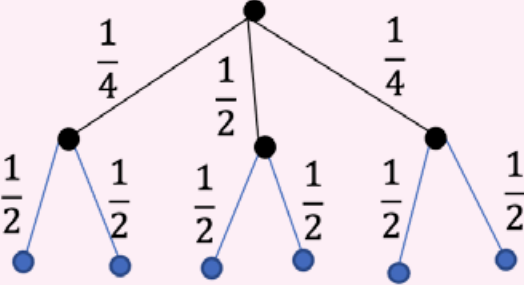
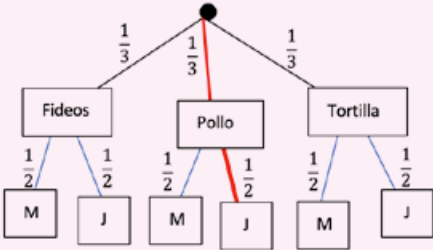
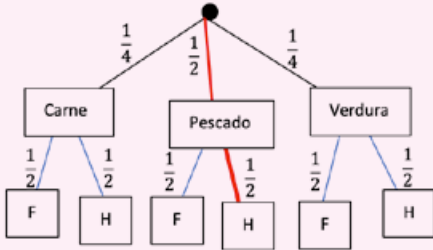
Algunas de las preguntas orientadoras son:

- ▶ ¿Cuántas posibilidades de elección hay en el menú?
- ▶ ¿Por qué la probabilidad de elección podría ser importante?
- ▶ ¿De qué manera influyen las preferencias en las probabilidades?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para introducir la representación de ideas y la evaluación del proceso para construir la regla multiplicativa, se sugiere tener dos posibilidades de menú. Uno de ellos con la misma probabilidad de elección y otro donde la probabilidad de elección tiene incluida una preferencia. En ambos casos, se sugiere la elaboración de un árbol de probabilidades y la delimitación de un camino para calcular la probabilidad.

Sin preferencias	Con preferencias
<u>Menú del día</u> • Fideos con salsa • Pollo con arroz • Tortilla de papa Postres • Maicena (M) • Jalea (J) Las personas no tienen una preferencia de alguna comida o postre en particular.	<u>Menú del día</u> • Carne • Pescado • Verduras Postres • Frutas (F) • Helado (H) Las personas tienen preferencia de las comidas, carne (25 %), pescado (50 %) y verduras (25 %), en los postres es 50 y 50.

Sin preferencias	Con preferencias
Árbol de probabilidades	
	
¿Cuál es la probabilidad de elegir pollo con arroz y jalea?	¿Cuál es la probabilidad de elegir pescado de plato principal y helado de postre?
	
El camino indica que hay un tercio de probabilidad de elegir pollo y un medio de elegir jalea, entonces la probabilidad de elegir pollo y jalea es de un sexto. $P(\text{pollo}) = \frac{1}{3}$ $P(\text{jalea}) = \frac{1}{2}$ $P(\text{pollo y jalea}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	El camino indica que hay un medio de probabilidad de elegir pescado y un medio de elegir helado, entonces la probabilidad de elegir pescado y helado es de un cuarto. $P(\text{pescado}) = \frac{1}{2}$ $P(\text{helado}) = \frac{1}{2}$ $P(\text{pescado y helado}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
► Respuesta: sin preferencias hay un 16,7 % de probabilidad de elegir pollo de plato principal y jalea de postre.	► Respuesta: con preferencias hay un 25 % de probabilidad de elegir pescado de plato principal y helado de postre.

PRÁCTICA GUIADA

Para guiar la evaluación del proceso y la representación de ideas matemáticas, se sugiere realizar una nueva comparación entre dos situaciones de menú. En ellas se ha cambiado la cantidad de posibilidades y se procede a determinar la probabilidad de una elección.

6 posibilidades	8 posibilidades
<u>Menú del día</u> • Carne • Pescado Postres • Frutas (F) • Helado (H) • Jalea (J)	<u>Menú del día</u> • Carne de vacuno • Pollo • Pescado • Verduras Postres • Frutas (F) • Helado (H)
Árbol de probabilidades.	
¿Cuál es la probabilidad de elegir carne y helado?	
$P(\text{carne}) = \frac{1}{2}$ $P(\text{helado}) = \frac{1}{3}$ $P(\text{carne y helado}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$P(\text{carne}) = \frac{1}{4}$ $P(\text{helado}) = \frac{1}{2}$ $P(\text{carne y helado}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
► Respuesta: sin preferencias hay un 16,7 % de probabilidad de elegir carne de plato principal y helado de postre.	► Respuesta: sin preferencias hay un 12,5 % de probabilidad de elegir carne de plato principal y helado de postre.

PRÁCTICA
INDEPENDIENTE

Se sugiere hacer un trabajo de pares para comparar y evaluar el proceso realizado para determinar la probabilidad de ocurrencia de dos eventos independientes. Se recomienda continuar con el mismo contexto y hacer variaciones de cantidades o de preferencias. Esto permitirá internalizar la aplicación de la regla multiplicativa. En la tabla se muestran sugerencias para un trabajo en pareja.

Estudiante 1	Estudiante 2
<u>Menú del día</u> - Sopa - Ensalada Segundo - Charquicán - Pastel de choclo - Pantrucas Las personas no tienen una preferencia de alguna comida o postre en particular.	<u>Menú del día</u> - Carne - Pescado Postres - Frutas (F) - Helado (H) - Jalea (J) Las personas tienen preferencia de los postres, fruta (50 %), helado (25 %) y jalea (25 %).
<u>Menú del día</u> - Carne de vacuno - Pollo - Pescado - Verduras Postres - Frutas (F) - Helado (H) Las personas tienen preferencia por la carne de vacuno (20 %), pollo (10 %), pescado (40 %) y verduras (30 %).	<u>Menú del día</u> - Carne de vacuno - Pollo - Pescado - Verduras Postres - Frutas (F) - Helado (H) Las personas tienen preferencia por fruta (75 %) y por helado (25 %).

Para retroalimentar la actividad de pares, se sugiere utilizar la estrategia Valoro - Sugiero:

VALORO - SUGIERO	
Valoro de tu trabajo...	Te sugiero...
▶ El orden y claridad del árbol de probabilidades. ▶ La escritura de las respuestas y la aclaración de la regla multiplicativa.	▶ Marcar con color el camino que permite calcular la probabilidad. ▶ Escribir siempre en palabras la probabilidad que se está calculando.

<https://www.curriculumnacional.cl/portal/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Evento/suceso	Reconoce las diferentes posibilidades de un resultado.	Reconoce las diferentes posibilidades de un resultado y los representa en un diagrama de árbol.	Reconoce las diferentes posibilidades de un resultado, los representa en un diagrama de árbol y calcula de forma correcta las respectivas probabilidades.
Regla multiplicativa	Realiza una operatoria con dos probabilidades.	Multiplica dos probabilidades utilizando la regla multiplicativa.	Multiplica dos probabilidades utilizando la regla multiplicativa según el contexto y lo solicitado.
Comparación	Elabora una tabla comparativa.	Elabora una tabla comparativa y reconoce diferencias y similitudes.	Elabora una tabla comparativa y reconoce diferencias y similitudes, identificando la diferencia en el cálculo de la probabilidad.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares En esta actividad se desarrollan dos habilidades, por una parte la de representar por medio del diagrama de árbol, y por otra, la de resolver problemas por medio de la evaluación del proceso, en este caso al comparar y evaluar el proceso y los resultados obtenidos. En estos dos casos, se sugiere no perder de vista la aplicación de la regla multiplicativa para el cálculo de probabilidades y la transferencia que se hace desde los juegos de azar a una situación más cotidiana, como la presentación de un menú.

Actitudes Para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar, se recomienda que el trabajo personal se corrija entre pares. También es recomendable, anotar en su cuaderno las soluciones y los pasos que están involucrados en el desarrollo del diagrama de árbol y no solo anotar las soluciones.

Orientaciones para organizar e implementar el trabajo grupal Se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo grupal en esta actividad:

COLABORAR	Actividad dentro del horario de clases, el trabajo colaborativo y cómo ocurre debe ser observado en clases.
	Entregar instrucciones precisas sobre lo que se espera al término del trabajo. Entregar una rúbrica con los criterios y dejar unos dos minutos para revisar las comprensión de las instrucciones.
	La evaluación es grupal y se sugiera no evaluar hasta que se comprenda que la idea es contribuir para el logro de un objetivo común.
	Decida con anterioridad la forma de organizar los grupos ya sea de forma aleatoria por coincidir con las propuestas o por nivel de comprensión del tema, considere siempre la cantidad de participantes por grupos y cantidad de la clase.
	Decida con anterioridad los momentos en que los y las participantes del grupo se escuchan y toman las primeras decisiones para organizar lo que harán, como también el momento en que los grupos se escuchan entre sí.

Actividad de desempeño

3

Propósito

Esta actividad busca evaluar el proceso y comprobar resultados asociados a la regla aditiva utilizando árboles de probabilidad. Se espera relacionar el uso de la conjunción con la propiedad aditiva, con énfasis en la ocurrencia de dos sucesos y la visualización de los caminos que se recorren en el árbol de probabilidad para describir verbalmente lo que ocurre

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Regla aditiva.
-

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Cálculo de probabilidad utilizando la regla de Laplace.
- Multiplicación y adición de fracciones.
- Multiplicación y adición de decimales.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN
EXPERIENCIAL

El o la docente presenta como situación la salida de una familia a comer en un restaurante. Es el caso particular de la familia de Verónica, que se compone de dos adultos, cinco menores de edad y dos adultos mayores. En total 9 personas, de las cuales 8 pueden pedir un menú. En la entrada del restaurant encontraron el siguiente menú:

¿Todos pueden elegir un menú diferente al otro?	Según la cantidad de personas de la familia de Verónica.
	

Conexión interdisciplinar
Emprendimiento
y Empleabilidad
OA 3 Nivel 1 y 2 EM

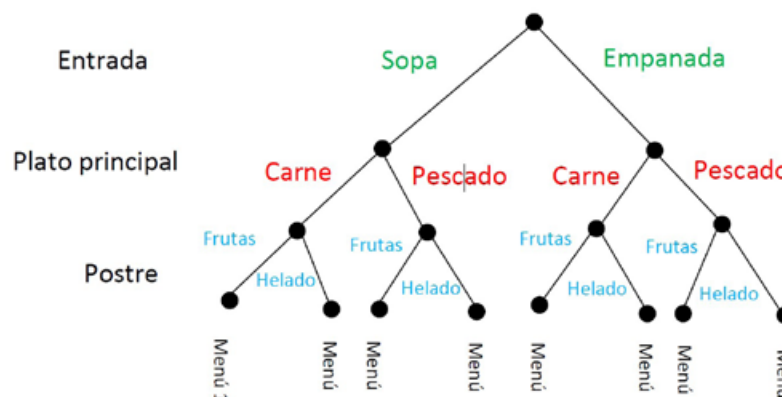
Conexión interdisciplinar
Educación Financiera
OA 2 Nivel 1 y 2 EM

Algunas de las preguntas que pueden motivar la relación de la situación con la probabilidad son:

- ▶ ¿Cuál será la condición para que un menú sea diferente al otro?
- ▶ ¿Cómo se pueden determinar sistemáticamente todas las posibilidades?
- ▶ ¿Cómo se puede visualizar el procedimiento para todas las posibilidades?
- ▶ ¿Cuáles son los parámetros numéricos que inciden en el cálculo de todas las posibilidades?
- ▶ ¿Cómo se podría calcular la probabilidad de elección de las posibilidades?

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para introducir el concepto de la regla aditiva, la o el docente podría guiar el aprendizaje por medio del siguiente procedimiento que se relaciona con las respuestas a las preguntas de la situación experiencial que una posibilidad es diferente a la otra, si se cambia un plato de comida. El menú se puede ordenar con entrada, plato principal y postre, haciendo las diferentes selecciones posibles, el procedimiento de elección se puede visualizar con un diagrama de árbol.

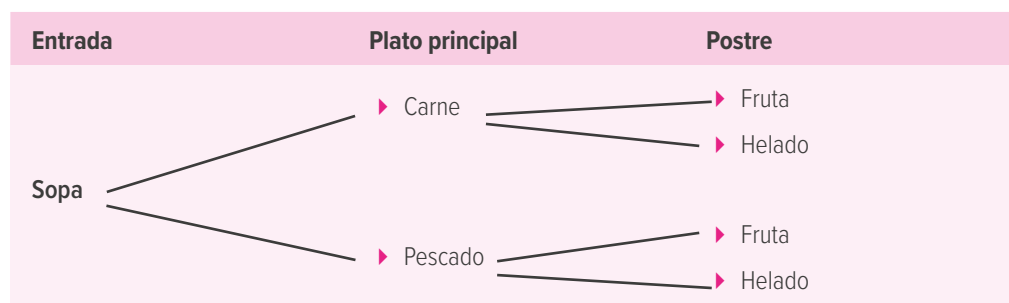


Observar que cada rama del árbol termina en un menú diferente y destacar una de las ramificaciones, ya sea marcando en color o extrayendo una parte del árbol. También relevar la noción de camino o ramificación del árbol, describiendo las ocho posibilidades e indicando como se leen las 8 soluciones en términos del uso de la conjunción “o”:

- Sopa, carne y fruta o
- Sopa, carne y helado o
- Sopa, pescado y fruta o
- Sopa, pescado y helado o
- Empanada, carne y fruta o
- Empanada, carne y helado o
- Empanada, pescado y fruta o
- Empanada, pescado y helado.

Se sugiere diferenciar con un ejemplo el uso de la conjunción y en la probabilidad aplicando la regla multiplicativa, como se ejemplifica a continuación:

¿Cuál es la probabilidad de que alguien pida sopa, carne y un helado?

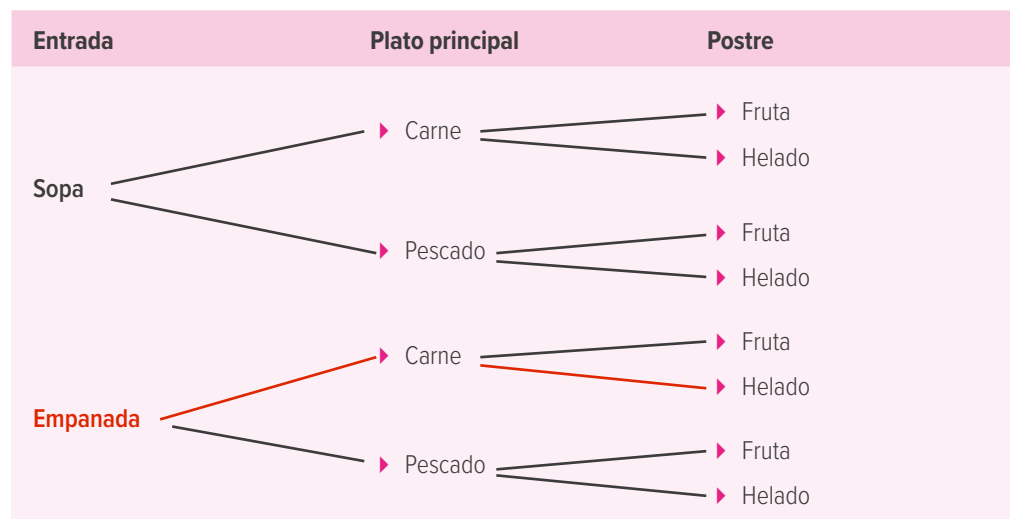


Para responder a la pregunta, se aplica la regla multiplicativa:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Luego, para construir la regla aditiva, se sugiere realizar la pregunta:

¿Cuáles son las posibilidades de terminar con helado de postre?



Para responder a la pregunta, es necesario marcar todas las posibilidades, de manera que se concluya que cada vez que hay dos posibilidades se tiene un **50%** y que los **4** caminos se pueden marcar en el árbol o se pueden leer directamente de las **4** posibilidades usando la conjunción “o”, como se ilustra a continuación:

Sopa, carne y helado o sopa, pescado y helado o empanada, carne y helado o empanada, pescado y helado

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

De manera que la probabilidad de terminar con helado de postre es de un **50%**

PRÁCTICA GUIADA Para guiar la aplicación de la regla aditiva para determinar la probabilidad de varios sucesos dentro de una misma situación, se sugiere incluir las preferencias y marcar los caminos que se están solicitando.

Sin preferencias	Con preferencias
Menú del día - Fideos con salsa - Pollo con arroz - Tortilla de papa Postres - Maicena (M) - Jalea (J)	Menú del día - Carne - Pescado - Verduras Postres - Frutas (F) - Maicena (M)
Las personas no tienen una preferencia de alguna comida o postre en particular.	Las personas tienen preferencia de las comidas, carne (25%), pescado (50%) y verduras (25%), en los postres es 50 y 50.
Árbol de probabilidades	
¿Cuál es la probabilidad de tener un menú con fideos o pollo y postre de maicena?	¿Cuál es la probabilidad de tener un menú con postre de maicena?
Los caminos que tienen fideos o pollo son dos y de esos quedan cuatro donde dos tienen maicena y la probabilidad se determina: $P(M) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$	Los caminos que tienen maicena son tres y la probabilidad se determina: $P(M) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$
► Respuesta: la probabilidad de tener un menú con pollo o fideo y de postre maicena es de aproximadamente 33,3%.	► Respuesta: la probabilidad de tener un postre de maicena en el menú es de un 50%.

PRÁCTICA
INDEPENDIENTE

Se sugiere hacer un trabajo personal, transfiriendo la aplicación de la regla aditiva a otras situaciones. En la tabla se muestra una posible estructura de esta práctica individual.

Menú	Pregunta
	 Las personas no tienen una preferencia de alguna comida o postre en particular. ► ¿Cuál es la probabilidad de tener sopa en el menú?
	 Las personas tienen preferencia de los postres, fruta (50 %), helado (25 %) y jalea (25 %). ► ¿Cuál es la probabilidad de tener helado en el menú?
¿Cuál es la probabilidad de tener helado como postre?	
	 Las personas tienen de preferencia carne de vacuno (20 %), pollo (10 %), pescado (40 %) y verduras (30 %). ► ¿Cuál es la probabilidad de tener pollo o pescado en el menú?
	 Las personas tienen de preferencia fruta (75 %) y de helado (25 %). ► ¿Cuál es la probabilidad de tener pollo o pescado o helado en el menú?

Para retroalimentar la actividad de transferencia de la aplicación de la regla aditiva, se sugiere utilizar la pausa reflexiva:

PAUSA REFLEXIVA

¿Qué relación podría establecer entre la regla aditiva y la regla multiplicativa?
¿Qué me está costando aprender para responder con confianza sobre alguna probabilidad?
¿Cómo podría estructurar los problemas sobre las probabilidades?
¿Qué me podría ayudar a aprender profundamente?

EVALUACIÓN
FORMATIVA

Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Árbol de probabilidades	Elabora frases utilizando la conjunción "o".	Relaciona la conjunción "o" con la adición.	Relaciona la conjunción "o" con la adición, diferenciando con la conjunción "y" y la multiplicación.
	Realiza cálculos que incluyen la multiplicación y la adición de fracciones.	Realiza cálculos que incluyen la multiplicación y la adición de fracciones aplicando la regla aditiva y multiplicativa.	Realiza cálculos que incluyen la multiplicación y la adición de fracciones aplicando la regla aditiva y multiplicativa según el contexto..
Regla aditiva	Dibujan un diagrama de árbol que corresponde.	Dibujan un diagrama de árbol que corresponde y marcan el camino correcto.	Dibujan un diagrama de árbol que corresponde, marcan el camino correcto y agregan las probabilidades correctas.

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares	Entenderemos que la habilidad de representar una idea matemática tiene una estructura que debe ser conocida por las y los estudiantes. Así como la recta numérica o el plano cartesiano, en un primer momento estos son presentados y, luego, son utilizados y completados para resolver problemas. En estas representaciones se consideran cálculos, que, en el caso del árbol de probabilidades, son incluidos en las ramas, ya sea como fracciones o en porcentajes. Se recomienda determinar las probabilidades y rotularlas cada vez, leyendo cada rama o camino según el contexto. En esta actividad, se entiende que evaluar el proceso en la resolución de problemas, está integrado en la elaboración del árbol de probabilidades y se espera que, al marcar los caminos que incluyen las posibilidades solicitadas, se esté dando un paso más en la resolución del problema y en el desarrollo de una estrategia para resolver problemas similares.
Actitudes	Para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar, se sugiere ofrecer tiempo para la elaboración de tablas y árboles, estos pueden ser realizados de manera manual, con planillas de cálculo o con opciones de programas en línea. Permita a sus estudiantes ser tenaces y responder a los problemas con una frase completa escrita. También, promueva el uso de las herramientas disponibles para la elaboración manual o con uso de tecnología.
Orientaciones para organizar e implementar el trabajo personal	Se sugieren las siguientes motivaciones para promover el trabajo personal e independiente de otros:

Independencia	Pensar las soluciones y los caminos para obtener resultados por cuenta propia.
Confiar en lo que se sabe	Generar seguridad en lo que se hace en cada paso. La confianza como facilitador de explicaciones propias y para explicar a otras personas.
Trabajar a su propio nivel	En ciertos momentos es necesario saber dónde se está y trabajar a ritmo propio.
Practicar la autorregulación	Cada tarea requiere de concentración y de regular en qué momento pedir ayuda directa a un compañero o la o el docente.

Actividad de desempeño 4

Propósito

En esta actividad se hace una transferencia de la aplicación de la regla aditiva o multiplicativa a otros contextos. Se retoman los juegos de azar y la extracción de bolitas de una urna. Para esto, elaboran diagramas de árboles y aplican de manera simbólica las reglas aditiva y multiplicativa, y diferencian según el contexto cuál de ellas se debe utilizar.

Objetivos de aprendizaje

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Regla aditiva.
 - Regla multiplicativa.
-

Tiempo estimado: 6 horas

Diagnóstico

En este caso se sugiere realizar un diagnóstico que incluya:

- Elaboración de diagramas de árbol.
- Aplicación de la regla multiplicativa.
- Operatoria con decimales.
- Operatoria con fracciones.

Desarrollo de la actividad

SITUACIÓN EXPERIENCIAL

El o la docente presenta algunas situaciones en las cuales se puede calcular la probabilidad de eventos independientes utilizando la regla multiplicativa y aditiva.



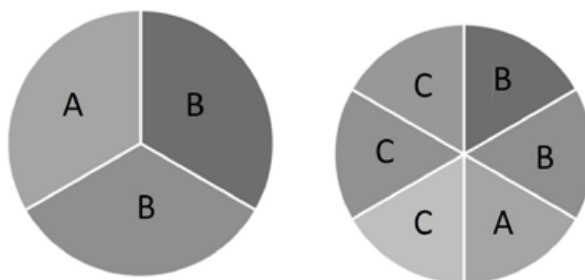
Algunas de las indicaciones que pueden promover la aplicación de las reglas multiplicativa o aditiva son:

- Indique juegos conocidos y el espacio muestral que los compone.
- Elabore tres frases relacionadas con las acciones probables que contengan la conjunción “y”.
- Elabore tres frases relacionadas con las acciones probables que contengan la conjunción “o”.

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO

Para introducir el procedimiento de seleccionar y combinar las reglas, evaluarlas y comprobar resultados y soluciones dadas de distintos problemas, la o el docente podría construir el conocimiento desde una situación de ruletas que tienen una distribución equiprobable de los sucesos. A continuación, se presenta un ejemplo:

¿Cuál es la probabilidad de que ambas ruedas coincidan cada una en la A?



$$P(A \text{ y } A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

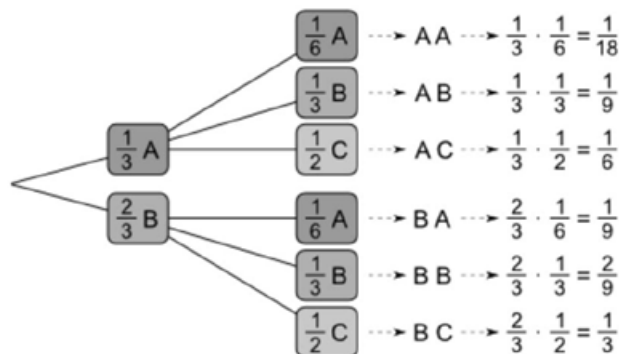
La probabilidad de que ambas caigan en la letra A es de aproximadamente un 5,6 %.

¿Cuál es la probabilidad de que las ruedas muestren dos letras idénticas?

$$P(AA \text{ o } BB) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{18} + \frac{4}{18} = \frac{5}{18}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que ambas caigan en una misma letra **AA** o **BB** es de aproximadamente un 27,8 %.

¿Cuál es la probabilidad de tener la combinación AB o BC al hacer girar las dos ruedas?

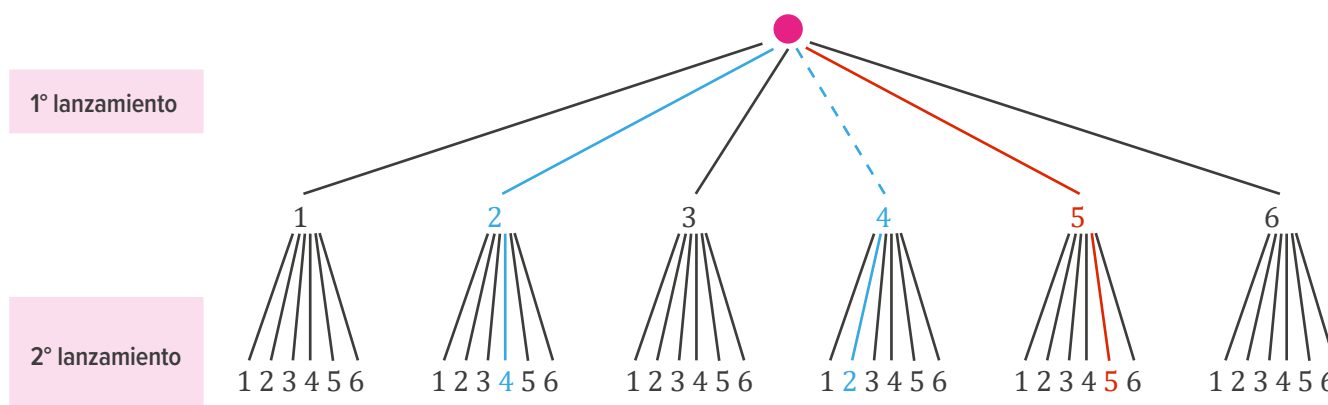


$$P(AB \text{ o } BC) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

Por lo tanto, la probabilidad de tener el par **AB** o **BC** es de aproximadamente un 44,4 %.

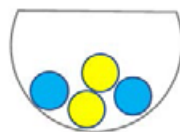
PRÁCTICA GUIADA

Se sugiere motivar la comprensión del diagrama de árbol y de las reglas aditiva o multiplicativa, presentando un diagrama de árbol y solicitando que a partir de este y de sus colores se pueda elaborar la historia de un juego de azar o de un menú de restaurant.



Se sugiere comentar una de las posibles respuestas destacando la explicación del juego, por ejemplo, lanzar el dado dos veces y elegir la combinación ganadora de dos y cinco, mientras que otro elige la combinación ganadora de un dos y un cuatro, y revisar en qué caso es más conveniente o justo.

También, se sugiere ejemplificar la diferencia entre evento independiente y dependiente, considerando dos variantes en la extracción de bolitas de una urna con cuatro bolitas, dos amarillas y dos azules.



- **Variante uno:** se saca una bolita y se devuelve.
- **Variante dos:** se saca una bolita y no se devuelve.

Conjeturar en cuál de las dos variantes las probabilidades no se calculan como eventos simples e indicar si son independientes o dependientes. Relevar la acción de devolver la bolita como en el caso de eventos independientes, ya que la urna vuelve a ser como era antes. En el caso de no devolver la bolita, se trata de un caso dependiente y, por lo tanto, la probabilidad ya no se calcula como evento simple, pues disminuye la cantidad de bolitas en la urna y la probabilidad dependerá del color extraído.

Determinar las probabilidades en ambas variantes, elaborando un árbol de probabilidades y fijando un suceso. Por ejemplo, determinar la probabilidad de sacar bolita amarilla cuando ya se ha extraído una bolita amarilla en la primera extracción.

Variante uno	Variante dos
▶ La probabilidad se mantiene. ▶ En la segunda extracción la probabilidad de obtener otra vez una bolita amarilla es $\frac{1}{2}$.	▶ La probabilidad cambia. ▶ La probabilidad de extraer una bolita amarilla en la segunda extracción es $\frac{1}{3}$.

PRÁCTICA INDEPENDIENTE

Se sugiere hacer un trabajo de estaciones con diferentes ejercicios en los cuatro temas trabajados: experimentos de Laplace, regla aditiva, regla multiplicativa y combinaciones de ellas. En esta ocasión los y las estudiantes podrán eliminar una estación según su nivel, de 1 a 3 o de 2 a 4. Algunas de las estaciones que se sugieren para esta actividad son:

Estación	Material	Instrucción	Organización
Experimentos aleatorios	Tarjetas con distintos ejercicios.	Calcule las probabilidades.	► Sobre la mesa hay diferentes tarjetas con ejercicios. Para cada estudiante hay una hoja donde puede anotar sus respuestas. ► Para cada estación el o la docente tiene hojas con las respuestas correctas. Las entrega para corregir, una vez que cada estudiante muestra que terminó con la estación o el ejercicio.
Regla aditiva		Calcule las probabilidades según la regla aditiva.	
Regla multiplicativa		Calcule las probabilidades según la regla multiplicativa.	
Combinación		Calcule las probabilidades según corresponda.	

Para retroalimentar la actividad se sugiere utilizar la diana:

Mueve el pin al nivel que corresponde para cada criterio.	 ● Excelente ● Bueno ● Medianamente logrado ● Puede mejorar
CRITERIO 1: Entiendo los experimentos Laplace y la probabilidad que corresponde.	
CRITERIO 2: Puedo calcular probabilidades de eventos según la regla aditiva.	
CRITERIO 3: Puedo calcular probabilidades de eventos según la regla multiplicativa.	
CRITERIO 4: Entiendo cómo y cuándo aplicar los modelos y los puedo representar de forma adecuada.	

<https://www.curriculumnacional.cl/porta/Documentos-Curriculares/Evaluacion/#plantillas>

EVALUACIÓN FORMATIVA Para verificar aprendizajes, se sugiere considerar la siguiente rúbrica:

Criterio	Inicial	Intermedio	Avanzado
Regla multiplicativa y Regla aditiva	Diferencia cuál es la operación entre las reglas.	Aplica la regla multiplicativa o la regla aditiva.	Aplica según la situación, la regla multiplicativa o la regla aditiva.
	Selecciona una regla.	Selecciona una regla según el caso.	Selecciona una regla según el caso, identificando que la aditiva requiere de la multiplicativa.
	Reconoce diferencias entre los contextos.	Reconoce diferencia entre los contextos según la regla aditiva y la regla multiplicativa.	Reconoce diferencias entre los contextos según la regla aditiva y la regla multiplicativa, elaborando situaciones según un diagrama de árbol.

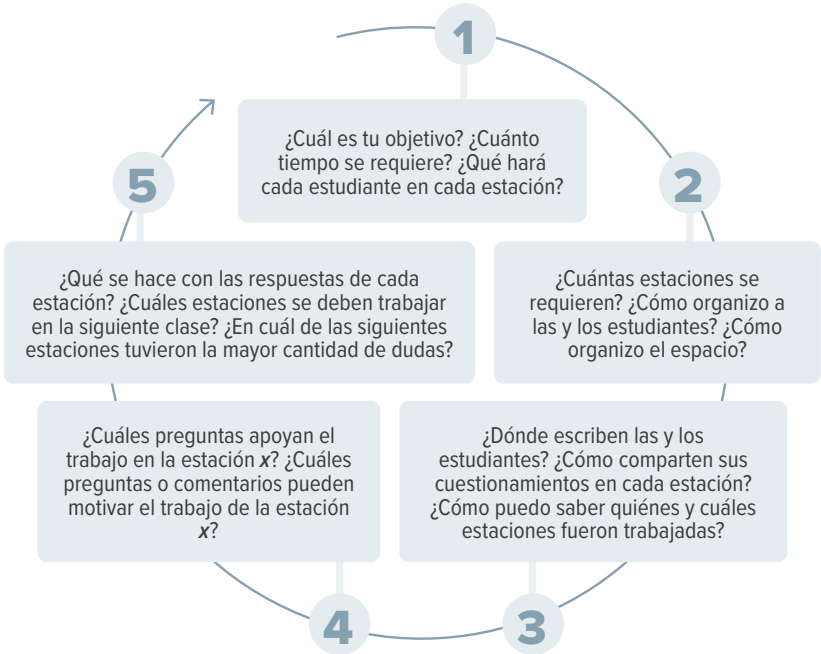
Orientaciones al docente

- Para unificar conceptos disciplinares**

Entenderemos que el desarrollo de la habilidad de resolver problemas implica una serie de otras habilidades, en este caso, la variación de condiciones iniciales de un problema que afectan en la aplicación y comprensión de este. Se sugiere promover siempre el uso del diagrama de árbol para visualizar mejor las posibles soluciones.
- Actitudes**

Para apoyar el desarrollo de la actitud de pensar con flexibilidad para reelaborar, se sugiere que las soluciones en el trabajo de estaciones sean anotadas de forma ordenada en el cuaderno, especialmente los pasos involucrados, para posteriormente poder encontrar errores y reelaborar.
- Orientaciones para organizar e implementar el trabajo en estaciones**

Se sugieren las siguientes preguntas para guiar la implementación de las estaciones.



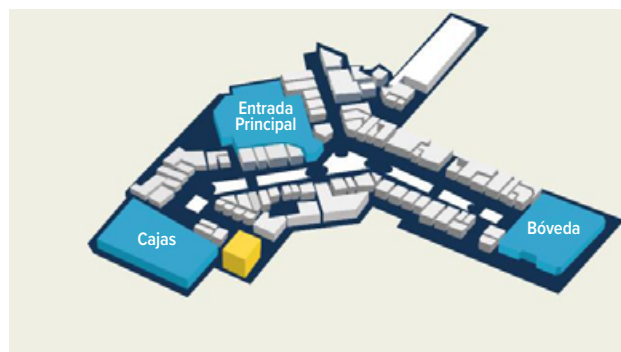
Anexo

SITUACIÓN 1 El Guardia Segundo Segura¹⁴

Un guardia de seguridad realiza rondas nocturnas para evitar robos. Cada noche inicia su ronda por un camino distinto al de la noche anterior, con ello evita que se conozca por dónde empezará.

Si posee tres rutas para realizar las rondas, es decir puede partir por la bóveda, la zona de cajas o por la entrada principal, y sabemos que el día lunes comienza por la bóveda:

¿Cuál es la probabilidad de que el día jueves comience su ronda por la ruta de la bóveda o la entrada principal?



SITUACIÓN 2 Salvando el curso¹⁵

Javiera y Diego son alumnos de un curso y ambos sacaron un 3,9 en la última prueba de probabilidades. No contentos con su desempeño ambos fueron a conversar con el profesor de matemáticas pidiéndole una oportunidad para ganar la décima que les faltaba a ambos para subir a 4,0. El profesor accedió a darles una oportunidad y les dijo:

“Pueden elegir entre las siguientes dos opciones. La primera es lanzar dos dados simultáneamente, si en ambos les sale un 1 o un 4 en dicho lanzamiento accedo a subirles la nota a ambos. La segunda es preguntarle a cada uno de sus compañeros de clases, incluyéndose ustedes, cuándo están de cumpleaños (qué número de día del mes entre 1 y 31). Si hay a lo menos un par que esté de cumpleaños el mismo día, entonces les subo la nota a ambos”

Javiera y Diego no conocen los cumpleaños de sus compañeros, a Javiera le parece mejor idea lanzar el dado, pero Diego cree que es mejor idea preguntar por los cumpleaños.

¿Quién tiene razón?

14 Problema elaborado por ARPA (Activando la Resolución de Problemas en las Aulas). Iniciativa de investigación de la Universidad de Chile.

15 Problema elaborado por ARPA (Activando la Resolución de Problemas en las Aulas). Iniciativa de investigación de la Universidad de Chile.

Módulos Electivos de la Asignatura

Módulo Electivo 1
**Aprendizaje Basado
en Proyectos**

Módulo Electivo 2
**Aprendizaje Basado en
Resolución de Problemas**

Módulo Electivo 1

Aprendizaje Basado en Proyectos

Visión panorámica

Gran idea

La probabilidad permite interpretar, predecir fenómenos, caracterizar situaciones, simular posibilidades y estudiar situaciones de incerteza.

Objetivos de aprendizaje

OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Probabilidades, regla multiplicativa y regla aditiva.
-

Tiempo estimado: 6 semanas (24 horas)

Propósito

El proyecto elaboración de rifas amigables utilizando la probabilidad, surge de la necesidad de responder a la junta de fondos con fines de colaborar en la comunidad. Por ejemplo, juntar fondos para viajes de estudio, para la compra de material necesario para un proyecto, para visitas a lugares educativos, intercambios estudiantiles, ayuda a alguien que lo requiera, aportes de la clase al establecimiento, entre otras actividades educativas y de colaboración en la comunidad. En general, la comunidad educativa se organiza para hacer un aporte a una instancia en la cual se generan fondos en conjunto y el gasto se hace más accesible para todos. Las rifas son una instancia enraizada en la cultura chilena, pero desde hace un tiempo estas han dejado de ser amigables, se consideran poco atractivas y no son convenientes para los participantes. Se espera que con el conocimiento de las probabilidades y su utilización, logren elaborar rifas más atractivas y novedosas para la comunidad a la cual va dirigidas. Con estos antecedentes, se busca que las y los estudiantes propongan diferentes rifas donde el azar es un factor a determinar. Que calculen las probabilidades a base de algunas modificaciones que se ven reflejadas en un plan justo de ganancias y, por lo tanto, se obtiene una rifa que es más amigable.

Título

Elaboración de rifas amigables con uso de la probabilidad

Situación central

La realización de varias rifas en la vida diaria como en el ámbito escolar o en otras instituciones muestra una cierta monotonía en cómo se determina quienes ganan. Así surge la idea de poner en práctica los conocimientos de las probabilidades y sus cálculos para lograr una rifa más amigable.

Propósito

En este proyecto se busca que las y los estudiantes propongan y elaboren una rifa basada en la noción de azar y del cálculo de la probabilidad. Que responda al concepto de ser amigable en un contexto social y de ayuda financiera, para así lograr financiar actividades educativas.

Una rifa con estas características considera, primero, aumentar las posibilidades de ganancias en escaladas justas según las probabilidades que inciden y, segundo, abrir las rifas a otros objetos, aparte del sorteo de números. Por ejemplo, cinta de colores, letras, ruedas de la fortuna o emojis, que las hacen más entretenidas para quienes participan.

En cuanto al aprendizaje de las probabilidades, la elaboración de la rifa da la oportunidad de aplicar conocimientos previos, transferir propiedades del azar a situaciones nuevas, determinar las probabilidades respectivas y construir y aplicar el modelo de Laplace y las reglas multiplicativas y aditivas

Objetivos de aprendizaje

Matemática OA 1

Expresar ideas matemáticas mediante diferentes representaciones, aprovechando las herramientas disponibles. **(Representar)**

OA 8

Evaluar el proceso y comprobar resultados y soluciones dadas de un problema matemático, pensando con flexibilidad para reelaborar. **(Resolver problemas)**

Preguntas

- ▶ ¿Por qué es importante elaborar una rifa que sea amigable?
- ▶ ¿De qué manera ayuda el cálculo de probabilidades para elaborar una rifa amigable?
- ▶ ¿Cómo se relaciona el cálculo de probabilidades de un juego al azar con las ganancias de una rifa?
- ▶ ¿Cómo se utilizan los conocimientos específicos de las probabilidades en la elaboración de una rifa?
- ▶ ¿Cómo se puede generar un plan justo de ganancias en las rifas?

Tipo de Proyecto Intradisciplinario

Matemática

Productos

- Juegos al azar creados para la realización de una rifa escolar.
- Utilidades de la rifa como donación a un proyecto social.

Habilidades y actitudes para el Siglo XXI

- Creatividad e innovación.
- Pensamiento crítico.
- Trabajo colaborativo.
- Uso de la información.

Recursos

1. Para la elaboración de las diferentes rifas: material de construcción, reciclado o de fácil adquisición, material de oficina, útiles de juguetes como bolitas para elaborar los juegos al azar que definen los aciertos de la rifa.
2. Para los premios de las rifas: donaciones materiales de la comunidad educativa del colegio o de algunos auspiciadores.

Etapas

FASE 1 Identificación de la situación

En la fase inicial los y las estudiantes reflexionan:

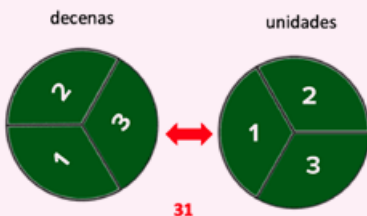
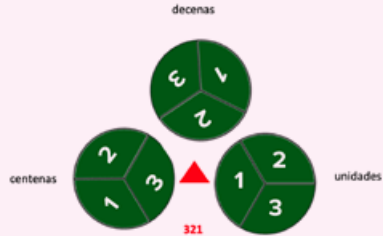
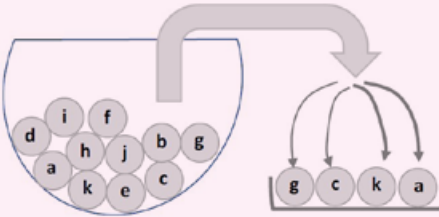
- ¿Por qué hacer una rifa?
- ¿Cómo, con la ayuda de las reglas de probabilidades, podemos ayudar a la comunidad elaborando rifas que sean más amigables?
- ¿Qué rifas serán más entretenidas que un sorteo tradicional (bombo de sorteo)?

Al final de esta fase el estudiante ha recontextualizado.

FASE 2 Diseño teórico de los tipos de rifa

Juegos de azar mediante los cuales se determinan los aciertos. Los conocimientos nuevos se van construyendo a medida que van apareciendo y en función de las consideraciones que se hacen para la rifa. Se sugiere dar mayor libertad para decidir si la extracción será con reposición o sin reposición y considerar, solo si es necesario, la inclusión de la probabilidad condicional utilizando el diagrama de árbol.

En el anexo se detallan algunos ejemplos, como el uso de combinaciones de colores, que las hacen más atractivas en la elección de la combinación ganadora. Además, se pueden definir diferentes condiciones de premios y bolitas con características especiales.

Algunos ejemplos de tipos de rifa		
Colores del arcoiris  colores de arcoíris en orden original	Formación de números 	
Elección de emociones 		Mini Loto 4 
Rifa número y colores 		

FASE 3
Determinación de las
condiciones de la rifa
para que sea amigable

En esta fase quienes organizan la rifa reflexionan acerca de dos aspectos.

- **Primero** se determina qué parte de los ingresos de la rifa considerada será repartida en premios.

Si hay premios que consisten exclusivamente de donaciones, se retiene todo el dinero recaudado por la venta de billetes. Este dinero entra a la ganancia total que se utiliza para la actividad educativa o se dona a la institución de beneficencia que se ha elegido para ayudar. Se sugiere descontar los gastos utilizados en material fungible, como planillas y listas, aquellos materiales que son reutilizables, como tarjetas, ruletas, bolitas son guardados por el establecimiento para una próxima actividad.

Si hay que comprar premios, se puede pensar en retener la mitad (u otra parte) del dinero recaudado por la venta de billetes. Así una parte del dinero es considerada como ganancia y será utilizada en la actividad educativa o donada a la institución que se ha elegido. El resto se utilizará en la adquisición de premios.

- **Segundo**, se determinan la premiación y las relaciones entre los rangos de las ganancias según las probabilidades de ocurrencia de los eventos respectivos. Para esto, se sugiere considerar que cuánto más probable es la ocurrencia, tanto menor es el valor del premio.

Por ejemplo, en el caso de una rifa de acierto a cuatro letras de un grupo de **11** letras, el total de posibilidades de boletos de rifa son **330**. La probabilidad de tener las **4** letras correctas es:

$$p_4 = \frac{1}{300}$$

La probabilidad de coincidir con **3** letras en un grupo de **4** letras es:

$$p_3 = \frac{1}{165}$$

La probabilidad de coincidir con **2** letras en un grupo de **4** letras es:

$$p_2 = \frac{1}{55}$$

Según esto, la venta que se hace para entrar en el sorteo del primer premio, que es coincidir con las **4** letras, debe tener un valor **6** veces más grande que el valor de los boletos que entran en el sorteo de acierto a **2** letras. Además, el valor del boleto que participa en el sorteo mayor debe ser el doble del valor de aquel que participa en el sorteo de acierto a tres letras. Así se tiene la siguiente relación para el precio de los premios y de la venta de boletos:

Primer premio		Segundos premios		Terceros premios	
6	+	3	+	1	= 10
$\frac{6}{10}$	+	$\frac{3}{10}$	+	$\frac{1}{10}$	= 1

Al final de esta fase, las y los estudiantes habrán elaborado tablas para determinar valores de la venta de los boletos según los valores de los premios que serán rifados y decidirán la parte de la recaudación que se convertirá en premios. Además, habrán elaborado planes justos de ganancia de todos los juegos según las probabilidades involucradas.

FASE 4
Producto

En esta fase las y los estudiantes organizan y realizan la elaboración de los diferentes juegos al azar. Para ello, se pueden guiar por las siguientes preguntas:

- ▶ ¿Con qué infraestructura del colegio se puede contar para la elaboración e implementación de la rifa?
- ▶ ¿Con qué parte de la comunidad educativa se puede contar para recibir ayuda técnica o logística?
- ▶ ¿Quiénes elaboran el juego al azar?
- ▶ ¿Quiénes venden los boletos?
- ▶ ¿Quiénes se encargan de realizar el sorteo?
- ▶ ¿Cómo se informa adecuadamente a los participantes de la rifa acerca de las reglas del sorteo?
- ▶ ¿Cómo se explica que la rifa es amigable y justa según el azar y los cálculos realizados en la fase anterior?
- ▶ ¿En qué momento se realiza un ensayo general para ver el funcionamiento correcto de los juegos de azar?
- ▶ ¿Cuáles podrían ser los imprevistos en la realización de la rifa?
- ▶ ¿Cómo se abordan los imprevistos?

Al final de esta fase los y las estudiantes tienen el producto del proyecto elaborado y han realizado ensayos para tener un buen funcionamiento en la implementación de la rifa.

FASE 5
Difusión

En esta etapa las y los estudiantes elaboran la comunicación de la rifa, que se puede hacer por medio de afiches, videos o trípticos. Esta contiene la información relevante y responde a las siguientes preguntas:

- ▶ ¿En qué se distingue esta rifa de las rifas comunes?
- ▶ ¿Por qué la rifa es amigable?
- ▶ ¿Por qué la rifa tiene una premiación justa?
- ▶ ¿A qué actividad educativa o a cuál institución se otorga las ganancias de las rifas?

Al final de esta fase los y las estudiantes habrán elaborado los diferentes medios de comunicación de la rifa y podrían comenzar con la venta de boletos.

Evaluación

Para evaluar el proceso, se sugiere la siguiente rúbrica:

Aspectos a evaluar	Puntaje por aspecto	Puntaje obtenido por estudiante
Planteamiento del problema		
▶ Identifica el problema que el grupo puede responder por medio de la ejecución de un proyecto.	3	
▶ Identifica varios problemas que el grupo podría responder por medio de la ejecución de varios proyectos.	2	
▶ Identifica un problema que no es posible de responder por medio de la ejecución de un proyecto.	1	
▶ No identifica un problema.	0	
Diseño teórico		
▶ Diseña teóricamente un tipo de rifa al azar, identifica la existencia del azar y determina las probabilidades de todas las diferentes ocurrencias.	3	
▶ Diseña teóricamente un tipo de rifa al azar y determina la probabilidad de algunas ocurrencias.	2	
▶ Contribuye al diseño de un tipo de rifa al azar.	1	
▶ No contribuye al diseño ni determina probabilidades.	0	
Determinaciones para una rifa amigable		
▶ Participa de forma proactiva en la toma de decisiones relacionadas con la repartición de la recaudación de las rifas y de las donaciones a la rifa. Elabora planes de premiación basados en las probabilidades de todas las ocurrencias de los eventos ganadores.	3	
▶ Contribuye a la toma de decisiones de la repartición de la recaudación de las rifas y de las donaciones a la rifa. Elabora algunos planes de premiación basados en las probabilidades de algunas ocurrencias de los eventos ganadores.	2	
▶ Contribuye a la toma de algunas decisiones y a la elaboración de algunos de los planes de premiación.	1	
▶ No contribuye en la toma de decisiones ni a la elaboración de planes de premiación.	0	

Aspectos a evaluar	Puntaje por aspecto	Puntaje obtenido por estudiante
Elaboración de los juegos al azar		
▶ Toma un rol proactivo en la elaboración del tipo del juego al azar y muestra competencia experimental en la prueba repetitiva de los juegos al azar.	3	
▶ Contribuye a la elaboración del tipo de juego al azar y realiza experimentos azarosos.	2	
▶ Contribuye a la elaboración de los juegos al azar.	1	
▶ No participa en la elaboración de los juegos al azar ni en la experimentación un dibujo técnico.	0	
Elaboración de la publicidad de la rifa		
▶ Contesta y argumenta todas las preguntas que entran en la información acerca de la publicidad. Participa de forma proactiva en la elaboración de los medios de propagación.	3	
▶ Contesta y argumenta algunas preguntas que entran en la información acerca de la publicidad. Participa en la elaboración de los medios de propagación de la rifa.	2	
▶ Atribuye a las respuestas de las preguntas y a la elaboración de los medios de propagación.	1	
▶ No atribuye a las respuestas de las preguntas ni a la elaboración de los medios de propagación.	0	
Total		

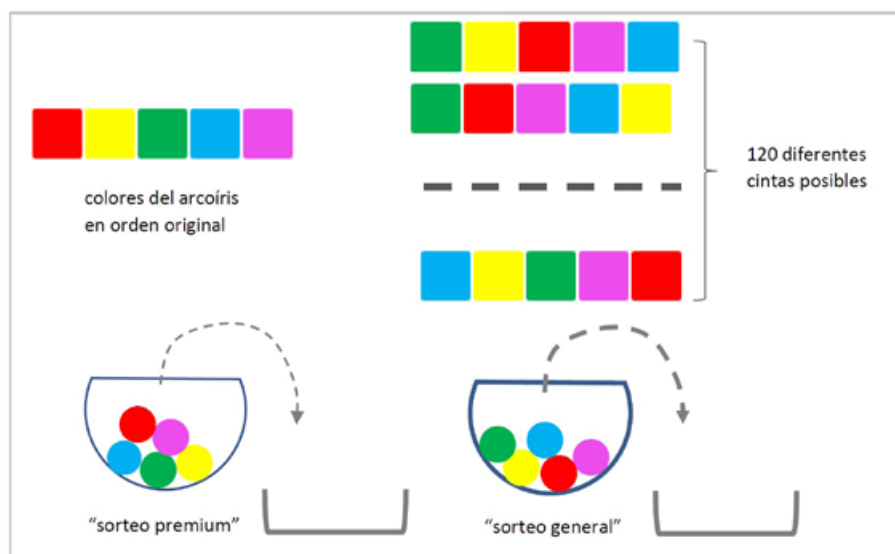
Criterios de habilidades del siglo XXI

Se sugiere usar rúbricas y criterios relacionados con habilidades del siglo XXI de Pensamiento creativo e innovación, Pensamiento crítico, y Trabajo colaborativo. También de Diseño del proyecto y la Presentación del trabajo que se muestra en el texto Metodología de aprendizaje basado en Proyectos, páginas 21 a 29 en https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140166_recurso_pdf.pdf

Anexo

Desarrollo teórico de los ejemplos de rifas de la fase 2:

- Cintas de los colores del arcoíris



Se sugiere considerar de manera sistemática todas las cintas posibles de 5 colores y confeccionar las 120 cintas. Apoyar esta cantidad con el cálculo de las permutaciones de los 5 colores y el número 5 factorial. En el desarrollo de la rifa, primero se hace el supuesto de la venta de las 120 cintas, con la condición de no duplicarlas y el sorteo se realiza con bolitas de colores, traspasando el modelo de sorteo al azar de bolitas de los mismos colores. También se pueden considerar diferentes tipos de sorteos y poner diferentes precios a la apuesta, por ejemplo:

Sorteo premium

Acierto a los 5 colores de la tira, con una sola posibilidad el 1º premio, esto es: el premio máximo lo tiene la persona que tiene los 5 colores en el orden sorteado. Probabilidad:

$$p = \frac{1}{120}$$

Sorteo bronce, plata y oro

- Se puede considerar como oro las 2 cintas que coinciden exactamente en 4 colores, en el mismo orden ininterrumpido con la cinta de los 5 colores y en el mismo orden que aparecen en el sorteo. En este se excluye la cinta de los 5 colores. Probabilidad de cada una de las cintas con 4 colores ininterrumpidos:

$$p = \frac{1}{120} + \frac{1}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

- Se puede considerar como plata, las 3 cintas ganadoras que coinciden en 3 colores del orden ininterrumpido con la cinta sorteada. Probabilidad de cada una de las cintas con tres colores ininterrumpidos

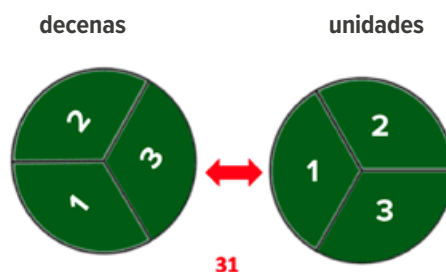
- Se puede considerar como bronce aquellas 4 cintas que ganan coincidiendo en 2 colores del orden ininterrumpido. Probabilidad de cada una las cintas con 2 colores ininterrumpidos

$$p = \frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

En la elaboración del valor de los premios hay que considerar la razón entre las probabilidades que conlleva que los premios sean justos:

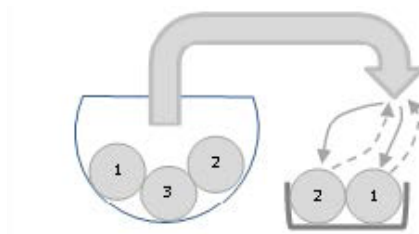
Probabilidad	Premios	Valor del premio
$\frac{1}{120}$	Máximo	El doble del premio oro o bien $12x$.
$\frac{1}{60}$	Oro	El doble del premio bronce o bien $6x$.
$\frac{1}{40}$	Plata	$\frac{3}{2}$ del premio bronce o bien $4x$.
$\frac{1}{30}$	Bronce	$3x$ Se considera la variable x como unidad de valor.

Formación de números

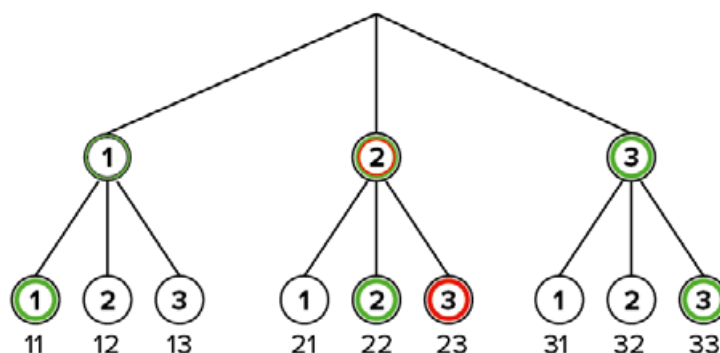


Se consideran 2 ruedas de la fortuna, una se gira para obtener la decena y la otra para obtener la unidad. En el ejemplo se tienen 2 ruedas de la fortuna con los números 1, 2 y 3. Se giran ambas al azar y el número ganador es el número formado por las dos cifras que están frente a la doble flecha. Se elaboran sistemáticamente los 9 boletos con los números que se pueden generar, $3^2 = 9$ y se elabora un árbol de probabilidades.

Dada la dificultad de confeccionar las ruedas de la fortuna con todo el mecanismo de girar y parar, se piensa en otro modelo que tenga las mismas probabilidades y planes de ganancias, la urna y la extracción de bolitas con reposición.



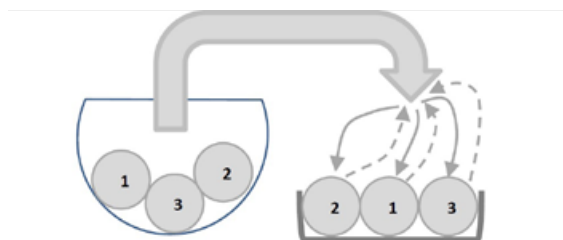
El árbol de probabilidades permitirá elaborar un plan justo de premiación.



Un plan de ganancia justa se obtiene al diferenciar entre decenas y unidades iguales o diferentes, en el caso de tener decenas y unidades iguales, la probabilidad es $p = \frac{3}{9}$. Así, los boletos tienen un valor menor y se categorizan para el segundo premio. Los números que tengan unidades y decenas diferentes, tienen una probabilidad de $p = \frac{3}{9}$ y, por lo tanto, se categorizan en el primer premio.

En el caso de 3 ruedas de la fortuna se debe realizar un árbol de probabilidades de 3 bifurcaciones.

Formación de números utilizando la urna

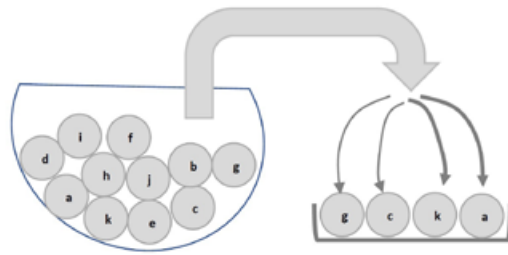


Se hacen 3 extracciones con devolución de las bolitas extraídas y se elaboran sistemáticamente los números que se pueden generar. Hay 27 números; $3^3 = 27$ o se elabora un árbol con 3 realizaciones y 3 bifurcaciones.

Un plan de ganancia justa se obtiene al considerar que, si se genera el número ganador, por ejemplo: 312, la ruta de este número está marcada de rojo en el árbol de probabilidades. Primer premio con la probabilidad de $p = \frac{1}{27}$. En el segundo premio se consideran ganadores los números que tengan idénticos pares ordenados de decenas y unidades. Las rutas de estos números están marcadas en el árbol de probabilidades en verde y tienen probabilidad de $p = \frac{1}{27} + \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$

Algunas de las variaciones que se pueden hacer en estas rifas son aumento de sectores y de la cantidad de ruedas o de urnas.

Mini Loto 4



Se sugiere utilizar las letras de alguna frase o de alguna palabra que identifique a esta rifa. En el ejemplo se muestran **11** bolitas con letras que se sortean al azar sin devolución y se realizan **4** extracciones. En este caso, se puede tener **3** tipos de ganadores: con **4** aciertos, con **3** aciertos y con **2** aciertos.

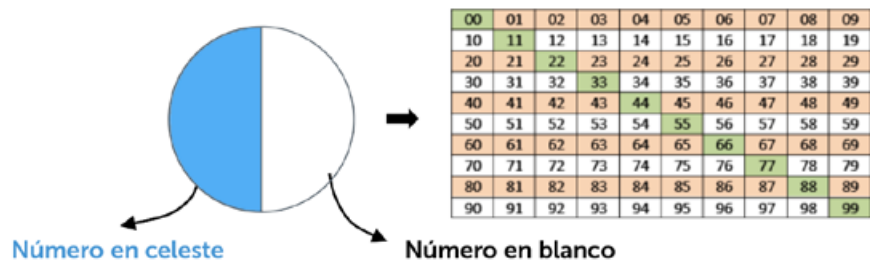
- Primer premio, acierto a las **4** letras, probabilidad de ganar $p = \frac{1}{330}$
- Segundo premio, acierto a **3** letras, probabilidad de ganar $p = \frac{1}{165} = 2 \cdot \frac{1}{330}$
- Tercer premio, acierto a **2** letras, probabilidad de ganar $p = \frac{1}{55} = 6 \cdot \frac{1}{330}$

Con esta información se puede elaborar el siguiente plan de ganancia justa:

- Con **4** aciertos se gana el doble del segundo premio y el séxtuplo del tercer premio.
- Con **3** aciertos se gana el triple del tercer premio que corresponde a **2** aciertos.
- Con **2** aciertos se gana la tercera parte de la ganancia del primer premio.

ACTIVIDAD Sorteo con colores y números

Se propone un experimento aleatorio, que consiste en un sorteo donde se elige uno de dos colores y un número. Se sugiere representar el proceso mediante un árbol de probabilidades para visualizar todas las combinaciones posibles entre colores y números. Luego, analiza el esquema para identificar qué combinaciones de color y número podrían tener menor probabilidad de ocurrir, especialmente si el sorteo no es equitativo o hay repeticiones.



Al agregar dos colores, se duplica la cantidad de números y las probabilidades se reducen a la mitad. El número sorteado debe coincidir con las cifras y el color sorteado. Este caso tiene una probabilidad $p = \frac{1}{200}$ y estaría asociado al primer premio.

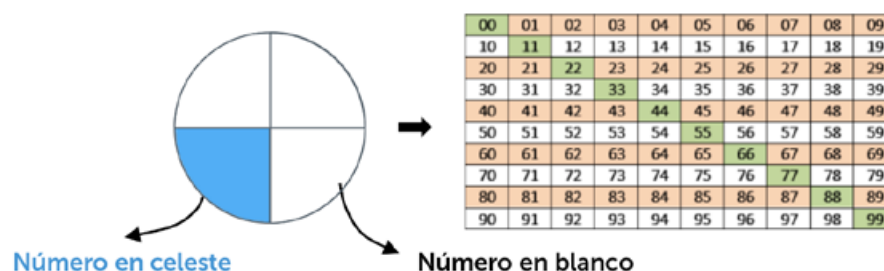
La probabilidad $p = \frac{1}{198}$ se obtiene tanto para el antecesor como para el sucesor de un número y podría ser considerada como el segundo premio. Se define que el antecesor de 00 es 99 y el sucesor de 99 es 00.

Aplicando la regla aditiva, la probabilidad de tener uno de ellos es

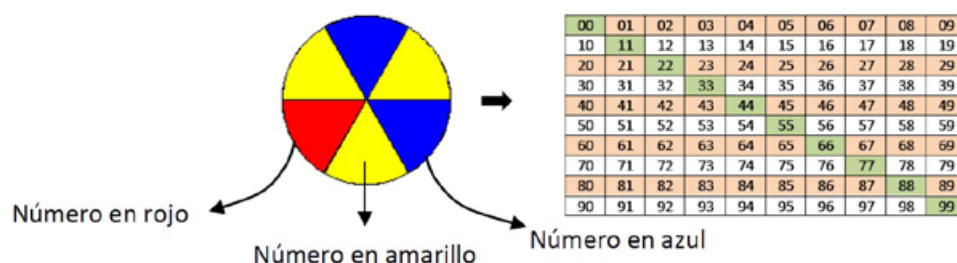
$$p = \frac{1}{198} + \frac{1}{198} = \frac{2}{198} = \frac{1}{99}$$

Algunas variaciones que se pueden hacer a esta rifa son:

- Cifras iguales en el color sorteado: 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.
- Los colores del sorteo no son equiprobables.



- Más colores para sortear y los colores del sorteo no son equiprobables.



Módulo Electivo 2

Aprendizaje Basado en Resolución de Problemas

Visión panorámica

Gran idea

Las funciones, las expresiones algebraicas y procedimientos permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad.

Objetivos de aprendizaje

OA 2

Representar un mismo contenido matemático transitando entre los distintos niveles de representación, valorando las TIC como una oportunidad. **(Representar)**

OA 3

Seleccionar y ajustar modelos matemáticos según el fenómeno, perseverando en torno a metas. **(Modelar)**

OA 4

Evaluar modelos, comparándolos entre sí y con la realidad, determinando sus limitaciones, asumiendo posturas razonadas. **(Modelar)**

OA 7

Variar parámetros o condiciones y comparar los cambios en los resultados obtenidos, pensando con perseverancia y proactividad. **(Resolver problemas)**

Conocimientos esenciales

- Productos notables.
 - Función y ecuación cuadrática.
-

Tiempo estimado: 6 semanas (24 horas)

Propósito

Un puente cerca de mi casa

En el módulo electivo basado en el aprendizaje a través de la resolución de problemas de la asignatura de matemática del Nivel 1 de Educación Media, se espera que las y los estudiantes comprendan que las funciones, las expresiones algebraicas y los procedimientos, permiten construir modelos y encontrar soluciones a situaciones de cambio en diferentes ámbitos de nuestra realidad. En este módulo se espera, especialmente, que construyan conocimiento sobre la utilidad de las funciones cuadráticas para elaborar productos de gran envergadura ingenieril y reconozcan cómo estas funciones dan respuestas sobre las distancias, las alturas y los posibles costos según las condiciones iniciales del problema.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo electivo 2 invitan a desarrollar las habilidades de representar, modelar y resolver problemas. Las y los estudiantes representarán de manera concreta y pictórica la función cuadrática, seleccionarán y ajustarán un comportamiento cuadrático para dar respuesta a un problema. Evaluarán modelos comparándolos entre sí y con la realidad, para encontrar la solución más adecuada y variarán parámetros o condiciones iniciales para comparar los resultados obtenidos. En el transcurso de este módulo los y las estudiantes obtendrán datos para elaborar un modelo que será la base de la solución, también realizarán algunos supuestos que les permitan precisar y ajustar el modelo, para finalmente comparar y evaluar la información que se obtiene del modelo con un criterio de realidad de construcción. La elaboración del modelo cuadrático contempla una parte de medición de un objeto concreto. De esta manera, se construyen nuevos conocimientos y se profundiza en aquellos adquiridos en el módulo obligatorio.

Los Objetivos de Aprendizaje del módulo electivo 2 desarrollan las actitudes del siglo XXI de los ámbitos de las Maneras de pensar y de las Maneras de trabajar. Con este tema en particular las y los estudiantes valoran las TIC como una oportunidad para dibujar y representar sus ideas, desarrollan la producción de ideas y del pensamiento crítico, evaluando los modelos obtenidos. Se espera que transiten desde la realidad a la matemática con una postura razonada, tanto desde lo que indica la matemática como lo que es posible en la realidad. Es deseable que este módulo desarrolle la actitud de perseverar en torno a una meta y de actuar con proactividad en la búsqueda de soluciones individuales o grupales.

En este módulo electivo se busca desarrollar las habilidades de representar, de resolver problemas y de modelar utilizando la metodología del aprendizaje basado en problemas. Para esto, se propone el problema **Un puente cerca de mi casa**¹⁶ en un contexto relacionado con la construcción de puentes, las variables que lo describen y la construcción de la función cuadrática. Los y las estudiantes elaboran un modelo pertinente a su entorno, realizan mediciones concretas, representaciones concretas o pictóricas y proponen variaciones relacionadas con la altura, el vértice, los puntos de corte con el eje X, la amplitud y la distancia del puente.

¹⁶ La elaboración del problema fue realizada por la Dra. Rita Borromeo-Ferri de la Universidad de Kassel, Alemania, 2021.

Preparación

Para que las y los estudiantes se preparen para el problema, se sugiere plantear el contexto de la construcción de puentes en nuestro país. Se sugiere presentar algunos videos relacionados con la historia de la construcción de puentes, los éxitos y los fracasos en este tipo de construcción. Además, de precisar en el uso que tienen estos puentes y los aportes que pueden tener para nuestra comunidad, se sugiere diferenciar entre el piso y el arco del puente para identificar los tipos de puentes que existen y abstraer a la figura parabólica básica que se encuentra en la mayoría de ellos.

- ▶ **¿Qué puentes conoces?**
- ▶ **¿Cuál podría ser la característica central de todos los puentes?**

Para modelar desde el propio entorno, se sugiere anotar todas las respuestas y, a partir de ellas, generar diferentes categorías para las características. Por ejemplo, podría ser el tipo de material, la forma, el uso, la antigüedad o el tamaño. Estas categorías, en particular el tamaño y la forma, dan origen a la presentación del problema y crean formas de pensar más complejas, que luego se pueden comunicar y argumentar, especialmente en la fase de validación de los resultados.

Presentación del problema

Para presentar el problema, se sugiere entregarlo impreso y por medio de la escucha activa y la lectura comprensiva, promover que las y los estudiantes registren detalles de la situación general y de su propia situación con respecto a la construcción de puentes.

Para cruzar una zanja cerca de mi casa, la comunidad ha decidido construir un puente, yo por mi parte me he preocupado de la forma y la estrategia para construir el puente ¿Qué tan largo y alto debe ser el puente? ¿Cómo me ayuda la matemática para enfrentarme a las diferentes posibilidades de largo y alto del puente?

Algunas consideraciones para enfrentar el problema

- **Acciones concretas de elaboración de un puente a escala.** Dependiendo del modelo a escala que se quiere hacer, se necesitarán materiales que pueden ser reciclados, herramientas de medición y algunos materiales de construcción. Esta parte, desarrolla habilidades de motricidad fina, de medición y de los conocimientos de razones para trabajar el modelo a escala.
- **Apoyos en información.** Como tarjetas de apoyo con medidas de puentes, como su largo y su alto, detalles técnicos que permitan extraer la información para elaborar esquemas propios, fotografías de puentes que permitan determinar las alturas o largos o deducirlas desde un trabajo con razones o estimaciones.
- **Preguntas previas que permiten acercarse al problema.** Por ejemplo: ¿Dónde sería necesario construir un puente cerca de mi casa? ¿Cómo puedo tomar algunas medidas? ¿Qué tipo de puente se podría construir?
- **Organización para enfrentarse al problema y eventuales obstáculos.** Por ejemplo, posibilidades de elaborar un puente a escala, acceso a la información, posibilidades de tomar una foto y de sacar información, conocimientos previos de razones.

Los y las estudiantes asocian la situación con necesidades de la comunidad relacionadas con la seguridad y el sentido de pertenencia. Esta etapa es previa e importante, porque se trata esencialmente de saber cuál es la pregunta que se quiere responder y la motivación para responderla. Así surgirán de manera natural los pasos hacia la solución y la necesidad del conocimiento.

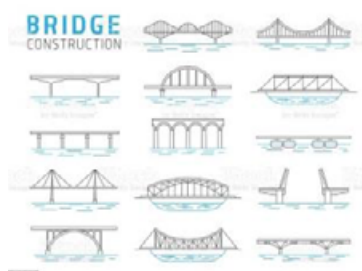
Posibles soluciones al problema

Construcción de imágenes mentales desde la experiencia

Los y las estudiantes experimentan de manera concreta la relación que hay entre las diferentes alturas que tiene el arco del puente y su distancia al centro, o bien la relación que hay entre el largo del puente y la altura que se requiere para el arco. También diferencian de manera visual entre puentes con arco y sin arco y puentes con arco sobre o debajo del camino del puente.

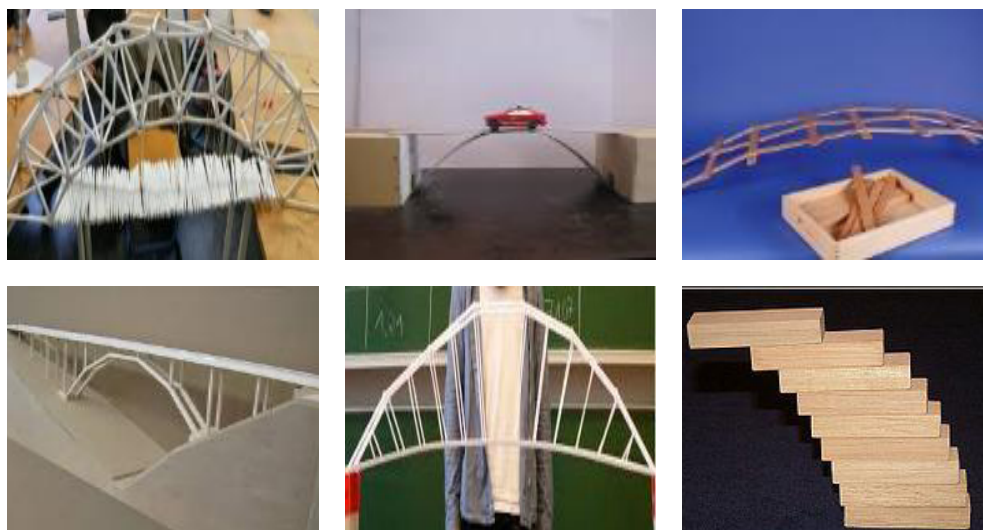
Desarrollo de estrategias de acción concreta

- Tarjetas para clasificar los diferentes tipos de puentes



FUENTE: <https://www.istockphoto.com/es/vector/puente-y-arco-de-los-iconos-y-s%C3%ADmbolos-gm859875174-142020895>

- Elaboración de un puente con materiales de fácil acceso y medición de las alturas y de las distancias que serán anotadas en una tabla de datos.



Investigación

Las y los estudiantes relacionan los datos para formular la función cuadrática que se encuentra en los puentes que se han construido. Para esto consideran un punto de referencia, que se denomina origen, a partir del cual se hacen las mediciones hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba y hacia abajo. Las medidas deben anotarse en una tabla por pares, la primera columna se hará para las distancias a nivel horizontal y la segunda columna para el nivel vertical. De esta manera, cada estudiante podrá relacionar las medidas horizontales con las verticales.

La investigación que realizan tiene un carácter de análisis de los datos, de búsqueda de conocimientos que le ayuden a completar el análisis y la comprensión, para generalizar las relaciones encontradas mediante una función cuadrática con sus elementos claves como el vértice, amplitud y puntos de corte.

Las preguntas que pueden organizar esta etapa podrían ser:

- ▶ **¿Dónde sería conveniente ubicar el punto de origen?**
- ▶ **¿De qué manera podemos relacionar los datos?**
- ▶ **¿Qué función tiene el punto más alto o bajo del puente?**
- ▶ **¿Qué relación hay entre las medidas de las diferentes alturas del arco con la distancia recorrida en el puente?**
- ▶ **¿Qué rol tiene la distancia recorrida en el camino del puente en las mediciones?**
- ▶ **¿Qué varía y qué se mantiene constante?**
- ▶ **¿Qué falta para generalizar?**
- ▶ **¿Dónde puedo encontrar la información que me falta?**
- ▶ **¿Qué aproximaciones se pueden hacer para tener una forma cuadrática?**

Estas preguntas ayudan a reformular cada paso para generalizar la función cuadrática y formular el modelo a partir de las medidas que se tienen desde las fotografías o desde las elaboraciones propias de puentes

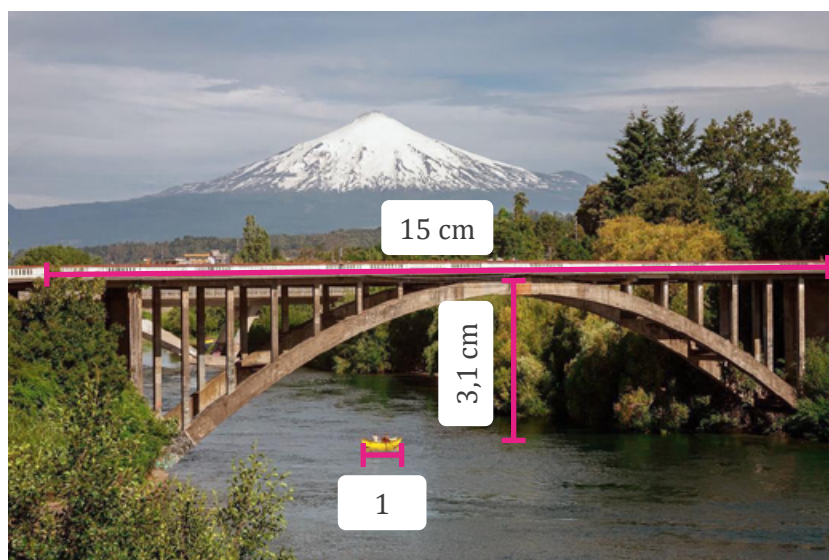
Los apoyos de información pueden ser detallados o bien pueden dar una pauta para iniciar una medición a escala. La investigación debe estar dirigida hacia la construcción del conocimiento desde las necesidades de cada modelo.

Evaluar una solución del problema

Las y los estudiantes evalúan una solución al problema y reconocen la posibilidad de hacer una transferencia en el proceso. Comienzan con una fotografía, realizan estimaciones, construyen el modelo función cuadrática, buscan información para comprobar u obtener más información y transferir realizando cálculos para responder a un problema particular. Se sugiere acompañar este proceso con comparaciones de lo realizado hasta este momento, completando con los conocimientos sobre el cálculo del vértice y de los puntos de intersección con el eje X.



Se sugiere presentar una situación particular con la fotografía de un puente para determinar su largo y altura por medio de la estimación de las medidas. Para, luego, comprobar con cálculos y con información que esté a disposición.

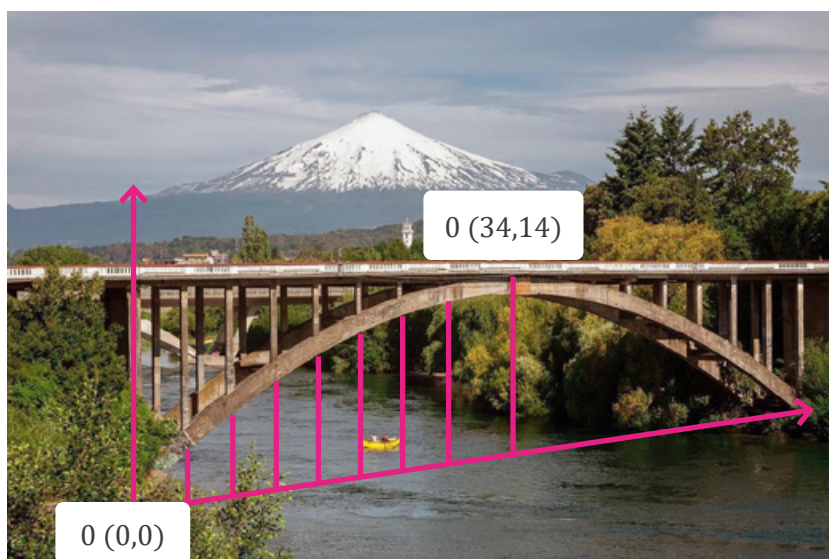


FUENTE: <https://www.facebook.com/deVillarrica/posts/2370262006393816/>

Suponiendo que el bote tiene un largo aproximado de **4,5** metros, que la persona que tomó la foto no se encuentra de frente y que los objetos que están más adelante se ven más grandes que los que están detrás, se puede estimar que la altura del puente es de aproximadamente $4,5 \cdot 3,1 = 13,95$, es decir unos **14m** de altura. El largo sería aproximadamente de $15 \cdot 4,5 = 67,5$, es decir, unos **68** metros desde que comienza el arco hasta donde termina.

Según los datos encontrados en la evolución histórica de los puentes de Chile, documento extraído de https://www.mop.cl/PuenteChacao/Documents/P_Departamento_Puentes_de_Vialidad.pdf y elaborado por el Ministerio de Obras Públicas, se tiene en la diapositiva 17 que el puente Toltén en Villarrica tiene un vano principal de **72 m** y una altura de **15 m**.

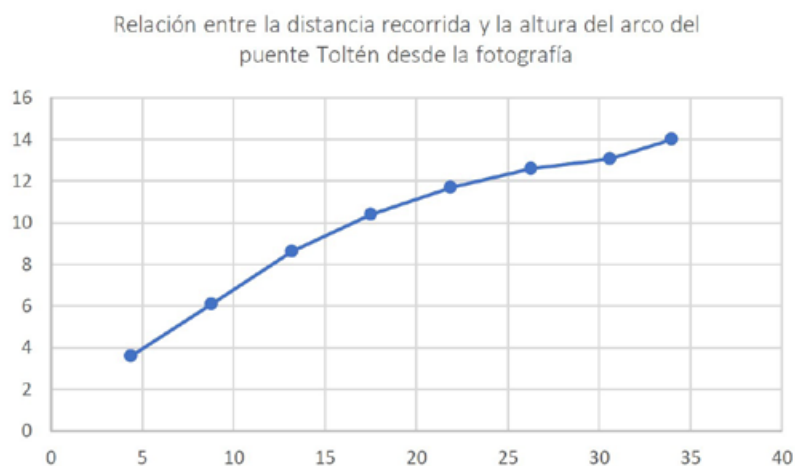
Para encontrar la relación entre la distancia recorrida y la altura, se necesita ubicar un plano cartesiano en la foto y elaborar una tabla para registrar las estimaciones realizadas a partir de la fotografía. También, se sugiere tomar las columnas a la misma distancia, comenzando desde altura hacia el centro y estimando la distancia de la primera columna desde el centro.



Para la elaboración de la tabla, se sugiere realizar el registro de las mediciones y de las estimaciones, haciendo algunas suposiciones sobre las medidas y el factor aproximado $k = 4,5$ determinado previamente. Por ejemplo:

Mediciones desde la foto		Estimaciones y ajustes	
Distancia recorrida (cm)	Altura del arco (cm)	Distancia recorrida (m)	Altura del arco (m)
1	0,8	4,4	3,6
1,8	1,4	8,8	6,1
2,6	1,9	13,2	8,6
3,4	2,3	17,5	10,4
4,2	2,6	21,9	11,7
5,2	2,8	26,3	12,6
6,6	2,9	30,6	13,05
7,5	3,1	34	14

Para elaborar el modelo, se sugiere hacer, de manera manual, un gráfico en papel milimétrico o con uso de algún programa para graficar, que esté disponible en la web. También se puede utilizar una planilla de cálculo y obtener un gráfico similar a:



Elaborar y ajustar el modelo matemático

Los y las estudiantes requieren hacer supuestos e incluir nuevos conocimientos relacionados con la función cuadrática. En particular, la forma de la función cuadrática que incluye el vértice en su forma general:

$$y = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v \text{ donde el vértice es } V(x_v, y_v)$$

En este caso particular, se tiene que el vértice del arco del puente se ha estimado en **34 m** a la derecha del origen y **15 m** hacia arriba desde el origen $V(34, 14)$ y el modelo podría ser:

$$y = a \cdot (x - 34)^2 + 14 \text{ donde el vértice es } V(34, 14)$$

Considerar el supuesto inicial sobre el punto de origen en esta expresión para determinar el coeficiente a :

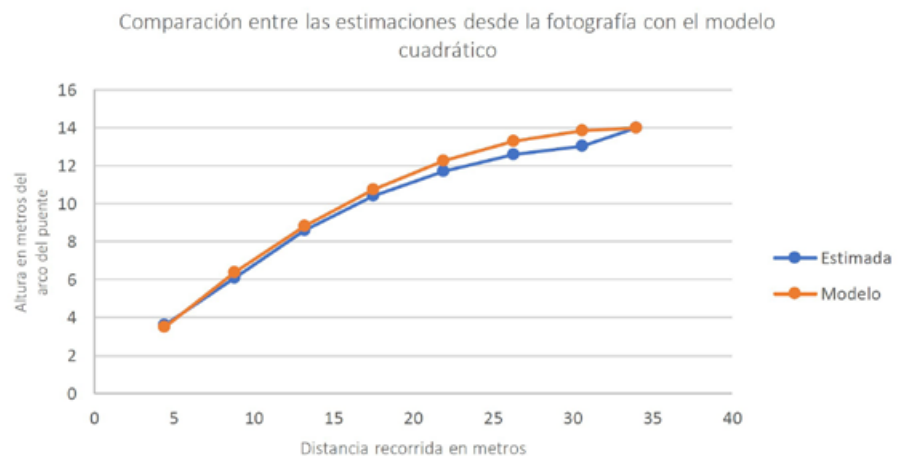
$$0 = a \cdot (0 - 34)^2 + 14$$

$$-14 = a \cdot (-34)^2$$

$$\frac{-14}{1156} = a \rightarrow a \approx -0,012$$

$$y = -0,012 \cdot (x - 34)^2 + 14 \text{ donde el vértice es } V(34, 14)$$

De esta manera, se tiene un modelo que describe la altura del arco de un puente según la distancia recorrida, o bien da el valor de la altura de las columnas según la posición que estas tienen. Se sugiere comparar los datos obtenidos por el modelo ajustado, con los datos entregados por las mediciones realizadas en la fotografía.



En general, los resultados obtenidos en esta situación particular deben ser evaluados desde el sentido de realidad y del puente elaborado. O desde el puente que se quiere elaborar asumiendo una postura razonada, para obtener un resultado real y posible de realizar.

La comparación realizada tiene dos momentos, el primero es comparar lo obtenido desde una fotografía y las estimaciones realizadas con el factor de proporcionalidad con el modelo cuadrático. Este permite aplicar un conocimiento y ajustarlo a la realidad. El segundo momento de comparación tiene relación con el modelo, su transferencia con lo que ya se ha realizado para el caso propio del puente y las mediciones que se han realizado.

Algunas de las preguntas que pueden apoyar el modelo son:

- ▶ **¿Se han ubicado bien las columnas que sostienen el arco del puente?**
- ▶ **¿Tienen la altura correspondiente?**
- ▶ **¿Qué aporta el modelo matemático a mi construcción?**
- ▶ **¿Qué tan cercanas estuvieron las mediciones y estimaciones con el modelo?**
- ▶ **¿Qué aporta un modelo de este tipo a la construcción de puentes?**
- ▶ **¿Qué ajustes se pueden realizar a la propuesta de puente?**

Comunicar

Los resultados obtenidos son comunicados y comparados entre ellos. Por ejemplo, los puentes que tienen el arco sobre o bajo el camino y las implicancias que esto tiene en el coeficiente del modelo matemático, el modelo que tiene el origen en otro lugar del puente y el desarrollo del modelo. Así, se puede reflexionar sobre la estructura de los modelos cuadráticos y algunas implicancias que tiene la estructura de arco con la estructura lineal de puentes.

Algunas de las preguntas que pueden guiar la conversación son:

- ▶ **¿Qué tienen en común los modelos o los resultados?**
- ▶ **¿Qué pregunta nueva o diferente responde este modelo en relación con el mío?**
- ▶ **¿Qué operaciones son utilizadas en mi modelo en comparación con otros?**

Se sugiere comunicar la propuesta de puente, el proceso y el modelo mediante alguna de estas posibilidades:

- Afiche
- Presentación
- Informe
- Díptico
- Video
- Poster

Orientaciones al docente

Para unificar conceptos disciplinares Se sugiere relevar, mencionando explícitamente, en cada uno de los momentos en que se requiera un nuevo conocimiento y la forma en que se puede relacionar con lo que se está haciendo para levantar la propuesta del puente. En particular, se sugiere tener presente las diferentes formas para presentar la función cuadrática:

Forma normal	$y = 2x^2 - 4x - 6$
Forma del vértice	$y = 2(x - 1)^2 - 8$
Forma factorizada	$y = 2(x - 3)(x - 1)$

El uso que se puede dar a cada una de ellas dependerá de la información que tengan a su disposición y la ubicación del origen para acceder a los puntos del gráfico. La simetría del arco del puente promueve el uso y aplicación de elevar al cuadrado. Esto se aprecia mejor en el caso de ubicar el origen en el eje de simetría del arco.

Si se trabaja con fotografías, se debe cuidar mucho el uso de las razones y proporciones, sobre todo cuando la imagen está muy inclinada. Idealmente se sugiere trabajar con fotografías donde el puente quede de frente.

Para focalizar el desarrollo de habilidades Aunque esta actividad desarrolla varias de las habilidades de matemática, se sugiere focalizar el desarrollo en solo una de ellas. Para esto, puede tener presente la siguiente estrategia interrogativa, que tiene como objetivo enfocar el desarrollo de la habilidad de construir el modelo:

- ▶ ¿Qué relaciones matemáticas se pueden observar en los datos?
- ▶ ¿Cómo dependen los datos entre sí y con otros?
- ▶ ¿Qué propiedades se pueden distinguir de los datos?
- ▶ ¿Cómo podemos deducir los parámetros del modelo?
- ▶ ¿Cuáles de los datos coinciden con el modelo? ¿Se encuentran cerca o difieren significativamente del modelo?
- ▶ ¿Qué limitaciones tiene el modelo?

Además ponga a disposición de las y los estudiantes un organizador gráfico que puede ser utilizado como bitácora para la construcción del modelo:

¿Qué relaciones matemáticas se pueden observar en los datos?

Constante ↓	Crecimiento ↓	Decrecimiento ↓	Periódico ↓	Cuadrático ↓
▶ ¿Cómo dependen los datos entre sí y con otros?				
▶ ¿Qué propiedades se pueden distinguir de los datos?				
▶ ¿Cómo podemos deducir los parámetros del modelo?				
				
¿Cuáles de los datos coinciden con el modelo?, ¿se encuentran cerca o difieren significativamente del modelo?				
▶ ¿Qué limitaciones tiene el modelo?				

https://www.curriculumnacional.cl/docente/629/articles-248176_recurso_pdf.pdf

