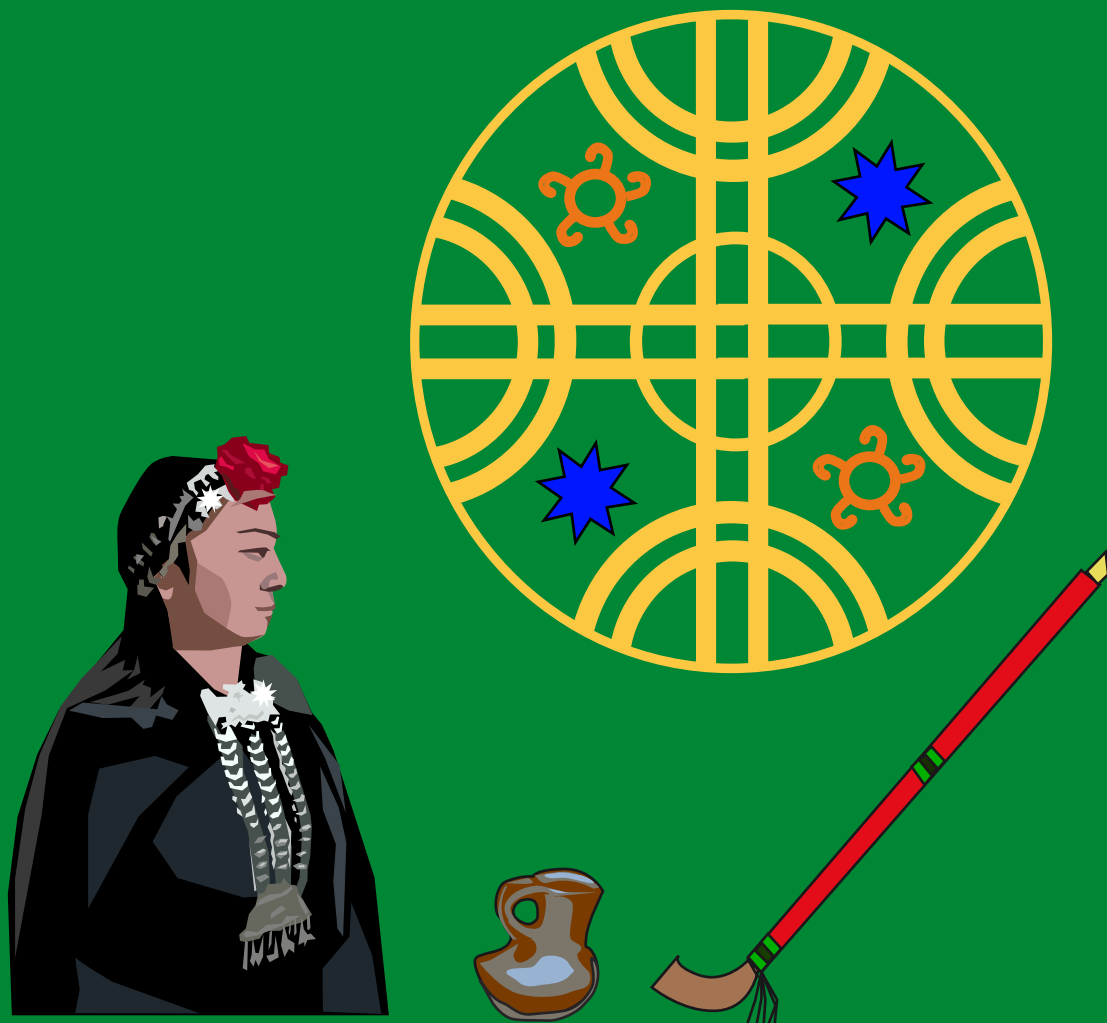


# ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

TOMO 3

MODELOS DE PROBABILIDAD ;  
DESCRIBIENDO EL AZAR



*Jorge Galbiati Riesco*

## **ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES**

Tomo 3: Modelos de probabilidad; Describiendo el azar.

Jorge Mauricio Galbiati Riesco Ph.D.

Profesor del Instituto de Estadística de la  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

1a. Edición 2024

### **ILUSTRACIONES:**

Paola Galbiati Valverde, Diseñadora gráfica.

[www.talleronce.cl](http://www.talleronce.cl)

### **AGRADECIMIENTOS:**

- Al Instituto de Estadística de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,  
por el apoyo entregado para la elaboración de este tomo.

### **PORTADA:**

Representación de la cosmovisión Mapuche, que muestra los cuatro puntos cardinales y las cuatro estaciones del año. El fondo verde evoca el color de la naturaleza de la región de Araucanía de Chile, hogar de los Mapuche.

Ilustración del autor.

# **ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES**

## **TOMO 3: MODELOS DE PROBABILIDAD: DESCRIBIENDO EL AZAR**

## **Contenidos**

|                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------|-----|
| <b>1- Introducción</b>                                       | 4   |
| <i>Repasemos algunos conceptos relacionados con el azar.</i> |     |
| <b>2 - Variables aleatorias</b>                              | 10  |
| <i>Entre números y categorías, preferimos los números.</i>   |     |
| <b>3 - Los promedios muestral y poblacional</b>              | 65  |
| <i>Una medida del centro de la información.</i>              |     |
| <b>4 - Las desviaciones estándar muestral y poblacional</b>  | 80  |
| <i>Una medida de la dispersión de la información.</i>        |     |
| <b>5 - Ayudas al conteo: combinaciones y permutaciones</b>   | 94  |
| <i>Cómo contar grandes cantidades de posibilidades.</i>      |     |
| <b>6 - Un modelo del azar: el binomial</b>                   | 110 |
| <i>Éxitos y fracasos.</i>                                    |     |
| <b>7 - Un modelo del error aleatorio: el normal</b>          | 150 |
| <i>Muchas pequeñas causas de variación.</i>                  |     |
| <b>Respuestas de los Ejercicios:</b>                         |     |
| Cap. 2                                                       | 200 |
| Cap. 3                                                       | 214 |
| Cap. 4                                                       | 220 |
| Cap. 5                                                       | 229 |
| Cap. 6                                                       | 232 |
| Cap. 7                                                       | 250 |
| <b>Anexo 1 - Tabla binomial</b>                              | 264 |
| <b>Anexo 2 - Tabla normal</b>                                | 281 |



## 1 - Introducción

*Repasemos algunos conceptos relacionados con el azar.*

En el Tomo 2 introducimos una serie de conceptos, previos a la definición de **probabilidad**.

Primero dijimos que en ocasiones se realiza una acción que puede resultar de más de una forma, y antes de realizarla no se sabe cómo va a resultar. Esto se llama **experimento aleatorio** o **experimento al azar**.

Por ejemplo, tomar una decisión bajo incertidumbre: no se sabe cuál será la consecuencia de lo que decidamos.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio lo definimos como el **espacio muestral** asociado a ese experimento.

Cada cosa que hay dentro del espacio muestral es un **elemento** de él.

Vimos que un espacio muestral puede estar formado por **números** o por **categorías no numéricas**, por ejemplo, letras, meses, etc.. Si son números, pueden ser **enteros** o **números reales**.

Si está formado por **números enteros**, puede ser **finito** o **infinito**. El espacio muestral es **discreto** si está formado por un conjunto **finito** o por un conjunto **infinito**, pero que se puede enumerar, como, por ejemplo, 1, 2, 3, ... etc. El espacio muestral es **continuo** si es un intervalo de los números reales, como, por ejemplo  $[0,1]$ .

Definimos un **evento**, como cualquier subconjunto del espacio muestral.

En particular, hay algunos eventos que vale la pena mencionar. Uno es el conjunto vacío, el que no tiene ningún elemento, y que denominamos **evento imposible**, porque nunca se va a cumplir.

Otro es el espacio muestral completo, que denominamos **evento seguro**, porque siempre que se realice el experimento, es seguro que se va a cumplir.

Por último, definimos los eventos que contienen un solo elemento, que se denominan **eventos simples** o **eventos básicos**.

Con todo esto, dijimos que, de manera informal, se puede pensar en la **probabilidad de un evento** como una medida de la **certeza** de que va a ocurrir. Es un número entre 0 y 1, donde mientras más grande es, mayor es la certeza de que ese evento va a ocurrir.

El valor 1 se interpreta como la certeza absoluta de que va a ocurrir, mientras que el 0 se interpreta como la certeza absoluta de que no va a ocurrir. El valor 0,5 representa una total indiferencia acerca de la certeza de que ocurra.

Tenemos dos principios que introdujimos en el Tomo 2: el **principio aditivo** y el **principio multiplicativo**.

El **principio aditivo** dice que si dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes** o **disjuntos** (significa que se puede cumplir uno de ellos, pero no ambos simultáneamente), entonces la probabilidad de que se cumpla A o B (que llamamos la probabilidad de la unión de ambos), es igual a la **suma** de la probabilidad de A más la probabilidad de B.

El **principio multiplicativo** dice que si dos eventos A y B son **independientes** (que el resultado de uno de ellos no afecta la probabilidad de que se cumpla el otro), entonces la probabilidad de que se cumpla A y B simultáneamente (que llamamos la probabilidad de la intersección de ellos) es igual al **producto** de las probabilidades de A y de B.

En resumen, el **principio aditivo** dice que la probabilidad de A o B es la **suma** de las probabilidades de A y de B (siempre que sean mutuamente excluyentes).

Y el **principio multiplicativo** dice que la probabilidad de A y B es el **producto** de las probabilidades de A y de B (siempre que sean independientes).

¿Cómo se asignan las probabilidades?

Vimos dos maneras, en general:

Una forma es considerando un experimento **repetible**. Decimos que la probabilidad es igual a la **proporción** de veces que ocurre el evento que nos interesa, si el experimento se repitiera un número **muy grande** de veces.

A esta forma de asignar probabilidades, asociadas a eventos de experimentos **repetibles**, se le conoce como **enfoque frecuentista**.

Hay otra forma de asignar probabilidades a eventos, incluidos experimentos que **no son repetibles**. La probabilidad se asigna en forma intuitiva, de acuerdo con lo que la persona **crea** que sería una medida de certeza de que el evento va a ocurrir, según los **antecedentes** que tiene y a su **conocimiento** del fenómeno que está estudiando.

Por ejemplo, un estudiante de enseñanza media puede asignarle una probabilidad de 0,6 al hecho que va a ser arquitecto. Esto lo hace por el conocimiento que tiene de otros casos, la confianza que se tiene en sí mismo, su deseo y voluntad que posee de llegar a ser arquitecto, y un sinnúmero de otros factores, todos **subjetivos**.

Esta segunda forma de asignar probabilidades se conoce como **enfoque bayesiano**, por Thomas Bayes (1702-1761), monje inglés dedicado a las probabilidades.

Por último, recordemos que un espacio muestral es **equiprobable** si es finito, y todos sus eventos simples tienen igual probabilidad.

En tales casos se puede aplicar el **modelo de Laplace** para asignar probabilidades: si A es un evento,

$\text{Prob}(A) = \text{número de elementos en } A / \text{Número total de elementos},$

O dicho de otro modo, es el coeficiente entre el número de posibilidades favorables al evento A dividido por el número total de posibilidades.

Por último, hemos visto lo que es la **probabilidad condicional**.

Sean A y B dos eventos, tales que la probabilidad de A y B es  $P(A \text{ y } B)$ , p la probabilidad de B es  $P(B) \neq 0$ .

Supongamos que se cumplió el evento B. Entonces la probabilidad de A dado que se cumplió B es el cociente

$$P(A | B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$$

$P(A | B)$  se lee **probabilidad de A dado B**, o **probabilidad condicional de A dado B**. En contraposición, las probabilidades  $P(A)$  y  $P(B)$  las llamamos **probabilidades incondicionales**.

Observa que en esta definición, A es aleatorio, B no lo es, pues sabemos que B se cumplió. Eso hace que el espacio muestral se reduzca al evento B.

Entonces la probabilidad de A se convierte en la probabilidad  $P(A \text{ y } B)$ . Se divide por  $P(B)$  para que la probabilidad del nuevo espacio muestral sea 1. En efecto, es igual a  $P(B)/P(B) = 1$ .

En este contexto,  $P(A \text{ y } B)$  se denomina **probabilidad conjunta** de A y B;  $P(A)$  y  $P(B)$  se llaman **probabilidades marginales** de A y de B.

Si multiplicamos ambos lados de la igualdad anterior por  $P(B)$  (que le impusimos la condición de que no es cero; obvio, si sabemos que se cumplió), queda

$$P(A \text{ y } B) = P(A | B) \times P(B)$$

Esta se denomina **regla multiplicativa**.

Ahora veamos lo que entendemos por **eventos independientes**.

Recuerda que dijimos que dos eventos, A y B, son independientes si el hecho que se cumpla uno de ellos, por ejemplo, B, no cambia la probabilidad de A.

Ahora estamos en condiciones de dar una definición más precisa:

A y B son **independientes** si la probabilidad condicional de A dado B es igual a la probabilidad de A dado B. Es decir,  $P(A | B) = P(A)$ .

O, equivalentemente, la probabilidad condicional de B dado A es igual a la probabilidad de B. Es decir,  $P(B | A) = P(B)$ .

¡No confundir eventos **mutuamente excluyentes** con **eventos independientes**!

Ahora vamos a extender la regla multiplicativa:

Sean A, B y C tres eventos.

Entonces, por la regla multiplicativa,

$$P(A \text{ y } B) = P(B | A) \times P(A)$$

Pero ahora supongamos que sabemos que se cumplieron A y B.

$$\text{Entonces } P(C | A \text{ y } B) = \frac{P(A \text{ y } B \text{ y } C)}{P(A \text{ y } B)}$$

$$\text{Luego } P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(C | A \text{ y } B) \times P(A \text{ y } B)$$

Pero si sustituimos  $P(A \text{ y } B)$  por la expresión de más arriba, tenemos una regla de multiplicación en cadena,

$$P(A \text{ y } B \text{ y } C) = P(C | A \text{ y } B) \times P(B | A) \times P(A)$$

que puede extenderse a 4 o más eventos.

Estas cosas parecen muy teóricas, pero en la vida práctica estas cosas son propiedades que generalmente se cumplen.

En efecto, cuando hay que tomar decisiones, algo sabemos sobre el fenómeno sobre el que hay que decidir, o evento de interés, no somos totalmente ignorantes.

Eso hace que las probabilidades asignadas a los eventos van cambiando en la medida que más información tenemos, relacionada con el evento de interés.

## **EJEMPLO 1.1**

*Decisiones con información.*

Supongamos que una persona va a invertir en un negocio, como por ejemplo, poner una venta de abarrotes, en un barrio determinado.

Sin tener información, asume que la probabilidad de tener éxito (evento A) en el negocio es 0,5 y, en consecuencia, la probabilidad que el negocio fracase es también 0,5. Esto se interpreta como que, inicialmente, no tiene información que le permita diferenciar entre tener o no tener éxito.

Antes de iniciar su negocio decide hacer un estudio, consistente en investigar cómo le ha ido a los negocios que están funcionando, en el barrio.

Sea B el evento que a los otros negocios que se han instalado en el barrio les ha ido bien.

Resultó que a 8 negocios les ha ido bien y todavía están funcionando. Pero hay 2 que fracasaron.

Luego la probabilidad de éxito de *cualquier negocio* (sin diferenciar entre el tipo de negocio) en ese barrio la puede asumir como  $P(B) = 8/10 = 0,80$

Entonces la **probabilidad condicional** que a él le va a ir bien dado que a los otros les va bien es

$$P(A | B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{p(B)} = \frac{0,5}{0,80} = 0,625$$

Entonces subió su probabilidad de éxito, después de la información obtenida

---

## 2 - Variables aleatorias

*Entre números y categorías, preferimos los números.*

### MOTIVACIÓN

Hemos definido el **espacio muestral** de un **experimento aleatorio** como el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

Esos resultados pueden ser **categorías**, es decir, valores medidos en escalas no numéricas, como *alto*, *regular*, *bajo*, o bien pueden ser medidos en una **escala numérica**.

Siempre es más ventajoso medir en escala numérica, pues con los números podemos hacer más cosas, como obtener promedios, lo que no se puede hacer con las categorías.

En ciertos casos en que los resultados del experimento se expresan en una escala categórica, es posible asignarle, a cada categoría, un número que sea relevante al fenómeno que estamos estudiando.

Por ejemplo, si el conjunto de resultados de un experimento es el espacio muestral {muy malo, malo, regular, bueno, muy bueno}, le podríamos asignar el valor 1 a la categoría *muy malo*; el valor 2 a la categoría *malo*; y así hasta el valor 5 a la categoría *muy bueno*.

En tal caso, lo que hicimos fue definir una **función** que le asigna a cada elemento del espacio muestral, un número real. Estos números forman un nuevo espacio muestral.

La función que definimos se denomina **variable aleatoria**.

Podemos ir más lejos, si los eventos, o subconjuntos, del espacio muestral original tienen valores de probabilidad asignadas. Si queremos asignar probabilidades a los eventos del nuevo espacio muestral formado por los números, simplemente trasladamos las probabilidades de los eventos simples a cada uno de los números de la función.

¿Qué significa *trasladar*? Significa que a cada número del nuevo espacio muestral de números, le asignamos la suma de las probabilidades de los eventos simples del espacio muestral original a los que se les asignó ese número. Lo veremos en los ejemplos que presentaremos en este capítulo.

Recuerda que los eventos simples son aquellos que consisten en un sólo elemento.

---

Daremos una definición formal de este nuevo concepto, el de **variable aleatoria**.

Una **variable aleatoria** asociada a un experimento aleatorio es una **función** que asigna a cada elemento del espacio muestral, un número real.

A las variables aleatorias, es costumbre identificarlas por letras mayúsculas.

De este modo, la variable aleatoria genera una serie de eventos que constituyen un nuevo espacio muestral asociado al espacio muestral original a través de la función.

La característica de este nuevo espacio muestral es que sus elementos son números reales.

### **EJEMPLO 2.1**

---

*Algunos ejemplos de variables aleatorias.*

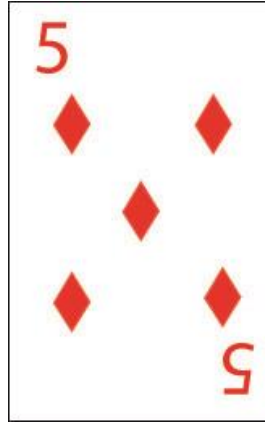
Consideremos las siguientes situaciones:

- 1.- El resultado de lanzar un dado.
- 2.- El resultado de lanzar dos dados y sumar los números que salen.
- 3.- Los nombres de las personas que entran en una tienda durante los siguientes cinco minutos.



4.- El resultado de extraer un naipe de una baraja inglesa de 54 cartas.

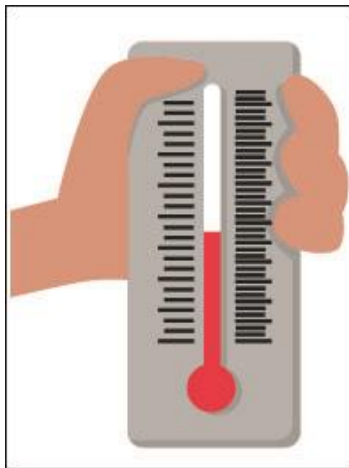
La baraja inglesa consta de 4 pintas: corazón, pica, diamante y trébol. De cada pinta hay 13 cartas; as, 1 a 10, jota, reina, y rey.



5.- Contar el número de ventas exitosas en un día en que un vendedor hace 20 contactos con posibles compradores.

6.- Pesar un saco de naranjas, y expresar el peso en kilos.

7.- Medir la temperatura ambiental en un momento dado.



8.- Registrar el sueldo percibido por un grupo de trabajadores de una empresa, en miles de pesos.

9.- La nota obtenida por los estudiantes de un curso, en escala

{A, B, C, D, F}.



10.- El número de palabras de un texto leídas por una persona, en un período de un minuto.

Los casos 1, 2, 5, 6, 7, 8, y 10 definen variables aleatorias, pues son resultados de experimentos medidos en escala numérica. La función a que alude la definición de variable aleatoria, en estos casos es simplemente la identidad.

En las otras situaciones no aparecen variables aleatorias. Sin embargo, podemos crearlas definiendo alguna función apropiada, en cada caso, como, por ejemplo (hay más de una manera de definir una variable aleatoria asociada a un mismo experimento):

En el caso 3, a los nombres de los que entran a una tienda en un período de cinco minutos, se puede asignar la siguiente función: se cuenta cuántas personas entraron. De esa forma se puede construir una variable aleatoria.

En el caso 4, se puede definir una función que asigna un número en forma natural: un 1 al as de cualquier pinta, el número que aparece en el naipe extraído, independientemente de la pinta; un 11 al jote, 12 a la reina y 13 al rey.

En el caso 9, podemos asignar puntos de la siguiente forma, para construir una variable aleatoria: 4 al que obtuvo una A, 3 a la B, 2 a la C, 1 a la D y 0 a la F.

Observa que, si tenemos muestras de poblaciones definidas por las variables aleatorias, éstas consisten en números. Luego podemos obtener medidas de

resumen, como promedios, medianas, percentiles, desviaciones estándar u otras.

Con los resultados originales de las situaciones 3, 4, y 9 no podemos hacer nada de eso.

Por eso, siempre preferimos expresar los resultados de un experimento en números por sobre los que no son numéricos (aunque no siempre tiene sentido o es útil el resultado).

De ahí la importancia de las variables aleatorias: nos permiten llevar el resultado de cualquier experimento a un resultado numérico.

---

Una variable aleatoria puede ser **discreta**, si el conjunto de sus valores posibles es finito (el número de elementos en su espacio muestral).

Es como un balde lleno de pelotas de ping-pong que se vacía en el suelo. Aunque sean muchas, se podrían contar.



También es discreta si el conjunto de sus valores es infinito **enumerable**, lo que significa que, aun cuando es infinito, sus elementos se pueden enumerar, o contar, como 1, 2, 3, ..., etc.

Si el conjunto es infinito, se podría pensar en los granos de arena de una playa. En teoría se podrían contar, pero nunca terminaríamos de hacerlo.



Pero, por otro lado, la variable aleatoria puede ser **continua**, cuando sus valores forman un intervalo de los números reales.

Los números contenidos en el intervalo de números reales no se pueden enumerar.



Es como observar una poza de agua. No se puede contar el agua.

Si el espacio muestral original **S** es discreto, entonces se dice que una variable aleatoria definida sobre **S** es **discreta**.

Si el espacio muestral **S** es un intervalo de los números reales, una variable aleatoria definida sobre **S** es **continua**.

Ahora vamos a asignarle **probabilidad** a la variable aleatoria. Como dijimos antes, si el espacio muestral tiene probabilidades asignadas, éstas se pueden traspasar a una variable aleatoria asociada a ese espacio muestral, de la

siguiente manera: a cada valor de la variable aleatoria se le asigna la suma de las probabilidades de todos los elementos del espacio muestral que tienen ese valor como **imagen**.

Por ejemplo, si el espacio muestral tiene dos elementos, digamos  $a_1$  y  $a_2$ , a los cuales la función variable aleatoria  $\mathbf{X}$  le asigna el 5, entonces la probabilidad de 5 es la suma de las probabilidades de  $a_1$  y  $a_2$ .

Es decir,  $P_X(5) = P(a_1) + P(a_2)$ .

La función de probabilidad  $P$  es la probabilidad asociada al espacio muestral original.

La función de probabilidad  $P_X$  es la probabilidad asociada a los valores de la variable aleatoria  $\mathbf{X}$ , por eso le pusimos un subíndice  $\mathbf{X}$ .

Si  $\mathbf{X}$  es una variable aleatoria, el conjunto de todos los valores que toma la variable aleatoria también es un espacio muestral, pues es el resultado del mismo experimento que generó el espacio muestral original  $\mathbf{S}$ .

A este nuevo espacio muestral lo designaremos con el símbolo  $\mathbf{S}_X$ .

En otras palabras, el espacio muestral original  $\mathbf{S}$  se convierte, a través de la función **variable aleatoria  $\mathbf{X}$** , en un nuevo espacio muestral.

$\mathbf{S}_X$  que es un subconjunto de los números reales.

También se le llama **soporte** de la variable aleatoria.

Estos conceptos se ilustran en los siguientes ejemplos.

## EJEMPLO 2.2

*Variable aleatoria asociada al lanzamiento de una moneda tres veces.*



Si lanzamos una moneda tres veces, y si C representa *cara* y S representa *sello*, los resultados posibles constituyen el siguiente espacio muestral, en que S representa un sello, C una cara:

$$S = \{SSS, SSC, SCS, CSS, SCC, CSC, CCS, CCC\}$$

Podemos definir una variable aleatoria que asigna a cada resultado el número de caras. Llamaremos **X** a esta variable aleatoria.

Entonces a SSS le corresponde el 0; a SSC, a SCS y a SSC se le asigna el 1; a SCC, a CSC y a CCS se le asigna el 2; y a CCC le corresponde el 3.

Entonces la variable aleatoria **X** que acabamos de definir, da por resultado el nuevo espacio muestral  $S_x = \{0, 1, 2, 3\}$ . Le agregamos el subíndice X para distinguirlo del espacio original S.

Podemos extender este concepto a las probabilidades: Si los 8 eventos simples del espacio muestral original tienen igual probabilidad, vale decir  $1/8$ , (estamos suponiendo que es un espacio muestral un espacio muestral **equiprobable**), entonces los eventos simples del nuevo espacio muestral tienen probabilidades

$$P(0) = 1/8, \quad P(1) = 3/8, \quad P(2) = 3/8 \quad \text{y} \quad P(3) = 1/8.$$

Esto es así, porque hay una forma de obtener un 0, pero vimos que hay tres formas de obtener un 1 y otras tres formas de obtener un 2, y una forma de obtener un 3.

La tabla siguiente resume los valores posibles de la variable aleatoria **X** *número de caras*, y sus probabilidades.

| X, número de caras | Probabilidad P(X) |
|--------------------|-------------------|
| 0                  | 1/8               |
| 1                  | 3/8               |
| 2                  | 3/8               |
| 3                  | 1/8               |
| Suma               | 1                 |

En esta tabla se define lo que llamaremos **función de probabilidad** de la variable aleatoria.

Observa que el experimento anterior es equivalente a lanzar tres monedas juntas y registrar el número de caras, en lugar de lanzar una moneda tres veces.

### EJEMPLO 2.3

*Lanzamiento de una moneda cuatro veces.*



Si lanzamos una moneda cuatro veces (o lanzamos cuatro monedas una vez), los resultados posibles constituyen el siguiente espacio muestral:

$$S = \{SSSS, \\ CSSS, SCSS, SSCS, SSSC,$$

CCSS, CSCS, CSSC, SCCS, SCSC, SCCC,  
 CCCS, CCSC, CCCC, SCCC,  
 CCCC}

Consideremos la variable aleatoria **Y** que asigna a cada resultado el número de caras.

Entonces a SSSS le corresponde el 0; a CSSS, a SCSS, a SSSC y a SSSC se le asigna el 1; a CCSS, a CSCS, a CSSC, a SCCS, a SCSC y a SCCC le corresponde el 2; y a SSSS le corresponde el 3.

Entonces la variable aleatoria **Y** que definimos, da por resultado el nuevo espacio muestral  $S_Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Supongamos que los 16 eventos simples del espacio muestral original tienen igual probabilidad, vale decir  $1/16$ , entonces los eventos simples del nuevo espacio muestral tienen las probabilidades siguientes:

$P(0) = 1/16$ , porque hay un evento, SSSS, cuyo resultado bajo la variable aleatoria **Y** es el 0.

$P(1) = 4/16 = 1/4$ , porque los siguientes 4 los que tienen resultado 1.

$P(2) = 6/16 = 3/8$  porque los 6 que siguen tienen resultado 2.

De forma similar  $P(3) = 4/16 = 1/4$  y  $P(4) = 1/16$ .

Podemos expresar estos resultados (la función de probabilidad de la variable aleatoria **Y**) en forma de tabla:

| Valor de Y | Probabilidad |
|------------|--------------|
| 0          | 1/16         |
| 1          | 1/4          |
| 2          | 3/8          |
| 3          | 1/4          |
| 4          | 1/16         |
| Suma       | 1            |



Observamos que, si bien el espacio muestral original es equiprobable, el espacio muestral asociado a la variable aleatoria  $Y$  no lo es.

---

La tabla que construimos en el Ejemplo anterior, toma el nombre de **función de probabilidad** de la variable aleatoria. La siguiente notación enfatiza el hecho que se trata de una función:

$$f(0) = 1/16, f(1) = 1/4, f(2) = 3/8, f(3) = 1/4 \text{ y } f(4) = 1/16$$

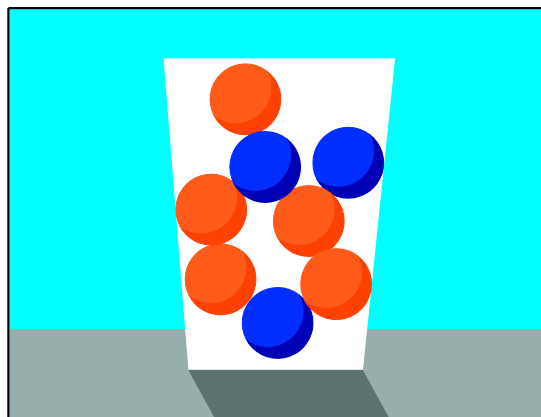
Toda variable aleatoria discreta tiene asociada una función de probabilidad, que describe las probabilidades de cada uno sus eventos.

#### EJEMPLO 2.4

---

*Extracción aleatoria de bolas de dos colores.*

En una caja hay 30 bolas azules y 20 bolas naranja.



Se extraen 15 bolas, al azar, sin devolución.

Luego, sin mirarlas, y sin devolver las anteriores, se extrae otra más, la número 16. ¿Cuál es la probabilidad de que sea azul?

Consideremos la primera extracción.

Como es una extracción al azar, entonces el espacio muestral original de las 50 bolas es equiprobable.

Significa que cualquier bola tiene igual probabilidad de salir.

Por lo tanto, es válido el modelo de Laplace.

En consecuencia,

$P(\text{azul}) = \text{número de bolas azules} / \text{número total de bolas} = 30/50 = 3/5$ .

Ahora vamos a la bola 16.

Pareciera que depende de los colores de las 15 bolas que se extrajeron antes. Es cierto, pero nosotros no sabemos cuántas se extrajeron de cada color.

Por lo tanto, al extraer la bola 16, sin conocer las anteriores 15, es igual como si las 15 estuvieran en la caja. Luego, para nosotros, la última bola extraída, la número 16, tiene igual probabilidad de ser azul que si fuera la primera en extraerse.

Y esa probabilidad es  $30/50 = 3/5$ , según el modelo de Laplace.

Ahora cambiemos un poco el problema.

Supongamos que sabemos lo que apareció en las primeras 15 extracciones.

Vamos a asumir que salieron 9 azules y 5 naranjas.

¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente, la número 16, sea azul?

Ahora la situación es muy distinta, pues sabemos que quedan 21 bolas azules y 15 naranjas en la caja.

Luego la probabilidad de que la número 16 sea azul es  $21/(21 + 15) = 7/12$ . Esto nos muestra que la probabilidad de un evento no es fija, sino que cambia de acuerdo con la información previa que poseemos.

Eso es muy importante cuando se debe tomar una decisión. La información que poseemos, relacionada con lo que vamos a decidir, determina las probabilidades de los resultados posibles de nuestra decisión.

Por lo general, mientras más información poseemos, las probabilidades tienden a acercarse a los valores extremos 0 o 1. Eso hace más fácil decidir porque disminuye el riesgo de tomar una decisión equivocada.

---

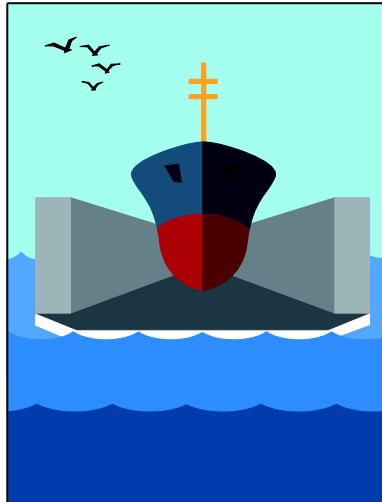
A veces es más conveniente expresar la **función de probabilidad** como una fórmula, en lugar de una tabla. Resulta más compacto en el caso en que la variable aleatoria tiene muchos valores.

En el siguiente ejemplo veremos una función de probabilidad expresada mediante una fórmula.

### EJEMPLO 2.5

---

*Atención de buques en el dique Neptuno.*



Considerando una gran cantidad de datos del comportamiento anterior, se determinó que la cantidad de buques que semanalmente requieren atención en el dique flotante Neptuno, es una variable aleatoria con la siguiente función de probabilidad

$$f(x) = \frac{a3^x}{x!} \text{ donde } x \text{ toma los posibles valores } 0, 1, 2, 3, 4$$

Recuerda que  $4!$  Se lee **cuatro factorial** y es igual a

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

De forma similar,

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$1! = 1$$

y  $0!$  se define como 1.

En general,  $x! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots$  hasta  $x$ .

Encuentra el valor de la constante  $a$ .

La suma de las probabilidades a través de todo el espacio muestral

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$  debe ser 1. Luego

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 1$$

$$\text{Es decir, } \frac{a3^0}{0!} + \frac{a3^1}{1!} + \frac{a3^2}{2!} + \frac{a3^3}{3!} + \frac{a3^4}{4!} = 1$$

Recuerda que  $0!$  es igual a 1.

Factorizando por  $a$ , desarrollando y simplificando donde se pueda, queda

$$a ( 1 + 3 + 9/2 + 9/2 + 27/8 ) = 1$$

$$16,375 a = 1$$

$$\text{de donde, despejando, } a = 1/16,375 = 0,06107$$

(aproximado a 5 decimales).

---

A esta altura es conveniente recordar el principio aditivo y el principio multiplicativo:

Supongamos que hay dos eventos A y B, con probabilidades respectivas  $p_1$  y  $p_2$ .

Si A y B son **mutuamente excluyentes** o **disjuntos**, es decir, no se pueden cumplir ambos simultáneamente, entonces la probabilidad de que se cumpla sólo uno de los dos, **A o B**, es la suma  $p_1 + p_2$ .

En otras palabras, la probabilidad de la **unión A o B** es  $p_1 + p_2$ .

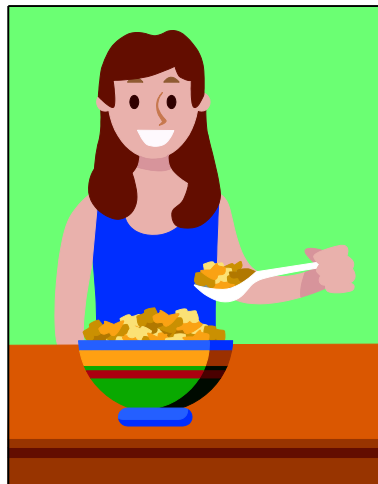
Si A y B son **independientes**, es decir, el que se cumpla uno cualquiera de ellos no altera la probabilidad de que se cumpla el otro, entonces la probabilidad de que se cumplan los dos **simultáneamente**, es decir, **A y B**, es el producto  $p_1 \times p_2$ .

En otras palabras, la probabilidad de la **intersección A y B** es  $p_1 \times p_2$ .

## EJEMPLO 2.6

*Control de calidad de cajas de cereales.*

Como parte de un control de calidad, se toma una muestra de 3 cajas de cereales y se pesan.



Supongamos que sabemos que la proporción de cajas con el peso correcto es 0,80.

Sea **X** el número de cajas con menor peso del que está especificado.

Supondremos que los eventos de tener o no el peso especificado, son independientes.

La tabla siguiente muestra los posibles valores de **X** y las respectivas probabilidades asignadas (C peso correcto, I peso incorrecto).

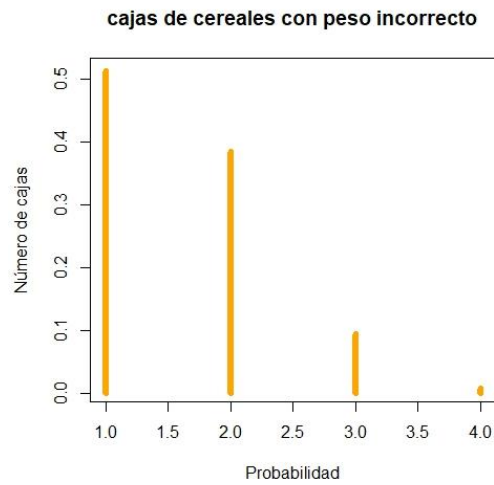
Las probabilidades conjuntas se obtienen multiplicando las probabilidades individuales (también llamadas probabilidades **marginales**), por el principio multiplicativo. C representa una caja con el peso correcto, I con el peso incorrecto.

| Caja 1 | Caja 2 | Caja 3 | Número con peso incorrecto | Probabilidad                        |
|--------|--------|--------|----------------------------|-------------------------------------|
| C      | C      | C      | 0                          | $0,8 \times 0,8 \times 0,8 = 0,512$ |
| I      | C      | C      | 1                          | $0,2 \times 0,8 \times 0,8 = 0,128$ |
| C      | I      | C      | 1                          | $0,8 \times 0,2 \times 0,8 = 0,128$ |
| C      | C      | I      | 1                          | $0,8 \times 0,8 \times 0,2 = 0,128$ |
| I      | I      | C      | 2                          | $0,2 \times 0,2 \times 0,8 = 0,032$ |
| I      | C      | I      | 2                          | $0,2 \times 0,8 \times 0,2 = 0,032$ |
| C      | I      | I      | 2                          | $0,8 \times 0,2 \times 0,2 = 0,032$ |
| I      | I      | I      | 3                          | $0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 0,008$ |
|        |        |        |                            | Suma 1.000                          |

Lo que se resume en la tabla siguiente, sumando las probabilidades de los eventos que producen el mismo valor de la variable aleatoria:

| Cajas con peso incorrecto | Probabilidad |
|---------------------------|--------------|
| 0                         | 0,512        |
| 1                         | 0,384        |
| 2                         | 0,096        |
| 3                         | 0,008        |
| Suma                      | 1,000        |

La figura siguiente ilustra la función de probabilidad:



### EJEMPLO 2.7

*Rifa de un club deportivo.*

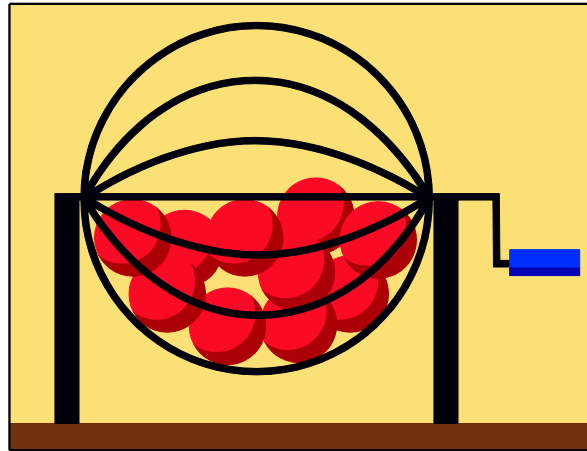


Un club deportivo decide hacer una rifa para financiar sus actividades, para lo que dispone de 5 premios de valor similar.

Se decide emitir 50 números, que se venden entre sus socios.

5 de estos números obtendrán premios, todos de igual valor.

El día del sorteo se depositan en una tómbola 50 fichas, numeradas del 1 al 50. Se extraen al azar 5, sin reposición, las que corresponden a los números premiados.



Yo compré 2 números.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no obtenga ningún premio?

¿Cuál es la probabilidad de que obtenga exactamente un premio?

¿Cuál es la probabilidad de que obtenga dos premios?

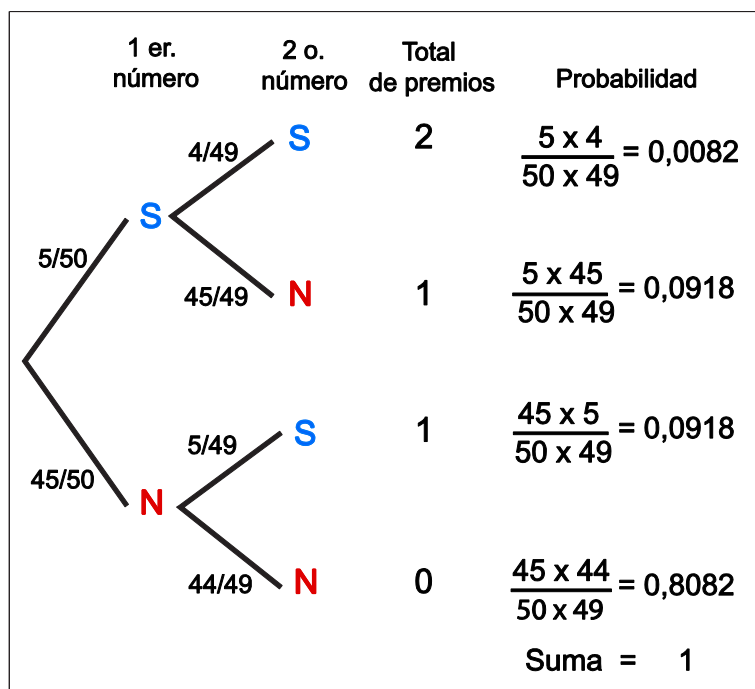
b) Construye una tabla de probabilidad de la variable aleatoria *Número de premios obtenidos*.

Resolución:

a) Hay que imaginarse que en la tómbola hay 50 fichas, de las cuales potencialmente 5 tienen premio (son las que saldrán en el proceso de extracción), y 45 no tienen premio.

Consideremos el siguiente diagrama de árbol, que representa lo que puede ocurrir con mis dos números. S significa premio, N significa que no obtiene premio.





Del diagrama, la probabilidad de que no tenga premio es 0,8082.

La probabilidad de que obtenga un premio se obtiene sumando las probabilidades de que tenga premio el primer número y el segundo no, más la probabilidad de que el segundo número tenga premio y el primero no.

Esto es así porque ambas situaciones son mutuamente excluyentes.

Luego es igual a  $0,0918 + 0,0918 = 0,1836$

La probabilidad de obtener dos premios es 0,0082.

Aquí conviene detenerse para analizar el diagrama que acabamos de presentar.

Las probabilidades 5/50 y 45/50 son probabilidades de los eventos S y N en el primer número sorteado. Las llamaremos **probabilidades incondicionales**, ya verás por qué.

Pero las probabilidades 4/49 y 45/49 son, respectivamente, las **probabilidades condicionales** de S y N en el segundo número sorteado, *dado que el primer sorteado fue S*.

Y las probabilidades  $5/49$  y  $44/49$  son las probabilidades condicionales de S y de N, *dado que el primer número sorteado fue N*.

Los productos de la última columna son las probabilidades conjuntas. Se obtienen por la **regla multiplicativa**, que mencionamos en el capítulo introductorio de este tomo:

$$P(\text{S en el } 1^\circ \text{ y S en el } 2^\circ) = P(\text{S en el } 2^\circ \mid \text{S en el } 1^\circ) \times P(\text{S en el } 1^\circ)$$

$$P(\text{S en el } 1^\circ \text{ y N en el } 2^\circ) = P(\text{N en el } 2^\circ \mid \text{S en el } 1^\circ) \times P(\text{S en el } 1^\circ)$$

$$P(\text{N en el } 1^\circ \text{ y S en el } 2^\circ) = P(\text{S en el } 2^\circ \mid \text{N en el } 1^\circ) \times P(\text{N en el } 1^\circ)$$

$$P(\text{N en el } 1^\circ \text{ y N en el } 2^\circ) = P(\text{N en el } 2^\circ \mid \text{N en el } 1^\circ) \times P(\text{N en el } 1^\circ)$$

b) La tabla de probabilidades siguiente resume estos resultados:

| Número de premios obtenidos | Probabilidad |
|-----------------------------|--------------|
| 0                           | 0,8082       |
| 1                           | 0,1836       |
| 2                           | 0,0082       |
| Suma                        | 1,0000       |

---

Al principio de este capítulo hicimos la distinción entre variables aleatorias **discretas** y **continuas**.

Recuerda que la **función de probabilidad** le asigna probabilidad a cada valor de la variable aleatoria discreta.

Es decir,  $f(x) = \text{Prob}(\text{la variable aleatoria toma el valor } x)$

Una **variable aleatoria discreta** toma valores en un conjunto **discreto** de números, eso significa que es un conjunto finito o bien es infinito pero sus elementos se pueden enumerar.

En cambio, en una **variable aleatoria continua** toma valores en un intervalo de número reales.

Eso significa que no se pueden enumerar: si uno toma un número, nunca habrá uno que sea el siguiente. Pues si tomamos dos números, siempre se podrá encontrar un número que está entre ellos (por ejemplo, el promedio de los dos).

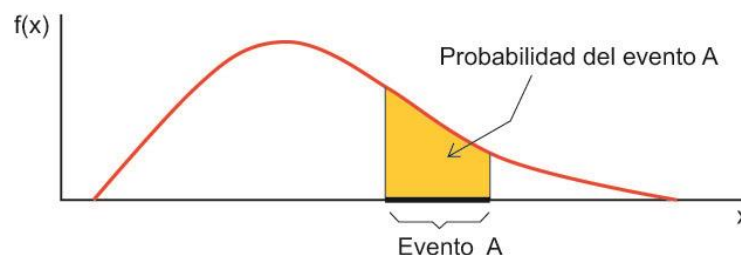
El equivalente a la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta, se denomina **función de densidad de probabilidad**, o bien, simplemente, **función de densidad**.

Se diferencian porque el proceso de obtención de probabilidades de eventos es un poco distinto en el caso discreto y en el caso continuo.

Recordemos que los eventos son subconjuntos del espacio muestral, y que, en el caso de variables aleatorias, está constituida por números.

En el caso discreto, la probabilidad de un evento, o sea, de un conjunto de números, es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de esos números.

En el caso continuo, los eventos son intervalos. Y la probabilidad de un intervalo es el área bajo la curva de la función de densidad, contenida entre los extremos del intervalo, como se muestra en la figura.



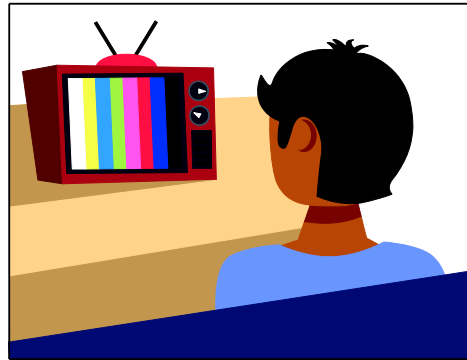
En general, el tratamiento de este tipo de variable aleatoria exige el uso de herramientas más avanzadas que las que utilizamos en este texto.

Por eso dejaremos su estudio para el último capítulo, en el que veremos sólo un tipo especial de variable aleatoria, la llamada **normal**.

## EJEMPLO 2.8

### *Muestreo de rating televisivo.*

Una empresa dedicada a los estudios relacionados con la actividad televisiva, quiere obtener un rating para el programa de televisión llamado *Nuestra Hora*.



Para ello encuesta hogares vía telefónica, al azar, a la hora en que se está transmitiendo el programa, para consultar si lo están viendo o no.

Llamemos **éxito** al hecho que en el hogar contactado lo están viendo el programa, **fracaso**, si no lo está viendo.

Considera la variable aleatoria **Y** que denota el número de hogares consultados hasta encontrar uno en que estén viendo *Nuestra Hora*, el primer éxito. Ahí se detiene el proceso de hacer llamadas.

Si **s** representa un hogar donde están viendo el programa, y **n** un hogar donde no lo están viendo, entonces el espacio muestral es

$$S = \{n, ns, nns, nnns, nnnns, nnnnns, \dots\}$$

Observa que, en teoría, es infinito: si la población es muy grande, se puede asumir que no hay límite para el número de llamadas hasta encontrar una donde están viendo el programa.

El espacio muestral de la variable aleatoria **Y**, el número de llamadas para el primer éxito, es  $S_Y = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

Supongamos que la probabilidad de encontrar un hogar que lo esté viendo es 0,12 (un 12% lo está viendo).

Encontraremos las probabilidades de los valores de la variable aleatoria, es decir, encontraremos la función de probabilidad.

Resolución:

Es razonable asumir independencia, es decir, el resultado de que en un hogar estén viendo o no el programa, no altera la probabilidad de que lo estén viendo en el siguiente.

Luego, las probabilidades son:

$$P(X=1) = 0,12 \text{ (primer llamado es un éxito)}$$

Si  $X = 2$ , corresponde a hacer dos llamadas, el primero es fracaso y el segundo, éxito. Luego la probabilidad de  $X = 2$  es el producto de la probabilidad de fracaso por la probabilidad de éxito:

$$P(X = 2) = 0,88 \times 0,12 = 0,1056$$

De forma análoga, la probabilidad de  $X = 3$  es el producto, y así:

$$P(X=3) = 0,88^2 \times 0,12 = 0,0929 \text{ (dos fracasos seguidos de un éxito)}$$

$$P(X=4) = 0,88^3 \times 0,12 = 0,0818 \text{ (tres fracasos seguidos de un éxito)}$$

$$P(X=5) = 0,88^4 \times 0,12 = 0,0720 \text{ (cuatro fracasos seguidos de un éxito)}$$

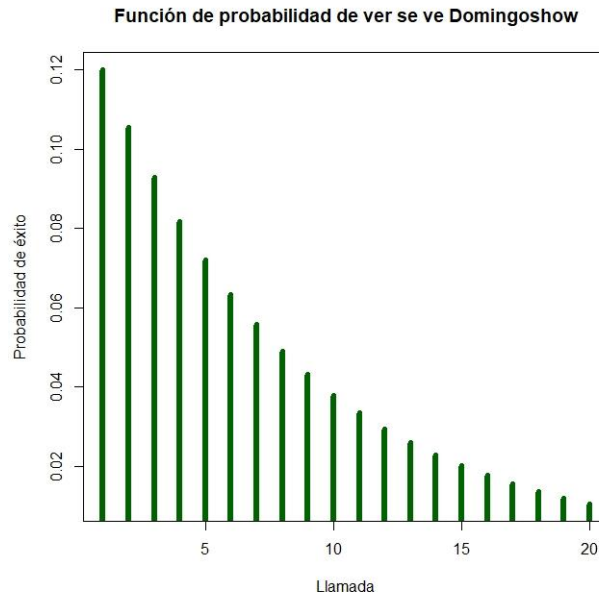
etc.

Vemos que las probabilidades siempre descienden, pues cada una es igual a la anterior multiplicada por 0,88.

Se puede generalizar mediante la fórmula siguiente:

$$f(x) = 0,88^{x-1} \times 0,12$$

El gráfico de la función de probabilidad es como sigue:



### Propiedades de las variables aleatorias discretas.

En esta parte sólo consideraremos **variables aleatorias discretas**. Las continuas las dejaremos para el final de este tomo.

Sea  **$X$**  es una **variable aleatoria discreta** y sea  $f(x)$  una función que asigna un número real a todos los eventos (subconjuntos) del espacio muestral  **$S_X$** . Si  $f(x)$  es tal que cumple con las siguientes condiciones, decimos que es una **función de probabilidad**:

Propiedad 1.  $f(x)$  tiene un valor entre 0 y 1 (ambos inclusive).

Propiedad 2. La suma de los  $f(x)$  cuando  $x$  toma todos los valores del espacio muestral es 1.

Propiedad 3. Si  $A$  es un evento (o subconjunto) de  **$S_X$**  entonces

$\text{Prob}(A) = \text{Suma de los } f(x) \text{ con } x \text{ tomando todos los valores en } A.$

En la práctica, cuando se define una función que cumple con las propiedades 1 y 2, y sólo se explicitan las probabilidades de los eventos simples se puede asumir que se cumple la propiedad 3 y queda establecido que la función es una función de probabilidad.

## EJEMPLO 2.9

*Caja de ciruelas con unidades deterioradas*



Una caja de ciruelas de exportación estuvo demasiado tiempo sin refrigerar, lo que causó el deterioro de algunas unidades.

Supongamos que la caja contiene 20 ciruelas, de las cuales 6 están en estado de deterioro.

Se extraen 2, al azar.

¿Cuáles son las probabilidades que entre las dos extraídas no haya ninguna deteriorada, que haya una de las deterioradas, que las dos estén deterioradas?

Resolución:

En la primera que se extrae, puede salir deteriorada, con probabilidad  $6/20$ , o sana, con probabilidad  $14/20$ .

En la segunda, si la primera salió deteriorada, puede salir deteriorada, con probabilidad  $5/19$ , pues ya se sacó una, y estaba deteriorada. Puede salir una sana, con probabilidad  $14/19$ .

Estas dos,  $5/19$  y  $14/19$ , son **probabilidades condicionales** de la segunda extracción, dado que en la primera extracción salió una ciruela deteriorada.

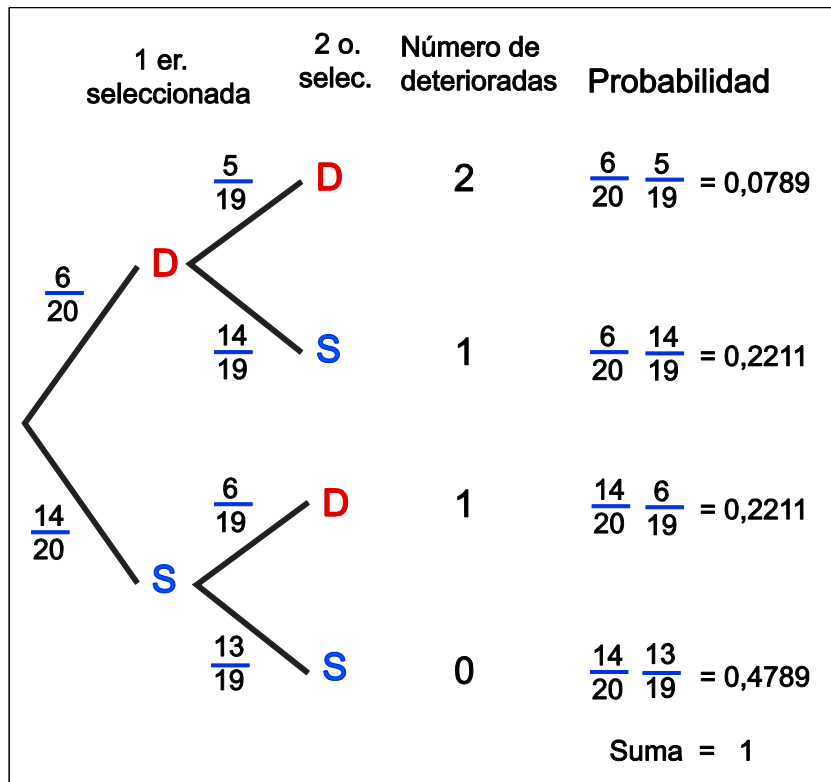
Pero si en la primera extracción salió sana, en la segunda puede salir deteriorada, con probabilidad  $6/19$  o que salga sana, con probabilidad  $13/19$ .

Estas dos son probabilidades condicionales dado que la primera ciruela extraída salió sana.

Para calcular las probabilidades de los eventos conjuntos, resultado de la primera extracción y de la segunda extracción, debemos multiplicar las probabilidades asociadas a la primera y a la segunda extracción, pues se dan simultáneamente.

Estos resultados se muestran en el gráfico siguiente, en que **D** indica "deteriorada" y **S** "sana":

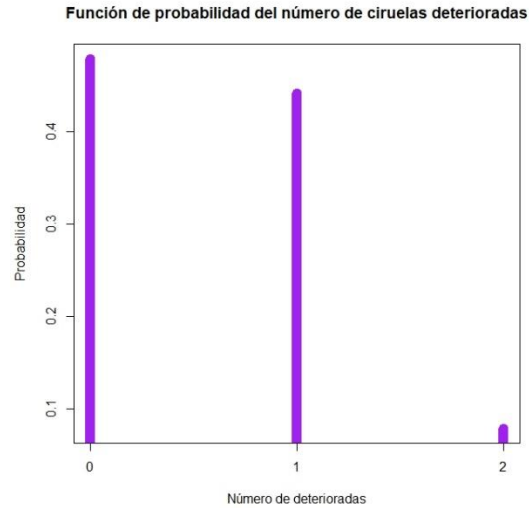




Si resumimos el número de ciruelas deterioradas en la muestra de dos, tenemos la siguiente función de probabilidad:

| Número de ciruelas deterioradas x | Probabilidad |
|-----------------------------------|--------------|
| 0                                 | 0,4789       |
| 1                                 | 0,4422       |
| 2                                 | 0,0789       |
| Suma                              | 1            |

La función aparece graficada a continuación



## EJEMPLO 2.10

*Muestreo de rating televisivo (continuación del EJEMPLO 2.8).*

En la determinación del rating del programa *Nuestra Hora*, el número de llamadas telefónicas hasta encontrar un hogar donde lo están viendo, es una variable aleatoria con función de probabilidad

$$f(x) = 0,88^{x-1} \times 0,12, \text{ para } x=1,2,3,\dots \text{ ilimitadamente}$$

Es evidente que  $f(x)$  es mayor que 0.

El espacio muestral es el conjunto infinito de todos los enteros positivos.

Los primeros 10 términos de la función de probabilidad son los siguientes (redondeados a 4 decimales):

| x | f(x)   |  | x  | f(x)   |
|---|--------|--|----|--------|
| 1 | 0,1200 |  | 6  | 0,0633 |
| 2 | 0,1056 |  | 7  | 0,0557 |
| 3 | 0,0929 |  | 8  | 0,0490 |
| 4 | 0,0818 |  | 9  | 0,0432 |
| 5 | 0,0720 |  | 10 | 0,0380 |

Se puede ver que son positivos, menores que 1.

Además, cada uno es igual a 0,88 veces el término anterior, por lo tanto, a medida que aumenta  $x$ , los términos disminuyen, acercándose cada vez más a cero.

Finalmente, la suma de estos 10 primeros términos es 0,7215.

Si nos diéramos el trabajo de sumar los primeros 65 términos, y los redondeáramos a 4 decimales, daría 1.

Pero si sumáramos los infinitos términos, nos daría 1.

Las herramientas matemáticas necesarias para eso exceden el nivel de dificultad de este texto.

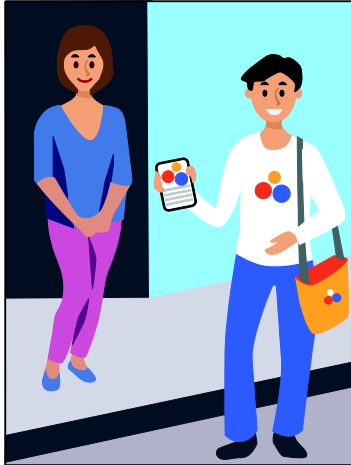
Por lo tanto, podemos concluir que esta es una función de probabilidad.

## EJEMPLO 2.11

*Visitas de un vendedor.*

Un vendedor visita a 3 potenciales clientes de su producto.

Él sabe, por experiencia, que con cada visita, el vendedor tiene una probabilidad de 0,40 de vender el producto.



Se puede asumir que el hecho de venderle a un potencial cliente es independiente de venderle a otro, es decir, se trata de eventos independientes.

- a) ¿Cuál es la variable aleatoria de interés y cuál es su espacio muestral?
- b) ¿Cuál es la función de probabilidad de la variable aleatoria?

Resolución:

- a) La variable aleatoria es el número de ventas, de entre las tres visitas.
- b) Sea **X** la variable aleatoria *número de ventas*, de entre los tres intentos.

**X** puede tomar los valores 0, 1, 2, o 3.

La probabilidad de no vender en una visita es  $1 - 0,40 = 0,60$ .

Por la independencia, el principio multiplicativo dice que la probabilidad de no vender a los tres clientes visitados se obtiene multiplicando la probabilidad de no vender a cada uno. Es igual a  $0,60 \times 0,60 \times 0,60 = 0,60^3 = 0,216$ .

Las tres posibles formas de hacer exactamente una venta, son:

Vender en la primera, y no en la segunda ni en la tercera; vender en la segunda y no en la primera ni en la tercera; vender sólo en la tercera.

Por la independencia, la probabilidad de cada una de estas tres posibilidades es  $0,40 \times 0,60 \times 0,60 = 0,40 \times 0,60^2 = 0,144$ .

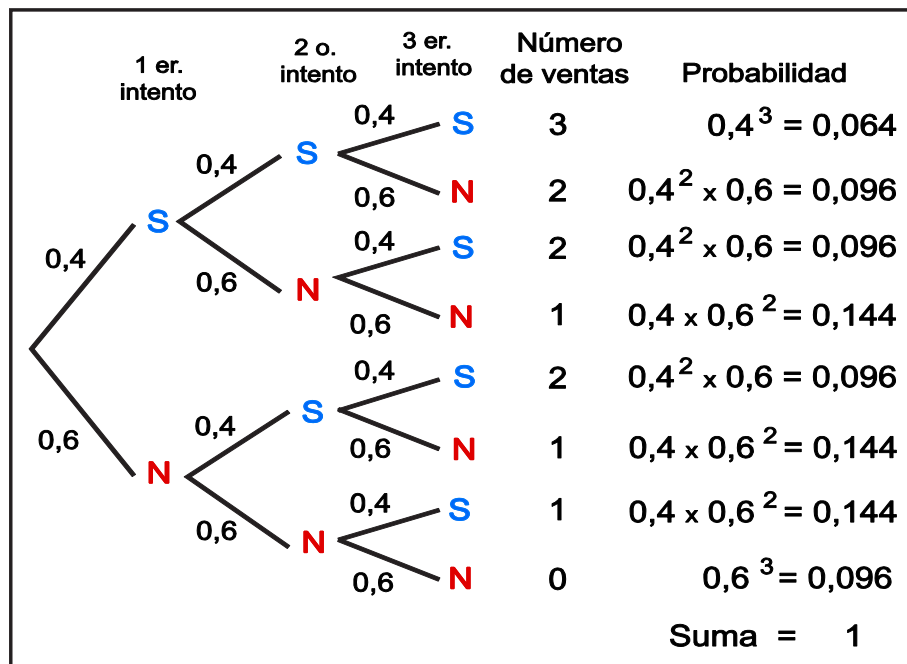
Luego la probabilidad de alguna de estas tres posibilidades, mutuamente excluyentes, por el principio aditivo es la suma de las tres:  $3 \times 0,144 = 0,432$ .

De forma similar, hay tres formas de hacer dos ventas en los tres intentos, cada una con probabilidad  $0,40^2 \times 0,60 = 0,096$ .

Como en el caso de 1 venta, son 3 formas de hacer dos ventas, uego la probabilidad de hacer dos ventas es  $3 \times 0,096 = 0,288$ .

Por último, por ser independientes las ventas diarias, la probabilidad de efectuar tres ventas es el producto  $0,40 \times 0,40 \times 0,40 = 0,40^3 = 0,064$ .

Si no te quedó claro el razonamiento anterior, observa la figura siguiente. Te puede ayudar:



Observa que las probabilidades de las ramas de la segunda columna son probabilidades condicionales dados los resultados del primer intento.

Y las probabilidades de la tercera columna son probabilidades condicionales del tercer intento, dados los resultados de los dos primeros intentos.

Las probabilidades de la última columna son las probabilidades conjuntas de los tres resultados.

Por ejemplo, la probabilidad de S en el primer intento y N en el segundo, está dado por  $P(S_1 \text{ y } N_2) = P(N_2 | S_1) \times P(S_1)$  = por la regla multiplicativa.

A su vez, la probabilidad de S en el primero, N en el segundo y S en el tercero, aplicando nuevamente la regla multiplicativa, es igual a

$$P(S_1 \text{ y } N_2 \text{ y } S_3) = P[(S_1 \text{ y } N_2) \text{ y } S_3] = P(S_3 | S_1 \text{ y } N_2) \times P(S_1 \text{ y } N_2).$$

Pero, por el resultado anterior, podemos reemplazar  $P(S_1 \text{ y } N_2)$ :

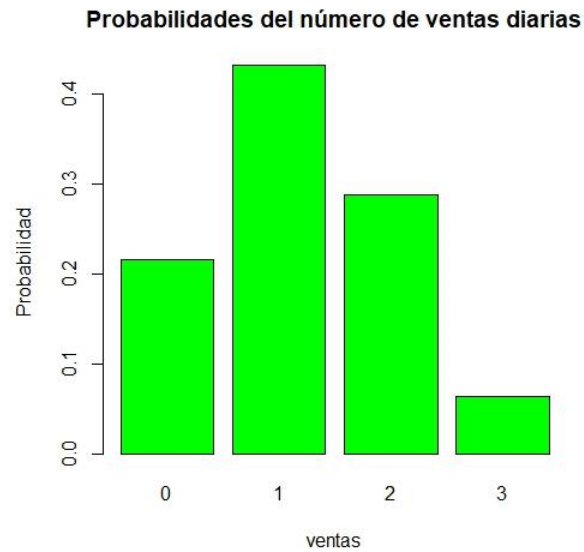
$$\begin{aligned} P(S_1 \text{ y } N_2 \text{ y } S_3) &= P(S_3 | S_1 \text{ y } N_2) \times P(N_2 | S_1) \times P(S_1) = \\ &= 0,4 \times 0,6 \times 0,4 = 0,096. \end{aligned}$$

Lo análogo aplica al cálculo de cada una de las probabilidades de la última columna.

La tabla que siguiente resume los valores de la variable aleatoria y sus probabilidades:

| Ventas | Probabilidad |
|--------|--------------|
| 0      | 0,216        |
| 1      | 0,432        |
| 2      | 0,288        |
| 3      | 0,064        |
| Suma   | 1,000        |

La figura siguiente es un gráfico de barras que representa las probabilidades.



Puedes ver que las ventas extremas, 0 o 3, concentran menos probabilidad que las ventas intermedias, 1 o 2.

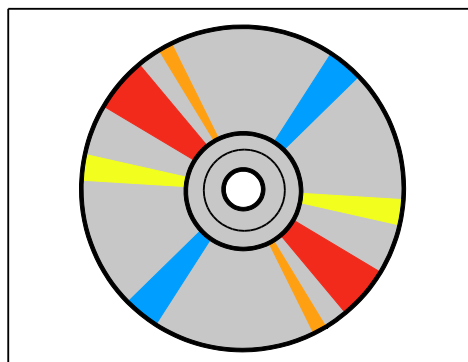
---

### **EJEMPLO 2.12**

---

*Muestreo de aceptación de lotes de lectores de CD.*

Se reciben lectores de CD en grandes lotes.



Sea **p** la probabilidad de hallar un lector defectuoso. Asumiremos que **p**=0,05.

Un posible plan de **muestreo de aceptación** de lotes consiste en el siguiente procedimiento:

Se extrae una muestra al azar de 2 lectores y se prueban (con independencia entre los resultados de los dos: el resultado de una prueba no afecta la probabilidad de que el otro sea defectuoso).

Si los dos cumplen las especificaciones, se acepta todo el lote completo.

Si los dos no cumplen las especificaciones (son defectuosos), se rechaza el lote.

Si uno es defectuoso, se extrae una segunda muestra de 2 lectores y se someten a prueba.

Si en la segunda muestra, ambos cumplen las especificaciones, se acepta el lote completo.

Si uno o los dos de la segunda muestra son defectuosos, se rechaza el lote.

- a) Haz una lista de todos los resultados posibles, con sus respectivas probabilidades.
- b) Construye un gráfico que muestre todas las posibilidades, e indica en cada una, el número de defectuosos. Agrega los valores de las probabilidades de cada resultado posible.
- c) Construye una tabla que muestre los posibles números de defectuosos totales y sus probabilidades. En cada caso indica si se acepta o se rechaza el lote.
- d) ¿Cuáles son las probabilidades de aceptar y de rechazar el lote?

Resolución:

- a) Sea **X** el número total de defectuosos en la muestra.

Para el primer muestreo hay tres posibilidades, 0 defectuosos, 1 defectuoso, o 2 defectuosos.



La probabilidad de que uno cualquiera sea defectuoso es  $p = 0,05$  y la probabilidad de que no sea defectuoso es  $1 - p = 0,95$ .

Como son dos lectores de CD, entonces, por la independencia, la probabilidad conjunta de que haya cero defectuosos es el producto

$$(1-p)^2 = 0,95^2 = 0,90250$$

total de defectuosos 0 (caso 1)

La probabilidad de 1 defectuoso es  $2 \times p \times (1 - p)$

Va multiplicado por 2 porque el defectuoso puede ser el primero o bien el segundo.

Pero en este caso debemos obtener una segunda muestra. En esta segunda muestra puede salir 0, 1 o 2 defectuosos, con lo que el total de defectuosos sería 1, 2 o 3, respectivamente.

Las probabilidades respectivas de 0, 1 o 2 en la segunda muestra son:

$$(1-p)^2 = 0,95^2$$

$$2 \times p \times (1 - p) = 2 \times 0.05 \times 0.95$$

$$p^2 = 0.05^2$$

Como en la primera muestra ya obtuvimos un defectuoso, con probabilidad  $2 \times (1 - p) \times p$ . Debemos multiplicar las tres probabilidades anteriores por este factor para obtener la probabilidad conjunta.

Esto es debido a **la regla multiplicativa** que relaciona probabilidades conjuntas, con probabilidades condicionales y probabilidades incondicionales. Los resultados son:

$$2 \times (1 - p) \times p \times (1-p)^2 = 2 \times 0,05 \times 0,95^3 = 0,08574$$

total de defectuosos 1 (caso2)

$$2 \times (1 - p) \times p \times 2 \times p \times (1 - p) = 4 \times 0,05^2 \times 0,95^2 = 0,00903$$

total de defectuosos 2 (caso 3)

$$2 \times (1 - p) \times p \times p^2 = 2 \times 0.05^3 \times 0.95 = 0,00024$$

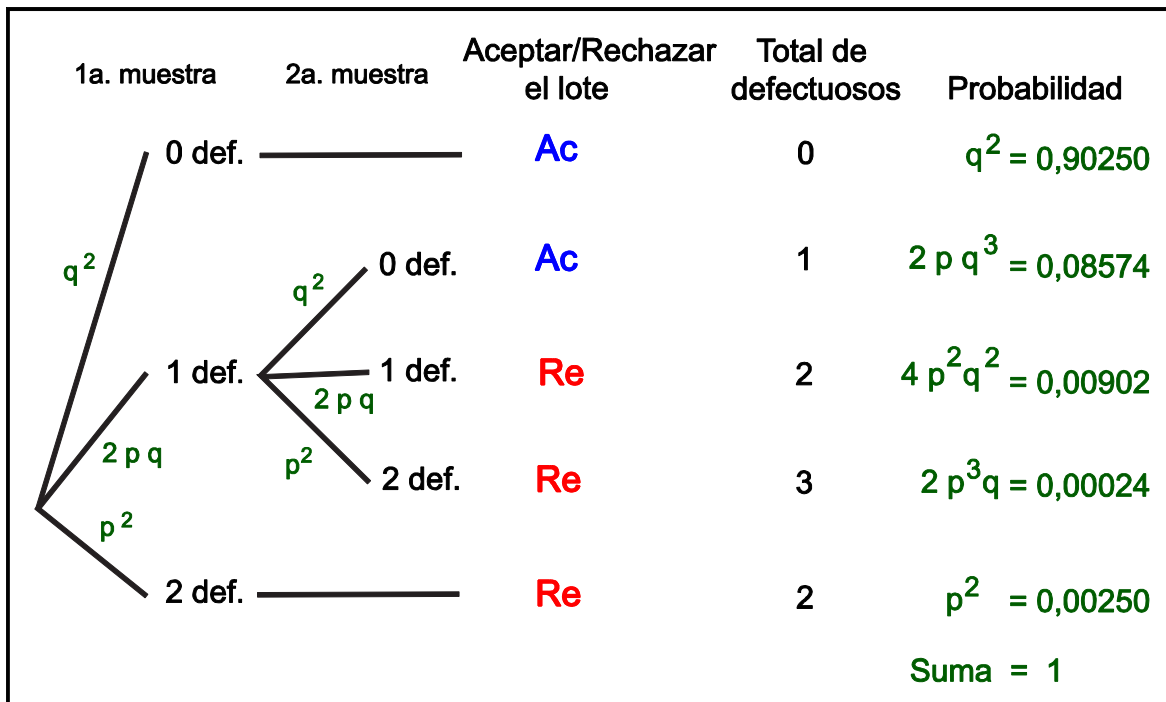
total de defectuosos 3 (caso 4)

Finalmente, si hay 2 defectuosos en la primera muestra, la probabilidad es

$$p^2 = 0,05^2 = 0,00250$$

total de defectuosos 2 (caso 5)

b) El gráfico siguiente ilustra estos 5 casos con el cálculo de sus probabilidades:



c) Ahora construimos otra tabla, que muestra los valores posibles de la variable aleatoria  $X$ , *total de defectuosos* y sus respectivas probabilidades.

Para la probabilidad de 2 defectuosos, observamos que se debe sumar las probabilidades de los dos casos que resulten en 2 defectuosos, por ser ambos mutuamente excluyentes:

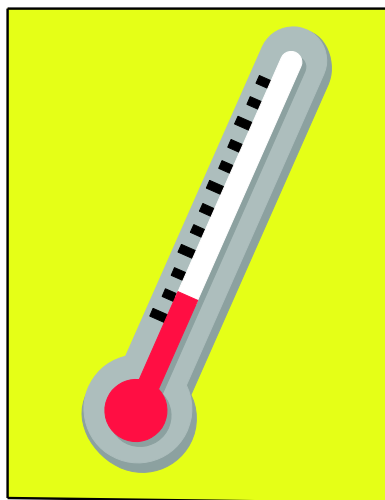
| Total defectuosos | Probabilidad                  | Aceptar/Rech. |
|-------------------|-------------------------------|---------------|
| 0                 | $(1-p)^2 = 0,90250$           | A             |
| 1                 | $2p^3(1-p) = 0,08574$         | A             |
| 2                 | $4p^2(1-p)^2 + p^2 = 0,01152$ | R             |
| 3                 | $2p^3(1-p) = 0,00024$         | R             |
| Suma              | 1                             | --            |

d) Sumando las respectivas probabilidades, resulta que la probabilidad de aceptar el lote es  $0,90250 + 0,08574 = 0,98824$  y la probabilidad de rechazarlos es  $0,01152 + 0,00024 = 0,01176$ .

### EJEMPLO 2.13

*Temperatura de un procesador de computador.*

Sea  $X$  la variable aleatoria temperatura, en grados C, del procesador de un computador de un determinado modelo, durante su operación.



Supongamos que el rango en que fluctúa es  $[10,35]$  °C, y su función de probabilidad es  $f(x)=0,04$  si  $X$  toma los valores 10, 11, 12, ..., hasta 34.

- a) Verifica que  $f(x)$  es una función de probabilidad.
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un instante dado la temperatura sea mayor que 25°C?

Resolución:

- a) Observamos que la variable aleatoria  $X$  tiene como espacio muestral el conjunto de los valores 10, 11, 12, ..., hasta 34, por lo tanto es discreta.

Debemos verificar que  $f(x)$  es positiva y que la suma de sus valores a través de todo el espacio muestral es 1:

Efectivamente,  $f(x) = 0,04$  para todo valor de  $X$ , luego es positiva.

Y la suma de los valores de  $f(x)$  es  $f(10) + f(11) + f(12) + \dots$ , hasta  $f(34)$ , son 25 valores, todos iguales a 0,04.

Entonces la suma de los valores de  $f(x)$  es  $25 \times 0,04 = 1$

- b)  $\text{Prob}(X > 25) = f(26) + f(27) + f(28) + \dots + f(34) = 9 \times 0,04 = 0,36$

---

## EJEMPLO 2.14

*Accidentes laborales.*

El jefe de personal de una fábrica está estudiando el número de accidentes laborales que se producen en un período de un año.

Definió la variable aleatoria  $X$ , *número de accidentes laborales en un año.*



En base a información registrada en los últimos años estimó la función de probabilidad asociada a ella, como se muestra en la tabla siguiente:

| Número de accidentes | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Probabilidad         | 0,22 | 0,26 | 0,15 | 0,14 | 0,09 | 0,09 | 0,05 |

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un año haya más de 3 accidentes laborales?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que en un año haya a lo más 4 accidentes laborales?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que en un año haya entre 2 y 5 accidentes laborales, inclusive?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que haya algún accidente laboral en un año?

Resolución:

a) Más de 3 significa 4, 5, o 6 accidentes. La probabilidad es

$$f(4) + f(5) + f(6) = 0,09 + 0,09 + 0,05 = 0,23.$$

b) A lo más 4 significa 0, 1, 2, 3, o 4 accidentes. La probabilidad es

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0,22 + 0,26 + 0,15 + 0,14 + 0,09 = 0,86.$$

c) Entre 2 y 5 inclusive es equivalente a 2, 3, 4, o 5 accidentes.

La probabilidad es  $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 0,15 + 0,14 + 0,09 + 0,09 = 0,47$ .

d) Que haya accidentes es equivalente a  $1 - f(0) = 1 - 0,22 = 0,78$

---

### EJEMPLO 2.15

---

*Comité de trabajadores.*



De 120 trabajadores de una empresa, 15 son ingenieros informáticos.

De entre los 120 se escogen tres trabajadores al azar, sin remplazo, para integrar un comité.

Sea **X** la variable aleatoria *número de ingenieros informáticos* en la muestra.

¿Cuál es la función de probabilidad de **X**?

Resolución:

Consideremos primero el caso **X**=0.

Si no hay ingenieros en el comité, quiere decir que cada uno de los que se eligió es de los no ingenieros.

Para la primera elección hay 105 no ingenieros, de un total de 120.

Luego la probabilidad de elegir primero un no ingeniero, por el modelo de Laplace, es  $105/120 = 0,8750$ .

Para el segundo, también no ingeniero, quedan 104, de un total de 119 (ya se eligió un no ingeniero, queda descartado).

Luego la probabilidad es  $104/119 = 0,8739$ .

De forma análoga, para el tercero, también no ingeniero, hay 103 de un total de 118. La probabilidad es  $103/118 = 0,8729$ .

Otra vez se deben multiplicar las tres probabilidades para obtener la probabilidad de los tres eventos simultáneamente.

$$\text{Prob}(X = 0) = (105/120)(104/119)(103/118) = 0,6675$$

En el caso de  $X = 1$ , supongamos que los primeros dos seleccionados son no ingenieros y el tercero es ingeniero. Las probabilidades son  $105/120$ ,  $104/119$  y  $15/118$ .

Sin embargo, podría ser el segundo seleccionado el ingeniero, o bien el tercero. Y todas estas posibilidades son mutuamente excluyentes, por lo tanto, la probabilidad total es 3 veces el producto

$$(105/120)(104/119)(15/118).$$

Es decir, la probabilidad de un ingeniero es

$$\text{Prob}(X = 1) = 3(105/120)(104/119)(15/118) = 0,2916$$

Usando el mismo razonamiento, la probabilidad de dos ingenieros es

$$\text{Prob}(X = 2) = 3(105/120)(15/119)(14/118) = 0,0393$$

Y la probabilidad de tres ingenieros es

$$\text{Prob}(X = 3) = (15/120)(14/119)(13/118) = 0,0016$$

La siguiente es la tabla de probabilidad de la variable aleatoria *número de ingenieros*:

| Número de ingenieros<br>en el comité | Probabilidad |
|--------------------------------------|--------------|
| 0                                    | 0,6675       |
| 1                                    | 0,2916       |
| 2                                    | 0,0393       |
| 3                                    | 0,0016       |
| Suma                                 | 1            |

El gráfico siguiente ayuda a explicar lo que hicimos. S indica sí (ingeniero) y N indica no. Se muestran las probabilidades incondicionales del primer seleccionado, las probabilidades condicionales del segundo seleccionado, dado el primero, y las probabilidades condicionales del tercero, dados los dos primeros.

En la última columna aparecen las probabilidades conjuntas, que se obtienen multiplicando las anteriores, de acuerdo a la extensión de la **regla multiplicativa**, que vimos en el Ejemplo 2.11.

Las expresiones de estos productos, como fórmulas, son las siguientes, donde el subíndice indica si es primero, segundo o tercer seleccionado:

$$P(S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } S_3) = P(S_3 \mid S_1 \text{ y } S_2) \times P(S_2 \mid S_1) \times P(S_1)$$

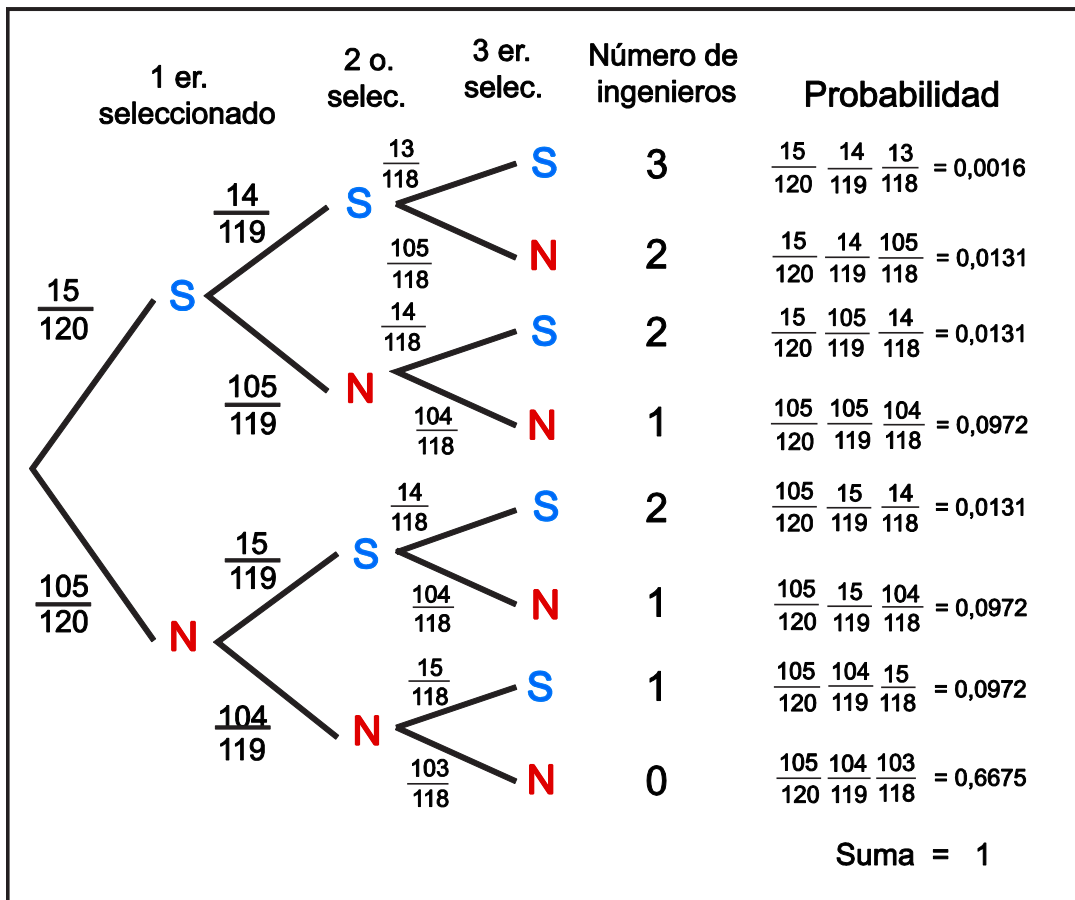
$$P(S_1 \text{ y } S_2 \text{ y } N_3) = P(N_3 \mid S_1 \text{ y } S_2) \times P(S_2 \mid S_1) \times P(S_1)$$

$$P(S_1 \text{ y } N_2 \text{ y } S_3) = P(S_3 \mid S_1 \text{ y } N_2) \times P(N_2 \mid S_1) \times P(S_1)$$

$$P(S_1 \text{ y } N_2 \text{ y } N_3) = P(N_3 \mid S_1 \text{ y } N_2) \times P(N_2 \mid S_1) \times P(S_1)$$

etc.





## EJEMPLO 2.16

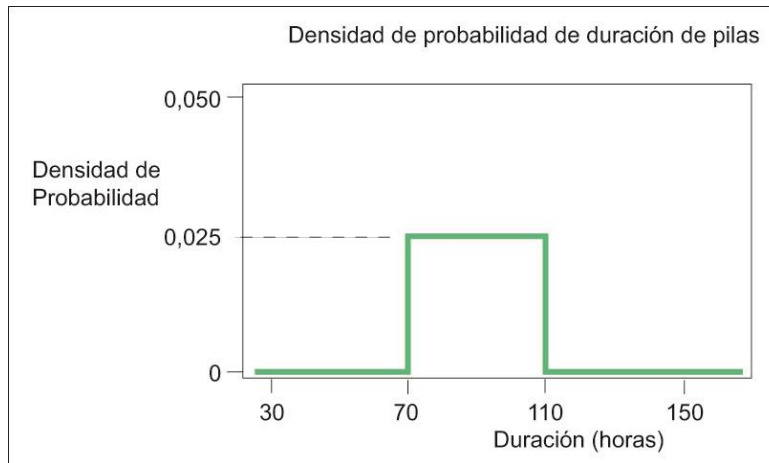
*Tiempo de vida de pilas.*

El tiempo de vida, en horas, de un tipo de pila es una variable aleatoria continua cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = 1/40 \text{ si } 70 \leq x \leq 110$$

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0$$

La figura siguiente muestra el gráfico de esta función



La probabilidad de un intervalo está dada por el área bajo la curva, en el intervalo.

Sea **X** la variable aleatoria *duración de una pila, en horas*.

Calcula las siguientes probabilidades:

- a)  $P(75 < X < 100)$
- b)  $P(X < 80)$
- c)  $P(X \geq 95)$
- d)  $P(40 \leq X < 60)$

Resolución:

**X** es una variable aleatoria continua. Por lo tanto, en todos los casos la probabilidad está dada por el área bajo la curva.

Si **X** < 70 o si  $X > 110$ , el área es cero.

Si **X** está entre 70 y 110, el área es simplemente el área de un rectángulo de altura  $1/40$ .

No debes olvidar que en una variable aleatoria continua, la probabilidad de un punto es cero. Por lo tanto, *menor y menor o igual* son equivalentes. También *mayor y mayor o igual*.

a)  $P(75 < X < 100) = (100 - 75) / 40 = 0,625$

b)  $P(X < 80) = (80 - 70) / 40 = 0,25$

c)  $P(X \geq 95) = (110 - 95) / 40 = 0,375$

d)  $P(40 \leq X < 60) = 0$ , pues el intervalo entre 40 y 60 está totalmente bajo 70.

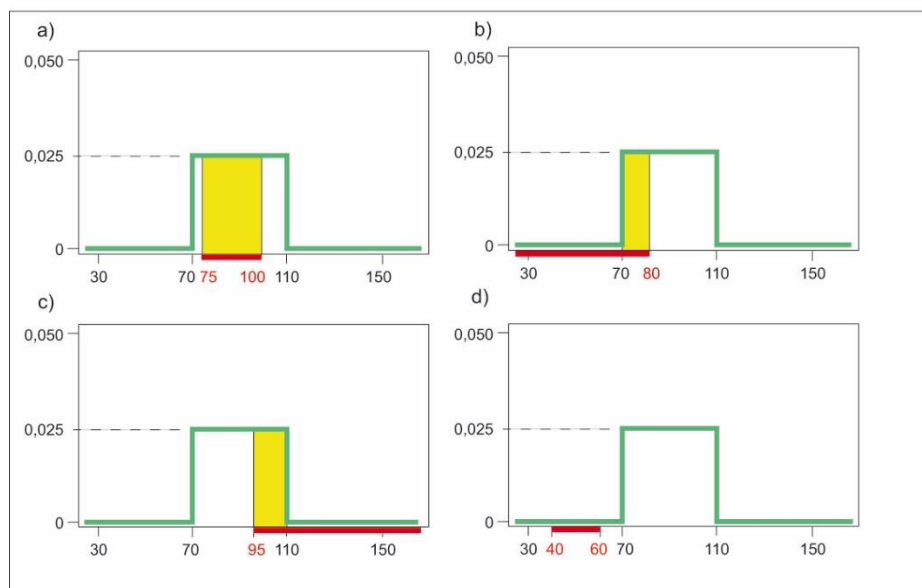
Resumiendo, la probabilidad de que una de estas pilas dure entre 75 y 100 horas es 0,625.

La probabilidad de que una de estas pilas dure menos de 80 horas es 0,25.

La probabilidad de que una pila dure más de 95 horas es 0,375.

La probabilidad de que dure entre 40 y 60 horas es cero.

La siguiente figura ilustra las cuatro probabilidades obtenidas:



Una variable aleatoria como la que aparece en este ejemplo, se denomina **uniforme**, en este caso con **parámetros** 70 y 110.

## EJERCICIOS

2.1) Un importador de equipos computacionales indica que la demanda semanal de computadores personales fluctúa de 1 a 7. Lista los elementos del espacio muestral.

2.2) Se lanzan dos dados. El espacio de los resultados es equiprobable.

¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor que 5?

(Ayuda: construye una tabla en que en el margen izquierdo pones los posibles valores de un dado, y en el margen superior los resultados del segundo. En el centro, las sumas)

2.3) Se lanzan cuatro dados. El espacio de los resultados posibles es equiprobable.

¿Cuál es la probabilidad de que el número mayor, sea 3?

(Ayuda: para que una posibilidad sea favorable, un dado debe ser igual a 3 y los tres restantes pueden ser 1, 2 o 3. Son  $3^3$  posibilidades. El total de posibilidades es  $6^4$  ).

2.4) Se lanza una moneda cargada, de modo que  $\text{Prob}(\text{cara}) = 0,75$ , hasta que se completan dos caras o hasta que se completen 3 lanzamientos.

a) Encuentra el espacio muestral de todos los resultados posibles. ¿Es finito? ¿Es equiprobable?

b) Considera la variable aleatoria *número de caras* asociada a este experimento. Encuentra el espacio muestral y la función de probabilidad.

c) Considera la variable aleatoria *número de sellos* asociada a este experimento. Encuentra el espacio muestral y la función de probabilidad.

d) Considera la variable aleatoria *número total de lanzamientos (caras o sellos)* asociada a este experimento. Encuentra el espacio muestral y la función de probabilidad.

En cada caso representa las probabilidades en gráficos de barra.

(Ayuda: construye un diagrama de árbol)

2.5) Un experimento consiste en ir al estadio el próximo domingo. Lista al menos 10 espacios muestrales asociados con este experimento.

2.6) Un investigador verifica que en cierta región el 80% de los trabajadores ha recibido un bono.

El 50 % recibió el bono y además un incentivo de producción.

Además, el investigador verifica que el 90 % recibió al menos uno de los dos beneficios.

Se selecciona al azar uno de los trabajadores de la región. Encuentra la probabilidad que:

- a) haya recibido el incentivo de producción,
- b) sólo haya recibido el bono,
- c) no haya recibido ningún beneficio.
- d) Sea  $X$  la variable aleatoria *número de beneficios recibidos*. Definiendo las probabilidades en base a los porcentajes de los eventos, encuentra la función de probabilidad de  $X$ . Construye un gráfico de barras que ilustre la función de probabilidad.

(Ayuda: utiliza un diagrama de Venn).

2.7) De los primeros cuatro números naturales se seleccionan tres al azar, uno después de otro, sin reemplazo, y se calcula la suma de los tres seleccionados.

- a) ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Es equiprobable?
- b) ¿Cuál es la función de probabilidad? Haz un gráfico de barras que ilustre la función de probabilidad.

(Ayuda: Los tres números posibles de ser seleccionados son 123, 124, 134, y 234)

2.8) Hay 16 jóvenes preseleccionados para participar en un concurso de debates.

Son 9 mujeres y 7 varones. Pero sólo podrán participar 3.

Se seleccionan 3 al azar. Interesa el número de mujeres seleccionadas.

a) ¿Cuál es la variable aleatoria de interés y cuál es su espacio muestral?

¿Cuál es la probabilidad de que entre los seleccionados

b) no haya mujeres,

c) haya una mujer,

d) haya dos mujeres,

e) haya tres mujeres?

f) Haz un gráfico de barras que ilustre la función de probabilidad de la variable aleatoria definida en a).

(Ayuda: Construye un diagrama de árbol)

2.9) Para integrar una comisión negociadora hay 13 postulantes:

6 administrativos 4 auxiliares 3 profesionales.

De entre ellos se seleccionarán 2 al azar.

¿Cuál es la probabilidad de que en la comisión

a) no haya ningún administrativo?

b) haya 1 administrativo?

c) haya 2 administrativos?

d) haya 3 administrativos?

e) ¿Cuál es la variable aleatoria de interés y cuál es su espacio muestral?

f) Haz un gráfico de barras que ilustre la función de probabilidad de la variable aleatoria.

(Ayuda: Construye un diagrama de árbol)

2.10) Una caja contiene 2 bolas blancas y 2 bolas azules.

Se seleccionan bolas al azar, sin reposición, hasta que salgan todas las blancas.

- a) Se define la variable aleatoria *número de azules extraídas*. ¿Cuál es su función de probabilidad?
- b) Se define la variable aleatoria *número total de bolas extraídas*. ¿Cuál es su función de probabilidad? Compara con el resultados de la parte a). Haz un gráfico de barras que ilustre la función de probabilidad.

2.11) Una empresa tiene 3 hombres y 5 mujeres de entre las cuales se debe seleccionar 3 para un traslado.

La selección se hace al azar.

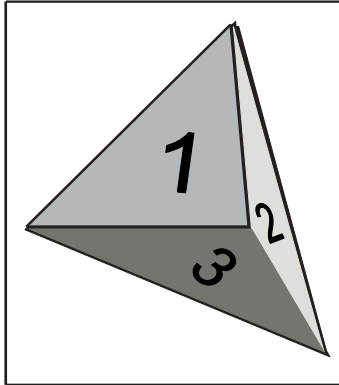
- a) ¿Cuál es la variable aleatoria de interés y cuál es su espacio muestral?

Encuentra:

- b)  $\text{Prob}(\text{ningún hombre seleccionado})$
- c)  $\text{Prob}(1 \text{ hombre seleccionado})$
- d)  $\text{Prob}(2 \text{ hombres seleccionados})$
- e)  $\text{Prob}(3 \text{ hombres seleccionados})$ .
- f) Haz un gráfico de barras de la función de probabilidad.

(Ayuda: Construye un diagrama de árbol)

2.12) Un dado tiene forma de pirámide con 4 caras iguales, como se muestra en la figura.



Las 4 caras exhiben los números 1, 2, 3, y 4.

Cada vez que se lanza, el número que queda debajo es el número ganador. Todas las caras tienen igual probabilidad de quedar debajo.

Se lanza el dado 2 veces. Se define la variable aleatoria *suma de los dos números ganadores*.

Enumera todos los resultados posibles y encuentra sus probabilidades. Construye un gráfico de barras que ilustre esta función de probabilidad.

(Ayuda: construye una tabla de 4 por 4, agregando una fila en el margen superior y una columna en el margen izquierdo. En el interior de la tabla pon todas las sumas posibles).

2.13) Un trompo tiene cinco números: 1, 2, 3, 4 y 5.

Se hace girar y cuando se detiene, el número ganador es el que queda en la parte superior (todos los números tienen igual probabilidad de quedar en la parte superior).

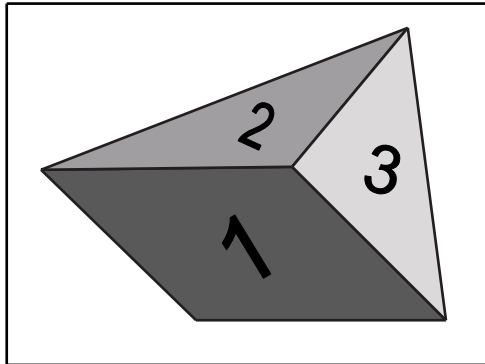
Se hace girar dos veces y se registra el valor absoluto de la diferencia de los dos números ganadores.

Define la variable aleatoria de interés, obtén su espacio muestral y calcula su función de probabilidad. Haz un gráfico de barras que ilustre la función de probabilidad.

(Ayuda: construye una tabla de 5 por 5).



2.14) Un dado tiene forma piramidal, pero con 5 caras, como se muestra en la figura, numeradas 1, 2, 3, 4, y 5.



Si se lanza el dado, el número ganador es el que sale hacia abajo.

Vamos a suponer que todos los números todos los números tienen igual probabilidad de ganar.

Se lanza el dado 2 veces. Se define la variable aleatoria *suma de los dos números ganadores*.

Enumera todos los resultados posibles y encuentra sus probabilidades.  
Construye un gráfico de barras que ilustre esta función de probabilidad.

(Ayuda: construye una tabla de 5 por 5)

2.15) Como el ejercicio 2.12), pero ahora se lanza el dado 3 veces.  
Considera la suma de los 3 números ganadores.

Enumera todos los resultados posibles y encuentra sus probabilidades.  
Construye un gráfico de barras que ilustre esta función de probabilidad.

(Ayuda: construye cuatro tablas de 4 filas por 4 columnas).

2.16) Una planta de hibisco muere (M) o sobrevive (S), cuando es sometido a un tipo de abono experimental.

El experimento se debe realizar primero con dos plantas.

Si ambas sobreviven o ambas mueren, no se continúa.

Si una sobrevive, se intervendrán dos más.

a) Haz una lista de los elementos del espacio muestral.

b) Supón que la probabilidad de que una planta sobreviva es 0,60 y la probabilidad de que muera es 0,40.

Considera la variable aleatoria *número de plantas que sobreviven*.

Encuentra su función de probabilidad.

(Ayuda: construye un diagrama de árbol)

2.17) En una zona geográfica particular, se ha detectado que hay un alarmante nivel de contaminación ambiental, debido a la presencia de material particulado en el aire.

Este material está formado por partículas de menos de 10 micrómetros de diámetro. Un micrómetro es la millonésima parte de un metro. Hay 1000 micrómetros en un milímetro.

Se usa un índice para medir el nivel de contaminación, definido como los microgramos por metro cúbico (mmc). Hay un millón de microgramos en un kilo.

El índice, medido en un instante dado, en esa zona geográfica, es una variable aleatoria continua.

Supongamos que su función de densidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{2500} x e^{-0,02x} \text{ si } x \geq 0$$

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0$$

donde **e** es un número *trascendente* (como lo es **pi**). **e** = 2,718282...

El gráfico siguiente muestra la función de densidad



Esta es una variable aleatoria continua, la probabilidad de un intervalo es el área bajo la curva en el intervalo correspondiente.

Dado que el cálculo del área bajo esta curva excede los alcances de este libro, daremos la tabla siguiente, que muestra las probabilidades de *algunos* intervalos, aproximados a 3 dígitos:

| Intervalo (mmc) | Probabilidad | Intervalo (mmc) | Probabilidad | Intervalo (mmc) | Probabilidad |
|-----------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|--------------|
| 0 a 50          | 0,264        | 200 a 250       | 0,051        | 400 a 450       | 0,002        |
| 50 a 100        | 0,330        | 250 a 300       | 0,023        | 450 a 500       | 0,001        |
| 100 a 150       | 0,207        | 300 a 350       | 0,010        | 500 a 550       | 0,000        |
| 150 a 200       | 0,108        | 350 a 400       | 0,004        | suma            | 1,000        |

Encuentra las probabilidades siguientes:

- a) que el índice sea menor o igual que 200 mmc,
- b) que el índice sea mayor que 350 mmc,
- c) que el índice esté entre 50 y 350 mmc.

Recuerda que la probabilidad en un valor puntual es cero, por ser ésta una variable aleatoria continua.

2.18) En un laboratorio se está haciendo una síntesis de dos reactivos para producir un compuesto.

La probabilidad de que se tenga éxito en un ensayo y se forme el compuesto es 0,3.

Se hará intentos hasta que en 2 de ellos se tenga éxito, o hasta que haya 3 fracasos.

Encuentra la función de probabilidad de cada una de las siguientes variables aleatorias:

- a) Número total de ensayos.
- b) Número de éxitos.
- c) Número de fracasos.

En cada caso haz un gráfico de barras que ilustre la función de probabilidad respectiva.

(Ayuda: construye un diagrama de árbol)

2.19) Refiérete al ejercicio 2.14 y observa la figura. Los 4 lados son triangulares, y la base es cuadrada. Les asignamos la misma probabilidad a cada uno de los 5 lados.

Repite el ejercicio completo, pero ahora suponiendo que es más probable que el dado caiga de costado. Asumiremos las siguientes probabilidades:

1 con probabilidad  $2/14$ .

2, 3, 4 y 5 cada uno con probabilidad  $3/14$ .

(Ayuda: el par de 1's tiene un valor de probabilidad, todos los pares que contengan un sólo 1 tiene otro valor, mayor, y todos los pares que no contengan el 1 tienen un tercer valor, mayor que los otros).

2.20) Una caja contiene 2 monedas de \$50, 1 moneda de \$100 y 1 de \$500. Se seleccionan monedas al azar, sin reposición, hasta que salgan todas las de \$50.

a) Definimos la variable aleatoria *número de monedas de \$100 extraídas*. Encuentra su función de probabilidad. Observa que la variable aleatoria *número de monedas de \$500 extraídas* tiene la misma función de probabilidad. ¿Por qué?

b) Definimos la variable aleatoria *número total de monedas extraídas*. Encuentra su función de probabilidad.

---

### 3 - El promedio muestral y el promedio poblacional

*Una medida del centro de la información.*

#### **MOTIVACIÓN**

---

Recordaremos que el promedio de los elementos de una **muestra**, o **promedio muestral**, es igual a la suma de ellos dividida por la cantidad de números en la muestra.

Ahora definiremos el promedio de una **población**, o **promedio poblacional**.

Es algo parecido. Pero dijimos antes que las poblaciones están determinadas por una **variable aleatoria**, cuyos valores, todos numéricos, aparecerán más veces en la medida que su probabilidad es mayor, si se realiza repetidas veces el experimento asociado a esa variable aleatoria.

Por lo que, al promediar los valores de la variable aleatoria, es lógico que le asignemos mayor peso a los valores con mayor probabilidad.

---

Se define el **promedio poblacional** o **media poblacional**, o **valor esperado** de una variable aleatoria, como el promedio de los valores de la variable aleatoria, ponderados por su probabilidad.

Tal como el promedio muestral es una medida del centro de los datos de una muestra, el **valor esperado** o **media poblacional** es una medida de centro, pero de toda la población.

Recordemos que una **variable aleatoria** asociada a un experimento aleatorio es una **función** que asigna a cada elemento del espacio muestral, un número real.

Tiene sentido que se ponderen los valores de esos números reales, por sus probabilidades, pues aquellos que tiene mayor probabilidad aparecerán con

más frecuencia cuando se repite el experimento, y aquellos con menor probabilidad resultarán con menor frecuencia.

Así, si **X** es una variable aleatoria con función de probabilidad  $f(x)$ ,

el **valor esperado** de **X** es

$$E(X) = \sum xf(x)$$

La suma es a través de todos los valores de la variable aleatoria.

Observa que, para que sea un promedio ponderado por las probabilidades  $f(x)$ , debería estar dividido por la suma de ellos. Pero sabemos que esa suma es igual a 1.

La unidad de medida del valor esperado es la misma de la variable aleatoria **X**. Por ejemplo, si las observaciones son metros, el valor esperado también se mide en metros.

Otro símbolo usado para representar el valor esperado es la letra griega  $\mu$  (mu).

El valor esperado es un concepto más complicado de asimilar que la media muestral, pues está asociado a una población, que es algo más abstracto que una muestra. La muestra no es más que un conjunto de datos.

### EJEMPLO 3.1

---

*Naves que arriban a un puerto.*



El número de naves que arriban a un puerto en una semana es una variable aleatoria que llamaremos **X**, cuya función de probabilidad  $f(x)$  está dada por la tabla siguiente, en cuya tercera fila hemos agregado los valores de los respectivos productos  $xf(x)$ :

| x       | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | Sumas |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $f(x)$  | 0,02 | 0,15 | 0,16 | 0,18 | 0,11 | 0,08 | 0,06 | 0,04 | 0,20 | 1     |
| $xf(x)$ | 0,08 | 0,75 | 0,96 | 1,26 | 0,88 | 0,72 | 0,60 | 0,44 | 0,24 | 8,09  |

Estos valores de probabilidad se obtuvieron por la experiencia pasada, y corresponden a las frecuencias relativas de los datos observados a lo largo del tiempo.

Las frecuencias relativas son las frecuencias, divididas por la suma total. Entonces el valor esperado o media poblacional es  $\mu = 8,09$  naves, la suma de todos los productos  $xf(x)$ .

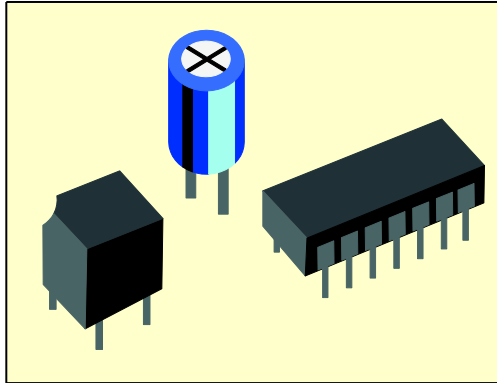
Significa que, en promedio, a largo plazo, llegan 8,09 naves por semana. Como es un promedio, no tiene por qué ser entero, aunque nunca van a arribar 8,09 naves; tiene que ser un entero.

### EJEMPLO 3.2

*Proveedor de componentes electrónicos.*

Un fabricante de artículos electrónicos puede adquirir una partida de componentes, en cajas de 50 unidades, a uno de tres posibles proveedores, A, B y C.





Por inspecciones previas se determinaron las siguientes funciones de probabilidad por proveedor, para la cantidad de defectuosos en cada caja:

| Cantidad de defectuosos                  | Prov. | 0   | 1   | 2   | 3   | 4    | 5    | Sumas |
|------------------------------------------|-------|-----|-----|-----|-----|------|------|-------|
| Probabilidades $f(x)$<br>según proveedor | A     | 0   | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,05 | 0,05 | 1     |
|                                          | B     | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,1  | 0    | 1     |
|                                          | C     | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0    | 0    | 1     |

Con el propósito de minimizar el número esperado de componentes defectuosos, ¿qué proveedor le sugerirías al fabricante?

Se debe calcular los valores esperados de defectuosos  $\mu = \sum xf(x)$

para cada uno de los proveedores.

La tabla siguiente muestra los productos  $x f(x)$  y las sumas por proveedor.

| Cantidad de defectuosos              |   | 0 | 1   | 2   | 3   | 4   | 5    | Suma |
|--------------------------------------|---|---|-----|-----|-----|-----|------|------|
| Productos $xf(x)$<br>según proveedor | A | 0 | 0,1 | 0,6 | 1,5 | 0,2 | 0,25 | 2,65 |
|                                      | B | 0 | 0,2 | 0,6 | 0,9 | 0,4 | 0    | 2,1  |
|                                      | C | 0 | 0,4 | 0,6 | 0,6 | 0   | 0    | 1,6  |

Los valores esperados del número de defectuosos de los proveedores A, B y C, son, respectivamente, 2,65 ítems; 2,1 ítems; y 1,6 ítems.

Por lo tanto, el proveedor al que más conviene comprarle es C, mientras que A es el menos conveniente.

---

### Propiedades del promedio poblacional

Tenemos algunas propiedades básicas relativas al promedio poblacional de las variables aleatorias:

Propiedad 1. Supongamos que hay dos variables aleatorias, **X** e **Y**, con promedios poblacionales respectivos  $\mu_X$  y  $\mu_Y$ .

Consideremos la suma de las variables aleatorias, **X + Y**, que es una nueva variable aleatoria.

Entonces el promedio poblacional de la suma es  $\mu_X + \mu_Y$ .

Propiedad 2. Ahora consideremos la diferencia entre las variables aleatorias, **X - Y**.

El promedio poblacional de la diferencia es la diferencia de los promedios,  $\mu_X - \mu_Y$ . Tanto la Propiedad 1 como la 2, no requiere que X e Y sean independientes.

Propiedad 3. Sea k una constante.

**kX** es una nueva variable aleatoria, formada por el producto de la constante k por la variable aleatoria **X**.

Entonces el promedio de **k X** es k veces el promedio de **X**, es decir,  $k\mu_X$ .

### **EJEMPLO 3.3**

---

*Promedio de la suma de dos variables aleatorias.*

Sea **X** la variable aleatoria *valor del kilo de plátanos* y sea **Y** la variable aleatoria *valor del kilo de manzanas*.

Ambas son variables aleatorias, porque los valores cambian de un local a otro.

Supongamos que el valor promedio del kilo de plátanos, a través de todos los locales, es  $\mu_X = 1500$  pesos, y que el valor promedio del kilo de manzanas es  $\mu_Y = 1900$  pesos.

Necesito comprar 2 kilos de papas y 3 kilos de manzanas.

Combinando las propiedades 1 y 3, se tiene que el promedio poblacional del total de lo que tengo que pagar es la variable aleatoria  **$2X + 3Y$** .

Reemplazando los valores numéricos, el total de lo que hay que pagar es

$$2\mu_X + 3\mu_Y = 2 \times 1500 + 3 \times 1900 = 3000 + 5700 = 8700 \text{ pesos.}$$

---

### EJEMPLO 3.4

---

*Comparación de ventas de pan en dos locales.*



Se registran los ingresos por venta semanal de pan en los dos locales durante 100 semanas.

Los valores obtenidos se expresaron en cientos de miles de pesos, y se aproximaron al entero más cercano.

Resultó que la venta semanal mínima es 3 (300 mil pesos) y la máxima es 8 (800 mil pesos).

Con los datos obtenidos, se calcularon las frecuencias relativas que se usaron para estimar las probabilidades.

Por ejemplo, el número de semanas en que las ventas aproximadas del local 2 fueron 5 (500 mil pesos) es 22, del total de 100.

Entonces la frecuencia relativa es  $22/100 = 0,22$ .

Las probabilidades obtenidas de esta forma están dadas en la siguiente tabla:

| Ventas (Cientos de miles de pesos) | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | Suma |
|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Probabilidad local 1 $f_1(x)$      | 0,08 | 0,18 | 0,34 | 0,22 | 0,16 | 0,02 | 1    |
| Probabilidad local 2 $f_2(x)$      | 0,02 | 0,15 | 0,22 | 0,26 | 0,22 | 0,13 | 1    |

Encuentra el valor esperado de las ventas semanales en ambos locales y compáralos.

Resolución:

Sea **X** la venta semanal en el local 1, e **Y** la venta semanal en el local 2, en cientos de miles de pesos.

La tabla siguiente contiene el producto  $x f_1(x)$  y el producto  $y f_2(y)$ , así como las sumas:

| Ventas x   | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | Sumas |
|------------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $x f_1(x)$ | 0,24 | 0,72 | 1,70 | 1,32 | 1,12 | 0,16 | 5,26  |
| $y f_2(y)$ | 0,06 | 0,60 | 1,10 | 1,56 | 1,54 | 1,04 | 5,90  |

Los valores esperados de ventas semanales, son

local 1: 5,26 es decir 526.000 pesos;

local 2: 5,90 es decir 590.000 pesos.

Por lo tanto, el local 2 vende, en promedio, 64.000 pesos más que el local 1.

Esto representa un  $100 \times 64.000 / 526.000 = 10,84 \%$  más.

---

### EJEMPLO 3.5

---

*Fallas en un sistema de internet.*

La tabla siguiente contiene las probabilidades de que un sistema de internet público tenga fallas en un mes cualquiera:

|              |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Fallas       | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | Suma |
| Probabilidad | 0,18 | 0,24 | 0,22 | 0,18 | 0,13 | 0,04 | 0,01 | 1    |

Encuentra el valor esperado de esta variable aleatoria.

Resolución:

Sea **X** la variable aleatoria *número de fallas por mes*.

La tabla, entonces, contiene los valores de **X**, y sus probabilidades, que denominaremos  $f(x)$ . Constituyen la función de probabilidad.

Ahora agregamos una fila a la tabla, con los productos  $x f(x)$ :

|          |   |      |      |      |      |      |      |
|----------|---|------|------|------|------|------|------|
| $x f(x)$ | 0 | 0,24 | 0,44 | 0,54 | 0,52 | 0,20 | 0,06 |
|----------|---|------|------|------|------|------|------|

La suma de los valores es 2,00.

Luego el valor esperado es 2 fallas por mes.

---

### EJEMPLO 3.6

*Experimento con dos lanzamientos de monedas.*

Un experimento consiste en lo siguiente:

Se lanzan dos monedas y se cuenta el número de caras, que puede ser 0, 1 o 2.

Luego se lanzan tantas monedas como el número de caras en el primer lanzamiento.



Encuentra el valor esperado de la variable aleatoria *número total de caras*.

Resolución:

En el primer lanzamiento puede no salir ninguna cara, puede salir una o pueden salir dos.

La probabilidad de que no haya caras o que haya dos caras es  $1/4$  cada una. Pero la probabilidad de una cara es dos veces  $1/4$ , pues hay dos maneras que salga una cara: que la primera sea cara y la segunda sello, o que la segunda sea cara y la primera, sello.

Si en el primer lanzamiento no salen caras, no habrá otro lanzamiento, luego la probabilidad de cero caras es  $1/4$ .

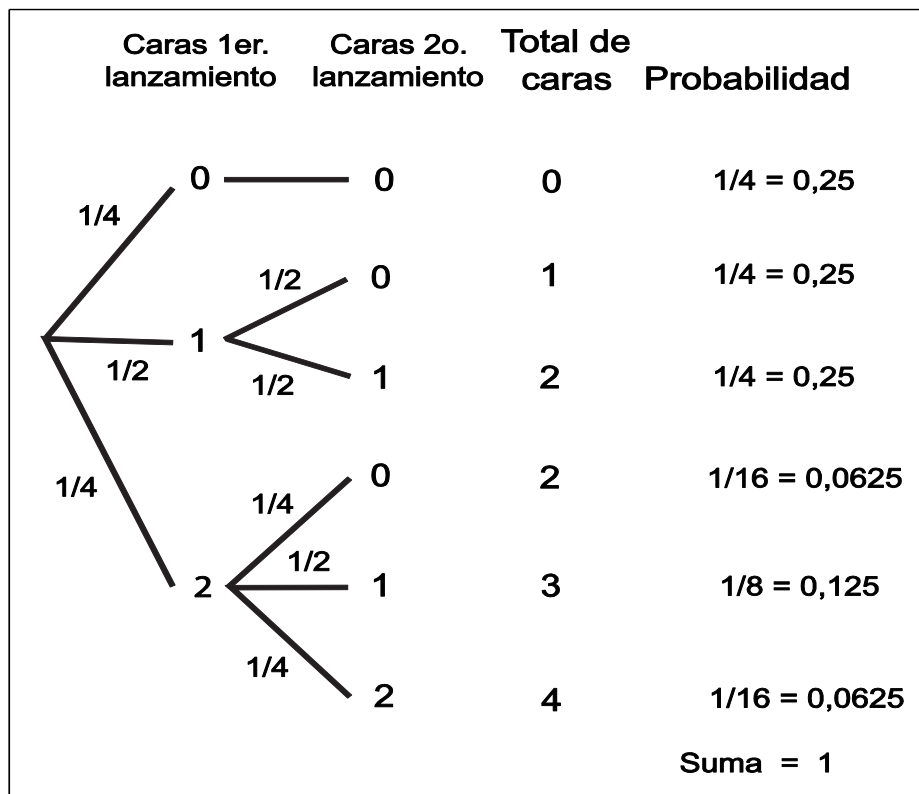
Si en primer lanzamiento sale una cara, en el segundo puede no salir ninguna cara o una cara, con probabilidad  $1/2$  en cada caso. Por lo tanto, la probabilidad conjunta, de que sale una cara en el primer lanzamiento y sello en el

segundo, es  $1/2 \times 1/2 = 1/4$ . Lo mismo si en el segundo lanzamiento sale sello.

Esto, debido a la regla multiplicativa que nos dice que las probabilidades conjuntas se obtienen multiplicando las probabilidades incondicionales del resultado del primer lanzamiento, por las probabilidades condicionales del resultado del segundo lanzamiento dado el del primero.

Si en el primero salen dos sellos, en el segundo puede salir 0, 1 o 2 caras, con probabilidades respectivas  $1/4$ ,  $1/2$  y  $1/4$ . Multiplicando por la probabilidad  $1/4$  de dos caras en el primero, resultan ser  $1/16$ ,  $1/8$  y  $1/16$ , respectivamente.

La figura siguiente muestra un diagrama de árbol con todas sus probabilidades, junto con los respectivos números de caras.



El único valor de la variable aleatoria en que hay dos posibilidades es el de 2 caras. La probabilidad de dos caras es la suma de las probabilidades de los dos casos en que resultan dos, por ser ambos mutuamente excluyentes:

$$4/16 + 1/16 = 5/16$$

Entonces, resumiendo, se obtiene la función de probabilidades definida en la siguiente tabla, que incluye los productos  $x f(x)$ :

| Número de caras $x$ | Probabilidad $f(x)$ | $x f(x)$      |
|---------------------|---------------------|---------------|
| 0                   | $1/4$               | 0             |
| 1                   | $1/4$               | $1/4$         |
| 2                   | $5/16$              | $10/16 = 5/8$ |
| 3                   | $1/8$               | $3/8$         |
| 4                   | $1/16$              | $4/16 = 1/4$  |
| Suma                | 1                   | $3/2$         |

El valor esperado del número de caras se obtiene mediante la suma de los productos  $x f(x)$  y es igual a  $3/2 = 1,5$  caras.

Se espera que, en promedio a través de muchas repeticiones del experimento, se obtenga 1,5 caras.

## EJERCICIOS

3.1) (Continuación Ejercicio 2.4 sobre el lanzamiento de una moneda cargada).

Encuentra los valores esperados de las tres variables aleatorias, definidas en b), c) y d), respectivamente. Representalos en los gráficos de barras. Interpreta cada uno.

3.2) (Continuación Ejercicio 2.6 sobre asignaciones a trabajadores). Encuentra el valor esperado del número de bonos recibidos. Interpreta.



3.3) (Continuación Ejercicio 2.7 sobre la selección al azar de tres números de entre los números 1, 2, 3 y 4, sin reemplazo, y el cálculo de la suma de los tres seleccionados).

Encuentra el valor esperado de la suma e interprétalo.

3.4) (Continuación Ejercicio 2.8 sobre la selección de 3 jóvenes para participar en un concurso de debates).

Encuentra el valor esperado del número de mujeres seleccionadas.

Represéntalo en el gráfico de barras. Interprétalo.

3.5) (Continuación Ejercicio 2.1 sobre la demanda semanal de computadores).

En base a la experiencia acumulada, el importador asigna las siguientes probabilidades a la variable aleatoria *número de computadores demandados*:

|              |   |      |      |      |      |
|--------------|---|------|------|------|------|
| Demanda      | 0 | 1    | 2    | 3    | 4    |
| Probabilidad | 0 | 0,07 | 0,08 | 0,19 | 0,34 |

|              |      |      |      |         |      |
|--------------|------|------|------|---------|------|
| Demanda      | 5    | 6    | 7    | 8 o más | Suma |
| Probabilidad | 0,25 | 0,05 | 0,02 | 0       | 1    |

Encuentra el valor esperado de la demanda semanal. Represéntalo en el gráfico. Interprétalo.

3.6) (Continuación Ejercicio 2.10 sobre la selección de una caja con bolas blancas y azules).

Encuentra el valor esperado del número de bolas azules extraídas.

Encuentra el valor esperado del total de bolas extraídas.

Representa ambos valores en los gráficos de barras respectivos. Interprétalos.

3.7) (Continuación Ejercicio 2.11 sobre la selección al azar de 3 trabajadores para un traslado).

Encuentra el valor esperado del número de hombres seleccionados.  
Representalo en el gráfico de barras. Interpretalo.

3.8) (Continuación Ejercicio 2.12 sobre 2 lanzamientos de un dado de 4 caras).

Encuentra el valor esperado de la suma de los resultados de 2 lanzamientos.  
Representalo en el gráfico de barras. Interpretalo.

3.9) (Continuación Ejercicio 2.13 sobre 2 giros de un trompo con 5 números).

Encuentra el valor esperado del valor absoluto de la diferencia. Representalo en el gráfico de barras.

3.10) (Continuación Ejercicio 2.14 sobre 2 lanzamientos de un dado de 5 caras).

Encuentra el valor esperados de la suma de los 2 números ganadores.  
Representalo en el gráfico de barras. Interpretalo.

3.11) (Continuación Ejercicio 2.15 sobre 3 lanzamientos de un dado de 4 caras).

Encuentra el valor esperado de la suma de los tres números. Representalo en el gráfico de barras.

3.12) (Continuación Ejercicio 2.16 sobre el abono aplicado a plantas de hibisco).

Encuentra el valor esperado del número de plantas que sobreviven.

3.13) (Continuación Ejercicio 2.18 sobre la síntesis de un compuesto).

Encuentra el valor esperado de cada una de las 3 variables aleatorias definidas en las partes a), b) y c).

En cada caso representalo en el gráfico de barras respectivo.

3.14) Se tienen 6 tarjetas en que se han escrito los números 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Las 6 tarjetas se mezclan y se eligen 2 al azar, una después de otra (sin reemplazo).

Encuentra el valor esperado del producto de los números en las dos tarjetas seleccionadas.

3.15) Un experimento metalúrgico consiste en tres ensayos sobre metales diferentes. La teoría dice que las probabilidades que estos ensayos resulten exitosos son, respectivamente: 0,4 el primero, 0,7 el segundo y 0,2 el tercero.

- a) Describe el espacio muestral del experimento.
- b) Describe una variable aleatoria asociada a este experimento.
- c) Obtén la función de probabilidad asociada a esta variable aleatoria.
- d) Obtén el valor esperado de la variable aleatoria e interprétala.

3.16) (Continuación Ejercicio 2.19 sobre 2 lanzamientos de un dado de 5 caras no equiprobables).

Encuentra el valor esperado de la suma de los dos números ganadores. Representalo en el gráfico de barras.

3.17) (Continuación Ejercicio 2.20 sobre la extracción de monedas).

- a) Encuentra el valor esperado del número de monedas de \$100 extraídas.
- b) Encuentra el valor esperado del número total de monedas extraídas.

3.18) En un establecimiento educacional, el 4% de los alumnos tiene 11 años, el 14% tiene 12 años, el 11% tiene 13 años, el 15% tiene 14 años, el 13% tiene 15 años y el 17% tiene 16 años, el 18% tiene 17 años, y el 8% tiene 18 años.

Obtén el valor esperado de la edad de los alumnos del establecimiento, e interprétalo.

3.19) Un investigador criminólogo definió un índice de delitos, aplicables a cada comuna.

Los valores que obtuvo están dados en la siguiente tabla de frecuencias:

|     |      |     |      |     |      |     |      |     |      |      |      |
|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|------|------|
| Ind | frec | Ind | frec | Ind | frec | Ind | frec | Ind | frec | Ind  | frec |
| 0   | 1    | 4   | 15   | 8   | 11   | 12  | 24   | 16  | 18   | 20   | 5    |
| 1   | 6    | 5   | 22   | 9   | 28   | 13  | 22   | 17  | 18   | 21   | 2    |
| 2   | 15   | 6   | 32   | 10  | 16   | 14  | 17   | 18  | 8    | 22   | 1    |
| 3   | 21   | 7   | 25   | 11  | 9    | 15  | 19   | 19  | 11   | Suma | 346  |

Usa las frecuencias relativas como las probabilidades asociadas a cada valor del índice. Por ejemplo, la frecuencia del 8 es 11, por lo tanto, su frecuencia relativa es  $11/346 = 0,0318$ .

Encuentra el valor esperado e interprétalo.

3.20) En una fábrica, un superior registra si el turno de noche o el de día tiene mayor índice de producción en cada uno de los siguientes cinco días laborales.

Considera que hay dos posibilidades: D si la producción del turno de día supera al de noche, N si el de noche supera al de día.

Para simplificar el problema asumiremos que no hay empates.

Considera la variable aleatoria *número de días que el turno de día supera al de noche*. Puede valer 0, 1, 2, 3, 4, o 5.

Asumiremos que es igual de probable que el turno de día supere al de la noche, o que el de la noche supere al del día.

a) Encuentra la función de probabilidad.

(Ayuda: hay 16 posibles resultados)

b) Calcula el valor esperado de la variable aleatoria e interprétalo.

## 4 - La desviación estándar muestral y poblacional

*Una medida de la dispersión de la información.*

### MOTIVACIÓN

Si tenemos clara la diferencia entre el **promedio muestral**, una medida de centro de una **muestra**, y un **promedio poblacional** o valor esperado, una medida de centro de una **población**, no nos será difícil aceptar que el concepto de **varianza muestral**, una medida de la dispersión de los datos de una **muestra**, también se puede extender a una **población**.

Y de forma análoga en que la varianza muestral es una medida de dispersión de la muestra, la **varianza poblacional** es una medida de dispersión de la población.

La forma de calcular la **varianza poblacional** de una variable aleatoria  $X$  es similar al cálculo de la varianza muestral, excepto que cada término va ponderado por su probabilidad, tal como hicimos con el **promedio poblacional**. La suma es a través de toda la población.

Si  $\mathbf{X}$  es la variable aleatoria, la varianza de  $\mathbf{X}$  se suele simbolizar  $\text{Var}(X)$ , o simplemente con la letra griega  $\sigma^2$ .

Consiste en sumar los términos centrados, es decir, quitándoles la media poblacional o valor esperado, ponderarlos por la probabilidad y sumarlos a través de toda la población.

La fórmula para expresar todo esto es

$$\text{Var}(X) = \sum (x - \mu)^2 f(x)$$

la suma es a través de toda la población (todos los elementos del espacio muestral).

Si elevamos el binomio al cuadrado y sumamos los términos, recordando que la suma de los  $f(x)$  a través de toda la población es 1, obtenemos la siguiente **fórmula de cálculo**, que es equivalente a la anterior:

$$Var(X) = \sum x^2 f(x) - \mu^2$$

donde  $\mu$  se calcula mediante el procedimiento introducido en el capítulo anterior.

Se llama fórmula de cálculo porque es más fácil calcular la varianza mediante esta fórmula.

De forma análoga a lo que ocurriría con la varianza muestral, la unidad de medida de la varianza poblacional es el cuadrado de la unidad de medida de la variable aleatoria **X**.

Esto la hace poco amistosa a la hora de interpretar su valor.

Por eso tenemos otra medida de dispersión poblacional, que es la **desviación estándar poblacional**, y que corresponde a la raíz cuadrada de la varianza.

Se mide en la misma unidad de medida que la variable aleatoria original.

Esto la hace más atractiva y su uso es más común en las aplicaciones, que la varianza poblacional.

Se usa el símbolo  $\sigma$  para representarla,

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

#### **EJEMPLO 4.1**

*Naves que arriban a un puerto (continuación del Ejemplo 3.1).*

En el ejemplo del número de naves que arriban a un puerto en una semana. Vimos que la función de probabilidad está dada por la tabla siguiente, a la que ahora hemos agregado una cuarta fila, con los productos  $x^2 f(x)$  :

|                     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| x                   | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | Sumas |
| f(x)                | 0,02 | 0,15 | 0,16 | 0,18 | 0,11 | 0,08 | 0,06 | 0,04 | 0,20 | 1     |
| xf(x)               | 0,08 | 0,75 | 0,96 | 1,26 | 0,88 | 0,72 | 0,60 | 0,44 | 2,40 | 8,09  |
| x <sup>2</sup> f(x) | 0,32 | 3,75 | 5,76 | 8,82 | 7,04 | 6,48 | 6,00 | 4,84 | 28,8 | 45,89 |

La varianza es  $Var(X) = \sum x^2 f(x) - \mu^2 = 45,89 - 8,09^2 = 6,3619 \text{ naves}^2$

Y la desviación estándar es  $\sqrt{6,3619} = 2,5223 \text{ naves}$

Ambas son medidas de la dispersión de la variable aleatoria, pero preferimos la desviación estándar porque se expresa en la misma unidad de medida original, en este caso, número de naves.

## EJEMPLO 4.2

*Proveedores de componentes electrónicos (continuación del Ejemplo 3.2).*

En el Ejemplo 3.2 vimos que, de los tres proveedores de artículos electrónicos, el proveedor A es el que vende con un menor número de defectuosos, en valor esperado.

Las tablas de probabilidades del número de defectuosos por caja, de cada proveedor, está dada en el Ejemplo 3.2 y son las siguientes:

| Cantidad de defectuosos                | Prov. | 0   | 1   | 2   | 3   | 4    | 5    | Sumas |
|----------------------------------------|-------|-----|-----|-----|-----|------|------|-------|
| Probabilidades f(x)<br>según proveedor | A     | 0   | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,05 | 0,05 | 1     |
|                                        | B     | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,1  | 0    | 1     |
|                                        | C     | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0    | 0    | 1     |

Calcula las desviaciones estándar del número de defectuosos por cada proveedor y compáralos.

La siguiente tabla muestra los productos  $x^2 f(x)$  y las sumas respectivas:

| Cantidad de defectuosos                 | Prov. | 0 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | Sumas |
|-----------------------------------------|-------|---|------|------|------|------|------|-------|
| Productos $x^2 f(x)$<br>según proveedor | A     | 0 | 0,10 | 1,20 | 4,50 | 0,8  | 1,25 | 7,85  |
|                                         | B     | 0 | 0,20 | 1,20 | 2,70 | 1,60 | 0    | 5,70  |
|                                         | C     | 0 | 0,40 | 1,20 | 1,80 | 0    | 0    | 3,40  |

En el Ejemplo 3.2 vimos que los valores esperados del número de defectuosos, para los proveedores A, B y C, respectivamente, son 2,65 ; 2,1 y 1,6 ítems.

Las varianzas están dadas por  $Var(X) = \sum x^2 f(x) - \mu^2$

Los tres valores son, entonces

$$7,85 - 2,65^2 = 0,8275 \quad ; \quad 5,70 - 2,1^2 = 1,29 \quad ; \quad 3,40 - 1,6^2 = 0,84$$

medidas en *número de defectuosos*<sup>2</sup>.

Extraemos raíces cuadradas para obtener las desviaciones estándar:

$$\sqrt{0,8275} = 0,9097 \quad ; \quad \sqrt{1,29} = 1,1358 \quad ; \quad \sqrt{0,84} = 0,9165$$

La unidad de medida de las desviaciones estándar es *número de defectuosos*.

Vemos que, además de que el proveedor A entrega un menor número de defectuosos, en valor esperado, es el más estable, en el sentido de que tiene menos variabilidad en el número de defectuosos.



### Propiedades de la varianza y la desviación estándar poblacional

Las siguientes propiedades se refieren a la varianza y la desviación estándar poblacional de las variables aleatorias:

Propiedad 1. La varianza y la desviación estándar son siempre no negativas. Por lo tanto, si estás calculando una varianza y te da negativa, ¡puedes estar seguro que tienes un error!

Propiedad 2. Supongamos que tenemos dos variables aleatorias, **X** e **Y**, ambas **independientes**, con varianzas poblacionales respectivas  $\sigma_X^2$  y  $\sigma_Y^2$ .

Consideremos la nueva variable aleatoria igual a la suma de las variables aleatorias, **X + Y**.

La varianza de la suma **X + Y** es  $\sigma_X^2 + \sigma_Y^2$ .

Lo anterior es válido sólo si las variables aleatorias son **independientes**. Recuerda que dos variables aleatorias son independientes, si el valor de una no altera la distribución de probabilidad de la otra.

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada,  $\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$

Propiedad 3. Ahora consideremos la diferencia entre las variables aleatorias, **X - Y**.

Uno está tentado de pensar que la varianza de la diferencia **X - Y** es la diferencia de las varianzas, sin embargo, no es así.

La varianza de la diferencia de dos variables aleatorias **independientes** es la suma de las varianzas, es igual que la varianza de la suma.

Esto se debe a que la dispersión de los valores que toma la diferencia es igual a la dispersión de los valores que toma la suma.

Propiedad 4. Ahora consideremos el producto de una constante  $k$  por la variable aleatoria **X**.

La varianza de  $kX$  es  $k^2$  veces el promedio de **X**, es decir,  $k^2\sigma_X^2$ .

Y la desviación estándar del producto es  $|k|\sigma_X$ , en que  $|k|$  es el valor absoluto de  $k$ : igual a  $k$  si éste es positivo,  $-k$  si es negativo.

---

### **EJEMPLO 4.3**

---

*Desviación estándar de la suma de dos variables aleatorias. Continuación del Ejemplo 3.3.*

En el Ejemplo 3.3 definimos la variable aleatoria **X**, *valor del kilo de plátanos* y la variable aleatoria **Y**, *valor del kilo de manzanas*.

Ahora supongamos que las desviaciones estándar respectivas son  $\sigma_X = 220$  y  $\sigma_Y = 310$  pesos.

Las varianzas respectivas son  $\sigma_X^2 = 48.400$  pesos<sup>2</sup> y  $\sigma_Y^2 = 96.100$  pesos<sup>2</sup>

Si compramos dos kilos de papas y tres kilos de manzanas, el total de lo que hay que pagar es la variable aleatoria **2X + 3Y**.

Su varianza es

$$4\sigma_X^2 + 9\sigma_Y^2 = 4 \times 48.400 + 9 \times 96.100 = 1.058.500 \text{ pesos}^2$$

Su desviación estándar es  $\sqrt{1058500} = 1.028,834$  pesos.

Puedes ver que la suma tiene mucho mayor dispersión que cada una de las variables aleatorias originales **X** e **Y**.

---

### **EJEMPLO 4.4**

---

*Fallas en un sistema de internet (continuación del Ejemplo 3.5).*

En el Ejemplo 3.5 se presentó la tabla con la función de probabilidad de la variable aleatoria *número de fallas* de un sistema de internet, durante un mes.

Encuentra la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria.

Resolución:

La función de probabilidad de la variable aleatoria **X**, *número de fallas*, dada en el Ejemplo 3.5, es la siguiente:

|              |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Fallas       | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | Suma |
| Probabilidad | 0,18 | 0,24 | 0,22 | 0,18 | 0,13 | 0,04 | 0,01 | 1    |

En la tabla que sigue se presentan los productos  $x^2 f(x)$ :

|            |   |      |      |      |      |      |      |      |
|------------|---|------|------|------|------|------|------|------|
| Fallas     | 0 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | Suma |
| $x^2 f(x)$ | 0 | 0,24 | 0,88 | 1,62 | 2,08 | 1,00 | 0,36 | 6,18 |

La suma de los valores es 6,18.

En el Ejemplo 3.5 vimos que el valor esperado es 2. Por lo tanto, la varianza es  $Var(X) = \sum x^2 f(x) - \mu^2 = 6,18 - 2^2 = 2,18 \text{ fallas}^2$ .

Luego la desviación estándar es  $\sqrt{2,18} = 1,4765 \text{ fallas}$ .

#### EJEMPLO 4.5

*Experimento con dos lanzamientos de monedas (continuación del Ejemplo 3.6).*

En el Ejemplo 3.6 se describió un experimento consiste en lo siguiente:

Se lanzan dos monedas y se cuenta el número de caras, que puede ser 0, 1 o 2.

Luego se lanzan tantas monedas como el número de caras en el primer lanzamiento.

Se definió la variable aleatoria *número total de caras* y se obtuvo su valor esperado.

Ahora vamos a encontrar la varianza y la desviación estándar.

Resolución:

En el Ejemplo 3.6 se muestra un diagrama de árbol con todas sus probabilidades, junto con los respectivos números de caras.

En ese ejemplo se calculó el promedio poblacional, que resultó ser 1,5 caras.

También se presenta una tabla con los valores de la variable aleatoria *número total de caras* y sus respectivas probabilidades.

En la tabla siguiente aparecen estos valores y se incluye una columna con los productos  $x^2 f(x)$ :

| Número de<br>caras $x$ | Probabilidad<br>$f(x)$ | $x^2 f(x)$ |
|------------------------|------------------------|------------|
| 0                      | 1/4                    | 0          |
| 1                      | 1/4                    | 1/4        |
| 2                      | 5/16                   | 5/4        |
| 3                      | 1/8                    | 9/8        |
| 4                      | 1/16                   | 1          |
| Suma                   | 1                      | 29/8       |

La varianza está dada por  $Var(X) = \sum x^2 f(x) - \mu^2 = 29/8 - 1,5^2 = 1,375$

Y la desviación estándar es  $\sqrt{1,375} = 1,1726$

La unidad de medida de la varianza es el número de caras al cuadrado, y de la desviación estándar es el número de caras. Ambas son medidas de la variabilidad en los resultados del experimento, si se repitiese muchas veces.

---

#### **EJEMPLO 4.6**

*Llegada de clientes a una tienda de souvenirs.*



La cantidad de clientes que entran a una tienda de suvenires, por hora, es una variable aleatoria con la siguiente función de probabilidad

$$f(x) = \frac{a3^x}{x!} \quad \text{donde } x \text{ toma los valores } 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

- a) Encuentra el valor de la constante  $a$ .
- b) Encuentra el valor esperado del número de clientes que entran a la tienda por hora, y su desviación estándar.

Resolución:

- a) La tabla siguiente muestra los valores de  $\frac{f(x)}{a} = \frac{3^x}{x!}$

Recuerda que, por definición,  $0! = 1$ .

| x    | $3^x/x!$ |
|------|----------|
| 0    | 1,000    |
| 1    | 3,000    |
| 2    | 4,500    |
| 3    | 4,500    |
| 4    | 3,375    |
| 5    | 2,025    |
| Suma | 18,40    |

La suma de la segunda columna es  $\frac{1}{a} \sum f(x) = \frac{\sum 3^x}{x!} = 18,40$

Como la suma de  $f(x)$  tiene que ser igual a 1, entonces la igualdad anterior se reduce a  $\frac{1}{a} = 18,40$  y la constante **a** es igual a  $1/18,40 = 0,054348$  redondeado a 5 decimales.

b) Para calcular el valor esperado y la varianza, construimos la tabla siguiente, que contiene los valores de  $x$ , de  $f(x)$ , de  $xf(x)$  y de  $x^2f(x)$

(con  $f(x)$  redondeado a 5 decimales, los demás a 3 decimales):

| x    | $f(x) = 0,054548 \frac{3^x}{x!}$ | $xf(x)$ | $x^2f(x)$ |
|------|----------------------------------|---------|-----------|
| 0    | 0,05435                          | 0,000   | 0,000     |
| 1    | 0,16304                          | 0,163   | 0,163     |
| 2    | 0,24457                          | 0,489   | 0,978     |
| 3    | 0,24457                          | 0,734   | 2,201     |
| 4    | 0,18342                          | 0,734   | 2,935     |
| 5    | 0,11005                          | 0,550   | 2,751     |
| Suma | 1                                | 2,670   | 9,028     |

El valor esperado del número de clientes que entran a la tienda en una hora, es

$$E(X) = \sum xf(x) = 2,670 \text{ clientes}$$

Es decir, en promedio 2,670 clientes entran a la tienda por hora.

La varianza es

$$Var(X) = \sum x^2 f(x) - E(X)^2 = 9,0285 - 2,670^2 = 1,900 \text{ clientes}^2$$

Y la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza,

$$de = \sqrt{1,900} = 1,379 \text{ clientes}$$

Esta es una medida de cuánto varía el número de clientes que entran a la tienda, por hora.

---

## EJERCICIOS

---

4.1) (Continuación Ejercicios 2.4 y 3.1 sobre el lanzamiento de una moneda cargada).

Encuentra las desviaciones estándar de las tres variables aleatorias, definidas en b), c) y d), respectivamente. Representalas mediante una línea horizontal en la parte inferior de los gráficos de barras. Interpreta cada una.

4.2) (Continuación Ejercicios 2.6 y 3.2 sobre asignaciones a trabajadores).  
Encuentra la desviación estándar del número de asignaciones recibidas.  
Interpreta.

4.3) (Continuación Ejercicios 2.7 y 3.3 sobre la suma de la selección al azar de tres números de entre los números 1, 2, 3 y 4)

Encuentra la desviación estándar de la suma e interprétalo.

4.4) (Continuación Ejercicios 2.8 y 3.4 sobre la selección de 3 jóvenes para participar en un concurso de debates).

Encuentra la desviación estándar del número de mujeres seleccionadas. Representalo en el gráfico de barras. Interpretalo.

4.5) (Continuación Ejercicios 2.1 y 3.5 sobre la demanda semanal de computadores).

Encuentra la desviación estándar de la demanda semanal. Representalo en el gráfico. Interpretalo.

4.6) (Continuación Ejercicios 2.10 y 3.6 sobre la selección de una caja con bolas blancas y azules).

a) Encuentra la desviación estándar del número de bolas azules extraídas.

b) Encuentra la desviación estándar del total de bolas extraídas.

c) Representa ambos valores en los gráficos de barras respectivos. Interpretalos.

4.7) (Continuación Ejercicios 2.11 y 3.7 sobre la selección al azar de 3 trabajadores para un traslado).

Encuentra la desviación estándar del número de hombres seleccionados. Representala en el gráfico de barras. Interpretalo.

4.8) (Continuación Ejercicios 2.12 y 3.8 sobre 2 lanzamientos de un dado de 4 caras).

Encuentra la desviación estándar de la suma de los resultados de 2 lanzamientos. Representala en el gráfico de barras. Interpretalo.

4.9) (Continuación Ejercicios 2.13 y 3.9 sobre 2 giros de un trompo con 5 números).

Encuentra el valor esperado del valor absoluto de la diferencia. Representalo en el gráfico de barras.

4.10) (Continuación Ejercicios 2.14 y 3.10 sobre 2 lanzamientos de un dado de 5 caras).



Encuentra la desviación estándar de la suma de los 2 números ganadores.  
Representalo en el gráfico de barras. Interpretala.

4.11) (Continuación Ejercicios 2.15 y 3.11 sobre 3 lanzamientos de un dado de 4 caras).

Encuentra la desviación estándar de la suma de los tres números.  
Representala en el gráfico de barras.

4.12) (Continuación Ejercicios 2.16 y 3.12 sobre el abono aplicado a plantas de hibisco).

Encuentra la desviación estándar del número de plantas que sobreviven.

4.13) (Continuación Ejercicios 2.18 y 3.13 sobre la síntesis de un compuesto).

Encuentra la desviación estándar de cada una de las 3 variables aleatorias definidas en las partes a), b) y c).

En cada caso representala en el gráfico de barras respectivo.

4.14) (Continuación Ejercicio 3.14 sobre 6 tarjetas con números 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Las 6 tarjetas se mezclan y se eligen 2 al azar, una después de otra (sin reemplazo).

Encuentra la desviación estándar del producto de los números en las dos tarjetas seleccionadas.

4.15) (Continuación Ejercicio 3.15 sobre un experimento metalúrgico).

Obtén la desviación estándar de la variable aleatoria e interprétala.

4.16) (Continuación Ejercicios 2.19 y 3.16 sobre 2 lanzamientos de un dado de 5 caras no equiprobables).

Encuentra la desviación estándar de la suma de los dos números ganadores.  
Representalo en el gráfico de barras.

4.17) (Continuación Ejercicios 2.20 y 3.17 sobre la extracción de monedas).

- a) Encuentra la desviación estándar del número de monedas de \$100 extraídas.
- b) Encuentra la desviación estándar del número total de monedas extraídas.

4.18) (Continuación Ejercicio 3.18 sobre las edades de los alumnos de un establecimiento educacional).

Obtén la desviación estándar de la edad de los alumnos del establecimiento, e interprétala.

4.19) (Continuación Ejercicio 3.19 sobre un índice de delitos).

Encuentra la desviación estándar e interprétala.

4.20) (Continuación Ejercicio 3.20 sobre los índices de producción por turnos).

Calcula la desviación estándar de la variable aleatoria definida e interprétala.

---

## 5 - Ayudas al conteo: Combinaciones y Permutaciones

*Cómo contar grandes cantidades de posibilidades.*

### **MOTIVACIÓN**

Consideremos el producto  $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ . Se llama **cuatro factorial** y se anota  $4!$

Tres factorial es  $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ , dos factorial es  $2! = 1 \times 2 = 2$ , uno factorial es 1, y el cero factorial se define como 1.

Diez factorial es  $10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3.628.800$

Doce factorial es

$12! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 = 479.001.600$

*Como puedes ver, el número crece rápidamente.*

En esta sección veremos algunas fórmulas que nos ayudarán a contar, cuando se deba contar cantidades muy grandes.

### **Combinaciones**

Como introducción, supongamos que tenemos 5 objetos, a, b, c, d, e.

Queremos saber cuántos grupos de  $r=3$  objetos se pueden elegir, sin repetir ninguno. Son los siguientes:

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| abc | abd | abe | acd | ace |
| ade | bcd | bce | bde | cde |

Puedes observar que las 10 son distintas. Y no hay otras posibilidades de seleccionar 3 de los 5 objetos, más que estas.

¿Cómo contar las posibilidades sin tener que hacer el listado?

En este caso particular, se denominan **combinaciones** de 5 elementos, tomando 3 a la vez. Este número, lo simbolizaremos  $C(5,3)$ .

El número de combinaciones de 5 sobre 3 se obtiene mediante la fórmula

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{(1 \times 2 \times 3) \times (1 \times 2)} = 10$$

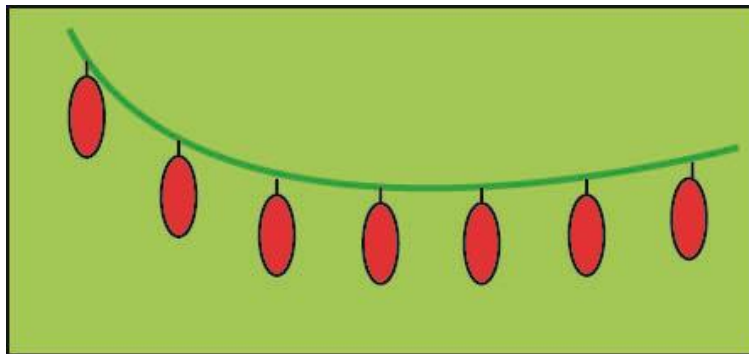
En general, el número de combinaciones de **n** objetos tomando **r** a la vez es

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Observa que en el caso del número de combinaciones de n objetos tomando los n a la vez, la fórmula nos dice que es 1, lo que es evidente.

### EJEMPLO 5.1

*Guirnalda de luces para el árbol de navidad.*



Tenemos 6 guirnalda de luces, para colocar en el árbol de navidad. Cada guirnalda es diferente a las otras.

Pero sólo vamos a colocar 4. ¿De cuántas maneras podemos seleccionar las 4?

El número lo da las combinaciones de 6 tomando 4 a la vez (o combinaciones de 6 sobre 4)

$$C(6,4) = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 1 \times 2} = \frac{720}{24 \times 2} = 15$$

En efecto, supongamos que los colores son azul, blanco, rojo, amarillo, morado, verde, que simbolizaremos por 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Las 15 combinaciones están dadas en la siguiente tabla, que es conveniente leer por filas (horizontales):

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| 1234 | 1235 | 1236 | 1245 | 1246 |
| 1256 | 1345 | 1346 | 1356 | 1456 |
| 2345 | 2346 | 2356 | 2456 | 3456 |

Es importante observar que el orden en que están los números en cada selección, no se considera. Para efectos de combinaciones, es lo mismo 1234 que 1342.

En el Ejemplo 5.1 vimos que no es tan fácil hacer el listado de todas las combinaciones posibles, aunque son sólo 15.

Calculemos uno más grande, por ejemplo  $C(15,8)$

$$C(15,8) = \frac{15!}{8!(15-8)!} = \frac{15!}{8!7!} = \frac{1307674368000}{40320 \times 5040} = 6435$$

En realidad, no es necesario calcular los factoriales y luego hacer el cociente. Se pueden escribir los elementos que van multiplicados para obtener los factoriales.

Luego se simplifican los números que coinciden en numerador y denominador.

En este caso se llega al producto  $9 \times 5 \times 11 \times 13 = 6435$ .

## **Permutaciones**

Ahora supongamos que tenemos 4 objetos, que llamaremos a, b, c y d.

¿De cuántas maneras se pueden ordenar?

De las siguientes:

|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| abcd | abdc | acbd | acdb | adbc | adcb |
| bacd | badc | bcad | bcda | bdac | bdca |
| cabd | cadb | cbad | cbda | cdab | cdba |
| dabc | dacb | dbac | dbca | dcab | dcba |

Son 24, y podrás comprobar que ninguna se repite.

Para calcular cuántas son, sin tener que contarlas, simplemente calculamos el factorial de 4

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

Cada una de estas posibilidades se llama **permutación** de **n** elementos. Lo simbolizaremos  $P(n,n)$ .

El número de permutaciones de 3 elementos es  $P(3,3) = 1 \times 2 \times 3 = 6$ ,

El número de permutaciones de 5 elementos es  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5! = 120$ .

Hay  $6! = 720$  permutaciones de 6 elementos,  $7! = 5040$  permutaciones de 7 elementos, etc., y el número crece rápidamente.

En resumen, el número de **permutaciones** de **n** elementos es

$$P(n,n) = n!$$

Ahora vamos a generalizar esta situación:

Supongamos que vamos a formar las permutaciones de los **n** objetos, pero solamente tomando **r** a la vez, con  $r \leq n$ .

En el ejemplo que acabamos de ver, con  $n=4$ , consideremos elegir  $r=2$  a la vez y ver cuántas permutaciones son.

Se denominan **permutaciones de 4 sobre 2** y son las siguientes:

|    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|
| ab | ac | ad | bc | bd | cd |
| ba | ca | da | cb | db | dc |

En total son 12, la mitad de las permutaciones de 4 objetos, que vimos antes.

El número de permutaciones de 4 objetos tomando 2 a la vez, que simbolizaremos  $P(4,2)$ , se puede calcular así:

$$P(4, 2) = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{1 \times 2} = 12$$

En general, si tenemos **n** objetos y queremos saber cuántas **permutaciones** de los **n**, tomando **r** a la vez, con  $r \leq n$ , está dado por

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Observa que si **r** fuese igual a **n**, la fórmula anterior daría

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Lo mismo que tenemos para el número de permutaciones de **n** objetos (tomados todos a la vez).

## EJEMPLO 5.2

*Textos en una repisa.*



Tenemos 10 textos de estudio, todos de tamaño similar, pero todos diferentes colores.

Los queremos colocar en una repisa para que estén siempre disponibles para consulta. Pero, además, queremos que constituyan un elemento decorativo en la sala.

- ¿De cuántas maneras podemos ordenar los 10 libros en la repisa?
- Si nuestra repisa es muy pequeña y sólo caben 6, ¿de cuántas maneras se puede ordenar 6 de los 10 libros, en la repisa?

Resolución:

a) La respuesta es fácil, si sabemos que nos preguntan cuántas **permutaciones** de 10 objetos hay.

Por lo visto anteriormente, el número está dado por  **$n!$** , con  $n = 10$  en este caso.

Y son muchas. En efecto,

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3.628.800$$

¡Seguramente no pensaste que fueran tantas!

Pero vemos que esta simple fórmula nos permite saberlo sin necesidad de contarlas.

b) Ahora se trata de un problema de permutaciones de 10 tomando de a 6, o lo que es lo mismo, permutaciones de 10 sobre 6.

La fórmula que obtuvimos es

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 151.200$$

Es mucho menos que en el caso anterior, pero aún son muchas permutaciones.

La tabla siguiente resume estas tres situaciones que hemos visto hasta aquí:

|                                                                                                              |                                  |                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|---------------------|
| <b>Combinaciones</b> de <b><math>n</math></b> objetos tomando <b><math>r</math></b> a la vez ( $r \leq n$ ). | $C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! r!}$ | No importa el orden |
| <b>Permutaciones</b> de <b><math>n</math></b> objetos.                                                       | $P(n, n) = n!$                   | Importa el orden.   |
| <b>Permutaciones</b> de <b><math>n</math></b> objetos tomando <b><math>r</math></b> a la vez ( $r \leq n$ ). | $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$    | Importa el orden.   |



### EJEMPLO 5.3

*Plato con dulces.*



Hay un plato con 8 dulces diferentes. A un niño se le dice que puede sacar 3.

¿De cuántas maneras distintas puede elegir 3?

En este caso el orden en que el niño saca sus tres dulces no tiene importancia. Por lo tanto, se trata de un problema de combinaciones.

En tal caso el conteo es

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 56$$

El niño tiene que decidirse por una de 56 opciones.

### EJEMPLO 5.4

*Cinco personas formando un círculo.*

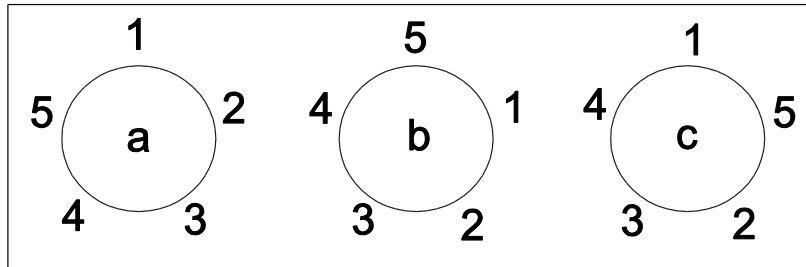
Un grupo de 5 personas se paran formando un círculo.

¿De cuántas maneras distintas pueden ordenarse?

Se trata de un problema de permutaciones. Pero si consideramos permutaciones de 5 elementos habría algunas demás, puesto que varias ordenaciones se repiten si giramos el círculo.

Por ejemplo, la permutación 1 2 3 4 5 no es igual que 5 1 2 3 4.

Pero si forman un círculo, sí son iguales, como se ve en la figura siguiente (casos a y b), pues no hay ninguno que sea el primero. El caso c corresponde a una permutación distinta de las anteriores.



Específicamente, hay cinco que se repiten, pues si todas las personas se corren un puesto a la izquierda o a la derecha, se tiene la misma ordenación relativa. Si vuelve a hacer esto 5 veces, llegará a las posiciones iniciales.

Por lo tanto, el número de permutaciones es

$$\frac{1}{5}5! = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{5} = 24$$

Pueden formar 24 círculos distintos.

Otra forma de verlo es asumir que una persona cualquiera está fija en el círculo, y preguntarse de cuántas maneras se pueden ordenar las otras 4 en torno a ella.

Son  $(5-1)! = 4! = 24$

En general, si tenemos  $n$  objetos ubicados en círculo, hay  $(n-1)!$  permutaciones.

## EJEMPLO 5.5

*Juego de palabras.*

Consideremos un alfabeto de 26 letras, de las cuales 21 son consonantes y 5 son vocales.

¿Cuántas palabras de 5 letras se puede formar, que tengan la primera, tercera y quinta letra consonantes, la segunda y cuarta vocales,



- a) sin repetición?
- b) con repetición?
- c) Si se forma una palabra al azar, ¿en cada uno de los dos casos, sin y con repetición, cuáles son las probabilidades de que las palabras comiencen con la letra j ?

Resolución:

- a) Primero consideremos las consonantes: tenemos 21 para elegir y hay tres lugares en que se pueden colocar (los lugares 1, 3 y 5).

Aquí importa el orden.

Por lo tanto se trata de permutaciones. El número de permutaciones es

$$P(21, 3) = \frac{21!}{(21 - 3)!} = 19 \times 20 \times 21 = 7980$$

Por otra parte, tenemos 5 vocales, que debemos intercalar en los dos espacios destinados a ellas, el segundo y el cuarto.

El número de permutaciones es

$$P(5, 2) = \frac{5!}{(5 - 2)!} = 4 \times 5 = 20$$

Por cada una de las 7980 permutaciones de las consonantes, se tienen las 20 de las vocales, por lo tanto el número de palabras es el producto

$7980 \times 20 = 159.600$  palabras distintas.

b) Ahora se puede repetir letras.

En este caso adoptaremos un enfoque distinto.

Para la primera letra, consonante, hay 21 posibilidades.

Para la segunda, vocal, hay 5 posibilidades. Por cada una de las 21 de la primera hay estas 5 de la segunda.

Por lo tanto, para las dos primeras combinadas hay  $21 \times 5 = 105$  posibilidades.

Para la tercera hay 21 consonantes, pues se puede repetir la primera.

Luego van  $21 \times 5 \times 21 = 2205$

Para la cuarta hay 5. Son, entonces,  $21 \times 5 \times 21 \times 5 = 11025$

Y para la quinta letra son 21.

Finalmente, son en total,  $21 \times 5 \times 21 \times 5 \times 21 = 231.525$  palabras distintas

¡Son tantas más que sin repetición!

c) Usamos el modelo de Laplace,

$\text{Prob}(A) = (\text{Posibilidades favorables a } A) / (\text{Total de posibilidades})$

Caso sin repetición.

En este caso el número total de posibilidades es 159.600

La letra j ya está usada en el primer lugar, luego quedan 20 consonantes para los lugares 3 y 5, son  $P(20,2)$  posibilidades.

Para las vocales se mantienen las 5 de las que deberán elegirse 2, que ocuparán los lugares 2 y 4, son  $P(5,2)$  posibilidades.

Luego el número de posibilidades favorables es

$$P(20,2) \times P(5,2) = \frac{20!}{(20-2)!} \times \frac{5!}{(5-2)!} = 19 \times 20 \times 4 \times 5 = 7600$$

Entonces la probabilidad es  $7.600/159.600 = 0,0476$

Caso con repetición.

Ahora el total de posibilidades es 231.525

El número de posibilidades favorables es

$5 \times 21 \times 5 \times 21 = 11.025$ , pues se puede repetir cualquiera, incluso la j.

Luego la probabilidad es  $11.025/231.525 = 0,0476$

Curiosamente, la probabilidad de que la letra j aparezca primero es la misma en ambos casos, con o sin repetición.

## EJEMPLO 5.6

*Entrevistas con trabajadores sociales.*



Hay 3 trabajadores sociales que deben entrevistar a 6 personas.

Cada uno deberá entrevistar a 2.

a) ¿De cuántas maneras distintas pueden distribuirse las 6 personas entre los tres trabajadores sociales?

b) Uno de los trabajadores sociales se llama Vicente, y uno de los entrevistados se llama Andrés.

Si se hace la asignación de entrevistados a los trabajadores sociales, al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que Andrés sea entrevistado por Vicente?

Resolución:

a) Al primer trabajador social le puede tocar 2 cualesquiera de entre los 6.

Esto significa que el número de elecciones posibles es igual al número de combinaciones de 6, tomando 2 la vez,  $C(6,2)$ .

$$C(6,2) = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{(1 \times 2 \times 3 \times 4) \times (1 \times 2)} = 15$$

Después de su elección, al segundo trabajador social le quedan 4 para elegir 2. Esto se puede hacer de  $C(4,2)$  maneras diferentes, combinaciones de 4 sobre 2.

$$C(4,2) = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{(1 \times 2) \times (1 \times 2)} = 6$$

Al tercer trabajador social le queda una posibilidad, que es elegir a los 2 restantes.

Por cada una de las 15 elecciones del primero puede hacerse las 6 del segundo, luego el total de formas de elegir de los primeros dos es  $15 \times 6 = 90$

Como el tercero tiene sólo una manera de elegir, así que el resultado final es 90.

Pero esto contempla un trabajador social

b) Para calcular esta probabilidad, usamos el modelo de Laplace,

$\text{Prob}(A) = (\text{Posibilidades favorables a } A) / (\text{Total de posibilidades})$

En la parte a) obtuvimos el total de posibilidades, que resultó ser 15.

El número de posibilidades favorables al evento que a Vicente le toque entrevistar a Andrés es 2, pues son 2 los entrevistados por cada trabajador social.

Entonces la probabilidad de que Andrés sea entrevistado por Vicente es  $2/15 = 1,333$ .

## EJERCICIOS

- 5.1) a) Calcula las combinaciones de 2 sobre 0, 2 sobre 1 y 2 sobre 2.
- b) Calcula las combinaciones de 3 sobre 0, 3 sobre 1, 3 sobre 2 y 3 sobre 3.
- c) Calcula las combinaciones de 4 sobre 0, 4 sobre 1, 4 sobre 2, 4 sobre 3 y 4 sobre 4.
- d) Compara los valores obtenidos en las partes a), b) y c), con los valores del triángulo de Pascal. El triángulo de Pascal se construye de la siguiente manera:

| fila |   |   |   |   |   |
|------|---|---|---|---|---|
| 0    | 1 |   |   |   |   |
| 1    | 1 |   | 1 |   |   |
| 2    | 1 |   | 2 | 1 |   |
| 3    | 1 | 3 | 3 | 1 |   |
| 4    | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 |

Cada fila horizontal comienza y termina con 1. Los siguientes términos se obtienen sumando los dos más próximos de la fila superior. El triángulo se continúa hacia abajo.

- 5.2) Seis personas se alinean para que les tomen una fotografía. ¿De cuántas maneras pueden ordenarse?

5.3) Se tiene un curso de 12 alumnos.

Deben elegir un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero.

¿De cuántas formas posibles pueden hacer esta elección?

5.4) Un club tiene 20 miembros.

Es necesario elegir una comisión de 5 de sus miembros para asistir a una reunión, todos en igualdad de condiciones.

¿Cuántas posibles comisiones pueden formarse?

5.5) Una empresa de servicio envía 10 correos electrónicos a cada uno de 10 clientes solicitando completar una encuesta sobre el servicio recibido.

Seis respondieron. Los 6 se pueden considerar éxitos, los 4 que no respondieron se pueden considerar fracasos.

¿Cuántas posibles selecciones de 6 clientes (6 éxitos) pueden ocurrir con los 10 que recibieron el correo?

5.6) En una mesa redonda se van a sentar 6 comensales. ¿De cuántas formas posibles pueden hacerlo?

5.7) Se tiene una rifa con 50 números.

a) Se sortearán tres premios iguales. ¿Cuántos resultados posibles hay?

b) Se sorteará un primer premio, un segundo premio y un tercer premio, siendo el primero el de mayor valor y el tercero el de menor valor.

¿Cuántos resultados posibles hay?

5.8) Un analista evaluó los beneficios de 7 programas de seguros de salud, y los ordenó con respecto a los montos de los beneficios que entregan.

a) ¿Cuántas ordenaciones diferentes son posibles?

b) Si se supone que se elige una determinada ordenación, ¿cuál es la probabilidad de que esta suposición coincida con el resultado real?

5.9) Una central de compras tiene 40 vendedores.



Decide premiar al mejor vendedor durante el año con un premio de dos millones de pesos, mientras que el segundo mejor vendedor será premiado con un millón.

¿Cuántos resultados son posibles?

5.10) Hay 23 académicos en un departamento universitario. Uno deberá ocupar el cargo de Director, otro el de Secretario Académico, otro el de Jefe de Docencia y otro el de Jefe de Investigación.

a) ¿De cuántas maneras puede hacerse esto?

b) Jorge es uno de ellos. ¿Cuál es la probabilidad que sea seleccionado?

5.11) Un curso tiene 12 alumnas y 10 alumnos. Se debe elegir un comité de cuatro, por sorteo, con la condición de que debe haber dos alumnas y dos alumnos.

a) ¿De cuántas maneras puede elegirse el comité?

b) Amanda y Constanza son dos alumnas, David y Jorge son dos alumnos del curso. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan sorteados?

5.12) Una empresa tiene 5 abogados y 12 contadores. De entre ellos se debe elegir 5, al azar, para representas a la empresa en un congreso.

a) ¿De cuántas maneras se puede elegir el grupo de 5?

b) ¿Cuál es la probabilidad que en el grupo haya exactamente 2 abogados?

5.13) Un grupo de 18 prisioneros de guerra británicos están planeando un escape. Deben sortear 4 de ellos, que serán los encargados de neutralizar a los 2 guardias nocturnos, mientras los demás escapan.

Johnson y Andrews son dos amigos que están entre los 18 prisioneros. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos estén entre los sorteados para dominar a los guardias?

5.14) Una rifa tiene 40 números. Se sortean 2 premios.

Yo compré 2 números.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que no obtenga ningún premio?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga exactamente un premio?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga los dos premios?

5.15) Se lanza un dado. Luego se lanzan monedas.

Si el dado salió 1 o 2, se lanza 1 moneda.

Si el dado salió 3 o 4, se lanzan 2 monedas.

Si el dado salió 5 o 6, se lanzan 3 monedas.

Encuentra la función de probabilidad del número de sellos.

---

## 6 - Un Modelo discreto: el Binomial

*Éxitos y fracasos.*

### **MOTIVACIÓN**

---

Un vendedor recorre una cantidad de potenciales clientes. ¿Cuántos de ellos irán a comprar el producto que ofrece?

Se hace una inspección de un determinado número de ítems, por ejemplo 50, producido por un proceso de fabricación, para controlar la calidad. Se inspecciona cada uno y se registra el número de los que resultan defectuosos.

Una compañía de seguros tiene asegurados los vehículos de cierto número de clientes. ¿Cuántos de ellos irán a tener un siniestro y habrá que pagarles?

Plantamos 20 semillas de una cierta planta. ¿Cuántas irán a germinar?

Realizamos exámenes a 100 personas para determinar la presencia de un contagio, por ejemplo, coronavirus. ¿Cuántos darán positivo?

Se extraen 12 cartas y se cuenta el número de los que resultan ser de una cierta pinta, por ejemplo, corazón

Se transmiten 50 mensajes por un sistema de comunicación contaminado con ruido, y se registra el número de los que se recibieron correctamente.

De 20 personas seleccionadas en forma aleatoria, a las que se les midió la presión sanguínea, se cuenta cuántas de ellas tienen la presión sobre lo normal.

Todas estas situaciones constituyen experimentos aleatorios que generan variables aleatorias con características comunes; constituyen una familia de variables aleatorias.

Son experimentos en que se realiza un número fijo de intentos, digamos **n**, que tienen dos posibilidades, que llamaremos **éxito** y **fracaso**: éxito, con

probabilidad **p**, y fracaso, con probabilidad **1-p**, manteniéndose estas probabilidades constantes durante todos los intentos.

---

Partamos de una versión más simple: el modelo **Bernoulli** representa un experimento con dos alternativas, que llamamos **éxito** y **fracaso** (podría ser 1 y 0, o bien sí y no, o de otra manera; no es importante), y hay una probabilidad **p** de **éxito** y una probabilidad **1-p** de **fracaso**.

La probabilidad **p** es lo que se llama **parámetro** de la Bernoulli.

Cada valor de **p** (con  $0 < p < 1$ ) caracteriza un caso particular del modelo Bernoulli, de la **familia** Bernoulli. Cada valor de **p** define un miembro de esta familia.

Los experimentos Bernoulli también se suelen llamar **ensayos** Bernoulli.

### EJEMPLO 6.1

---

*Experimento Bernoulli.*



a) Se lanza una moneda una vez. Hay una probabilidad  $1/2$  de que salga cara y una probabilidad  $1/2$  de que salga sello.

Por lo tanto, el modelo Bernoulli con parámetro  $p = 1/2$  sirve para describir este experimento.

b) Compré cinco números para una rifa. Se vendieron 100 números y se sorteará un premio entre ellos.

Como tengo cinco números, hay cinco posibilidades favorables de poseer uno que saldrá premiado, de un total de 100 posibilidades.

Por lo tanto, tengo una probabilidad de 0,05 de éxito (obtener el premio) y una probabilidad de 0,95 de fracaso (no obtener premio).

Este sorteo se puede describir mediante un modelo Bernoulli con parámetro  $p=0,05$ .

---

Ahora vamos a pensar en un experimento consistente en varios ensayos Bernoulli, digamos  $n$ , todos con la misma probabilidad de éxito  $p$ .

El número total de éxitos puede ser 0, 1, 2, 3, ..., o  $n$ .

El modelo Binomial explica las probabilidades de obtener 0, 1, 2, ..., o  $n$  éxitos.

Los **parámetros** del modelo Binomial son dos:  $n$ , número de **ensayos Bernoulli**, y  $p$ , la probabilidad individual de **éxito**.

La probabilidad de éxito en cada uno de los ensayos Bernoulli es la misma, sin importar el resultado de los anteriores, entonces estos ensayos son **independientes**.

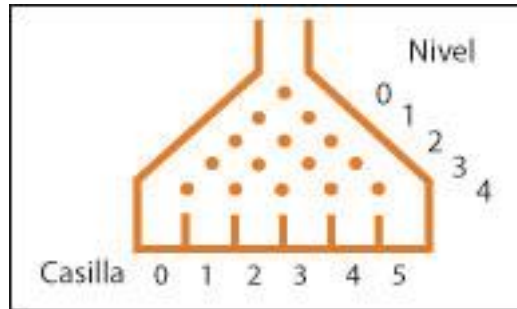
## EJEMPLO 6.2

---

### *Máquina de Galton*

Recordemos lo que era una máquina de Galton, o tablero de Galton, que fue descrito en el Tomo 2.

La máquina de Galton es un plano vertical con una serie de clavos dispuestos en niveles, como en la figura. Esta, en particular, tiene 5 niveles.



Se suelta una bolita en la parte superior. En cada nivel golpea un clavo, y tiene una probabilidad  $1/2$  de caer a la derecha y la misma probabilidad de caer a la izquierda, hasta que finalmente llegará a una de las casillas de la parte inferior.

Este es un caso del modelo binomial, en que el número de ensayos **n** corresponde al número de niveles de la máquina de Galton, y la probabilidad de éxito **p** es  $1/2$ .

El número de éxitos **x** corresponde al número de veces que la bolita cae a la derecha, el número de fracasos, **n-x**, corresponde al número de veces que cae a la izquierda.

Cada vez que la bolita golpea un clavo, tiene dos caminos posibles para seguir.

Si tiene un nivel hay dos caminos posibles.

Si tiene 2 niveles, el número de caminos posibles es  $2 \times 2 = 4$ .

Si hay 3 niveles, el número de caminos posibles es  $2 \times 2 \times 2 = 8$ .

Generalizando, si hay **n** niveles, el número de caminos que puede seguir la bolita hasta llegar al final es

$2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2$ , n veces, es decir,  $2^n$  caminos posibles.

Como en cada clavo la probabilidad es la misma de que caiga a la derecha o a la izquierda, esta probabilidad es  $1/2$ .

Luego, al recorrer  $n$  niveles, cada uno de los caminos tiene igual probabilidad,  $1/2^n$ .

El cálculo de la casilla a la que llega la bolita es otro cuento.

Para llegar a la casilla 0, hay  $n$  saltos a la izquierda, son  $n$  fracasos.

Para llegar a la casilla 1, es un salto a la derecha y  $n - 1$  saltos a la izquierda.

En general, para que llegue a la casilla  $x$ , son  $x$  éxitos y  $n - x$  fracasos.

Pero los  $x$  éxitos pueden estar distribuidos de más de una manera.

Por ejemplo, si son  $n = 4$  niveles, con  $x = 2$  éxitos, las combinaciones posibles son eeff, efef, feef, effe, fefe, ffee. El número es igual a  $C(4,2)=6$ , combinaciones de 4 elementos, tomando 2 a la vez.

En general, con  $n$  niveles y  $x$  éxitos (que la bolita llegue a la casilla  $x$ , partiendo desde 0) es igual a las combinaciones de  $n$ , tomando  $x$  a la vez,  $C(n,x)$ .

Por lo tanto, la probabilidad de que la bolita llegue a la casilla  $x$  es

$$C(n, x) \times \frac{1}{2^n} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \times \frac{1}{2^n}$$

---

Primero veamos la fórmula para el cálculo de las probabilidades binomiales:

Por lo visto en el Ejemplo anterior, la probabilidad asociada a la casilla a que llega la bolita en el tablero de Galton, es un caso especial del modelo binomial, con  $p = 1/2$ .

Veamos el caso general de una binomial con parámetros  $n$  y  $p$ , donde  $n$  es un entero positivo y  $p$  un número real entre 0 y 1.

Si son  $x$  éxitos y  $n - x$  fracasos, la probabilidad de una posible combinación de ellos es el producto  $p^x (1-p)^{n-x}$

Sin embargo hay  $C(n,x)$  posibles combinaciones de los  $x$  éxitos y  $n - x$  fracasos. Todas estas posibilidades son mutuamente excluyentes, luego aplicamos el principio aditivo y los sumamos, lo que nos da una probabilidad

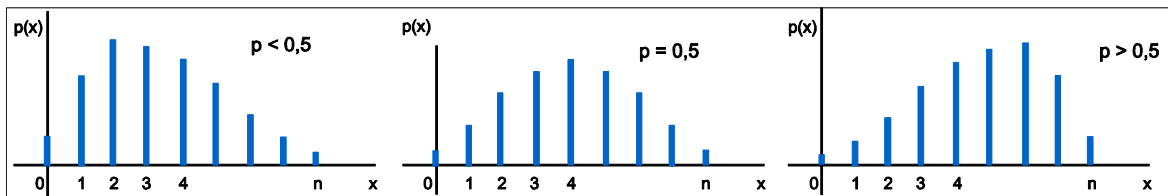
$$p(x) = C(n,x) p^x (1-p)^{n-x}$$

Esta es la función de probabilidad de la variable aleatoria **binomial** con parámetros  $n$  y  $p$ .

La frase  **$X$  es una variable aleatoria binomial con parámetros  $n$  y  $p$**  se anota en forma abreviada,  $X \sim B(n, p)$ .

También se puede decir  **$X$  tiene distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p$** .

El gráfico siguiente ilustra la función de probabilidad en tres casos:  $p < 0,5$  ;  $p = 0,5$  ;  $p > 0,5$ . En el primer caso el número de éxitos tiende a ser bajo, el segundo presenta simetría, y en el tercer caso el número de éxitos tiende a ser alto.



La función  $f(x) = C(n,x) p^x (1-p)^{n-x}$  que entrega las probabilidades de la binomial, es una función de la variable  $x$ , y se denomina **función de probabilidad** de la binomial.

La variable aleatoria binomial no es una sola. Por cada valor de los parámetros, vale decir, por cada valor de  $n$  y por cada valor de  $p$ , hay una binomial diferente.

Se dice que el modelo binomial define una **familia de distribuciones de probabilidades**. Cada par de valores  **$(n,p)$** , con  $n$  entero mayor que 0 y  $p$  decimal entre 0 y 1, determina un **miembro** de la familia.



Ahora veamos cómo se obtienen las probabilidades usando la **tabla de probabilidad binomial**, que permite hacerlo para algunos valores seleccionados de los parámetros **n** y **p**.

La tabla proporcionada en este texto, obra del autor, contiene **probabilidades acumuladas**, para los casos **n** = 1 hasta **n** = 30, cada uno con valores de **p** desde 0,05 variando de 0,05 en 0,05 hasta 0,95.

La asignación de probabilidades acumuladas se denomina **función de distribución** de la binomial.

Por cada uno de estos últimos, se encuentran las probabilidades acumuladas desde **x** = 0 hasta **x** = **n**, por filas.

Por ejemplo, binomial  $X \sim B(6;0,4)$ , encontrar  $P(X \leq 3)$

Se busca **n** = 6 con la columna **p** = 0,4. Aparece lo siguiente:

| n = 6<br>x/p | P=0.40 |
|--------------|--------|
| 0            | 0.0467 |
| 1            | 0.2333 |
| 2            | 0.5443 |
| 3            | 0.8208 |
| 4            | 0.9590 |
| 5            | 0.9959 |
| 6            | 1.0000 |

La probabilidad **acumulada**  $P(X \leq 3)$  aparece en la fila correspondiente a **x** = 3, y es igual a 0,8208.

El ejemplo siguiente ilustra el uso de la fórmula y el uso de la tabla:

### EJEMPLO 6.3

*Test respondido al azar.*



En un test en que se debe responder a 8 preguntas con un *Verdadero* o un *Falso*, una persona absolutamente desconocedora del tema responde todas las preguntas al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que responda *Verdadero* en 5 preguntas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que responda *Verdadero* en a lo menos 6 preguntas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que responda *Verdadero* en no más de 2 preguntas?

Resolución:

Consideremos como éxito el hecho de responder correctamente. La probabilidad de tener  $x$  éxitos está dada por un modelo Binomial con parámetros  $n = 8$  y  $p = 0,5$  y se obtiene mediante la expresión

$$P(x) = C(n,x) p^x (1-p)^{8-x} = C(8,x) 0,5^x 0,5^{8-x}$$

$$P(x) = C(8,x) 0,5^8 = 0,003906 C(8,x)$$

si  $x = 0, 1, 2, \dots, 8$

- Aplicando la fórmula que acabamos de ver, tenemos

$$P(5) = 0,003906 C(8,5) = 0,003906 \frac{8!}{5!3!} = 0,003906 \times 56 = 0,2188$$

b) Ahora se pide la probabilidad de a lo menos 6, eso significa que son 6, 7 u 8 éxitos.

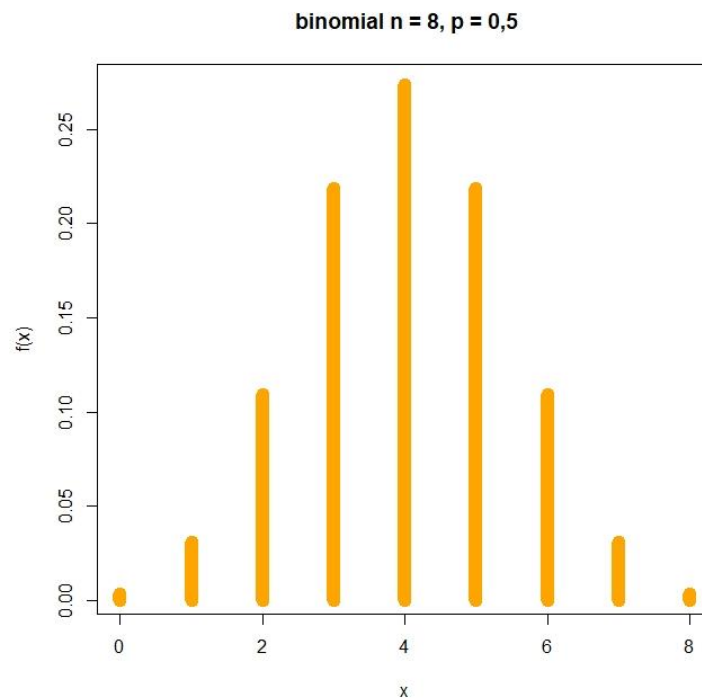
$$\begin{aligned} P(6) + P(7) + P(8) &= [C(8,6) + C(8,7) + C(8,8)] \times 0,003906 = \\ &= (28 + 8 + 1) \times 0,003906 = 0,1445 \end{aligned}$$

c) No más de 2 significa 0, 1, o 2 éxitos.

$$\begin{aligned} P(0) + P(1) + P(2) &= [C(8,0) + C(8,1) + C(8,2)] \times 0,003906 = \\ &= (1 + 8 + 28) \times 0,003906 = 0,1445 \end{aligned}$$

La probabilidad es la misma que en la parte b). Eso es por la simetría de las probabilidades binomiales cuando  $p=0,5$ .

La figura muestra la función de probabilidad de esta binomial con  $n = 8$  y  $p = 0,5$  usada en este ejemplo:



Ahora usaremos la tabla de probabilidades correspondiente a la binomial  $B(8;0,5)$  del Anexo 1. Iremos a la tabla correspondiente a  $n = 8$  con la columna de  $p = 0,5$ .

Recuerda que la tabla contiene los valores acumulados desde 0.

Parte a) Se pide  $P(x = 5)$ . Hay que buscar lo acumulado hasta 5 y restarle lo acumulado hasta 4 (filas de  $x=5$  y de  $x=4$ ):

$$P(X = 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 4) = 0,8555 - 0,6367 = 0,2188$$

Parte b) Por complemento,  $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,8555 = 0,1445$ .

Parte c) Se encuentra directamente en la tabla:

$$P(X \leq 2) = 0,1445.$$

No olvides que la tabla presenta los valores de probabilidad **acumulada** hasta el cuantil respectivo (el valor de  $x$ ).

---

## EJEMPLO 6.4

*Reacción química.*



La probabilidad de que dos reactivos determinados que se combinan, produzcan una reacción química, es 0,4. Se hace 4 ensayos.

Se supone que los resultados son independientes.

Sea **X** el *número de ensayos* en que se produce la reacción química.

Describiremos el espacio muestral, en que R indica que hubo reacción y N que no la hubo.

En cada caso se indica el valor de la variable aleatoria **X**, el número de reacciones, y la probabilidad, que se calcula multiplicando las probabilidades de cada resultado individual, debido a la independencia de estos.

| Resultado | X | Probabilidad                  |  | Resultado | X | Probabilidad                  |
|-----------|---|-------------------------------|--|-----------|---|-------------------------------|
| RRRR      | 4 | $0,04^4 = 0,0256$             |  | RNNR      | 2 | $0,4^2 \times 0,6^2 = 0,0576$ |
| RRRN      | 3 | $0,4^3 \times 0,6 = 0,0384$   |  | NRNR      | 2 | $0,4^2 \times 0,6^2 = 0,0576$ |
| RRNR      | 3 | $0,4^3 \times 0,6 = 0,0384$   |  | NNRR      | 2 | $0,4^2 \times 0,6^2 = 0,0576$ |
| RNRR      | 3 | $0,4^3 \times 0,6 = 0,0384$   |  | RNNN      | 1 | $0,4 \times 0,6^3 = 0,0864$   |
| NRRR      | 3 | $0,4^3 \times 0,6 = 0,0384$   |  | NRNN      | 1 | $0,4 \times 0,6^3 = 0,0864$   |
| RRNN      | 2 | $0,4^2 \times 0,6^2 = 0,0576$ |  | NNRN      | 1 | $0,4 \times 0,6^3 = 0,0864$   |
| RNRN      | 2 | $0,4^2 \times 0,6^2 = 0,0576$ |  | NNNR      | 1 | $0,4 \times 0,6^3 = 0,0864$   |
| NRRN      | 2 | $0,4^2 \times 0,6^2 = 0,0576$ |  | NNNN      | 0 | $0,6^4 = 0,1296$              |

Por ejemplo, el evento NNNN tiene probabilidad  $0,6 \times 0,6 \times 0,6 \times 0,6 = 0,64 = 0,1296$ ;

Vemos que el evento **X** = 0 está formado sólo por NNNN, luego su probabilidad es 0.1296;

el evento **X** = 3 está formado por RRRN, RRNR, RNRR, NRRR y luego tiene probabilidad

$$4 \times 0,0384 = 0,1536;$$

el evento **X** = 2 está formado por RRNN, RNRN, RNRR, NRRN, NRNR, NNRR y tiene probabilidad  $6 \times 0,0576 = 0,3456$ ;

y así, de esa manera se construye la función de probabilidad de X, que se muestra en la tabla siguiente:

| X    | f(X)   | Probabilidad acumulada |
|------|--------|------------------------|
| 0    | 0,1296 | 0,1296                 |
| 1    | 0,3456 | 0,4752                 |
| 2    | 0,3456 | 0,8208                 |
| 3    | 0,1536 | 0,9744                 |
| 4    | 0,0256 | 1,0000                 |
| Suma | 1      | --                     |

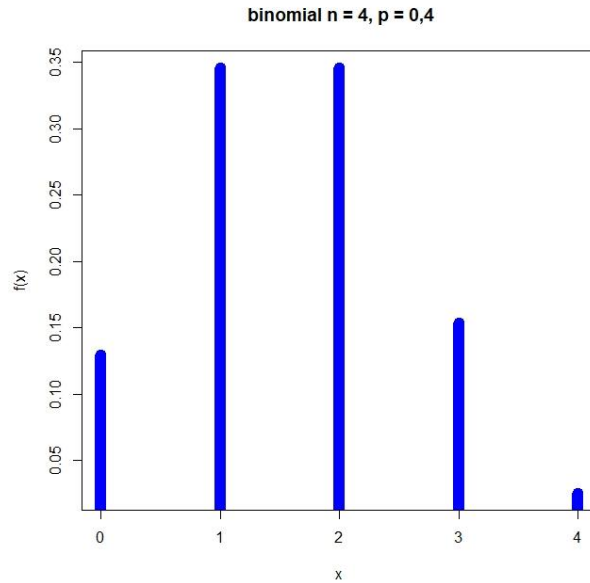
Si observas la tabla binomial correspondiente a **n** = 4, columna **p** = 0,4 puedes verificar que coincide con la columna de probabilidades acumuladas de la tabla entregada en este Ejemplo.

Además, puedes verificar que los valores de la función de probabilidad están dados por la siguiente fórmula, que corresponde a la función de probabilidad de una binomial B(4;0,4)

$$f(x) = \frac{4!}{x! (4-x)!} 0,4^x 0,6^{4-x}$$

con x tomando los valores 0, 1, 2, 3, o 4.

La figura siguiente ilustra la función de probabilidad binomial usada en este ejemplo, con n = 4, p = 0,4:



Como alternativa, en todos los casos anteriores puedes utilizar la tabla binomial presentada en el Anexo 1, que contiene las probabilidades acumuladas desde  $x = 0$ .

---

### EJEMPLO 6.5

---

*Control de calidad de cajas de cereales (continuación del Ejemplo 2.6).*



En el control de los pesos de cajas de cereales, las probabilidades del número de cajas con el peso correcto están dadas por la fórmula:

$$f(x) = \frac{3!}{x!(3-x)!} 0,8^x 0,2^{3-x}$$

Esta es la función de probabilidad de la variable aleatoria binomial, con parámetros **n** = 3 y **p** = 0,8.

Los valores de la función f(x) se dan en la tabla siguiente, donde se ve que f(x) es mayor que cero.

| Cajas con peso incorrecto | Probabilidad | Probabilidad acumulada |
|---------------------------|--------------|------------------------|
| 0                         | 0,008        | 0,0080                 |
| 1                         | 0,096        | 0,1040                 |
| 2                         | 0,384        | 0,4880                 |
| 3                         | 0,512        | 1,000                  |
| Suma                      | 1,000        | --                     |

Puedes verificar que las probabilidades acumuladas coinciden con los valores dados en la correspondiente tabla binomial.

Además,  $f(0)+f(1)+f(2)+f(3) =$

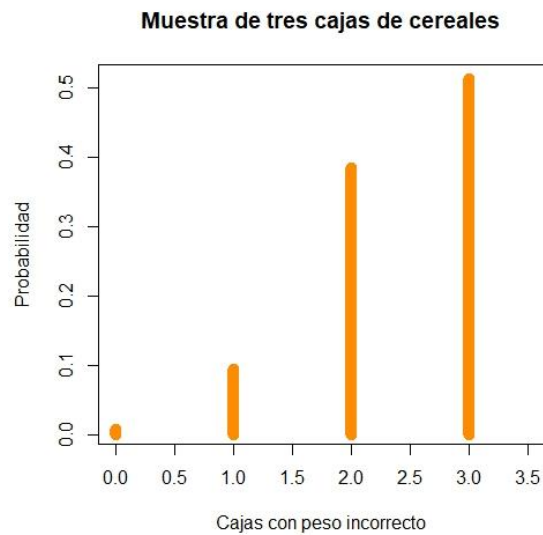
$$= \frac{3!}{0!3!} 0,8^0 0,2^3 + \frac{3!}{1!2!} 0,8^1 0,2^2 + \frac{3!}{2!1!} 0,8^2 0,2^1 + \frac{3!}{3!0!} 0,8^3 0,2^0 =$$

$$= 0,008 + 0,096 + 0,384 + 0,512 = 1$$

Entonces queda claro que corresponde a una función de probabilidad.

El siguiente gráfico de barras ilustra estas probabilidades:





Como alternativa, en todos los casos anteriores puedes utilizar la tabla binomial presentada en el Anexo 1.

---

### **EJEMPLO 6.6**

---

*Declaraciones de impuesto con errores.*



Supongamos que el 5% de las declaraciones de impuesto de determinados profesionales contiene errores.

Un fiscalizador revisa una muestra aleatoria de  $n = 25$  declaraciones de impuesto, seleccionadas aleatoriamente.

Supondremos que la población de estos profesionales, de donde se extrajo la muestra de 30, es muy grande. Por lo que el hecho que una declaración seleccionada contenga o no errores, aunque es una selección sin reposición, en la práctica no afecta la probabilidad de las demás de tener errores. Por lo tanto, podemos asumir que son independientes con respecto a la presencia de errores.

- a) Encuentra la probabilidad de que, en las 25 declaraciones, exactamente 3 contengan errores.
- b) Encuentra la probabilidad de que al menos 4 contengan errores.

Resolución:

- a) Sea **X** el número de declaraciones con errores, en la muestra de 25.

**X** es una variable aleatoria binomial, con parámetros **n** = 25 y **p** = 0,05.

Se escribe  $X \sim \text{Bin}(25; 0,05)$ .

Su función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{25!}{x!(25-x)!} 0,05^x (1-0,05)^{25-x}$$

para  $x = 0, 1, 2, \dots, 25$ .

$$\text{Entonces } P(X = 3) = f(3) = \frac{25!}{3!(25-3)!} 0,05^3 0,95^{25-3} = 0,0930$$

Usando la tabla binomial correspondiente a  $n = 25$  y  $p = 0,05$ , tenemos

$$P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0,9659 - 0,8729 = 0,0930$$

- b) Ahora vamos a encontrar la probabilidad de que al menos 4 declaraciones contengan errores. Por complemento,

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - f(0) - f(1) - f(2) - f(3) =$$

$$= 1 - 0,95^{25} - 25 \times 0,05 \times 0,95^{24} - 25 \times 12 \times 0,05^2 \times 0,95^{23} -$$

$$- 25 \times 4 \times 23 \times 0,05^3 \times 0,95^{22} =$$

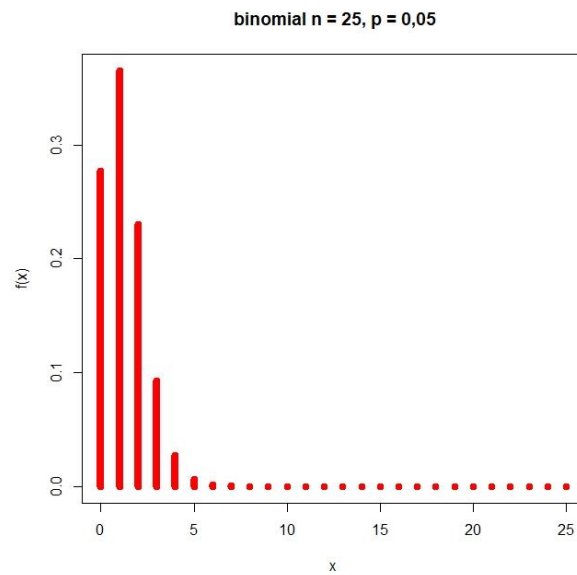
$$= 1 - 0,2774 - 0,3650 - 0,2305 - 0,0930 = 0,0341$$

Alternativamente, usando la tabla,  $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) =$

$$= 1 - 0,9659 = 0,0341$$

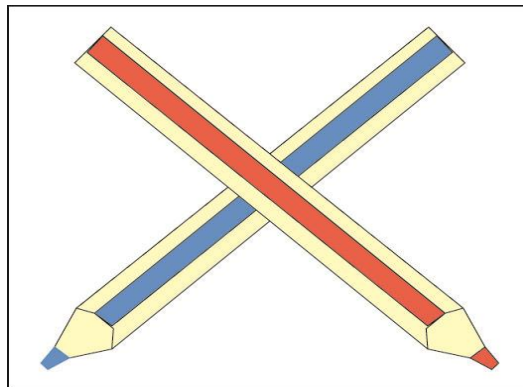
La siguiente figura muestra la función de probabilidad de una binomial con

$n = 25$  y  $p = 0,05$  usada en este ejemplo:



## EJEMPLO 6.7

*Lápices rojos y azules.*



Un proceso de fabricación de lápices produce lápices rojos y azules.

En una caja hay una gran cantidad de lápices de ambos colores, mezclados. El 30% son rojos y el 70% azules.

Se selecciona una muestra al azar de 5 lápices, con reposición (es decir, se extrae un lápiz, al azar, luego se devuelve y se revuelven los lápices antes de extraer el siguiente).

- a) Encuentra la probabilidad de que no haya ningún rojo en la muestra.
- b) Encuentra la probabilidad de que 1 sea rojo.
- c) Encuentra la probabilidad de que 2 o más sean rojos.

Resolución:

Sea **X** la variable aleatoria *número de rojos obtenidos* (éxitos). Esta situación corresponde a un experimento que se puede describir mediante un modelo binomial, con **n**=5 ensayos y probabilidad de éxito individual.

$$p = 30/(30 + 70) = 0,30.$$

Por lo tanto, la probabilidad que haya x rojos en la muestra está dada por

$$f(x) = \frac{5!}{x!(5-x)!} 0,30^x 0,70^{5-x} \quad \text{con } x = 0, 1, 2, 3, 4, \text{ o } 5$$

- a) La probabilidad de cero rojos en la muestra de 5 está dada por

$$f(0) = 1 \times 0,30^0 \times 0,70^5 = 0,1681$$

Si usamos la tabla binomial con **n** = 5 y **p** = 0.30 tenemos  $P(X = 0) = 0,1681$

- b) La probabilidad de un rojo es

$$f(1) = 5 \times 0,30^1 \times 0,70^4 = 5 \times 0,30 \times 0,2401 = 0,3601$$

Con la tabla,  $P(X = 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0) = 0.5282 - 0.1681 = 0,3601$

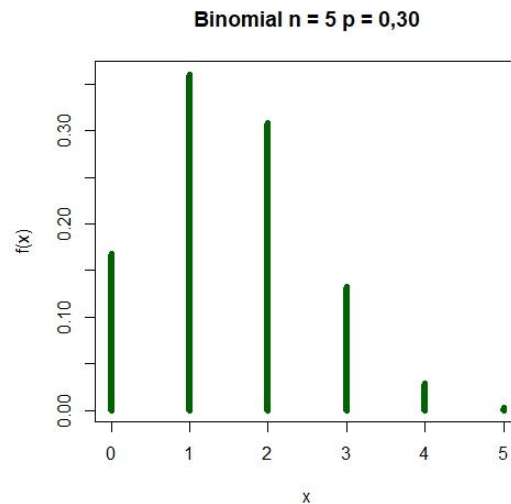
- c) La probabilidad de 2 o más rojos, o sea, más de un rojo es, por complemento,

$$1 - f(0) - f(1) = 1 - 0,1681 - 0,3601 = 0,4718$$

Con la tabla es  $1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,5282 = 0,4718$

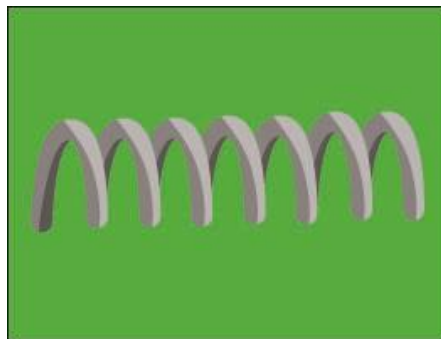
La figura muestra la función de probabilidad de la binomial con  $n = 5$  y

$p = 0,3$  para todos los valores posibles de  $x$ :



## EJEMPLO 6.8

*Verificación de especificaciones en compra de resortes.*



Un proceso de fabricación tiene 20 ítems en espera de ser provistos de un resorte que se compra a un proveedor externo.

Este proveedor entrega un 2% en cada lote, de resortes que no satisfacen las especificaciones (son defectuosos).

Puede suponerse que el estado de cada resorte es independiente de los demás.

- a) Si se compran 20 resortes, ¿cuál es la probabilidad de que se puedan proveer los 20 ítems sin tener que pedir más resortes?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos 2 defectuosos en el pedido?
- c) Para mayor seguridad de poder obtener los 20 resortes que cumplen las especificaciones, se decide comprar 22 resortes.

¿Cuál es la probabilidad de que haya 20 utilizables?

Resolución:

Sea **X** la variable aleatoria *número de defectuosos en el pedido*.

Entonces **X** ~ Bin(**n**; 0,02), en que **n** es el número de ítems pedidos.

Su función de probabilidad es

$$f(x) = \frac{20!}{x! (20-x)!} 0,02^x 0,98^{20-x}$$

para  $x = 0, 1, 2, \dots, 20$ .

- a) Se compran 20 resortes.

La probabilidad de que se puedan proveer los 20 ítems es

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{20!}{0!(20-0)!} \times 0,02^0 \times 0,98^{20} =$$

$$P(X = 0) = 1 \times 1 \times (0,98)^{20} = 0,6676$$

- b) En este caso el número de ítems defectuosos es mayor o igual a 2.

La probabilidad es

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - f(0) - f(1)$$

$f(0)$  lo obtuvimos en la parte a)

$$f(1) = \frac{20!}{1!(20-1)!} \times 0,02^1 \times 0,98^{20-1} = 20 \times 0,02 \times 0,98^{19} = 0,2725$$

De donde  $P(X \geq 2) = 1 - 0,6676 - 0,2725 = 0,0599$

c) Ahora  $n = 22$ , mientras que  $p$  se mantiene igual a 0,02.

Queremos que 0, 1 o 2 no cumplan las especificaciones.

La probabilidad es  $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) =$

$$1 \times 0,02^0 \times 0,98^{22} + 22 \times 0,02^1 \times 0,98^{21} + 11 \times 21 \times 0,02^2 \times 0,98^{20} =$$
$$= 0,6412 + 0,2879 + 0,0617 = 0,9907$$

La probabilidad de proveer los 20 resortes necesarios es obviamente mucho mayor, en este caso en que se compran 22, que en el caso en que se compran 20 resortes.

---

### Propiedades de la binomial.

Las propiedades siguientes se refieren al cálculo del valor esperado, o media poblacional, y de la varianza poblacional y la desviación estándar.

Recordemos que el valor esperado es una medida de centro de la variable aleatoria, mientras que la varianza y la desviación estándar son medidas de dispersión.

Propiedad 1. El valor esperado de la binomial con parámetros  $n$  y  $p$  es  $\mu = n \times p$

Podemos observar que si  $p < 0,5$  el valor esperado es menor que  $n/2$ , es decir, el valor esperado está hacia la izquierda.

Si  $p > 0,5$  ocurre lo contrario, el valor esperado es mayor que  $n/2$ .

Si  $p = 0,5$  el centro está justo en  $n/2$ , lo que es consistente con el hecho que la función de probabilidad es simétrica.

Recuerda que la unidad de medida del valor esperado es la misma que la de la variable aleatoria original.

Propiedad 2. La varianza poblacional de la binomial es  $\sigma^2 = n \times p \times (1 - p)$ .

Su desviación estándar es  $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1 - p)}$

La unidad de medida de la varianza es el cuadrado de la unidad de medida de la variable aleatoria.

La unidad de medida de la desviación estándar es la misma que la de la variable aleatoria.

## ACTIVIDAD COMPUTACIONAL 6.1

Usaremos Excel para resolver los Ejemplos 6.5 a 6.8.

Observación: los nombres de los comandos de Excel, destacados en negro, pueden variar de una versión a otra de la aplicación.

### **Ejemplo 6.5** *Control de calidad de cajas de cereales.*

En este ejemplo tenemos una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros **n** = 3 y **p** = 0,80.

a) Prob(X = 0)

Te posicionas en cualquier casilla de la planilla Excel.

Buscas en las funciones, activando el botón **fx**. Queremos las funciones Estadísticas.

Se desplegará un menú, en **Categoría** elegir **Estadísticas**.

De la lista de funciones estadísticas, con el deslizador de la derecha posíciónate en **DISTR.BINOM.N** y presionas **siguiente**.

Aparecerá un cuadro de campo con la palabra **Número**.



En el cuadro de campo se debe ingresar el valor cuya probabilidad deseamos, es decir 0.

Además ingresarás los valores de los parámetros:

**Ensayos**, este es **n**, con el valor 3.

**Prob\_éxito**, es **p**, con valor 0,8.

Al final hay una casilla con el rótulo **Acumulado**, en que debes ingresar la palabra **falso**.

Al presionar el botón **Aceptar** aparecerá el resultado 0,008

b)  $\text{Prox}(X = 1)$ . Igual a la parte a), excepto que **Número** ahora vale 1.

c)  $\text{Prox}(X = 2)$ . **Número** ahora vale 2.

d)  $\text{Prox}(X = 3)$ . Finalmente **Número** vale 3.

Como alternativa, puedes hacer la parte a) y en seguida copiarlos en las 3 casillas siguientes. Luego te posicionas en cada una de ellas y cambias el 0 por 1, 2 y por 3, respectivamente.

### **Ejemplo 6.6** *Declaraciones de impuesto con errores.*

En este ejemplo, de las declaraciones de impuesto con errores, tenemos una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros **n** = 25 y

**p** = 0,05.

a)  $\text{Prob}(X = 3)$ . **Número** vale 3.

**Ensayos**, este es **n**, toma el valor 25.

**Prob\_éxito**, es **p**, con valor 0,05.

b)  $\text{Prob}(X \geq 4) = 1 - \text{Prob}(X \leq 3)$ , por complemento.

Ahora ingresas lo siguiente: = 1 -

Luego presionas **f<sub>x</sub>** y sigues el procedimiento indicado en el Ejemplo 6.5. Con la diferencia que **Número** ahora vale 3, y en **Acumulado** pones verdadero.

Si deseas tener la función de probabilidad completa, desde  $x = 0$  hasta  $x = 25$ , puedes hacerlo rellenando 26 casillas con los número 0, 1, ..., 25.

Para eso colocas 0 en una casilla, 1 en la que está debajo.

Luego seleccionas las dos casillas, mueves el cursor al ángulo inferior derecho de la segunda, donde aparecerá una cruz. Sin soltar el botón izquierdo, desplázate hacia abajo. Aparecerán los números siguientes.

Luego, al lado de la casilla con el 0 ubicas la función **DISTR.BINOM.N**

Completas todo como en lo has hecho hasta ahora, excepto que en **Número**, en lugar de poner un valor colocas la referencia de la casilla donde está el cero. Por ejemplo, **B3**.

Cuando aparezca el resultado, posicionas el cursor en la casilla donde está la probabilidad, ubicas la cruz en el ángulo inferior derecho y deslizas el cursor hacia abajo. Aparecerán todas las probabilidades.

Una vez hecho esto, si sumas todas, con la función **sumar**, que aparece entre las funciones **matemáticas**, deberá dar por resultado 1.

### **Ejemplo 6.7** *Lápices rojos y azules.*

En este ejemplo, de la caja con lápices azules y rojos, el número de rojos en la muestra es una variable aleatoria binomial con parámetros **n** = 5 y probabilidad de éxito **p** = 0,30.

a) Prob( $X = 0$ ). **Número** vale 0.

**Ensayos**, n, toma el valor 5.

**Prob\_éxito**, p, con valor 0,30.

**Acumulado** es falso.

b)  $\text{Prob}(X = 1)$ . **Número** vale 1, lo demás igual.

c)  $\text{Prob}(X \geq 2)$ . Se puede hacer por complemento,  $1 - \text{Prob}(X \leq 1)$

En cualquier casilla, se ingresa  $= 1 - f_x$

Con  $f_x$  se procede como en la parte a) con **Número** igual a 1, y **Acumulado** igual a verdadero.

### **Ejemplo 6.8** Verificación de especificaciones en compra de resortes.

En este ejemplo, el número de resortes que no cumple las especificaciones en la muestra, es una variable aleatoria binomial con parámetros  $n = 20$  y probabilidad de éxito  $p = 0,02$ .

a)  $\text{Prob}(X = 0)$ . **Número** vale 0.

**Ensayos, n**, toma el valor 20.

**Prob\_éxito, p**, con valor 0,02.

**Acumulado** es falso.

b)  $\text{Prob}(X \geq 2) = 1 - \text{Prob}(X \leq 1)$ . **Número** vale 1, **Acumulado** igual a verdadero, lo demás igual.

c) Ahora la binomial tiene  $n = 22$ .

Se busca la probabilidad  $\text{Prob}(X = 0) + \text{Prob}(X = 1) + \text{Prob}(X = 2)$

La probabilidad se obtiene con **Número** igual a 2, **Ensayos** igual a 20, **Prob\_éxito** igual a 0,02 y **Acumulado** igual a verdadero.

## **ACTIVIDAD COMPUTACIONAL 6.2**

Usaremos el sistema R para resolver los Ejemplos 6.5 a 6.8:

Para obtener una probabilidad de que una variable aleatoria binomial con parámetro  $n$  ensayos y probabilidad de éxito  $p$ , tome el valor  $b$ ,  $P(X = b)$ ,

se usa el comando

**dbinom(b, n, p)**

Si se requiere la probabilidad **acumulada** de que la variable aleatoria tome los valores 0,1,...hasta b, es decir  $P(X \leq b)$ , se usa el comando

**pbinom(b, n, p)**

**Ejemplo 6.5** *Control de calidad de cajas de cereales.*

La variable aleatoria es el número de cajas de cereales que tienen el peso correcto, de la muestra de 3. Tiene distribución Binomial con **n** = 3 y **p** = 0,8.

Probabilidad de 0, usar **dbinom (0, 3, 0.8)**

Recuerda que en R las comas decimales deben sustituirse por puntos.

Probabilidad de 1, **dbinom (1, 3, 0.8)**

Probabilidad de 2, **dbinom (2, 3, 0.8)**

Probabilidad de 3, **dbinom (3, 3, 0.8)**

Se puede obtener los cuatro valores en conjunto, haciendo

```
x <- 0:3 # define un vector x = (0, 1, 2, 3)
```

(# significa que sigue una observación, que no se procesa)

```
dbinom (x, 3, 0.8) # entrega un vector con las cuatro probabilidades
```

Para construir el gráfico, usar el comando

```
plot(x, f, xlim=c(0,3.5), main="Muestra de tres cajas de cereales",  
xlab="Cajas con peso PESO incorrecto", ylab="Probabilidad",  
col="darkorange", type="h", lwd=10)
```

**xlim=c(0,3.5)** controla los límites del eje horizontal.

**main="Muestra de tres ..."** define el título del gráfico.

**xlab="Cajas con peso PESO incorrecto"** rótulo eje horizontal.

**ylab="Probabilidad"** rótulo  $f(x)$  eje vertical.

**Col="darkorange"** define el color de las barras. El comando **colors()** entrega una lista de colores disponibles.

**type="h"** dice que se representen los valores por barras verticales.

**lwd=10** hace que el ancho de las barras es 10.

### **Ejemplo 6.6** *Declaraciones de impuesto con errores.*

La variable aleatoria es el número de declaraciones de impuesto con errores, de la muestra de 25. Tiene distribución Binomial con  $n = 25$  y  $p = 0,8$ .

a) Probabilidad de 3 con errores, **dbinom (3, 25, 0.05)**

b) Probabilidad de que al menos 4 contienen errores,

**1 - pbinom (3, 25, 0.05)**

La letra inicial **p**, en lugar de **d**, indica que es una probabilidad acumulada.

### **Ejemplo 6.7** *Lápices rojos y azules.*

La variable aleatoria es el número de lápices rojos, de la muestra de 5. Tiene distribución Binomial con  $n = 5$  y  $p = 0,30$ .

a) Probabilidad de 0, **dbinom (0, 5, 0.30)**

b) Probabilidad de 1, **dbinom (1, 5, 0.30)**

c) Probabilidad de que la variable aleatoria sea mayor o igual a 2, usar **pbinom (2, 5, 0.30, lower.tail = FALSE)**

La letra inicial **p**, en lugar de **d**, indica que es una probabilidad acumulada.

**lower.tail=FALSE** indica que se acumulan los valores de probabilidad hacia la derecha, es decir, para  $x \geq 2$ .

**Ejemplo 6.8** Verificación de especificaciones en compra de resortes.

La variable aleatoria es el número de resortes defectuosos. En las partes a) y b), se tiene una muestra de 20 resortes. Tiene distribución Binomial con

$n = 20$  y  $p = 0,02$ .

a) Probabilidad de 0 defectuosos, **dbinom (0, 20, 0.02)**

b) Probabilidad de que el número de defectuosos es mayor o igual a 2,  
 $P(X \geq 2)$ ,

**pbinom (2, 20, 0.02, lower.tail = FALSE)**

c) En este caso se tiene una muestra de 22. Luego se trata de una Binomial con parámetros  $n = 22$  y  $p = 0,02$ . Se pide la probabilidad de que a lo más 2 son defectuosos.

**pbinom (2, 22, 0.02)**

En este caso es la probabilidad acumulada desde 0 hasta 2. Cuando es acumulada a la izquierda, con la variable aleatoria menor o igual a 2, no es necesario colocar **lower.tail=TRUE**.

Lo asume por defecto y sólo es necesaria cuando se trata de probabilidad acumulada a la derecha. En tal caso se usaría **pbinom (2, 22, 0.02, lower.tail=FALSE)**.

### ACTIVIDAD COMPUTACIONAL 6.3

Usa el sistema R para desarrollar la siguiente experiencia:

Ingresa un valor de **n**. Por ejemplo, 35.

Ingresa un vector con diferentes valores de **p**. Por ejemplo, (0,25; 0,5; 0,75).

Asume una variable aleatoria binomial con parámetros **n** y **p** (diversos **p**).

Calcula los valores esperados, las varianzas poblacionales y las desviaciones estándar, en cada caso.

Construye un gráfico para cada uno de los parámetros anteriores, versus el valor de **p**. No olvides colocar título y rótulos en los gráficos.

Obtén alguna conclusión de cada uno de ellos gráficos.

Repite todo lo anterior, pero ahora con un sólo valor para **p**. Por ejemplo 0,30. Y varios valores de **n**. Por ejemplo (10, 15, 20, 25, 30, 35).

Obtén alguna conclusión de cada uno de ellos.

---

## EJEMPLO 6.9

*Generación de imágenes digitales con contaminación.*

Una imagen digital consiste en un rectángulo de puntos, cada uno de ellos de un determinado color e intensidad. El color se obtiene combinando diversas intensidades de rojo, verde y azul. En general, las intensidades se expresan en escala entera entre 0 y 255, siendo 255 la máxima intensidad. Por el principio multiplicativo, el color resultante es uno de  $255 \times 255 \times 255 = 255^3 = 16.581.375$ . ¡Son muchos colores!

Pero los seres humanos no somos capaces de distinguir tantos tonos de color. Dicen que el sólo distinguimos un máximo de 10.000 colores distintos.

Los puntos de colores son los elementos básicos de la imagen y se denominan *pixeles*.

Supongamos que en un proceso de generación de imágenes digitales, el 22% de los pixeles resultan contaminados con ruido.

Se puede asumir que el evento de que un pixel está contaminado es independiente de que los restantes lo estén.

¿Cuál es el número promedio de pixeles contaminados en una imagen de  $75 \times 75 = 5625$  pixeles? ¿Cuál es su varianza y su desviación estándar?

Resolución:

El valor esperado es  $\mu = n \times p = 5625 \times 0,22 = 1237,5$  pixeles.

Se espera que de los 5625 pixeles que tiene la imagen, alrededor de 1238 estén contaminados

La varianza poblacional es

$\sigma^2 = n \times p \times (1 - p) = 5625 \times 0,22 \times 0,78 = 965,25$  pixeles<sup>2</sup>. Esta es una medida de la variabilidad entre una y otra imagen con las mismas características descritas.

Su desviación estándar es  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{965,25} = 31,068$  pixeles

Observa que, aunque la variable aleatoria sólo toma valores enteros, el valor esperado, la varianza y la desviación estándar no tienen por qué ser enteros.

Por ejemplo, el número promedio de hijos por familia, puede ser 1,9. ¡Aunque ninguna familia tiene 1,9 hijos!

---

### EJEMPLO 6.10

*Compra de vivienda.*





Un investigador social determinó que, entre las familias que tienen un ingreso anual entre los 12 millones y los 24 millones, un 20% ha adquirido una vivienda en el último año.

Si se selecciona una muestra aleatoria de 15 familias de este grupo, ¿cuál es la probabilidad de que entre 1 y 5 familias, inclusive, ha adquirido una vivienda en el último año?

Resolución:

Podemos asumir que, como la selección de la muestra es al azar, el número de familias que adquirió una vivienda en el último año es una variable aleatoria que tiene distribución binomial, con parámetros  $n = 15$ ,  $p = 0,20$ .

La función de probabilidad, entonces, está dada por

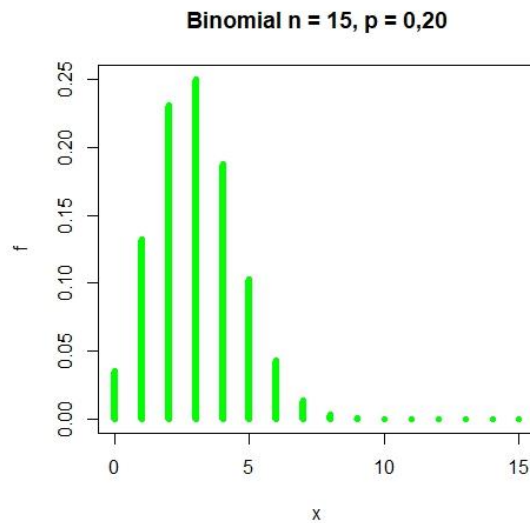
$$f(x) = \frac{15!}{x!(15-x)!} 0,20^x 0,80^{15-x} \quad \text{con } x = 0, 1, 2, \dots, 15$$

Los valores de probabilidad son las siguientes, redondeados a 4 decimales:

| x | f(x)   |  | x | f(x)   |  | x    | f(x)   |
|---|--------|--|---|--------|--|------|--------|
| 0 | 0,0352 |  | 5 | 0,1032 |  | 10   | 0,0001 |
| 1 | 0,1319 |  | 6 | 0,0430 |  | 11   | 0,0000 |
| 2 | 0,2309 |  | 7 | 0,0138 |  | --   | --     |
| 3 | 0,2501 |  | 8 | 0,0035 |  | 15   | 0,0000 |
| 4 | 0,1876 |  | 9 | 0,0007 |  | suma | 1      |

Desde  $f(11)$  hasta  $f(15)$  son iguales a 0, si los redondeamos a 4 decimales.

La siguiente imagen ilustra su función de probabilidad:



Ahora responderemos la pregunta:

La probabilidad de que entre 1 y 5, inclusive, de los 15 que hayan adquirido una vivienda en el último año, es

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) =$$

$$= 0,1319 + 0,2309 + 0,2501 + 0,1876 + 0,1032 = 0,9037$$

$$\text{Usando la tabla binomial, } P(1 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 0) =$$

$$= 0,9389 - 0,0352 = 0,9037$$

## EJERCICIOS

6.1) Se lanzan tres monedas balanceadas.

El espacio muestral original es

$$S = \{(C,C,C), (C,C,S), (C,S,C), (S,C,C), (C,S,S), (S,C,S), (S,S,C), (S,S,S)\}$$

La probabilidad de cada evento simple es  $1/8$ .

Encuentra la función de probabilidad del número de sellos en la muestra.

6.2) Como parte de una investigación acerca del sobrepeso en mujeres menores de 18 años, en una zona geográfica determinada, se toma una muestra de 3 personas.

Se sabe que la proporción de mujeres menores de 18 años sin sobrepeso es 0,80.

Encuentra la función de probabilidad de la variable aleatoria *mujeres menores de 18 años sin sobrepeso*.

6.3) Un club deportivo decide hacer una rifa para financiar sus actividades, para lo que dispone de 5 premios de valor similar.

Se decide emitir 50 números, que se venden entre sus socios. 5 de estos números obtendrán premios.

El día del sorteo se depositan en una caja 50 fichas, numeradas del 1 al 50. Se extraen al azar 5, sin reposición, las que corresponden a los números premiados.

Yo compré un número.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que no obtenga ningún premio?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga exactamente un premio?
- c) Si compro dos números, obtén la función de probabilidad del número de premios obtenidos.

6.4) La empresa Telewatch quiere obtener un rating para el programa televisivo *Domingo Show*.

Para ello encuesta hogares vía telefónica, a la hora en que se está transmitiendo el programa, para consultar si lo están viendo o no.

Supón que el 1% de los hogares ven este programa.

Se toma una muestra aleatoria de 25 personas.

Considera la variable aleatoria  $Y$  que denota el *número de hogares que están viendo Domingo Show en la muestra de 25*.

Encuentra su función de probabilidad y represéntalo en un gráfico de barras.

6.5) De 120 trabajadores de una empresa, 15 son ingenieros informáticos.

De entre los 120 se escogen 3 trabajadores al azar, sin remplazo, para integrar un comité.

Encuentra la función de probabilidad del número de ingenieros en la muestra de 15.

6.6) Un vendedor de seguros realiza 10 visitas en el día, y registra el número de ventas que se concretan.

La probabilidad de que una venta se concrete es 0,3.

Encuentra la función de probabilidad del número de ventas logradas en el día.

6.7) Un estudio revela que el 5% de los trabajadores sociales egresados de una determinada universidad tiene el grado de doctor.

Se selecciona una muestra aleatoria de 8 de estos egresados, y se cuenta el número de doctores en la muestra.

Encuentra la función de probabilidad del número de trabajadores sociales que tienen el grado de doctor, en la muestra de 8.

6.8) Supón que el 75% de los mensajes transmitidos por un determinado sistema llega correctamente.

Se transmiten 50 mensajes por un sistema de comunicación contaminado con ruido, y se registra el número de los que se recibieron correctamente.

a) Encuentra la probabilidad de que al menos 40 mensajes lleguen correctamente, de la muestra de 50.

b) Encuentra la probabilidad de que menos de 25 mensajes lleguen correctamente.

6.9) Supongamos que el 60% de las personas de un país determinado considera que sí son apropiadas las disposiciones legales sobre control de armas.

A 18 personas seleccionadas en forma aleatoria, se les consultó si son apropiadas las disposiciones legales sobre control de armas, y se cuenta el número de ellas que consideran que son insuficientes.

¿Cuál es la función de probabilidad del número de personas que considera que las disposiciones legales sobre control de armas son insuficientes?

6.10) Alberto es un trabajador social que está llevando a cabo un estudio.

Para ello necesita una cantidad de voluntarios que serán objeto de su estudio.

Cada día se comunica con tres personas para solicitarle que participe en su estudio.

Supongamos hay una probabilidad de 0,30 de que una persona cualquiera acceda a ser un voluntario.

¿Cuáles son las probabilidades de que ninguno de los tres acceda, de que 1 acceda, de que 2 accedan y de que los 3 accedan?

6.11) Supongamos que el 17% de los postulantes a las Universidades desea estudiar Agronomía, y elige esta carrera como primera opción.

Se extrae una muestra aleatoria de 30 postulantes seleccionadas aleatoriamente.

Supongamos que hay independencia entre las preferencias de los postulantes.

a) Encuentra la probabilidad de que en las 30 postulaciones, exactamente 3 eligen Agronomía como primera opción.

b) Encuentra la probabilidad de que ninguno selecciona Agronomía como primera opción.

c) Encuentra la probabilidad de que más de 1 elige Agronomía como primera opción.

d) Encuentra el valor esperado, la varianza y la desviación estándar del número de los que eligen Agronomía como primera opción, en la muestra de 30 postulantes. Interpreta.

6.12) Una jefa recibe 10 informes de sus subordinados. Resulta que 2 contienen información errónea.

Se seleccionan 3 informes al azar y se revisan.

Sea  $X$  la variable aleatoria *número de informes con información errónea en la muestra de tres*.

- a) Tabula la función de probabilidad de esta variable aleatoria y grafica los valores.
- b) Encuentra la probabilidad de que en la muestra haya a lo más un informe erróneo.
- c) Encuentra la probabilidad de que en la muestra haya al menos 2 informes erróneos.

(Ayuda: no se trata de una variable aleatoria binomial. ¿Por qué?)

6.13) Se sabe que 6 de 18 pequeñas empresas nuevas en una ciudad violan las disposiciones laborales de sus empleados.

Un inspector selecciona aleatoriamente 4 de estas empresas para su inspección.

Sea  $X$  la variable aleatoria *número de empresas que violan las disposiciones laborales de sus empleados*, de la muestra de 4.

Encuentra la probabilidad de que

- a)  $X = 0$                       b)  $X = 1$                       c)  $X=2$                       b)  $X$  es al menos 3.

6.14) Durante los últimos años, se ha logrado establecer que el 25% de los alumnos que ingresan por primera vez a cierta Universidad, reprueba todas las asignaturas de primer semestre.

En el segundo semestre, se elige al azar a 15 alumnos que ingresaron el semestre anterior a la Universidad.

- a) ¿Cuál es la probabilidad que sólo 5 de ellos hayan reprobado todas las asignaturas de primer semestre? Usa la tabla del Anexo 1

b) ¿Cuál es la probabilidad que a lo más 13 hayan reprobado todas las asignaturas de primer semestre?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que 8 o más hayan reprobado todas las asignaturas de primer semestre?

6.15) Un psicólogo está estudiando el ajuste emocional de un grupo de individuos, consistente en una muestra aleatoria de tamaño 12. Clasifica a los individuos bajo estudio en dos grupos, los que muestran un ajuste emocional aceptable (éxitos) y los que no (fracasos). La variable aleatoria  $X$ , que representa la cantidad de éxitos en la muestra, puede considerarse una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros  $n=12$  y  $p=0,7$ .

a) Calcula la probabilidad de que  $X$  sea igual a 5.

b) Encuentra el valor esperado, usando la definición dada en el capítulo 3. Interpretalo.

c) Encuentra la varianza y la desviación estándar, usando las definiciones dadas en el capítulo 4. Interpretalas.

d) Encuentra el valor esperado y la desviación estándar de  $X$  aplicando las definiciones dadas en el capítulo 4.

e) Encuentra el valor esperado y la desviación estándar de  $X$  aplicando las fórmulas que aplican para la binomial y compara con los resultados de la parte d).

6.16) Un sociólogo piensa que sólo la mitad de los egresados de la enseñanza media, con buenas aptitudes académicas, realmente ingresa a una Universidad.

Asume que lo que piensa el sociólogo es correcto, y asume que los eventos son independientes. De un grupo de 17 alumnos de 4o. medio, con buenas aptitudes académicas,

a) encuentra la probabilidad de que 10 o más ingresen a una Universidad;

b) encuentra la probabilidad de que a lo más 3 ingresen a la universidad;

6.17) En una fábrica, un jefe registra si el turno de noche tiene mayor índice de producción que el de día, en cada uno de los cinco días laborales de una semana, y que no hay empates.

Supón que el hecho de que el turno de noche tiene mayor índice de producción que el de día es independiente entre los distintos días.

- a) Describe un espacio muestral apropiado para el registro hecho por el jefe.
- b) Sea  $X$  la variable aleatoria *número de días en que el turno de noche tiene mayor producción*,

Supón que la probabilidad de que el turno de noche tiene mayor índice de producción es 0,46. Construye una tabla de probabilidades de  $X$ .

Encuentra el valor esperado y la desviación estándar del número de días de la semana en que el turno de noche tiene mayor índice de producción.

6.18) Un químico hace 12 ensayos, de entre los cuales en una cantidad aleatoria,  $X$ , se produce una reacción exitosa.

Supongamos que  $X$  tiene distribución binomial, con parámetros  $n=12$  y probabilidad de éxito  $p=0,7$ .

- a) Encuentra la función de probabilidad de  $X$ .
- b) Encuentra el valor esperado de  $X$ .
- c) Encuentra su varianza y su desviación estándar.
- d) Construye el gráfico de la función.

6.19) Un investigador determinó que, en cierto rubro específico, cuando se crea una microempresa, la probabilidad de que sobreviva los dos primeros años es 0,6.

Supongamos que se seleccionan 8 microempresas recién creadas, del rubro en cuestión, al azar.

Dos años después se ve cuáles están aún funcionando.



- a) Encuentra la función de probabilidad.
- b) ¿Cuál es el número esperado de microempresas de este rubro que sobrevive los dos primeros años?
- c) ¿Cuál es la varianza y cuál es la desviación estándar?
- d) Construye un gráfico de barras que ilustre las probabilidades calculadas en la parte a).

6.20) Un estudio reveló que el 40% de los trozos de pez espada en venta en ferias, pescaderías y supermercados, tenía un nivel de mercurio superior al límite establecido por la autoridad.

En una muestra aleatoria de 8 trozos, calcula la probabilidad de que

- a) 3 tengan un nivel de mercurio superior al límite,
- b) no más de 5 tengan un nivel de mercurio superior al límite,
- c) al menos 6 tengan un nivel de mercurio superior al límite.

6.21) Supongamos que en cierta zona geográfica se piensa que la probabilidad de que un hijo sea varón es  $\frac{4}{7}$ .

- a) Asumiendo que es así, ¿cuál es la probabilidad que una familia que tenga 4 hijos, los 4 sean mujeres?
- b) ¿Cuáles son las probabilidades que, de los cuatro, 1 es varón, que 2 son varones, que 3 son varones y que todos son varones?
- c) Construye un gráfico de barras que ilustre estas cinco probabilidades.
- d) ¿Cuál es el número esperado de hijos varones de una familia con cuatro hijos?
- e) ¿Cuál es la desviación estándar?

6.22) Una variable aleatoria  $X$  representa el número de personas que paga un tour nocturno por la ciudad en un minibús que tiene capacidad para 9 pasajeros.

Por experiencia se sabe que el número esperado de personas que paga el tour es 5,5.

Supondremos que  $X$  tiene distribución binomial.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un viaje cualquiera, el minibús viaje completo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una noche, no haya interesados en el tour?

c) ¿Cuál es la desviación estándar de  $X$ ?

6.23) Se tiene una variable aleatoria  $X$  con distribución binomial.

Se sabe que el valor esperado es 2,4 y la varianza es 1,68.

a) ¿Cuáles son los parámetros de la binomial?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que  $X$  sea menor o igual que 5 y mayor o igual que 3?



## 7 - Un modelo de error: la distribución normal.

*Muchas pequeñas causas de variación.*

### MOTIVACIÓN

---

La llamada **distribución normal**, o **distribución de Gauss**, es una variable aleatoria continua que sirve como modelo de errores en alguna medición, que no pueden atribuirse a una causa determinada, sino que corresponden a una suma algebraica de pequeños errores atribuidos a múltiples causas.

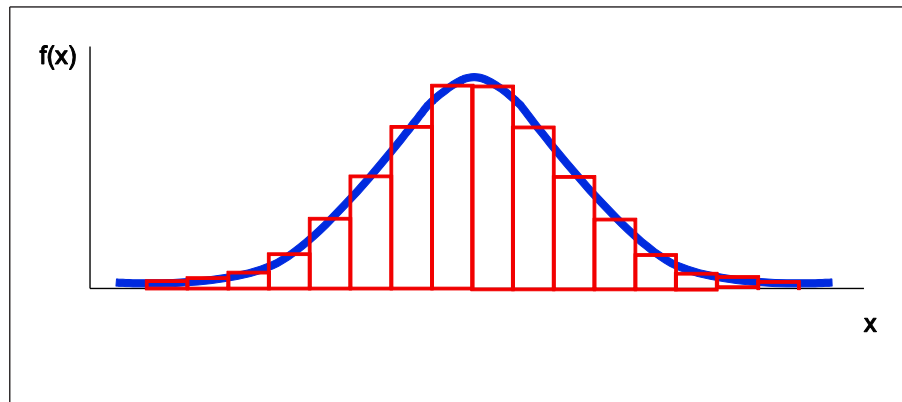
La variable aleatoria normal tiene dos parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , en que  $\mu$  es un número real que puede tomar cualquier valor, positivo o negativo, y  $\sigma$  es un número real positivo.

---

Si  $X$  tiene distribución normal se denota  $X \sim N(\mu, \sigma)$ .  $X$  es un número real con valores entre menos infinito y más infinito.

Como es una variable aleatoria **continua**, tiene algunas diferencias con las variables aleatorias **discretas**.

Podemos imaginarnos la función de probabilidad de la normal como un histograma de una binomial con parámetro  $p=1/2$ , en que cada intervalo tiene ancho casi cero, y hay un número muy grande de intervalos, como se muestra en la figura, pero con muchos intervalos muy pequeños.



Entonces las partes superiores de esos intervalos son tan angostos, que cada uno se reduce a un punto. Como cada uno está pegado a los de los lados y las partes superiores describen una curva.

La curva tiene la propiedad de ser simétrica en torno al valor de  $\mu$ .

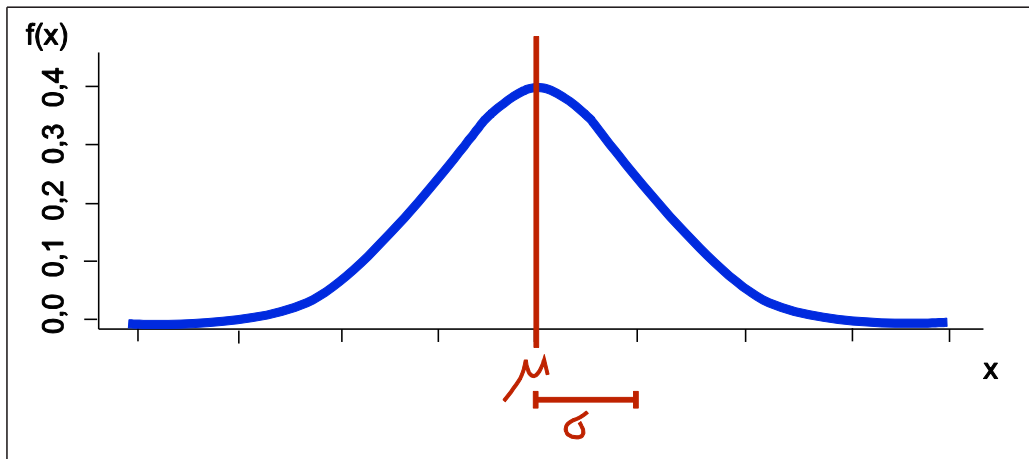
Esa curva se denomina **función de densidad de probabilidad**, o **función de densidad**, o simplemente, **densidad**.

La **función de densidad** de una variable aleatoria continua es el equivalente a una **función de probabilidad** de una variable aleatoria discreta.

Recuerda que en una variable aleatoria binomial, con parámetros  $n$  y  $p$ , los enteros  $0, 1, 2, \dots$ , hasta  $n$  tienen probabilidad positiva.

En cambio en una variable aleatoria continua, cada uno de los infinitos puntos tiene probabilidad cero. Aquí los eventos que tienen probabilidad positiva son **intervalos** de los números reales. En el contexto de una función de densidad, estos números, que se representan gráficamente en un eje horizontal, se denominan **cuantiles**.

La siguiente es una representación gráfica de una variable aleatoria normal:



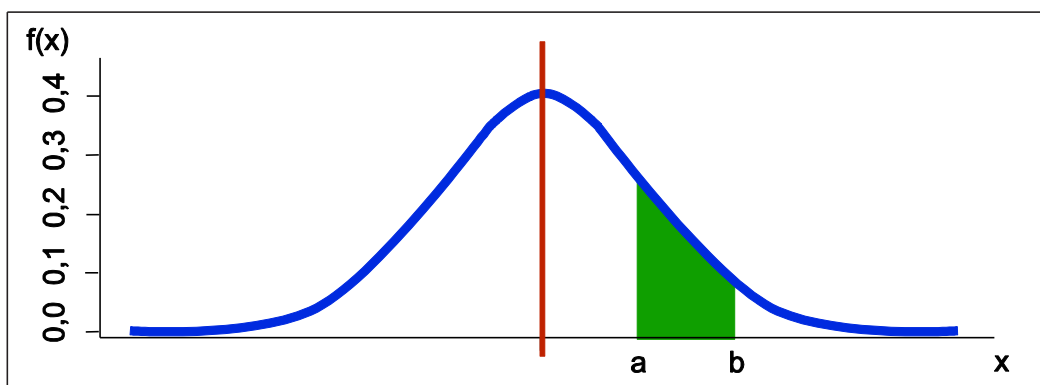
Entre las propiedades que tiene la normal, se tienen las siguientes:

Propiedad 1. - La curva que describe la función es simétrica en torno al valor del parámetro  $\mu$ . En realidad,  $\mu$  es el **promedio** o **media poblacional**.

Propiedad 2. - El parámetro  $\sigma$  define cuán dispersa es la curva. Es igual a la **desviación estándar poblacional** de esta distribución.

El cálculo de la media y desviación estándar poblacionales, para verificar que efectivamente son iguales a los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , tiene un nivel de dificultad que excede el de este texto.

Propiedad 3. - Si una variable aleatoria es normal, los eventos que tienen probabilidad positiva son intervalos de los números reales.



La probabilidad de un intervalo  $(a,b)$  es igual al área bajo la curva, entre los puntos  $a$  y  $b$ , como se muestra en la figura.

No tenemos un método para calcular estas probabilidades, por lo que sus valores están contenidos en una tabla. O bien, se puede usar algún programa computacional para encontrar las probabilidades.

En los ejemplos que siguen, veremos cómo usar la tabla, Excel y R, para calcular probabilidades con la distribución normal.

Algunos casos particulares:

Propiedad 4. - La probabilidad contenida en el intervalo entre

$(\mu - \sigma)$  y  $(\mu + \sigma)$  es 0.6827.

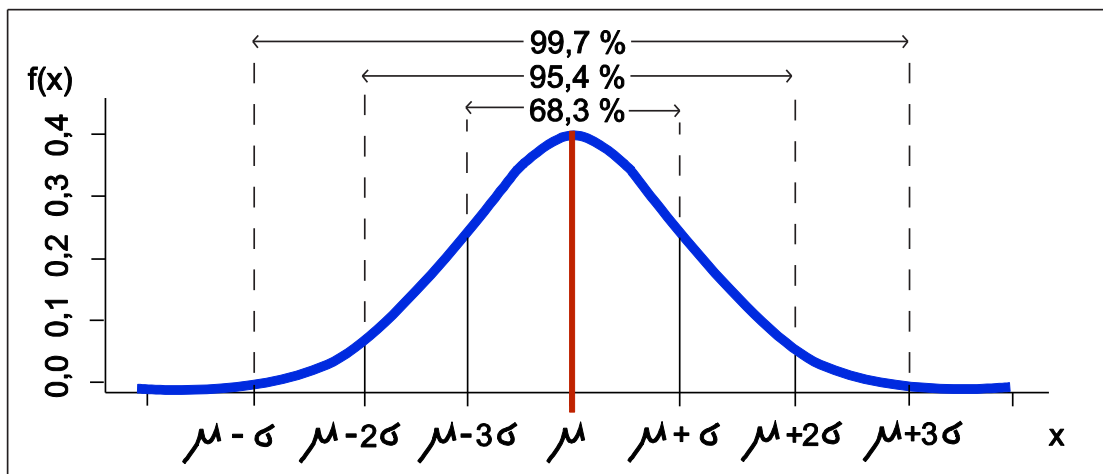
Propiedad 5. - La probabilidad contenida en el intervalo entre

$(\mu - 2\sigma)$  y  $(\mu + 2\sigma)$  es 0.9545.

Propiedad 6. - La probabilidad contenida en el intervalo entre

$(\mu - 3\sigma)$  y  $(\mu + 3\sigma)$  es 0.9973.

Esto último dice que casi toda la probabilidad está contenida en el intervalo entre los números  $(\mu - 3\sigma)$  y  $(\mu + 3\sigma)$ . El ancho de este intervalo es  $6\sigma$ .



### EJEMPLO 7.1

*Medición de radiación en una fuente de agua.*



Por disposiciones de salud, la cantidad de radiación del agua potable no debe exceder las 3 unidades por litro.

Supongamos que la radiación que contiene el agua en una fuente tiene distribución normal con parámetros  $\mu = 2.5$  unidades por litro y  $\sigma = 0.5$  unidades por litro.

¿Cuál es la probabilidad de que, en una medición, el resultado exceda las 3,0 unidades por litro?

Resolución:

Sea  $X$  la variable aleatoria *contenido de radiación* (en el agua proveniente de esa fuente).

Se pide  $P(X > 3)$

Observemos que  $\mu + \sigma = 2,5 + 0,5 = 3,0$ . Luego se pide  $P(X > \mu + \sigma)$ .

Por la propiedad 4, o bien observando el último gráfico, la probabilidad que está en el intervalo entre

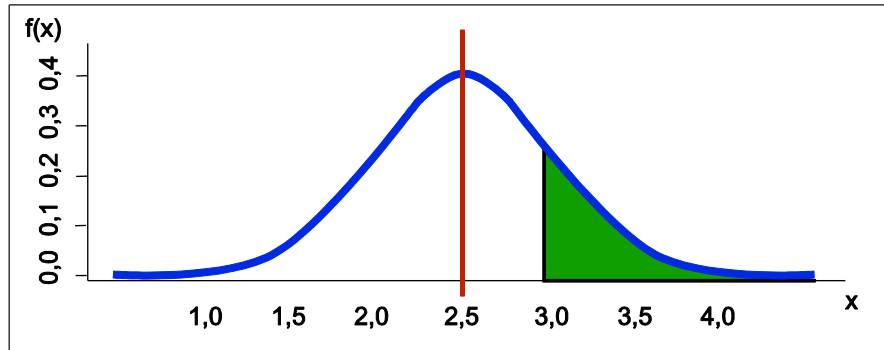
$\mu - \sigma = 2$  y  $\mu + \sigma = 3$  es 0,6827.

Luego la probabilidad de que esté fuera de este intervalo es  $1 - 0,6827 = 0,3173$ .

Se pide la probabilidad de que  $X$  sea mayor que 3.

Por la simetría de la normal, esa probabilidad es la mitad de 0,3173, es decir,

$$0,3173/2 = 0,1587.$$



Un caso particular de la normal es aquella en que el parámetro  $\mu$  vale 0 y el parámetro  $\sigma$  vale 1.

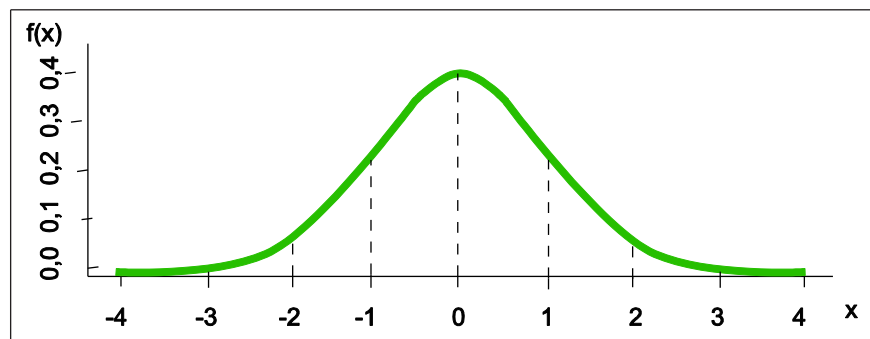
Una variable aleatoria  $X$  con distribución normal, con  $\mu = 0$  y  $\sigma = 1$  se denomina **variable aleatoria normal estándar**.

Una variable aleatoria normal estándar se suele designar con la letra  $Z$ , y su función de distribución  $\Phi(z)$ .

En escritura simbólica,  $Z \sim N(0, 1)$ .

Los valores de probabilidad de la variable aleatoria normal estándar se encuentran tabulados, pues, como dijimos antes, no es posible calcularlos utilizando métodos analíticos. Esta tabla se denomina **tabla de distribución** de la normal estándar.

La siguiente figura muestra la función de densidad de la normal estándar:





Más adelante veremos cómo obtener probabilidades de cualquier normal, a partir de la tabla de distribución de la normal estándar.

Recuerda que la normal (cualesquiera sean sus parámetros) tiene valores entre menos infinito y más infinito.

La tabla de distribución contiene las probabilidades acumuladas desde menos infinito hasta el valor del **cuantil** (número en el eje horizontal) que uno desea.

Nuestra tabla, que está en el Apéndice 2, tiene cuatro páginas. Las páginas 1 y 2 contienen los cuantiles negativos, desde -4,095 hasta 0,000; las páginas 3 y 4, los cuantiles positivos, desde 0,000 hasta 4,095. Los cálculos son del autor de este texto.

¿Qué pasa con los demás valores? Recuerda que casi toda la probabilidad se concentra entre -3 y +3 desviaciones estándar en torno a la media.

En este caso de la **normal estándar**, en que la media es 0 y la desviación estándar es 1, resulta que casi el 100% de la probabilidad está entre -3 y +3.

Por lo tanto, la probabilidad a la izquierda de -4,095 y a la derecha de 4,095 es casi cero (las **colas** de la distribución). Nuestra tabla tiene probabilidades con una precisión de cinco decimales, luego las probabilidades de las colas se aproximan a 0,00000.

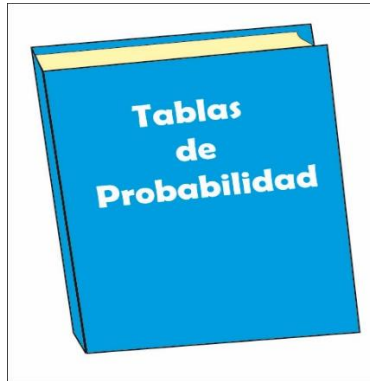
En efecto, si miras la tabla, la probabilidad acumulada hasta los primeros 21 valores es cero. Y la probabilidad acumulada hasta los últimos 21 valores es 1,00000. Los extremos, o colas, no aportan nada, a este nivel de precisión.

El Ejemplo siguiente muestra cómo, dado un número o **cuantil**, encontrar probabilidades acumuladas (a la izquierda o a la derecha) hasta ese número, usando la tabla de la normal estándar.

Como en el caso de la binomial, la función que asigna probabilidades acumuladas se denomina función de distribución de la normal.

## EJEMPLO 7.2

*Uso de la tabla normal estándar para calcular probabilidades a partir de cuantiles.*



En este Ejemplo vamos a aprender a usar la tabla de probabilidades de la variable aleatoria **normal estándar**, o tabla de distribución de la **normal estándar**.

La tabla de distribución contiene las **probabilidades acumuladas** desde menos infinito hasta el valor del **cuantil** que uno desea.

Supongamos que **Z** es una variable aleatoria normal estándar.

- a) Encuentra la probabilidad  $P(Z < 1,26)$ . Aquí el cuantil es 1,26.
- b) Encuentra  $P(Z < 2,74)$
- c) Encuentra  $P(Z > 0,625)$
- d) Encuentra  $P(Z < -2,3255)$
- e) Encuentra  $P(Z < 1,9387)$
- f) Encuentra  $P(Z \geq -0,280)$

Resolución:

- a) Debemos encontrar la probabilidad acumulada hasta 1,26

Los cuantiles se encuentran en los márgenes izquierdo y superior.

El margen izquierdo tiene el entero y el primer decimal. El margen superior tiene el 3er y 2º decimal.

En la página 4 de la tabla, columna de la izquierda, en la fila 13, encontramos el número 1,2.

En la parte superior está lo que falta para completar el cuantil, 1,260. En el margen superior encontramos el número 60. Si nos movemos hacia abajo, hasta la fila 13, obtenemos la probabilidad buscada 0,8962. Esa es la respuesta.

La siguiente imagen muestra la parte de la tabla que nos interesa, y lo que debíamos encontrar:

| z   |     | 55    | 60    | 65    |
|-----|-----|-------|-------|-------|
| ... | ... | ...   | ...   | ...   |
| 1.1 | ... | .8760 | .8770 | .8780 |
| 1.2 | ... | .8953 | .8962 | .8971 |
| 1.3 | ... | .9123 | .9131 | .9139 |

b) Para encontrar  $P(Z < 2,74)$  debemos ir a la página 3, fila correspondiente a 2,7 y columna correspondiente a 40. Encontramos una probabilidad acumulada de 0,9969 como se muestra en la imagen:

| z   |     | 35    | 40    | 55    |
|-----|-----|-------|-------|-------|
| ... | ... | ...   | ...   | ...   |
| 2.6 | ... | .9958 | .9959 | .9959 |
| 2.7 | ... | .9969 | .9969 | .9970 |
| 2.8 | ... | .9977 | .9977 | .9978 |

c)  $P(Z > 0,625)$ . Ahora nos piden la probabilidad hacia la derecha de 0,625.

Por lo tanto debemos obtenerla por complemento, es decir,

$$P(Z > 0,625) = 1 - P(Z \leq 0,625) = 1 - 0,7340 = 0,2660$$

El 0,734 se encuentra en la página 3, fila de 0,6 y columna de 25.

Recuerda que si la variable aleatoria es continua, como es el caso de la normal, da lo mismo el incluir o no el extremo, por tener probabilidad cero.

O sea,  $P(Z \leq 0,625)$  es lo mismo que  $P(Z < 0,625)$ . Esto no es válido en el caso de variables aleatorias discretas, como la binomial.

d)  $P(Z < -2,3255)$ . Buscamos en la página 2, fila -2,3 y columna -25.

Encontramos el valor 0,0100.

Como la tabla tiene **cuantiles** hasta tres decimales de precisión, no tenemos el valor -2,3255. Tenemos el -2,325 y el -2,330 siendo el más cercano el -2,325. Corresponde a la probabilidad acumulada de 0,0100.

e)  $P(Z < 1,9387)$ . Buscamos en la página 4, fila de 1,9. Pero no hay una columna de 387, por lo que tendremos que aproximar el cuantil a 1,940.

Encontramos 0,9738.

Luego  $P(Z < 0,9387)$  es aproximadamente igual a 0,9738.

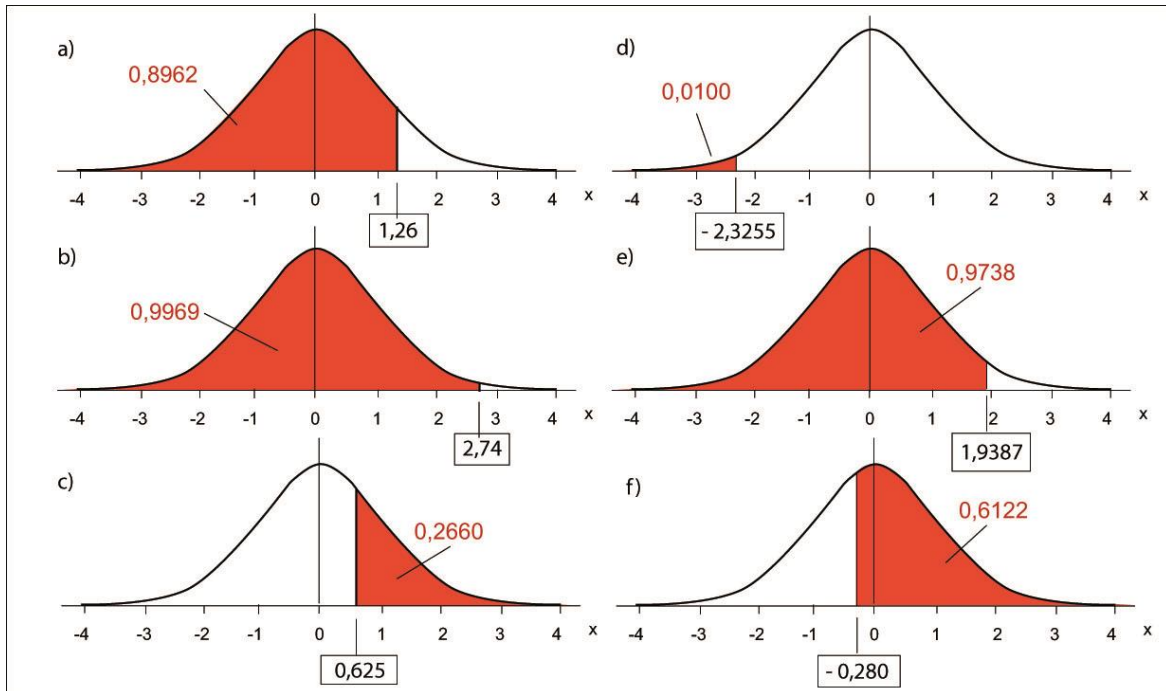
Observa que, si el cuantil es menor que cero, la probabilidad acumulada hasta él es menor que 0,5. Por otro lado, si el cuantil es mayor que 0, la probabilidad acumulada es mayor que 0,5. Esta es una buena manera de revisar por si cometimos errores graves al usar la tabla.

f)  $P(Z > -0,284)$ . Otra vez requerimos una probabilidad acumulada a la derecha del cuantil, por lo que recurrimos al complemento:

$$P(Z \geq -0,284) = 1 - P(Z < -0,284) = 1 - 0,3878 = 0,6122$$

Página 1, fila -0,2 columna 85 (aproximación de 84).

Las situaciones presentadas en a) hasta f) se ilustran en los gráficos presentados a continuación:



El siguiente ejemplo ilustra el problema inverso: dada una probabilidad, encontrar el **cuantil** de la normal estándar que acumula la probabilidad, ya sea a la izquierda o a la derecha.

Es un proceso recíproco al mostrado en el Ejemplo anterior.

Ahora, en lugar de buscar un **cuantil** en los márgenes izquierdo y superior de la tabla, debemos encontrar el valor de **probabilidad acumulada** más cercano a la probabilidad dada, en el interior de la tabla.

No es problema que el valor encontrado sea aproximado, porque la variación entre un número y el siguiente es muy poca. Además, los valores de probabilidad de la tabla son aproximados a cuatro decimales, no son exactos.

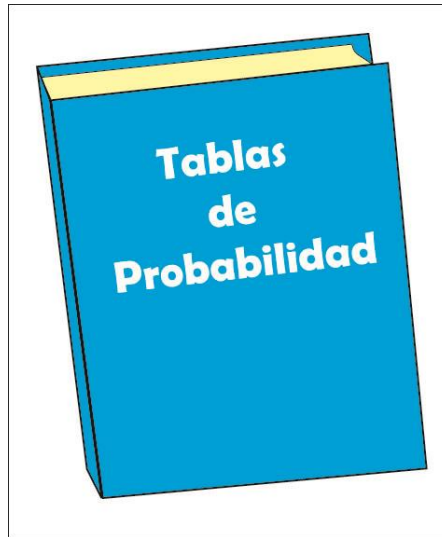
Si se observan los valores de probabilidad acumulada en las páginas 1 a 4 del anexo 2, partiendo por el ángulo superior izquierdo de la página 1 y terminando en el ángulo inferior derecho de la página 4 del anexo estándar, vemos que son siempre crecientes.

Por supuesto, pues corresponden a valores de probabilidad acumulados hasta cuantiles que van aumentando.

Entonces no es difícil encontrar una probabilidad que sea parecido al valor buscado.

### EJEMPLO 7.3

*Uso de la tabla normal estándar para obtener cuantiles a partir de probabilidades acumuladas.*



Sea **Z** una variable aleatoria normal estándar, es decir,  $N(0,1)$ .

a) La probabilidad acumulada hasta un valor  $t$  es  $P(Z < t) = 0,943$ .

¿Cuánto es  $t$ ?

b) Como a), con probabilidad acumulada  $P(Z < t) = 0,123$ .

c) Como a), pero la probabilidad ahora es  $P(Z > t) = 0,600$  acumulada hacia la derecha.

d) Como a), con  $P(Z \geq t) = 0,9784$ .

Resolución:

a) Debemos encontrar el valor de probabilidad más cercano al 0,943 en el interior de la tabla. Como es un valor cercano a uno, buscamos en el interior de la página 4, que contiene valores de probabilidad acumulada grandes.

El valor más cercano es 0,9429. Corresponde a la fila 1,5 y a la columna 80.

Por lo tanto si  $t=1,580$ ,  $P(Z < 1,580) = 0,943$  aproximadamente.

b) Ahora debemos encontrar el valor de probabilidad más cercano al 0,123 en el interior de la tabla.

Esta vez encontramos el valor exacto 0,1230 en la página 1. Corresponde a la fila -1,1 y a la columna -60.

Por lo tanto si  $t = -1,160$ ,  $P(Z < -1,160) = 0,123$ .

c) En este caso se pide  $t$  tal que  $P(Z > t) = 0,600$ . Se trata de una probabilidad acumulada a la derecha, luego debemos recurrir al complemento, y tenemos que  $P(Z \leq t) = 1 - 0,600 = 0,400$ .

Encontramos el valor más cercano a 0,400 en el interior de la tabla. Resulta ser el 0,3994, al final de la página 1.

Corresponde a la fila -0,2 y a la columna -55.

Luego  $t = -0,255$  es el valor buscado. Entonces  $P(Z \leq -0,255) = 0,400$  y, equivalentemente,  $P(Z > -0,255) = 0,600$ .

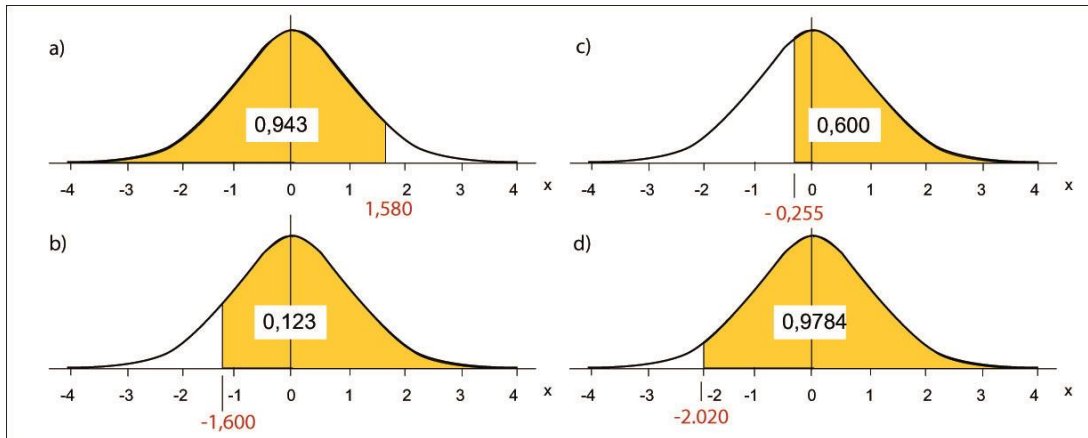
d)  $P(Z \geq t) = 0,9784$ . Equivale a  $P(Z < t) = 1 - 0,9784 = 0,0216$

El valor de probabilidad más cercano a 0,0216 se encuentra en la página 2, y es el -2,017. Corresponde a la fila -2,0 y a la columna -20.

Luego,  $t = -2,020$ . Entonces  $P(Z \geq -2,020) = 0,9784$  aproximadamente.

Recuerda que, en el caso continuo, como este, la probabilidad en un punto es cero, entonces da lo mismo  $P(Z \geq t)$  o  $P(Z > t)$ .

La figura siguiente ilustra las situaciones presentadas en a) hasta d):



### Propiedades de la normal (continuación).

Las propiedades siguientes permiten, mediante una simple transformación, pasar de cualquier normal a una normal estándar, y vice versa.

Propiedad 7. - Sea  $\mathbf{X}$  una variable aleatoria normal con parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ .

Entonces si  $\mathbf{Z} = (\mathbf{X} - \mu) / \sigma$ , entonces  $\mathbf{Z}$  tiene distribución normal estándar,  $\mathbf{Z} \sim N(0, 1)$ .

Propiedad 8. - Sea  $\mathbf{Z}$  una variable aleatoria normal estándar y sean  $\mu$  y  $\sigma$  dos números reales con la restricción  $\sigma > 0$ . Entonces la variable aleatoria  $\mathbf{X} = \mu + \sigma \mathbf{Z}$  tiene distribución normal  $N(\mu, \sigma)$ .

Estas propiedades son muy importantes.

Dado que no se tiene una expresión analítica para la función de distribución, para calcular probabilidades de intervalos con la normal se puede recurrir a valores tabulados.

Y sólo basta con disponer de una tabla para la **normal estándar**, pues las Propiedades 7 y 8 nos permiten pasar de cualquier normal a la normal estándar, y vice versa, como se muestra en el ejemplo siguiente.

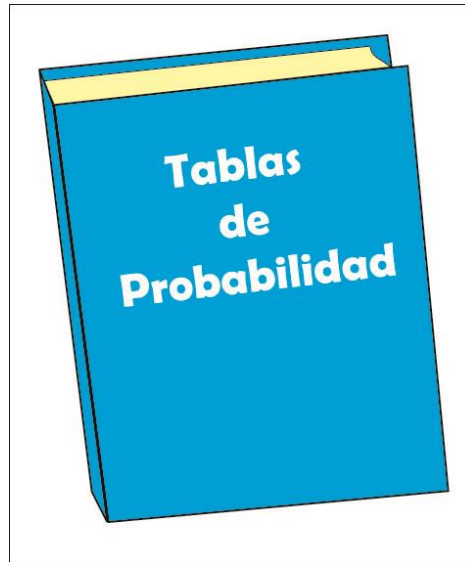


Recordemos que la tabla es una **tabla de distribución**, eso significa que contiene las **probabilidades acumuladas** desde menos infinito hasta diversos cuantiles.

La transformación  $\mathbf{Z} = (\mathbf{X} - \mu) / \sigma$  se llama estandarización de  $\mathbf{X}$ .

#### EJEMPLO 7.4

*Uso de la tabla para la obtención de probabilidades en una normal no estándar.*



Sea  $\mathbf{X}$  una variable aleatoria normal con media  $\mu = 10$  y desviación estándar  $\sigma = 2$ . Es decir,  $\mathbf{X} \sim N(10,2)$ .

Obtén las siguientes probabilidades:

- a)  $P(\mathbf{X} < 5)$
- b)  $P(\mathbf{X} < 13)$
- c)  $P(\mathbf{X} > 4,4)$
- d)  $P(\mathbf{X} > 10,4)$

Resolución:

En todos estos casos, estandarizamos la variable aleatoria **X** y la transformamos en una normal estándar, aplicamos la Propiedad 7 y luego usamos la tabla normal estándar.

a) Decir que **X** < 5 es equivalente a la desigualdad obtenida restándole la media a ambos lados de la desigualdad, y dividiendo por la desviación estándar.

Es decir, **X** < 5 es equivalente a  $(X - \mu)/\sigma < (5 - \mu)/\sigma$ ,

con  $\mu = 10$  y  $\sigma = 2$ .

Si hacemos **Z** =  $(X - \mu)/\sigma$  entonces, por la propiedad 7, **Z** tiene distribución normal estándar.

Entonces  $P(X < 5) = P(Z < (5 - 10)/2) = P(Z < -2,5)$

Este valor lo buscamos en la tabla normal estándar, página 2, fila -2,5, columna 00.

Se obtiene  $P(X < 5) = 0,0062$ .

b)  $P(X < 13) = P(Z < (13 - 10)/2) = P(Z < 1,5)$

De la tabla normal,  $P(Z < 1,5) = 0,9332$ .

c)  $P(X > 4,4) = P(Z > (4,4 - 10)/2) = P(Z > -2,8) = 1 - P(Z \leq -2,8)$  por complemento.

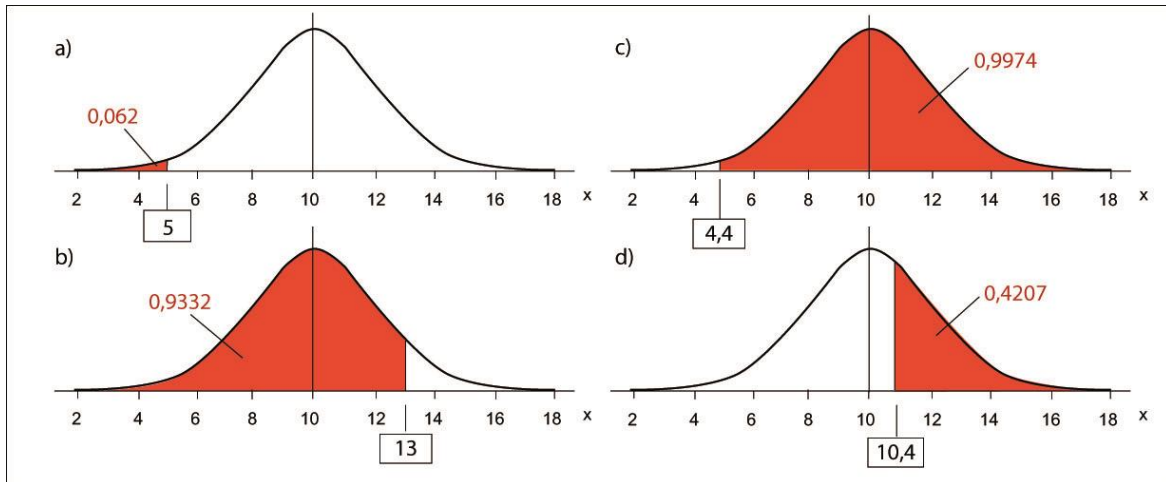
De la tabla normal,  $P(Z \leq -2,8) = 0,0026$

Luego  $P(X > 4,4) = 1 - 0,0026 = 0,9974$

d)  $P(X > 10,4) = P(Z > (10,4 - 10)/2) = P(Z > 0,2) =$

$= 1 - P(Z \leq 0,2) = 1 - 0,5793 = 0,4207$

La figura siguiente ilustra las situaciones presentadas en a) hasta d):



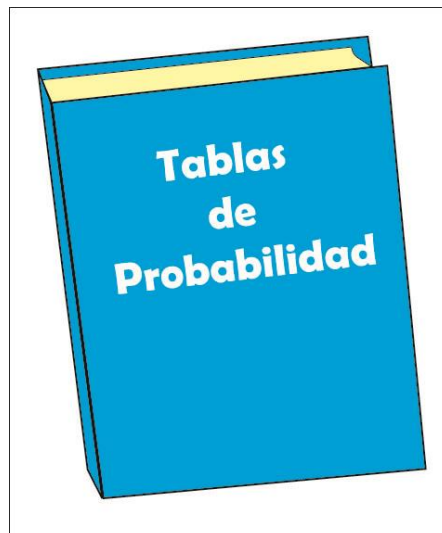
En el Ejemplo siguiente veremos cómo, dada una probabilidad, encontrar un cuantil tal que la probabilidad acumulada tiene el valor dado.

Es lo mismo que hicimos en el caso de la normal estándar, pero ahora para cualquier normal.

Nos basaremos en la Propiedad 8.

### EJEMPLO 7.5

*Uso de la tabla para la obtención de cuantiles en una normal no estándar.*



Sea  $\mathbf{X}$  una variable aleatoria normal con media  $\mu = 3$  y desviación estándar  $\sigma = 1,2$  es decir,  $\mathbf{X} \sim N(3;1,2)$ .

a) La probabilidad acumulada hasta un valor  $s$  es  $P(X < s) = 0,231$ .

¿Cuánto es  $s$ ?

b) Como a), con probabilidad acumulada  $P(X < s) = 0,962$ .

c) Como a), pero la probabilidad ahora es  $P(X > s) = 0,506$ ; acumulada hacia la derecha.

d) Como a), con  $P(X > s) = 0,2856$ .

Resolución:

a)  $P(X < s) = 0,231$ . Encontrar el cuantil  $s$ .

El método para encontrar el cuantil que acumula una probabilidad dada es el siguiente:

Se busca el valor de  $t$  tal que  $P(Z < t) = 0,231$  tal como lo hicimos dos ejemplos antes.

De la tabla normal estándar, obtenemos  $t = -0,736$

Observamos que si  $Z < t$ , al multiplicar ambos lados de la desigualdad por  $\sigma$  y sumarle  $\mu$ , resulta la desigualdad equivalente  $\mu + \sigma Z < \mu + \sigma t$

Esto es así porque sabemos que  $\sigma$  es positivo. Si fuera negativo, se invertiría la desigualdad.  $\mu$  da lo mismo si es positivo, negativo o cero, porque se suma.

Luego desestandarizamos el valor de  $t$  encontrado. O sea, aplicamos la Propiedad 8 y calculamos

$$s = \mu + \sigma t = 3 + 1,2 \times (-0,735) = 2,1173$$

b)  $P(X < s) = 0,962$ ; encuentra  $s$ .

Si buscamos  $t$  tal que  $P(Z < t) = 0,962$  en la Tabla Normal Estándar, encontramos  $t = 1,775$ .

Ahora hacemos la transformación  $s = \mu + \sigma t = 3 + 1,2 \times (1,775) = 5,13$

c)  $P(X > s) = 0,506$ ; encuentra  $s$ .

Ahora se da la probabilidad acumulada a la derecha, luego debemos recurrir al complemento, que es equivalente,  $P(Z < t) = 1 - 0,506 = 0,494$ .

En la Tabla Normal Estándar buscamos  $t$  tal que

$P(Z < t) = 0,494$  y encontramos  $t = -0,015$ .

Ahora hacemos la transformación  $s = \mu + \sigma t = 3 + 1,2 \times (-0,015) = 2,982$

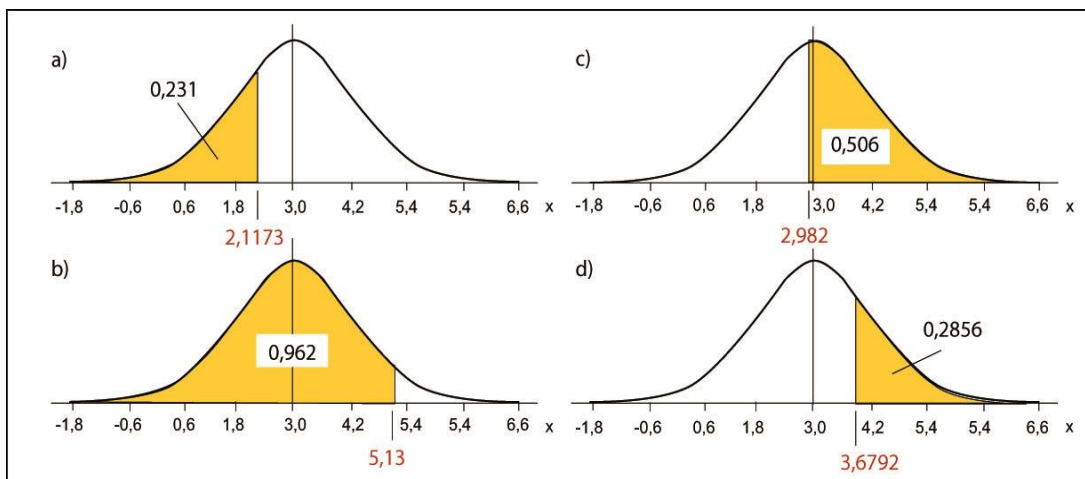
d)  $P(X > s) = 0,2856$ ; encuentra  $s$ .

Nuevamente debemos recurrir al complemento.

Si buscamos  $t$  tal que  $P(Z < t) = 1 - 0,2856 = 0,7144$  en la Tabla Normal Estándar, encontramos el valor más cercano  $t = 0,565$ .

Ahora hacemos la transformación  $s = \mu + \sigma t = 3 + 1,2 \times (0,565) = 3,678$ .

La figura siguiente ilustra las situaciones presentadas en a) hasta d):



Las siguientes Actividades Computacionales se refieren al uso de una planilla Excel. Debes tener presente que los comandos que aparecen en la planilla, pueden variar ligeramente según la versión de Excel que estés usando.

## ACTIVIDAD COMPUTACIONAL 7.1

Veremos cómo obtener probabilidades de la normal, dado un cuantil, utilizando Excel. Recuerda que los comandos pueden cambiar dependiendo de la versión del Excel.

### **Ejemplo 7.2 parte a)** Encontrar $P(Z < 1,26)$

Te debes posicionar en cualquier casilla de la planilla Excel.

Buscas en las funciones, activando el botón **fx**. Nos interesan las funciones Estadísticas.

Se desplegará un menú, en **Categoría** elige **Estadísticas**.

De la lista de funciones estadísticas, con el deslizador posicIÓNATE en **DISTR.NORM.ESTAND** y presiona **siguiente**

Aparecerá un cuadro de campo con la palabra **Número**.

En el cuadro de campo debes ingresar el valor del cuantil 1,26.

Al presionar el botón **Aceptar** aparecerá el resultado 0,8962 (con varios decimales más).

### **Ejemplo 7.2 parte c)** Encontrar $P(Z > 0,625)$

En este caso queremos la probabilidad acumulada a la derecha de 0,625. El comando **DISTR.NORM.ESTAND** nos proporciona la probabilidad acumulada a la izquierda.

Por lo tanto, se recurrirá al complemento.

Se sigue el procedimiento anterior, ingresando el valor 0,625 en el cuadro de campo.

En otra casilla, por ejemplo, la que está al lado derecho de la casilla anterior, ingresar 1- la dirección de la primera casilla.

Por ejemplo, si primero nos posicionamos en la casilla C4, ahí estará el valor de  $P(Z < 0,625)$

En la casilla D4 ingresamos 1-C4 y aparecerá el complemento, vale decir,  $P(Z > 0,625)$ . Recuerda que la normal es continua, luego la probabilidad en 0,625 es cero,  $P(Z = 0,625) = 0$ .

Ahora que sabes cómo se hace, resuelve las partes a), b), d), e) y f).

---

## ACTIVIDAD COMPUTACIONAL 7.2

---

Ahora veremos cómo obtener cuantiles de la normal estándar, dado una probabilidad acumulada, utilizando Excel.

**Ejemplo 7.3 parte a)** Encontrar  $t$  tal que  $P(Z < t) = 0,943$ .

Te posicionas en cualquier casilla de la planilla Excel.

Buscas en las funciones, activando el botón **fx**. Nos interesan las funciones Estadísticas.

Se desplegará un menú, en **Categoría** elegir **Estadísticas**.

De la lista de funciones estadísticas, con el deslizador de la derecha posicionarse en **INV.NORM.ESTAND** y presionar **siguiente**.

Aparecerá un cuadro de campo con la palabra **Número**.

En el cuadro de campo se debe ingresar el valor de probabilidad 0,943.

Al presionar el botón **Aceptar** aparecerá el resultado 1,580.

Ese es el valor de  $t$ .

**Ejemplo 7.3 parte c)** Encontrar  $t$  tal que  $P(Z > t) = 0,600$ .

En este caso la probabilidad acumulada a la derecha de 0,600.

Se recurrirá al complemento.

Lo anterior es equivalente a encontrar  $t$  tal que

$$P(Z \leq t) = 1 - 0,600 = 0,400$$

Por lo tanto, en una casilla, por ejemplo, D5, ingresamos el 0,600. En la casilla del lado, E5, hacemos 1-D5 y obtenemos 0,400.

En otra casilla, por ejemplo, F5, ingresamos el comando

**INV.NORM.ESTAND.**

Cuando nos pidan el valor de la probabilidad, ingresamos el valor 0,400 o bien la dirección E5 donde está el valor 0,400.

Ahora continúa con las partes c) y d).

---

### ACTIVIDAD COMPUTACIONAL 7.3

---

En esta actividad veremos cómo obtener probabilidades de cualquier normal, no estándar, utilizando Excel.

Haremos los ejercicios resueltos en el **Ejemplo 7.4**, en que calculamos probabilidades bajo una normal  $X \sim N(10,2)$ , con media 10 y desviación estándar 2.

En la parte a) debemos encontrar  $P(X < 5)$ .

Si ya hiciste la Actividad 7.2, en que se pedía calcular probabilidades bajo la normal estándar podrás realizar fácilmente esta actividad.

El procedimiento es el mismo que el que seguimos en la Actividad 2, excepto que aquí, en lugar de elegir el comando **DISTR.NORM.ESTAND**, debes elegir **DISTR.NORM**.

Y en lugar de sólo ingresar el cuantil, ahora te pedirá el cuantil, la media y la desviación estándar.



Para eso, aparte de llenar el cuadro de campo **número**, con el valor del cuantil, 5, se completan los cuadros de campo **media** con el valor 10, y **desv\_estándar**, con el valor 2. En todos los casos puedes ingresar la casilla donde se encuentran estos valores, por ejemplo, C4.

Hay un cuarto campo, denominado **C**, que deberás dejarlo en blanco.

El resultado que aparecerá es 0,00620 (redondeado a 5 decimales).

La parte b), encontrar  $P(X < 13)$  es similar a la anterior.

En el caso de c), encontrar  $P(X > 4,4)$ , se debe encontrar  $P(X < 4,4)$ , y en otra casilla hacer  $1 - P(X < 4,4)$ .

La parte d), encontrar  $P(X > 8,4)$  es similar.

---

#### ACTIVIDAD COMPUTACIONAL 7.4

En esta actividad se debe encontrar cuantiles de una normal no estándar, dadas las probabilidades, utilizando Excel, en particular, en los casos presentados en presentados el **Ejemplo 7.5**, donde se usa una variable aleatoria normal  $X \sim N(3;1,2)$ .

$X \sim N(3;1,2)$ . Ahora se entrega la probabilidad acumulada, y se debe encontrar el cuantil correspondiente.

En la parte a) se pide el valor de  $s$  tal que hasta él hay una probabilidad acumulada de 0,231.

En este caso se procede de forma similar a como se hizo en la Actividad 7.2, excepto que en lugar de usar el comando **INV.NORM.ESTAND** se debe usar el comando **INV.NORM**.

Además aparecerá un cuadro con tres campos que deberás completar: el primero es el **número**, que en este caso es la probabilidad acumulada desde menos infinito.

En él se debe ingresar el valor 0,231.

Hay dos campos más, rotulados **media** y **desv\_estándar**, en los que deberás ingresar los valores 3 y 1,2 respectivamente.

Al presionar el botón **Aceptar** aparecerá el resultado 2,1173.

La parte b) consiste en encontrar  $s$  tal que  $P(X < s) = 0,962$  y es similar a la anterior.

En la parte c) se pide  $s$  tal que  $P(X > s) = 0,506$ . Ya sabes cómo hacerlo, por complemento, se debe obtener  $s$  tal que  $P(X < s) = 1 - 0,506 = 0,494$  siguiendo el procedimiento que se usó a la parte a).

La parte d) es análoga.

---

La siguiente Actividad Computacional se refiere al uso de **R** para resolver los mismos Ejemplos que en las actividades anteriores, en las que utilizamos Excel.

## ACTIVIDAD COMPUTACIONAL 7.5

---

Ahora veremos cómo encontrar probabilidades asociados a la normal, dados los cuantiles, usando el sistema **R**. Se trata de los Ejemplos 7.2, 7.3, 7.4 y 7.5.

### Ejemplo 7.2

Para encontrar una probabilidad acumulada a la izquierda de un cuantil dado, es decir, desde menos infinito, se usa el comando

**pnorm(x)**

en el caso en que sea una normal estándar, o sea, con  $\mu = 0$ ,  $\sigma = 1$ .

Si la probabilidad es acumulada hacia la derecha, de decir, se trata de la probabilidad desde el cuantil hasta más infinito, el comando es

### **pnorm(x, lower.tail=FALSE)**

**Lower.tail=FALSE** dice que es no entregue la *cola izquierda*, que es el nombre que se suele dar a la probabilidad acumulada a la izquierda del cuantil, sino que entregue la *cola derecha*.

Los siguientes son los comandos aplicados a cada uno de los casos presentados en el Ejemplo 7.2.

En cada caso se entrega el resultado que arroja R, redondeado a cuatro decimales.

Debemos tener presente que en R se usa el punto como separador de los decimales, en lugar de la coma.

a)  $P(Z < 1,26) = \text{pnorm}(1.26) = 0,892$

b)  $P(Z < 2,74) = \text{pnorm}(2.74) = 0,9969$

$= 1 - \text{pnorm}(2.74) = 1 - 0,0031 = 0,9969$

c)  $P(Z > 0,625) = \text{pnorm}(0.625, \text{lower.tail}=\text{FALSE}) = 0,2660$

O bien, por complemento:  $P(Z > 0,625) = 1 - P(Z \leq 0,625) = 0,2660$

d)  $P(Z < -2,3255) = \text{pnorm}(-2.3255) = 0,0100$

e)  $P(Z < 1,9387) = \text{pnorm}(1.9387) = 0,9737$

f)  $P(Z \geq -0,280) = \text{pnorm}(-0.280, \text{lower.tail}=\text{FALSE}) = 0,6103$

### **Ejemplo 7.3**

En este Ejemplo se entrega una probabilidad acumulada en una normal estándar, hacia la izquierda o hacia la derecha, y se desea obtener el cuantil correspondiente, se usa el comando

### **qnorm(x)**

Si lo que se entrega es una probabilidad acumulada hacia la derecha del cuantil, y se desea encontrar el cuantil, el comando a usar es

### **qnorm(x, lower.tail=FALSE)**

En cada caso se debe encontrar el cuantil  $t$  que cumple la condición dada

a)  $P(Z < t) = 0,943$ .

$t = \text{qnorm}(0,943) = 1,580$

b)  $P(Z < t) = 0,123$

$t = \text{qnorm}(0,123) = -1,160$

c)  $P(Z > t) = 0,600$  que equivale a  $P(Z \leq t) = 1 - 0,600 = 0,400$

$t = \text{qnorm}(0,400) = -0,2533$

o bien  $t = \text{qnorm}(0,600, \text{lower.tail}=\text{FALSE}) = -0,2533$

c)  $P(Z \geq t) = 0,9784$  que equivale a  $P(Z \leq t) = 1 - 0,9784 = 0,0216$

$t = \text{qnorm}(0,0216) = -2,021$

o bien  $t = \text{qnorm}(0,9784, \text{lower.tail}=\text{FALSE}) = -2,021$ .

Puedes constatar que algunos resultados no son exactamente iguales a los obtenidos con la tabla. Se debe que en esos casos se aproximó el valor de la tabla. Los de R son exactas, hasta 4 decimales.

#### **Ejemplo 7.4**

En este Ejemplo debemos encontrar probabilidades asociadas a un cuantil dado, en el caso de una normal no estándar, con parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . No es necesario estandarizar la variable aleatoria, basta usar el comando

**`pnorm(x,  $\mu$ ,  $\sigma$ )`**

donde se especifican los parámetros, y para las colas derechas,

**`pnorm(x,  $\mu$ ,  $\sigma$ , lower.tail=FALSE)`** o bien **`1 - pnorm(x,  $\mu$ ,  $\sigma$ )`**

En las cuatro preguntas de este ejemplo, se asume una normal con media  $\mu = 10$  y  $\sigma = 2$ .

a)  $P(X < 5)$

**`pnorm(5, 10, 2)`** = 0,0062

b)  $P(X < 13)$

**`pnorm(13, 10, 2)`** = 0,9332

c)  $P(X > 4,4)$

**`1 - pnorm(4.4, 10, 2)`** = 0,9974

d)  $P(X > 10,4)$

$$1 - \text{pnorm}(10.4, 10, 2) = 0,4207$$

### **Ejemplo 7.5**

En este caso se debe encontrar el cuantil de una normal no estándar, con media  $\mu = 3$  y desviación estándar  $\sigma = 1,2$ . Se usa el comando

**qnorm(x,  $\mu$ ,  $\sigma$ )**

Si la probabilidad es acumulada hacia la derecha, de decir, se trata de la probabilidad desde el cuantil hasta más infinito, el comando es

**qnorm(x,  $\mu$ ,  $\sigma$ , lower.tail=FALSE)**

En todos los casos se debe encontrar el cuantil s.

a)  $P(X < s) = 0,231$

$$s = \text{qnorm}(0.231, 3, 1.2) = 2,1173$$

b)  $P(X < s) = 0,962$

$$s = \text{qnorm}(0.962, 3, 1.2) = 5,1293$$

c)  $P(X < s) = 0,506$

$$s = \text{qnorm}(0.506, 3, 1.2) = 2,982$$

d)  $P(X < s) = 0,2856$

$$s = \text{qnorm}(0.2856, 3, 1.2) = 3,6795$$

Nuevamente los valores no siempre son iguales a los que entrega la tabla, debido a las aproximaciones que se hacen al emplear la tabla.

---

### **EJEMPLO 7.6**

---

*Duración de neumáticos.*



Se ha determinado que la duración de cierto tipo de neumático tiene distribución normal con media  $\mu = 30$  mil kilómetros (Mkm) y desviación estándar  $\sigma = 5$  Mkm.

- a) Cuál es la probabilidad de que un neumático dure a lo más 25 Mkm?
- b) Cuál es la probabilidad de que un neumático dure más de 40 Mkm?
- c) Cuál es la probabilidad de que un neumático dure entre 35 y 40 Mkm?
- d) Cuál es la probabilidad de que un neumático dure más de 38 o menos de 24 Mkm?

Resolución:

Sea  $X$  la duración de los neumáticos.

$X \sim N(30, 5)$ . Por lo tanto, estandarizando,  $Z = (X - 30) / 5 \sim N(0, 1)$

(se lee tiene distribución normal estándar).

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \leq 25) &= P[Z \leq (25 - \mu) / \sigma] = \\ &= P[Z \leq (25 - 30) / 5] = P(Z \leq -1) \end{aligned}$$

El valor de  $P(Z \leq -1)$  se obtiene de la tabla normal estándar.

Se busca el número  $-1,0$  (**cuantil**  $-1,0$ ) y la tabla entrega el valor de la probabilidad acumulada

$$P(X \leq -1) = 0,1587$$

$$\text{Luego } P(X \leq 25) = P(Z \leq -1) = 0,1587$$

$$b) P(X > 40) = P[Z > (40 - 30) / 5] = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2)$$

De la tabla normal estándar,  $P(Z \leq 2) = 0,9772$ .

$$\text{Luego } P(X > 40) = 1 - 0,9772 = 0,0228.$$

$$c) P(35 < X < 40) = P[(35 - 30) / 5 < Z < (40 - 30) / 5] = \\ = P(1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 1).$$

De la tabla normal estándar,  $P(Z < 2) = 0,9772$  y  $P(Z < 1) = 0,8413$ .

$$\text{Luego } P(35 < X < 40) = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359.$$

Otra vez, recuerda que para una variable aleatoria continua da lo mismo si se incluyen o no los puntos extremos del intervalo.

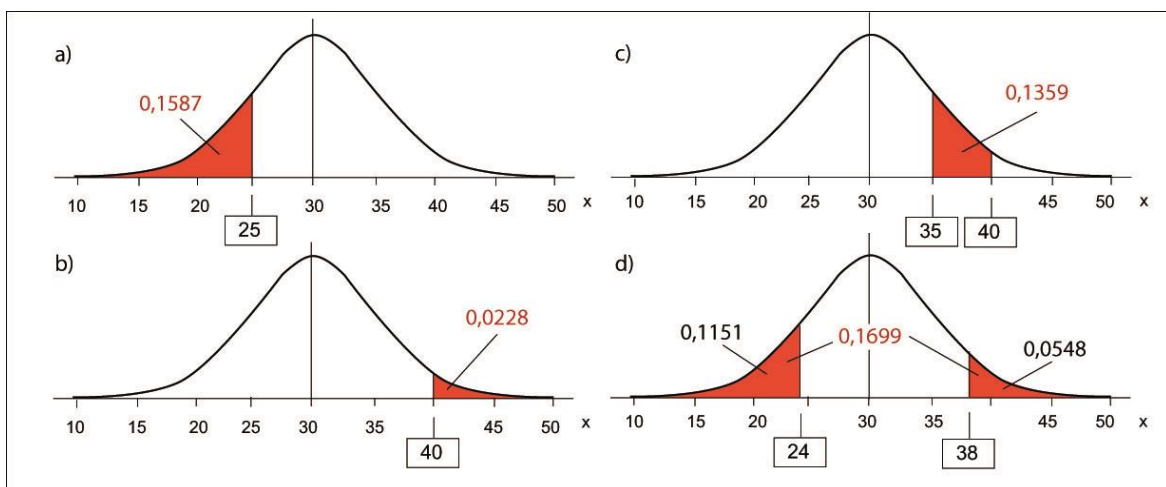
$$d) P(X < 24 \text{ o } X > 38) = P[Z < (24 - 30) / 5 \text{ o } Z > (38 - 30) / 5] = \\ = P(Z < -1,2 \text{ o } Z > 1,6) = P(Z < -1,2) + 1 - P(Z \leq 1,6)$$

De tabla normal estándar,  $P(Z < -1,2) = 0,1151$  y  $P(Z \leq 1,6) = 0,9452$ .

$$\text{Luego } P(X < 24 \text{ o } X > 38) = 0,1151 + 1 - 0,9452 = 0,1699.$$

A veces no es posible encontrar en la tabla los valores que se buscan.

En esos casos se utiliza el valor más cercano.



### EJEMPLO 7.7

*Contenido de nicotina en cigarrillos.*



Se ha determinado que el contenido de nicotina en cierto tipo de cigarrillo tiene una distribución normal con parámetros media  $\mu = 0,58$  miligramos (mg) y desviación estándar  $\sigma = 0,16$  mg.

- a) Encuentra la probabilidad de que el contenido de nicotina en un cigarrillo sea menor que 0,8 mg.
- b) Encuentra la probabilidad de que el contenido de nicotina sea mayor que 0,5 mg.

Resolución:

Sea  $X$  el contenido de nicotina en un cigarrillo.

$X \sim N(0,58; 0,16)$ . Luego, estandarizando,  $Z = (X - 0,58) / 0,16 \sim N(0, 1)$

a)  $P(X < 0,8) = P[Z < (0,8 - 0,58) / 0,16] = P(Z < 1,375)$

De la tabla normal estándar, la probabilidad acumulada hasta 1,375 es

$$P(Z < 1,375) = 0,9154.$$

Luego  $P(X \leq 0,8) = 0,9154$ .

b)  $P(X > 0,5) = P[Z > (0,5 - 0,58) / 0,16] =$



De tabla normal estándar,  $P(Z \leq -0,5) = 0,3085$ .

Luego  $P(X > 0,5) = 1 - 0,3085 = 0,6915$

---

### EJEMPLO 7.8

*Duración de entrevistas sociales.*



Se ha determinado que la duración de cierto tipo de entrevista social tiene distribución normal con media  $\mu = 50$  minutos y desviación estándar  $\sigma = 10$  min.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una entrevista dure a lo más 28 min.?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que una entrevista dure más de 65 min.?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que una entrevista dure entre 25 y 30 min.?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que una entrevista dure más de 30 o menos de 25 min.?

Resolución:

Sea  $X$  la duración de una de estas entrevistas. Tenemos que  $X \sim N(50, 10)$   
Estandarizando,  $Z = (X - \mu) / \sigma = (X - 50) / 10$  tiene distribución normal estándar,  $N(0,1)$ .

a)  $P(X \leq 28) = P[Z \leq (28 - \mu)/\sigma] =$

$$= P[Z \leq (28 - 50) / 10] = P(Z \leq -2,2)$$

El valor de  $P(Z \leq -2,2)$  se obtiene de una tabla normal estándar.

Se busca el cuantil -2,2 en los bordes izquierdo y superior; la tabla entrega el valor de la probabilidad acumulada hacia la izquierda de -2,2.

Este valor resulta ser  $P(Z \leq -2,2) = 0,0139$ .

Luego  $P(X \leq 25) = P(Z \leq -2,2) = 0,0139$ .

$$b) \quad P(X > 65) = P[Z > (65 - 50) / 10] = P(Z > 1,5)$$

Necesitamos la probabilidad hacia la derecha del valor 1,5.

Como la tabla entrega valores acumuladas a la izquierda, hacemos

$$P(Z > 1,5) = 1 - P(Z \leq 1,5)$$

De tabla normal estándar,  $P(Z \leq 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$ .

Luego  $P(X > 40) = 1 - 0,9332 = 0,0668$ .

c)  $P(25 < X < 30)$ . La forma de obtener esto es calculando la probabilidad acumulada a la izquierda de 30 y restándole la probabilidad acumulada a la izquierda de 25.

Para eso debemos estandarizar los valores 25 y 30 y aplicar la tabla normal.

$$P(25 < X < 30) = P(X < 25) - P(X < 30).$$

$$\text{Por un lado } P(X < 25) = P[Z < (25 - 50) / 10] = P(Z < -2,5)$$

$$\text{y } P(X < 30) = P[Z < (30 - 50) / 10] = P(Z < -2)$$

$$\text{Entonces } P(25 < X < 30) = P(Z < -2) - P(Z < -2,5)$$

De tabla normal estándar,  $P(Z < -2) = 0,0166$  y  $P(Z < -2,5) = 0,0062$ .

Luego  $P(25 < X < 30) = 0,0228 - 0,0062 = 0,0166$ .

Otra vez, recuerda que para una variable aleatoria continua da lo mismo si se incluyen o no los puntos extremos del intervalo.

d)  $P(X < 25 \text{ o } X > 30)$  es el complemento de  $P(25 < X < 30)$ .

Luego, para ahorrarnos trabajo, podemos usar el resultado de la parte c):

$$P(X < 25 \text{ o } X > 30) = 1 - P(25 < X < 30) = 1 - 0,0166 = 0,9834.$$

---

En los ejemplos anteriores, se conoce un valor de la variable aleatoria normal, o **cuantil**, y se usa la tabla normal estándar para buscar la probabilidad acumulada hasta él.

Ahora veremos una situación en que damos una probabilidad y debemos buscar el cuantil que tiene acumulada esa probabilidad.

Para esto se ingresa a la tabla, y en lugar de hacerlo por los bordes, donde están los cuantiles, se entra por la parte central, donde están las probabilidades acumuladas, hasta encontrar el valor o el valor más cercano a la probabilidad dada, y se busca, en los bordes de la tabla, a qué cuantil corresponde.

### EJEMPLO 7.9

---

*Puntajes en prueba a nivel nacional.*



300000 alumnos rinden una prueba a nivel de todo el país.

Los puntajes obtenidos son números enteros entre 200 y 900.

Se supone que siguen una distribución aproximadamente normal, con media 550 puntos y desviación estándar 120 puntos.

La distribución no es exacta, pues los puntajes son enteros.

Pero como el rango de valores es amplio y son muchos los casos, se pueden aproximar a los valores de una variable continua.

- a) Si Felipe está en el percentil 87, ¿cuál es su puntaje?
- b) ¿Cuáles son los puntajes de los cuartiles 1 y 3, y de la mediana?

Resolución:

Sea  $X$  el puntaje de un alumno cualquiera.

Entonces  $X$  tiene distribución normal con media 550 y desviación estándar 120 puntos, o sea,  $X \sim N(550; 120)$

- a) Sea  $F$  el puntaje de Felipe.

Sabemos que está en el percentil 87, luego hay un 87% bajo su puntaje, es decir,  $P(X \leq F) = 0,87$ .

Estandarizando,  $P[Z \leq (F - 550) / 120] = 0,87$

En la Tabla Normal Estándar, buscamos la probabilidad 0,87. El valor más cercano que encontramos es 0,8697, que corresponde al cuantil 1,125.

Luego aproximadamente  $P(Z \leq 1,125) = 0,87$ .

Entonces  $(F - 550)/120 = 1,125$ ; de donde el puntaje de Felipe es  $F = 685$ .

Como debe ser entero, si no hubiese resultado entero habría que haberlo redondeado.

- b) Sean  $M$ ,  $Q1$  y  $Q3$  la mediana y los cuantiles, respectivamente.

Es decir,  $P(X \leq Q1) = 0,25$ ;  $P(X \leq M) = 0,50$ ;  $P(X \leq Q3) = 0,75$

Haciendo uso de la tabla normal, como en la parte a), encontramos que

$(Q1 - 550)/120 = -0,675$ ;

$$(M - 550)/120 = 0;$$

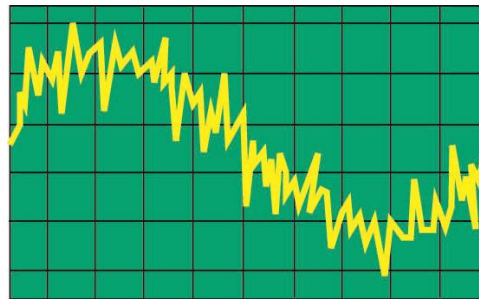
$$\text{y } (Q3 - 550)/120 = 0,675.$$

Despejando las tres expresiones se obtiene  $Q1 = 469$ ,  $M = 550$  y  $Q3 = 631$  puntos.

---

### EJEMPLO 7.10

*Señal electrónica contaminada con ruido.*



Un dispositivo electrónico emite una señal contaminada con ruido. Se asume que este ruido tiene una distribución normal con media 10 voltios y varianza 9 voltios al cuadrado.

Sea  $X$  la magnitud de este ruido.

Se debe fijar dos límites de especificación,  $x_1$  y  $x_2$ , tales que

$P(x_1 \leq X \leq x_2) = 0,80$  y que ambos valores dejen igual probabilidad en cada extremo, es decir,  $P(X \leq x_1) = P(X \geq x_2)$ .

Queremos encontrar los dos números  $x_1$  y  $x_2$ .

Resolución:

Sea  $\mathbf{Z}$  una variable aleatoria normal estándar, o sea,  $\mathbf{Z} \sim N(0, 1)$ .

Sea  $k$  un número tal que  $P(-k < Z < k) = 0,80$ .

Por la simetría de la normal se tiene  $P(Z \leq -k) = P(Z \geq k) = 0,10$ . La mitad de lo que le falta a 0,80 para completar 1.

Es decir, por complemento,  $P(Z \leq k) = 0,90$ .

De la tabla normal, el valor más cercano encontrado es  $z = 1,280$ .

Pero si  $Z \sim N(0, 1)$  entonces  $X = 3Z + 10 \sim N(10, 3)$ , por la propiedad 8 vista en este capítulo.

Aplicamos la transformación anterior a  $-k = -1,280$  y a  $k = 1,280$ , obteniéndose  $x_1 = 10 + 3(-1,280) = 6,16$ ;

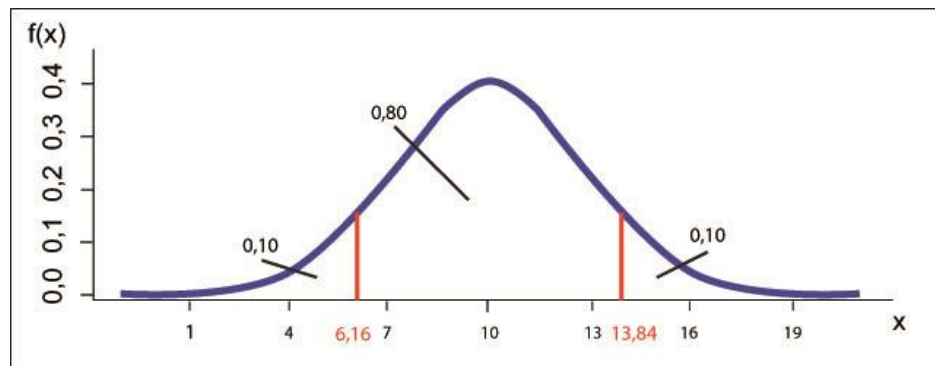
$$x_2 = 10 + 3z = 10 + 3(1,280) = 13,84.$$

Los valores que cumplen las condiciones son  $x_1 = 6,16$  voltios y  $x_2 = 13,84$  voltios.

Te recomiendo que hagas este ejemplo utilizando R. Debido a la mayor exactitud obtendrás los valores  $x_1 = 6,1553$  y  $x_2 = 13,8447$  voltios.

Si no te acuerdas cómo hacerlo, mira la Actividad Computacional 7.5, Ejemplo 7.5.

La figura siguiente ilustra la situación planteada en este ejemplo:



## EJEMPLO 7.11

*Tiempo de un proceso computacional*



El tiempo que demora un proceso computacional tiene distribución normal.

La probabilidad de que demore más de 6 minutos es 0,732.

La probabilidad de que demore más de 8 minutos es 0,369.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de 10 minutos?
- b) Si se toman 8 mediciones, de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que en 4 de ellos la demora sea más de 10 minutos?

Resolución:

a) Sea **X** el tiempo de procesamiento y sean **μ** y **σ** el valor esperado y desviación estándar de **X**, respectivamente.

Tenemos que  $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma)$

Sea **Z** la variable aleatoria **X** estandarizada; entonces  $\mathbf{Z} = (X - \mu) / \sigma$  y su distribución es normal estándar.

Se sabe que  $P(X > 6) = 0,732$ . Estandarizando,  $P[Z > (6 - \mu) / \sigma] = 0,732$  y luego, por complemento,  $P[Z \leq (6 - \mu) / \sigma] = 1 - 0,732 = 0,268$

Luego de la tabla normal estándar,  $(6 - \mu) / \sigma = -0,620$  (1)

También  $P(X > 8) = 0,369$ . Estandarizando,  $P[Z > (8 - \mu) / \sigma] = 0,369$

$P[Z \leq (8 - \mu) / \sigma] = 1 - 0,369 = 0,631$

Luego, de la tabla normal estándar,  $(8 - \mu) / \sigma = 0,335$  (2)

Dividiendo (1) por (2), tenemos que

$$(6 - \mu) / (8 - \mu) = -0,620 / 0,335 = -1,8507$$

y despejando  $\mu$  se obtiene la esperanza,  $\mu = 7,2986$ .

Reemplazando en (2) se obtiene la desviación estándar

$$\sigma = (8 - \mu) / 0,335 = (8 - 7,2986) / 0,335 = 2,0937$$

redondeando en cada paso a 4 decimales.

Finalmente, la probabilidad buscada es

$$P(X > 10) = P[Z > (10 - \mu)/\sigma] =$$

$$= P[Z > (10 - 7,2986)/2,0937] = P(Z > 1,290) = 1 - P(Z \leq 1,290)$$

De la tabla normal, obtenemos  $-P(Z \leq 1,290) = 0,9015$ .

$$\text{Luego } P(x > 10) = 1 - 0,9015 = 0,0985.$$

b) Ahora sea **Y** la variable aleatoria número de veces que el proceso se demora más de 10 minutos (en la muestra de 8).

Entonces **Y** tiene distribución binomial, con parámetros **n** = 8 y **p** = 0,0985.

Es decir,  $Y \sim \text{Bin}(n = 8; p = 0,0985)$ .

$$\text{Luego } P(Y = 4) = \frac{8!}{4!(8-4)!} 0,0985^4 (1 - 0,0985)^{8-4}$$

según lo visto en el capítulo 6.

Calculando, resulta que  $P(Y = 4) = 0,00435$

---

### **EJEMPLO 7.12**

*Coeficiente intelectual.*





El coeficiente intelectual (CI) de niños se distribuye aproximadamente normal con valor esperado 100 y desviación estándar 16.

- a) Si dos amigos obtuvieron en un test de CI, 120 y 82 puntos, respectivamente, ¿cuáles son los percentiles en que se encuentran?
- b) Si otros dos de sus amigos se encuentra en los percentiles 45 y 65, respectivamente, ¿cuántos puntos obtuvieron?

Resolución:

- a) Sean  $x_1 = 112$ , y  $x_2 = 82$  los puntajes de los dos amigos.

Los transformaremos a puntajes estándar  $z = (x - 100) / 16$ :

$$z_1 = (112 - 100) / 16 = 0,75$$

$$z_2 = (82 - 100) / 16 = - 1,125$$

Ahora buscamos en la tabla las probabilidades acumuladas hasta los cuantiles 0,75 y -1,125 respectivamente.

Las probabilidades acumuladas resultan ser 0,7733 y 0,1302.

Para expresarlas en términos de percentiles (que son enteros entre 1 y 99), multiplicamos estos números por 100 y los redondeamos al entero más cercano:

El amigo que obtuvo 120 puntos está en el percentil 77 y el amigo que obtuvo 82 puntos está en el percentil 13.

Eso significa que el primero le ganó al 77% de los que dieron el test, mientras el segundo sólo le ganó al 13%.

b) Sean  $p_3 = 45$  y  $p_4 = 65$  los percentiles de estos otros dos amigos.

Es decir, las probabilidades de que alguien obtenga menos que ellos son, respectivamente, 0,45 y 0,65.

Estas probabilidades corresponden a los siguientes puntajes estándar, que se obtienen de la tabla normal, buscando las probabilidades acumuladas hasta 0,45 y de 0,65:

Obtenemos -0,125 y 0,385 respectivamente.

Estos son puntajes en escala estándar  $z$ , en que el promedio es 0 y la desviación estándar es 1

Para llevarlos a la escala real de puntajes en el test de CI, debemos desestandarizar estos valores, es decir, multiplicarlos por la desviación estándar y sumarles el promedio:

$$x = 100 + 16 z$$

$$x_3 = 100 + 16 \times (-0,125) = 98; \quad x_4 = 100 + 16 \times 0,385 = 106,16.$$

Se supone que estos puntajes son enteros, por lo que los aproximamos al entero.

Los puntajes CI de estos dos amigos, son, entonces, 98 y 106, respectivamente.

---

### **EJEMPLO 7.13**

*Venta de periódicos.*



En una distribuidora de periódicos se supone que el número de ventas semanales se distribuye aproximadamente normal con media 4500 y desviación estándar 220 . Determina:

- a) la probabilidad de que en una semana cualquiera se vendan entre 2800 y 3800 periódicos.
- b) el número mínimo de periódicos que se venden semanalmente en el 90% de las ocasiones.

Resolución:

- a) Sea **X** el número de periódicos vendidos en una semana.

Su distribución es normal con promedio 4500 periódicos y desviación estándar 220 periódicos, es decir, **X** ~ N(4500,220).

En este caso **X** es entero, pero como es muy grande, podemos suponer que su distribución es normal, aproximadamente (que es una variable aleatoria continua).

Se quiere  $P(2800 < X < 3800)$  . Estandarizando,

$$\begin{aligned} P(2800 < X < 3800) &= P[(2800 - 4500)/220 < Z < (3800 - 4500)/220] = \\ &= P(-2,2727 < Z < 1,3636) \text{ donde } \mathbf{Z} \text{ es una variable aleatoria con una} \\ &\text{distribución normal estándar.} \end{aligned}$$

Esta probabilidad se obtiene por diferencia

$$P(-2,2727 < Z < 1,3636) = P(Z < 1,3636) - P(Z < -2,2727)$$

Buscamos los valores 1,3636 y -2,2727 en la tabla normal estándar, y obtenemos

$P(Z < -2,2727) = 0,0116$  y  $P(Z < 1,3636) = 0,9139$  aproximando al valor más cercano.

Por lo tanto,  $P(-2,2727 < Z < 1,3636) = 0,9139 - 0,0135 = 0,9023$ .

La probabilidad de que en una semana cualquiera las ventas estén entre 2800 y 3800 periódicos es 0,9023.

b) Sea  $x_1$  el número mínimo de periódicos vendidos en una semana.

Que el 90% de las ventas ocurra que la venta mínima sea  $x_1$ , equivale a decir que la probabilidad de que el número mínimo de ventas semanales sea mayor o igual que  $x_1$ .

Es decir,  $P(X \geq x_1) = 0,90$ . Estandarizando,

$$P[Z \geq (x_1 - 4500)/220] = 0,90$$

en que  $Z$  tiene una distribución normal estándar. Por complemento,

$$P[Z < (x_1 - 4500)/220] = 1 - 0,90 = 0,10$$

En la tabla normal ingresamos con la probabilidad acumulada 0,10 y obtenemos el cuantil -1,280 aproximando al valor más cercano.

$$\text{Entonces } (x_1 - 4500)/220 = -1,280$$

Despejando  $x_1$  resulta que

$$x_1 = -1,280 \times 220 + 4500 = 4218,4$$

Aproximando al entero, el número mínimo de periódicos vendidos semanalmente el 90% de las veces es 4218.

---

## EJERCICIOS

7.1) Sea  $Z$  una variable aleatoria con distribución normal estándar. Usa la tabla normal estándar para lo siguiente:

- a) Encuentra la probabilidad  $P(Z < 1,7)$
- b) Encuentra  $P(Z > 0,254)$
- c) Encuentra  $P(Z > -2,6)$

d) Encuentra  $P(Z < 1,2)$

7.2) Sea  $Z$  un variable aleatoria con distribución normal estándar.

Usando la tabla, en cada caso encuentra el número  $t$  tal que se cumple la igualdad indicada:

a)  $P(Z < t) = 0,92$

b)  $P(Z > t) = 0,22$

c)  $P(Z < t) = 0,16$

d)  $P(Z \leq t) = 0,5$

7.3) Sea  $X$  un variable aleatoria con distribución normal con media  $\mu = 15$  y desviación estándar  $\sigma = 3,5$ . Estandariza y usa la tabla normal estándar para lo siguiente:

a) Encuentra la probabilidad  $P(X < 9)$

b) Encuentra  $P(X \leq 23)$

c) Encuentra  $P(X > -10,5)$

d) Encuentra  $P(X < 12)$

7.4) Sea  $X$  un variable aleatoria con distribución normal con media  $\mu = 7,4$  y desviación estándar  $\sigma = 2,2$ .

En cada caso, usa la tabla normal estándar y encuentra el número  $s$  tal que se cumple la igualdad indicada:

a)  $P(X < s) = 0,33$

b)  $P(X \leq s) = 0,88$

c)  $P(X < s) = 0,42$

d)  $(X \geq s) = 0,82$

7.5) Por disposiciones de salud, la cantidad de radiación del agua potable no debe exceder las 3 unidades por litro.

Supón que la radiación que contiene el agua en una fuente tiene distribución normal con media  $\mu = 2,5$  unidades por litro y desviación estándar  $\sigma = 0,5$  unidades por litro.

¿Cuál es la probabilidad de que, en una medición, el resultado exceda las 3.0 unidades por litro? Usa la tabla normal estándar.

7.6) Se ha determinado que la duración de cierto tipo de entrevista tiene distribución normal con media 30 minutos y desviación estándar 5 min. Usa la tabla normal estándar para responder las siguientes preguntas. Después repite todo lo anterior, usando R:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una entrevista dure a lo más 25 min?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que una entrevista dure más de 40 min?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que una entrevista dure entre 35 y 40 min?
- d) ¿Cuál es la probabilidad de que una entrevista dure más de 38 o menos de 24 minutos?

7.7) Se sabe que el contenido de nicotina en cierto tipo de cigarrillos tiene una distribución normal con media 0.58 miligramos (mg) y desviación estándar de 0,16 mg. Usa R para lo siguiente:

- a) Encuentra la probabilidad de que el contenido de nicotina en un cigarrillo sea menor que 0,8 mg.
- b) Encuentra la probabilidad de que el contenido de nicotina sea mayor que 0,5 mg.

7.8) 300.000 alumnos rinden una prueba a nivel de todo el país. Los puntajes obtenidos son números enteros entre 200 y 900.

Se supone que siguen una distribución aproximadamente normal, con media 550 puntos y desviación estándar 120 puntos.

La distribución no es exacta, pues los puntajes son enteros. Pero como el rango de valores es amplio, se pueden aproximar a los valores de una variable continua. Usa R para responder lo siguiente:

- a) Si Felipe está en el percentil 87, ¿cuál es su puntaje?
- b) ¿Cuáles son los puntajes de los cuartiles 1 y 3, y de la mediana?

(Ayuda: El percentil 87 es un puntaje tal que el 87% tiene un puntaje menor o igual a él. El cuartil 1 es el puntaje tal que un 25% tiene un puntaje menor o igual a él; un 50% tiene un puntaje menor o igual que la mediana; un 75% un puntaje menor o igual al cuartil 3).

7.9) En una distribuidora de periódicos se supone que el número de ventas diarias se distribuye normalmente con media 3000 y desviación estándar 200. Usa la tabla normal estándar y R para determinar lo siguiente:

- a) la probabilidad de que en un día se vendan entre 2500 y 3100 periódicos.
- b) el número máximo de periódicos que se venden en el 90 % de las ocasiones.

7.10) Se está estudiando el tiempo de reacción a un comentario periodístico de corte político que alude a un político determinado.

Del estudio, se concluyó que este tiempo tiene una distribución normal con media 100 horas y desviación estándar 9 horas. Usa R para determinar lo siguiente:

- a) la probabilidad de que el tiempo de reacción sea 100 horas,
- b) la probabilidad de que el tiempo de reacción sea mayor que 100 horas,
- c) el tiempo de reacción que ocurriría más de un 50% de las veces.

7.11) Por disposiciones de salud, la cantidad de radiación del agua potable no debe exceder las 4 unidades por litro.

Supón que la radiación que contiene el agua en una fuente tiene distribución normal con media  $\mu = 2,5$  unidades por litro y desviación estándar  $\sigma = 0,5$  unidades por litro.

¿Cuál es la probabilidad de que en una medición, el resultado exceda las 3,0 unidades por litro? Usa R para calcular.

7.12) Se ha determinado que la el período de carga de cierto tipo de batería, desde cero, tiene distribución normal con media  $\mu = 95$  minutos y desviación estándar  $\sigma = 16$  min. Usa R para responder lo siguiente:

- a) ¿cuál es la probabilidad de que el período de carga dure a lo más 80 min.?
- b) ¿cuál es la probabilidad de que el período de carga dure más de 100 min?
- c) ¿cuál es la probabilidad de que el período de carga dure entre 80 y 100 min?
- d) ¿cuál es la probabilidad de que el período de carga dure más de 120 o menos de 70 minutos?

7.13) La temperatura que alcanza un tipo de procesador cuando se le somete a una carga de trabajo fija determinada, tiene una distribución normal con media 32,5 grados centígrados ( $^{\circ}\text{C}$ ) y desviación estándar de 2,6  $^{\circ}\text{C}$ . Usa R para lo siguiente:

- a) Encuentra la probabilidad de que la temperatura que alcanza el procesador es menor que 40  $^{\circ}\text{C}$ .
- b) Encuentra la probabilidad de que la temperatura sea mayor que 36  $^{\circ}\text{C}$ .

7.14) Las calificaciones en una prueba de aplicación masiva, se pueden suponer distribuidas normalmente con media 525 y desviación estándar 80.

Usa R para resolver lo siguiente:

- a) quien obtiene menos de 350 puntos en dicha prueba, reprueba el examen, ¿qué porcentaje representan estas personas?
- b) el 12% superior recibe un reconocimiento especial, ¿qué calificación mínima se debe tener para recibirlo?

Usa R para obtener las probabilidades.

7.15) Una prueba para medir el coeficiente intelectual (CI) tiene una media de 100 puntos y una desviación estándar de 16 puntos.

Supón que los puntajes tienen una distribución normal.



- a) Si Pedro obtuvo una calificación de 125 puntos, ¿qué porcentaje de personas tienen puntajes entre la media y su puntaje?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguien haya obtenido una calificación entre 90 y 120 puntos?

Usa R para obtener las probabilidades.

7.16) Determina los parámetros (media y desviación estándar) de las puntuaciones de un test de competencias aplicado a 2000 estudiantes de primer año, sabiendo que 200 alcanzaron a lo más 30 puntos y que 1700 obtuvieron a lo más 90 puntos. Utiliza R.

(Ayuda: Usa las proporciones muestrales para estimar las probabilidades).

7.17) Los puntajes obtenidos por los postulantes a una beca tienen una distribución normal con media 367 puntos y desviación estándar de 36 puntos.

Usa R para determinar las probabilidades.

- a) ¿Cuál es la probabilidad que un postulante seleccionado al azar obtenga menos de 355 puntos?
- b) Si se seleccionan, para reevaluar, todos los que obtienen menos de 348 puntos o más de 373 puntos, ¿cuál es el porcentaje de postulantes que se reevaluarán?
- c) Calcula las especificaciones de puntajes simétricos alrededor de la media, de modo que se incluya el 90% de todas los que postulan.

7.18) En un examen de admisión, la media es 72 puntos y la desviación estándar es 15 puntos.

Determina, en unidades estándar, las puntuaciones que obtuvieron,

- a) 60 puntos,
- b) 93 puntos,
- c) 72 puntos.

7.19) El peso medio de los estudiantes varones de cierta universidad es 75,5 kilos (kg) y la desviación estándar es 7,5 kg. Supongamos que los pesos están normalmente distribuidos.

Usando R, encuentra la probabilidad de que si un estudiante es seleccionado al azar, su peso es

- a) menos de 80 kg,
- b) más de 92,5 kg,
- c) entre 60 y 77,5 kg,
- d) al menos 63 o más de 83 kg.

7.20) Se supone que las puntuaciones en un test de biología tienen distribución normal, con media 6,7 puntos y desviación estándar 1,2 puntos. Usando R, determina, con un decimal de precisión,

- a) el porcentaje de alumnos que obtuvo entre 5,5 y 6,5 puntos,
- b) el puntaje máximo del 10 % más bajo,
- c) el puntaje mínimo del 10 % más alto.

7.21) Supongamos que un Índice de Reemplazo de Población Activa se distribuye normalmente con media 50,2 y desviación estándar 0,5.

- a) Usa la tabla normal estándar, R y Excel para determinar la probabilidad de que el valor de este índice resulte estar entre 49,6 y 50,8 y compara los resultados.
- b) ¿Cuál es el valor del índice tal que hay una probabilidad de 50 % que resulte menor que él?

7.22) Las calificaciones en una prueba de aplicación masiva, se pueden suponer distribuidas normalmente con media 525 y desviación estándar 80.

Usa la tabla normal estándar y Excel para determinar lo siguiente y compara los resultados:

- a) quien obtiene menos de 350 puntos en dicha prueba, reprueba el examen. ¿Qué porcentaje representan estas personas?

b) El 12% superior recibe un reconocimiento especial. ¿Qué calificación mínima se debe tener para recibirlo?

7.23) La fábrica Santa Olivia produce aceite de oliva. El aceite es envasado en envases de dos litros.

La cantidad objetivo de aceite por cada envase es 2 litros, pero por variaciones aleatorias, generalmente la cantidad efectiva es un poco más de dos litros.

Considera la variable aleatoria *cantidad de aceite*, en litros.

Por datos anteriores, se puede decir que la variable aleatoria tiene distribución normal, con media 2 lts y desviación estándar 0,1 lts.

Usa la tabla normal estándar y Excel para determinar lo siguiente y compara los resultados:

a) si se reprocesan los envases cuyo contenido es mayor que 2,3 lts, ¿qué porcentaje de envases se reprocesa?

b) ¿cuál es la probabilidad que un envase tenga un peso entre 1.8 y 2.3 lts?

7.24) Una prueba para medir la habilidad mecánica tiene una media de 100 puntos y una desviación estándar de 16 puntos.

Supone que los puntajes tienen una distribución normal.

Usa la tabla normal estándar y Excel para determinar lo siguiente y compara los resultados:

a) si Pedro obtuvo una calificación de 125 puntos, ¿qué porcentaje de personas tiene puntajes entre la media y su puntaje?

b) si Fernando obtuvo una calificación superior a 92 puntos, ¿cuál es el porcentaje de los que obtuvieron más que él y menos que la media?

7.25) Un test de competencia tiene una puntuación con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , ambas desconocidas. Se asume que tiene distribución normal.

Se aplicó el test y resultó que un 2,81% obtuvo menos 20 puntos, y que un 81,92% obtuvo entre 20 y 35 puntos.

Encuentra los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ .

---

## **Respuestas de los ejercicios.**

Incluyen indicaciones para su resolución.

### **Respuestas Capítulo 2:**

2.1)  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

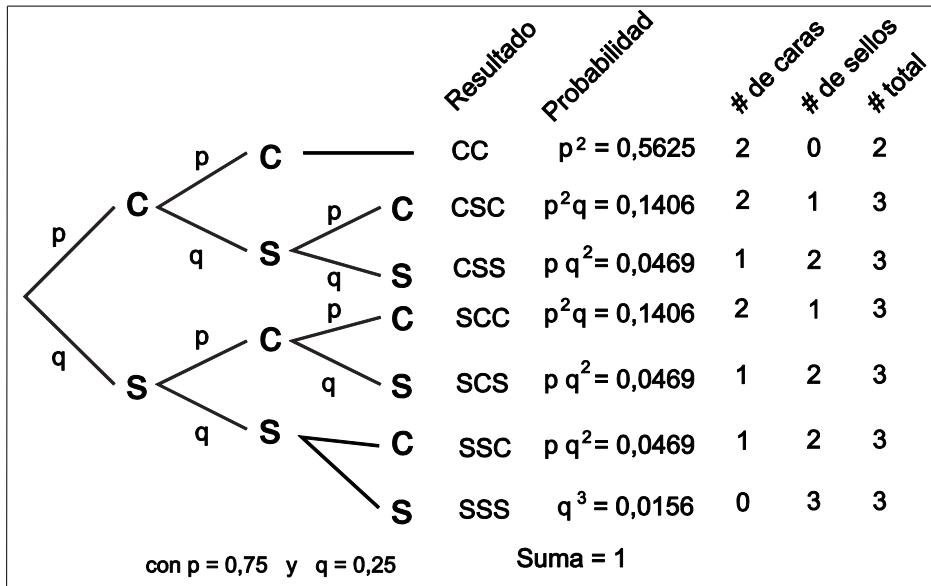
2.2)

|                |   | Segundo<br>dado |   |   |    |    |    |
|----------------|---|-----------------|---|---|----|----|----|
|                |   | 1               | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
| Primer<br>dado | 1 | 2               | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
|                | 2 | 3               | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
|                | 3 | 4               | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
|                | 4 | 5               | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
|                | 5 | 6               | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
|                | 6 | 7               | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

El espacio es equiprobable. La probabilidad es  $30/36 = 5/6$

2.3) El número de posibilidades es 6 por cada dado, luego el total en los cuatro lanzamientos es  $6^4$ . Las posibilidades favorables son todas aquellas en que sale un tres, y los otros dos dados son 1, 2 o 3. Por lo tanto el número de posibilidades favorables son  $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ . Luego, el modelo de Laplace dice que la probabilidad de que el mayor sea 3 es  $3^3/6^4 = 1/48 = 0,0208$

2.4) Diagrama de árbol:



a) {CC,CSC,CSS,SCC,SCS,SSC, SSS}

El espacio muestral es finito, no equiprobable.

Del diagrama de árbol se obtienen las probabilidades:

b)

| Número de caras | Probab. |
|-----------------|---------|
| 0               | 0,0156  |
| 1               | 0,1406  |
| 2               | 0,8438  |
| Suma            | 1       |
|                 |         |

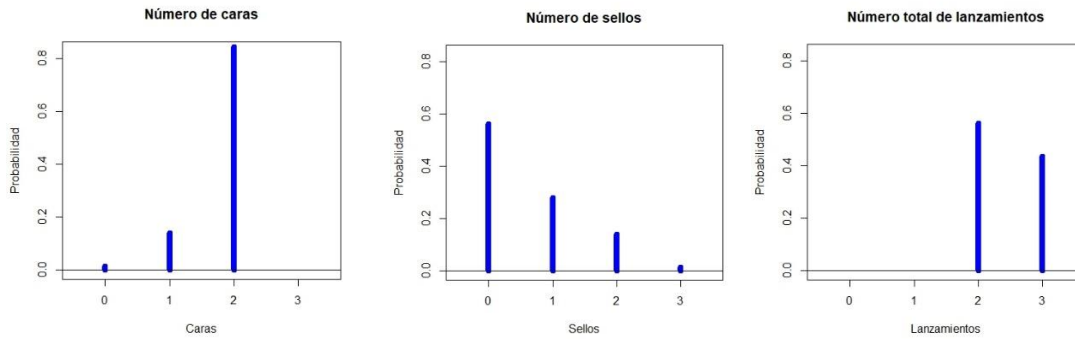
c)

| Número de sellos | Probab. |
|------------------|---------|
| 0                | 0,5625  |
| 1                | 0,2812  |
| 2                | 0,1406  |
| 3                | 0,0156  |
| Suma             | 1       |

d)

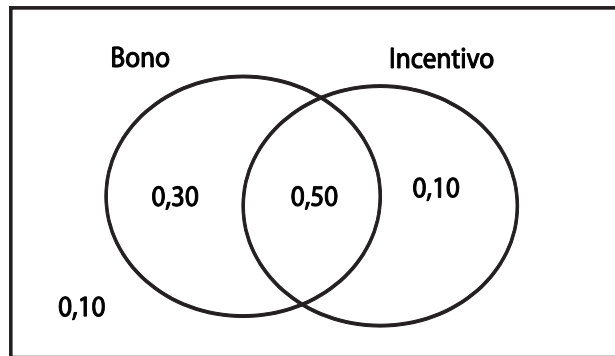
| Número total | Probab. |
|--------------|---------|
| 2            | 0,5625  |
| 3            | 0,4375  |
| Suma         | 1       |
|              |         |

A continuación se muestran los gráficos de las tres funciones de probabilidad



2.5) Número de asistentes, monto recaudado, número de ataques de cada equipo, número de goles de cada equipo, número de tiros de esquina de cada equipo, número de infracciones de cada equipo, número de cambios de cada equipo, entre otros.

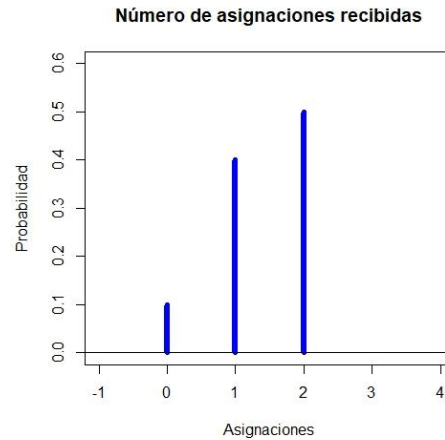
2.6) Diagrama de Venn:



Con el diagrama de Venn se responden las preguntas:

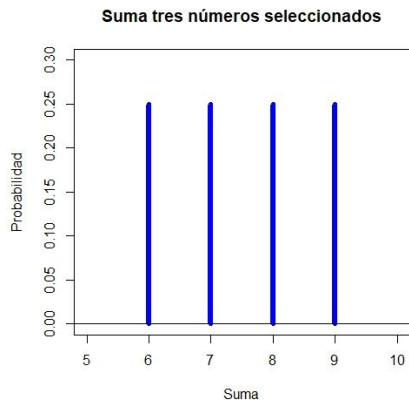
- a) 0,60    b) 0,30    c) 0,10    d)

| Número de asignaciones | Probabilidad |
|------------------------|--------------|
| 0                      | 0,10         |
| 1                      | 0,40         |
| 2                      | 0,50         |
| Suma                   | 1            |



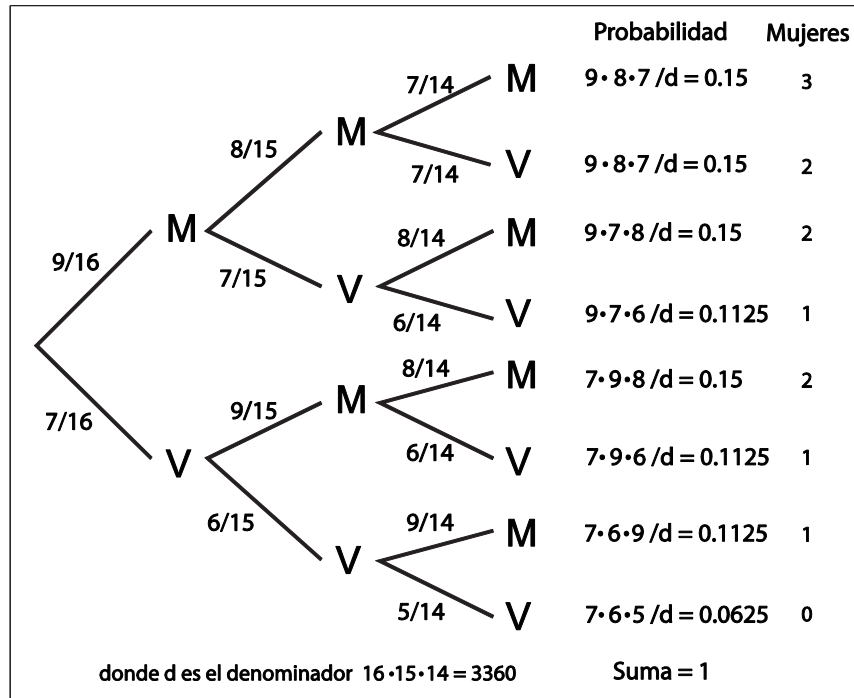
2.7) a) El primero seleccionado tiene 4 posibilidades, el segundo 3 posibilidades y el tercero tiene 2. Los tres números posibles de ser seleccionados son 123, 124, 134, y 234; todos son igualmente probables y sus sumas respectivas son, respectivamente, 6, 7, 8 y 9.

b) Cada uno tiene probabilidad  $1/4$



2.8) Diagrama de árbol:

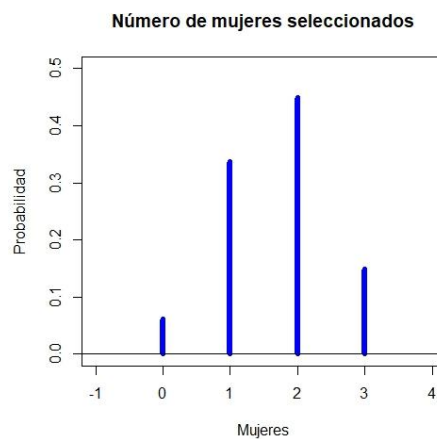




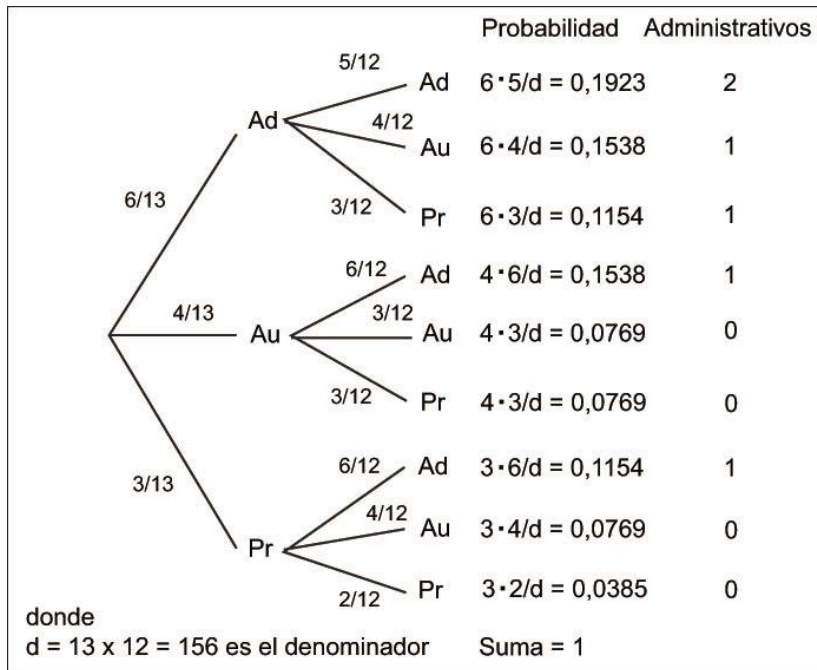
a) La variable aleatoria de interés es el número de mujeres seleccionadas. El espacio muestral es  $\{0, 1, 2, 3\}$ .

b) 0,0625 c) 0,3375 d) 0,45 e) 0,15

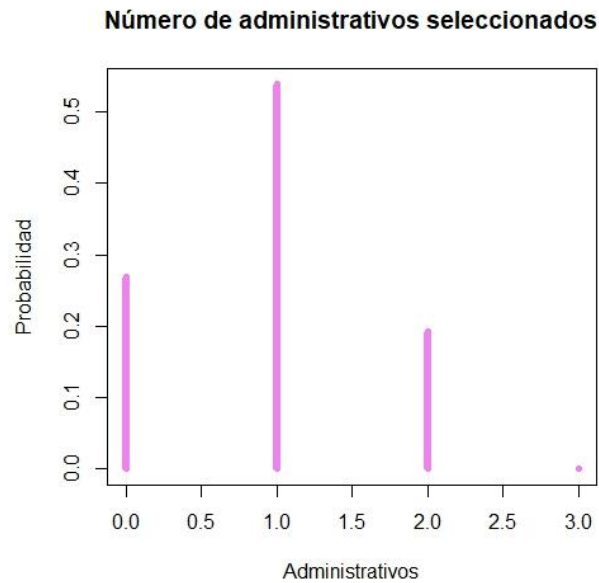
f)



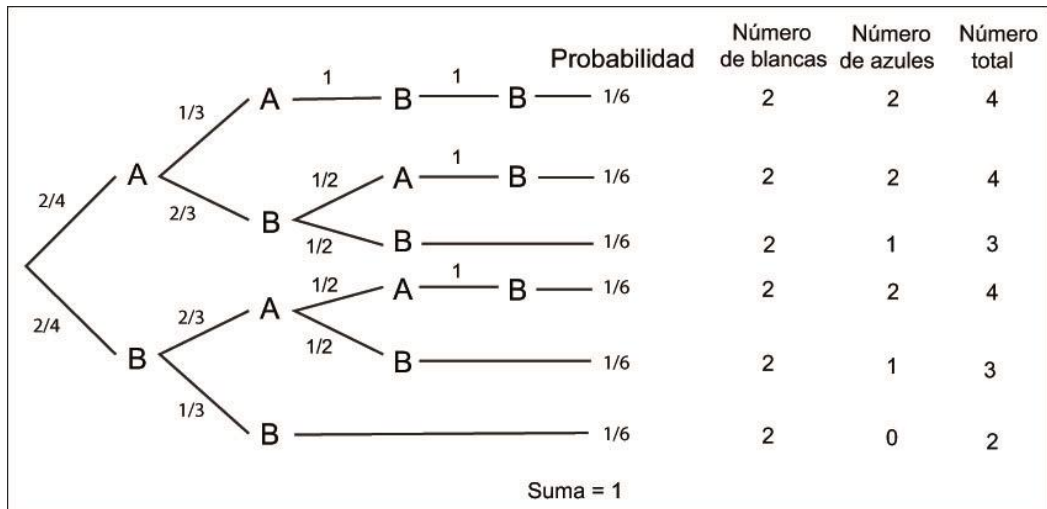
2.9) Diagrama de árbol:



- a) 0,2693   b) 0,5384   c) 0,1923   d) 0
- e) El número de administrativos en la comisión, con valores 0, 1, o 2.



2.10) Diagrama de árbol:



Del diagrama de árbol:

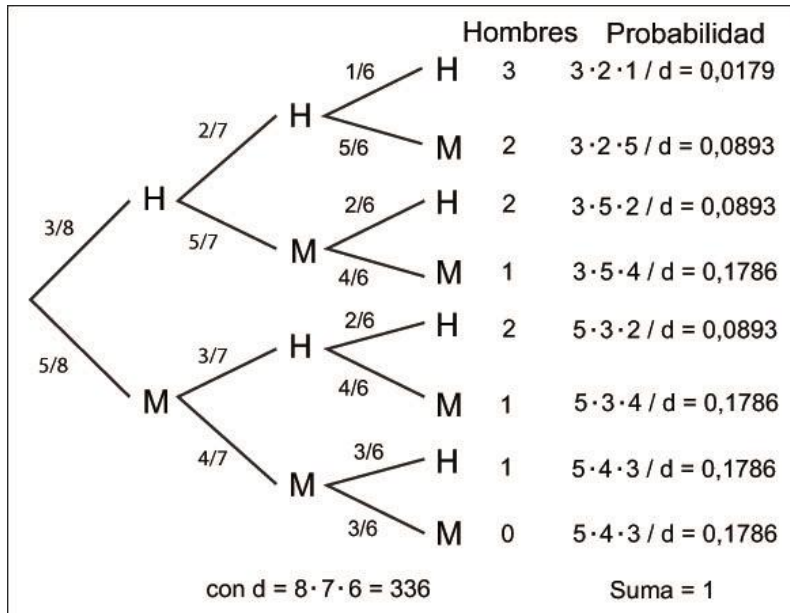
a)

| Número de azules | Probab.       |
|------------------|---------------|
| 0                | $\frac{1}{6}$ |
| 1                | $\frac{1}{3}$ |
| 2                | $\frac{1}{2}$ |
| Suma             | 1             |

b)

| Número total | Probab.       |
|--------------|---------------|
| 2            | $\frac{1}{6}$ |
| 3            | $\frac{1}{3}$ |
| 4            | $\frac{1}{2}$ |
| Suma         | 1             |

2.11) Diagrama de árbol:



a) 0,1785   b) 0,5357   c) 0,2679   d) 0,0179

e) Número de hombres seleccionados,  $\{0, 1, 2, 3\}$

2.12) En la tabla siguiente el margen izquierdo representa el primer lanzamiento, el margen superior el segundo. Las sumas están en el centro:

| 1er\2o | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------|---|---|---|---|
| 1      | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2      | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3      | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 4      | 5 | 6 | 7 | 8 |

Espacio muestral:  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  con probabilidades respectivas

$\{1/16, 2/16, 3/16, 4/16, 3/16, 2/16, 1/16\}$

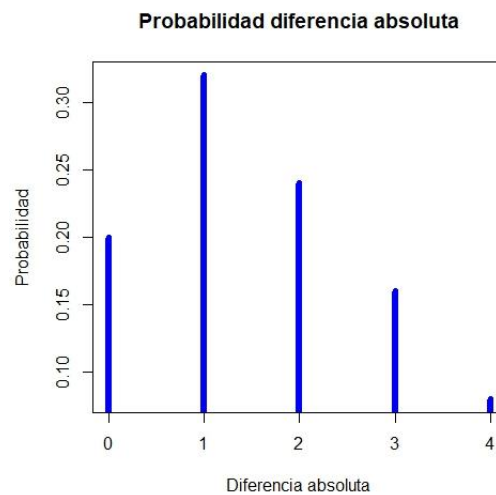
Observa que los valores centrales tienen mayor probabilidad de salir.

2.13)

|             |   | Segundo giro |    |    |    |    |
|-------------|---|--------------|----|----|----|----|
|             |   | 1            | 2  | 3  | 4  | 5  |
| Primer giro | 1 | 0            | -1 | -2 | -3 | -4 |
|             | 2 | 1            | 0  | -1 | -2 | -3 |
|             | 3 | 2            | 1  | 0  | -1 | -2 |
|             | 4 | 3            | 2  | 1  | 0  | -1 |
|             | 5 | 4            | 3  | 2  | 1  | 0  |

El valor absoluto de la diferencia de los dos números ganadores. Espacio muestral  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

| Diferencia | Probabilidad |
|------------|--------------|
| 0          | $5/25$       |
| 1          | $8/25$       |
| 2          | $6/25$       |
| 3          | $4/25$       |
| 4          | $2/25$       |
| Suma       | 1            |



2.14)

|                    |   | Segundo lanzamiento |   |   |   |    |
|--------------------|---|---------------------|---|---|---|----|
|                    |   | 1                   | 2 | 3 | 4 | 5  |
| Primer lanzamiento | 1 | 2                   | 3 | 4 | 5 | 6  |
|                    | 2 | 3                   | 4 | 5 | 6 | 7  |
|                    | 3 | 4                   | 5 | 6 | 7 | 8  |
|                    | 4 | 5                   | 6 | 7 | 8 | 9  |
|                    | 5 | 6                   | 7 | 8 | 9 | 10 |

Espacio muestral:  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  con probabilidades respectivas  $\{1/25, 2/25, 3/25, 4/25, 5/25, 4/25, 3/25, 2/25, 1/25\}$

2.15) La figura siguiente muestra las sumas de los de los 3 lanzamientos:

| Primer lanzamiento = 1 |   | Tercer lanzamiento |   |   |   |
|------------------------|---|--------------------|---|---|---|
|                        |   | 1                  | 2 | 3 | 4 |
| Segundo lanzamiento    | 1 | 3                  | 4 | 5 | 6 |
|                        | 2 | 4                  | 5 | 6 | 7 |
|                        | 3 | 5                  | 6 | 7 | 8 |
|                        | 4 | 6                  | 7 | 8 | 9 |

| Primer lanzamiento = 2 |   | Tercer lanzamiento |   |   |    |
|------------------------|---|--------------------|---|---|----|
|                        |   | 1                  | 2 | 3 | 4  |
| Segundo lanzamiento    | 1 | 4                  | 5 | 6 | 7  |
|                        | 2 | 5                  | 6 | 7 | 8  |
|                        | 3 | 6                  | 7 | 8 | 9  |
|                        | 4 | 7                  | 8 | 9 | 10 |

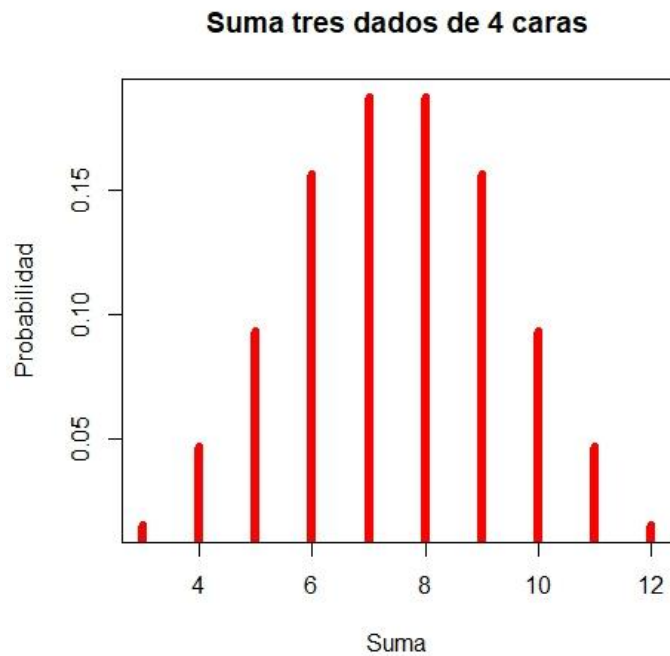
| Primer lanzamiento = 3 |   | Tercer lanzamiento |   |    |    |
|------------------------|---|--------------------|---|----|----|
|                        |   | 1                  | 2 | 3  | 4  |
| Segundo lanzamiento    | 1 | 5                  | 6 | 7  | 8  |
|                        | 2 | 6                  | 7 | 8  | 9  |
|                        | 3 | 7                  | 8 | 9  | 10 |
|                        | 4 | 8                  | 9 | 10 | 11 |

| Primer lanzamiento = 4 |   | Tercer lanzamiento |    |    |    |
|------------------------|---|--------------------|----|----|----|
|                        |   | 1                  | 2  | 3  | 4  |
| Segundo lanzamiento    | 1 | 6                  | 7  | 8  | 9  |
|                        | 2 | 7                  | 8  | 9  | 10 |
|                        | 3 | 8                  | 9  | 10 | 11 |
|                        | 4 | 9                  | 10 | 11 | 12 |

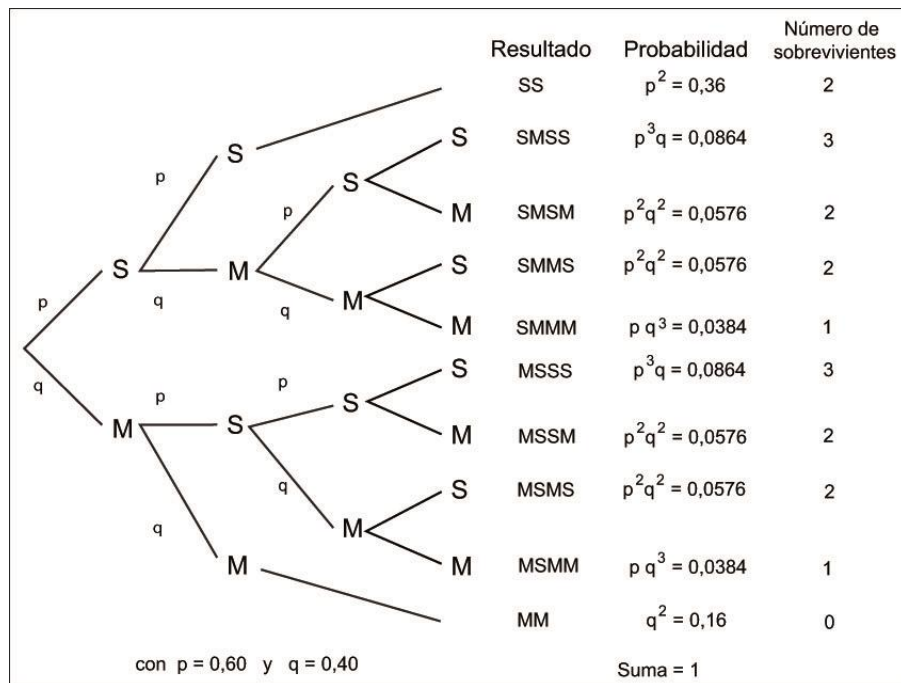
Resultados posibles:

$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$  con probabilidades respectivas

$\{1/64, 3/64, 6/64, 10/64, 12/64, 12/64, 10/64, 6/64, 3/64, 1/64\}$



2.16) Diagrama de árbol:



S quiere decir *sobrevive* M quiere decir *muere*.

a) La tabla siguiente muestra las secuencias que pueden ocurrir (los eventos simples), con sus respectivas probabilidades:

| Evento simple | SS   | SMSS   | SMSM   | SMMS   | SMMM   | MSSS   | MSSM   | MSMS   | MSMM   | MM   | Suma |
|---------------|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------|------|
| Probab.       | 0,36 | 0,0864 | 0,0576 | 0,0576 | 0,0384 | 0,0864 | 0,0576 | 0,0576 | 0,0384 | 0,16 | 1    |

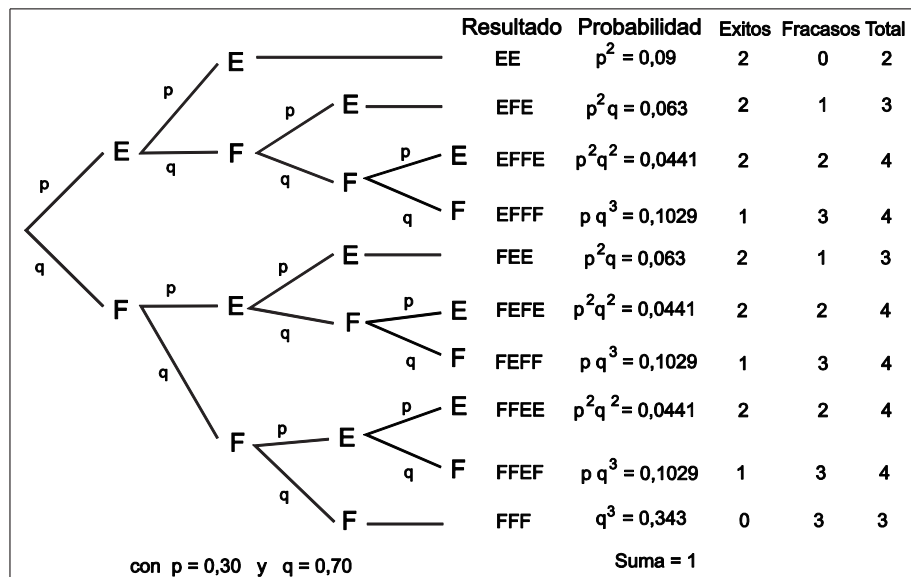
b) La siguiente tabla muestra los valores de la variable aleatoria *número de sobrevivientes* y sus probabilidades:

| Número de sobrevivientes | 0    | 1      | 2      | 3      | Suma |
|--------------------------|------|--------|--------|--------|------|
| Probabilidad             | 0,16 | 0,0768 | 0,5904 | 0,1728 | 1    |

2.17) a) 0,909                      b) 0,007                      c) 0,729

2.18) Resultados posibles:

EE, EFE, EFFE, EFFF, FEE, FEFE, FFEE, FEFF, FFEF, FFF.



a)

b)

c)



| Número total de ensayos | Probab. |
|-------------------------|---------|
| 2                       | 0,090   |
| 3                       | 0,469   |
| 4                       | 0,441   |
| Suma                    | 1       |
|                         |         |

| Número de éxitos | Probab. |
|------------------|---------|
| 0                | 0,343   |
| 1                | 0,3087  |
| 2                | 0,3483  |
| Suma             | 1       |
|                  |         |

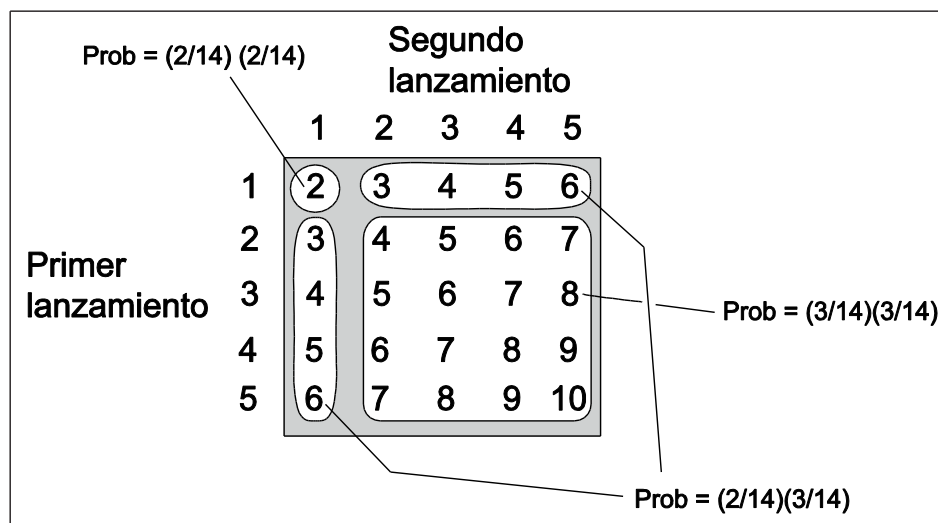
| Número de fracasos | Probab. |
|--------------------|---------|
| 0                  | 0,09    |
| 1                  | 0,126   |
| 2                  | 0,1323  |
| 3                  | 0,6517  |
| Suma               | 1       |
|                    |         |

2.19) El par (1,1) tiene probabilidad  $(1/7)^2 = 0,0204$

Cada par que contiene un sólo 1, luego los pares tienen probabilidad  $(1/7)(3/14) = 0,0336$

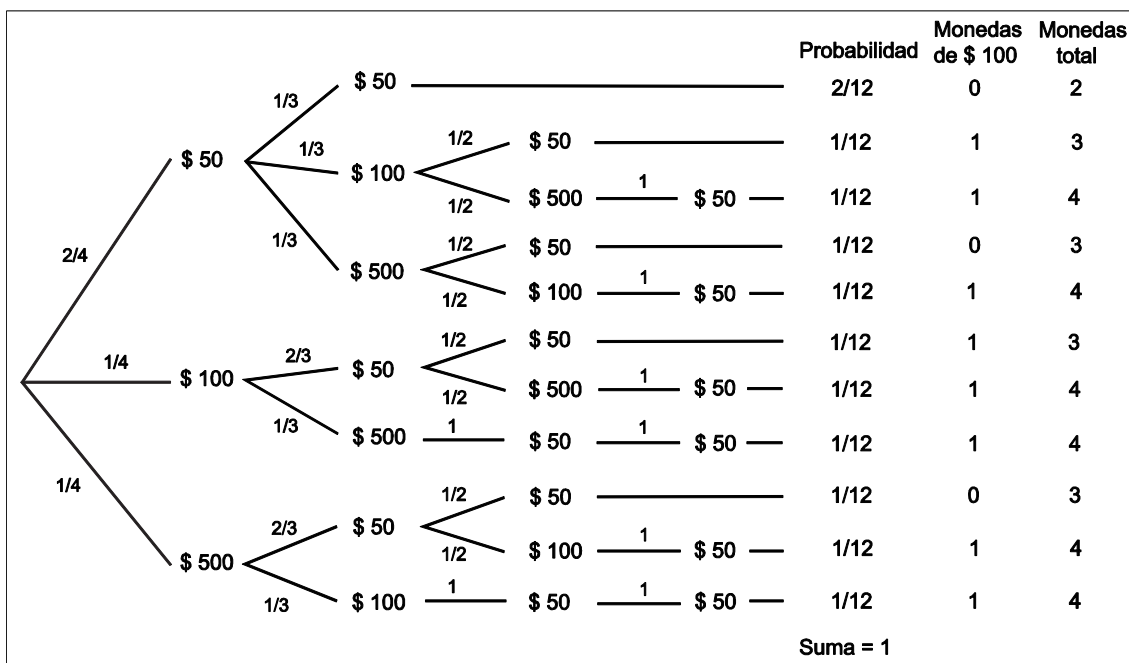
Cada par que no contiene el 1 tiene probabilidad  $(3/14)^2 = 0,0459$

Mira la figura siguiente:



| Suma | Probabilidad                         | Suma | Probabilidad         |
|------|--------------------------------------|------|----------------------|
| 2    | $(2/14)^2 = 0,0204$                  | 7    | $4(3/14)^2 = 0,1837$ |
| 3    | $2(2/14)(3/14) = 0,0612$             | 8    | $3(3/14)^2 = 0,1378$ |
| 4    | $2(2/14)(3/14) + (3/14)^2 = 0,1071$  | 9    | $2(3/14)^2 = 0,0918$ |
| 5    | $2(2/14)(3/14) + 2(3/14)^2 = 0,1531$ | 10   | $(3/14)^2 = 0,0459$  |
| 6    | $2(2/14)(3/14) + 3(3/14)^2 = 0,1990$ | Suma | 1                    |

2.20)



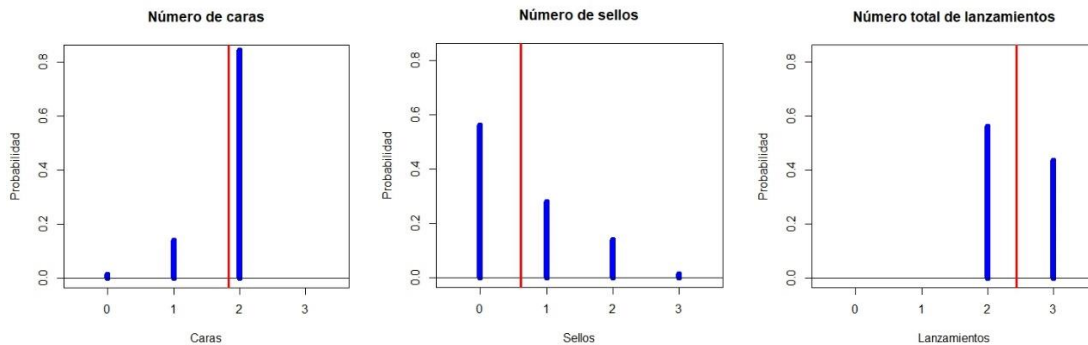
| Número de monedas de \$100 | Probabilidad | Total de monedas | Probabilidad |
|----------------------------|--------------|------------------|--------------|
| 0                          | 1/3          | 2                | 1/6          |
| 1                          | 2/3          | 3                | 1/3          |
| Suma                       | 1            | 4                | 1/2          |
|                            |              | Suma             | 1            |

### **Respuestas Capítulo 3:**

3.1) b)  $0 \times 0,0156 + 1 \times 0,1406 + 2 \times 0,8438 = 1,8281$  caras

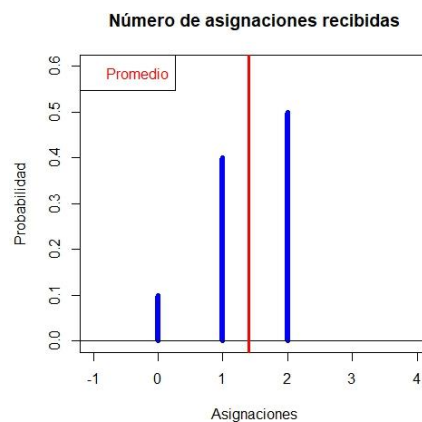
c) 0,6094 sellos d) 2,4375 lanzamientos

Los gráficos de las tres funciones de probabilidad con la representación de los respectivos valores esperados, línea roja, aparecen a continuación:

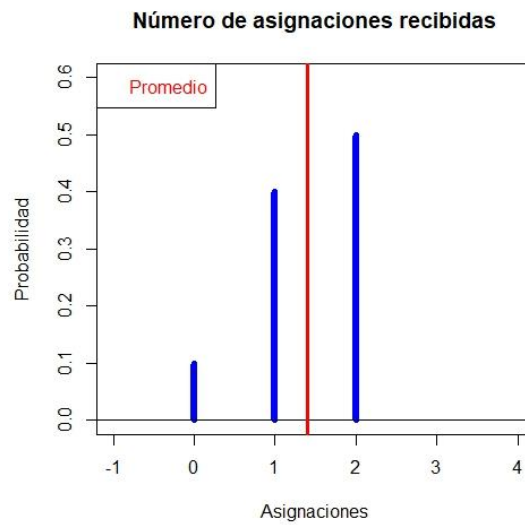


3.2)  $0 \times 0,10 + 1 \times 0,40 + 2 \times 0,50 = 1,4$  asignaciones (entre bonos e incentivos de producción).

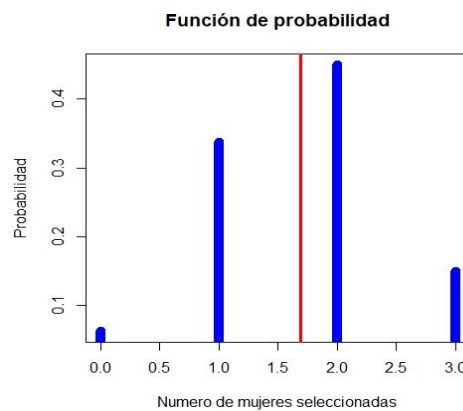
Es una medida del número promedio de asignaciones que reciben los trabajadores. El promedio es ponderado por las respectivas probabilidades.



3.3)  $(6 + 7 + 8 + 9) \times 1/4 = 7,5$ . Es el valor promedio de la suma de los tres números seleccionados, ponderados por sus probabilidades, que en este caso son todas iguales a  $1/4$ .



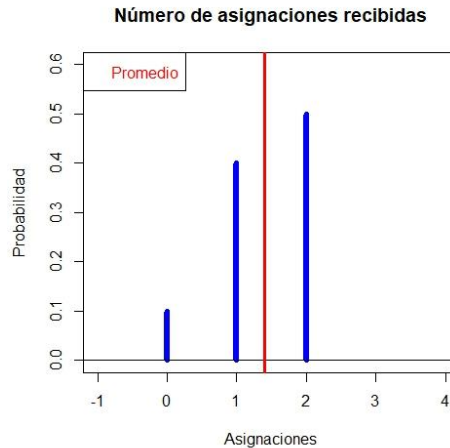
3.4)  $0 \times 0,0625 + 1 \times 0,3375 + 2 \times 0,45 + 3 \times 0,15 = 1,6875$  mujeres.



El valor esperado es un promedio del número de mujeres seleccionadas, ponderados por las respectivas probabilidades.

3.5)  $1 \times 0,07 + 2 \times 0,08 + 3 \times 0,19 + 4 \times 0,34 + 5 \times 0,25 + 6 \times 0,05 + 7 \times 0,02 = 3,85$  computadores.

Es el número promedio de computadores demandados por semana, ponderados por sus probabilidades.



3.6) Valor esperado del número de azules extraídas:

$$0 \times 1/6 + 1 \times 1/3 + 2 \times 1/2 = 1,3333 \text{ bolas azules}$$

Valor esperado del total de bolas extraídas:

$$2 \times 1/6 + 3 \times 1/3 + 4 \times 1/2 = 3,3333 \text{ bolas}$$

3.7) Valor esperado del número de hombres seleccionados:

$$0 \times 0,1785 + 1 \times 0,5357 + 2 \times 0,2679 + 3 \times 0,0179 = 1,125 \text{ hombres}$$

3.8) Valor esperado de la suma de los 2 números ganadores, dado 4 caras:

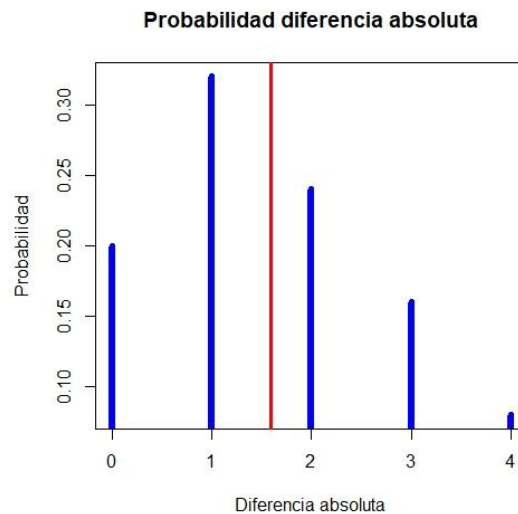
$$2 \times 1/16 + 3 \times 2/16 + 4 \times 3/16 + 5 \times 4/16 + 6 \times 3/16 + 7 \times 2/16 + 8 \times 1/16 = 5.$$

Es el promedio de los posibles ganadores, ponderados por sus respectivas probabilidades. Por la simetría de las probabilidades, el resultado es exactamente igual al promedio simple.

3.9) Valor esperado del valor absoluto de la diferencia de dos números:

$$0 \times 5/25 + 1 \times 8/25 + 2 \times 6/25 + 3 \times 4/25 + 4 \times 2/25 = 1,6$$

La línea roja del siguiente gráfico representa el valor esperado:



3.10) Valor esperado de la suma de los 2 números ganadores de un dado de 5 caras:

$$2 \times 1/25 + 3 \times 2/25 + 4 \times 3/25 + 5 \times 4/25 + 6 \times 5/25 + 7 \times 4/25 + \\ + 8 \times 3/25 + 9 \times 2/25 + 10 \times 1/25 = 6$$

3.11) Valor esperado de la suma de los 3 números de un dado de 4 caras:

$$3 \times 1/64 + 4 \times 3/64 + 5 \times 6/64 + 6 \times 10/64 + 7 \times 12/64 + 8 \times 12/64 + \\ + 9 \times 10/64 + 10 \times 6/64 + 11 \times 3/64 + 12 \times 1/64 = 7,5$$

3.12) Valor esperado del número de plantas que sobreviven

$$0 \times 0,16 + 1 \times 0,0768 + 2 \times 0,5904 + 3 \times 0,1728 = 1,776 \text{ plantas}$$

3.13) Valor esperado del número total de ensayos:

$$2 \times 0,09 + 3 \times 0,467 + 4 \times 0,441 = 3,3510 \text{ ensayos}$$

Valor esperado del número total de éxitos: 1,0053 éxitos

Valor esperado del número total de fracasos: 2,3457 fracasos.

Observa que los valores esperados del número de éxitos y del número de fracaso son iguales al valor esperado del número total de ensayos.

3.14) Los resultados posibles se muestran en la siguiente tabla, en que la fila superior muestra el valor de la primera tarjeta seleccionada, la columna de la izquierda el valor de la segunda, en el centro están los productos:

|   | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 |   | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
| 2 |   |   | 6 | 8  | 10 | 12 |
| 3 |   |   |   | 12 | 15 | 18 |
| 4 |   |   |   |    | 20 | 24 |
| 5 |   |   |   |    |    | 30 |

Los valores posibles de los productos son:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30.

6 y 12 se repiten, por lo que tienen probabilidad 2/15 cada uno.

Los demás tienen probabilidad 1/15.

Valor esperado del producto:

$$(2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 10 + 15 + 18 + 20 + 24 + 30) \times 1/15 + \\ + (6 + 12) \times 2/15 = 11,6667$$

3.15) a) eee, eef, efe, fee, eff, fef, ffe, fff

b) Número de éxitos.

c) La probabilidad de 0 éxitos es la probabilidad de *fff* igual a

$$(1 - 0,4) \times (1 - 0,7) \times (1 - 0,2) = 0,144$$

La probabilidad de 1 éxito es igual a la probabilidad de *eff* más la de *fef* más la de *ffe*. Es igual a

$$0,4 \times (1 - 0,7) \times (1 - 0,2) + (1 - 0,4) \times 0,7 \times (1 - 0,2) + \\ + (1 - 0,4) \times (1 - 0,7) \times 0,2 = 0,096 + 0,336 + 0,036 = 0,468$$

De esta manera se completa la tabla de probabilidad siguiente:

|              |       |       |       |       |      |
|--------------|-------|-------|-------|-------|------|
| Éxitos       | 0     | 1     | 2     | 3     | Suma |
| Probabilidad | 0,144 | 0,468 | 0,332 | 0,056 | 1    |

d) Valor esperado del número de éxitos

$$0 \times 0,144 + 1 \times 0,468 + 2 \times 0,332 + 3 \times 0,056 = 1,3 \text{ éxitos.}$$

Es menos de la mitad, que sería 1,5. Esto es así porque el primero y el último tienen una probabilidad baja de éxito.

3.16) Valor esperado de la suma

$$2 \times 0,0204 + 3 \times 0,0612 + 4 \times 0,1071 + 5 \times 0,1531 + 6 \times 0,1990 + \\ + 7 \times 0,1837 + 8 \times 0,1378 + 9 \times 0,0918 + 10 \times 0,0459 = 6,2858$$

3.17) Valor esperado del número de monedas de \$100:

$$0 \times 1/3 + 1 \times 2/3 = 2/3 \text{ monedas}$$

Valor esperado del total de monedas extraídas:

$$2 \times 1/6 + 3 \times 4/12 + 4 \times 6/12 = 10/3 = 3,3333 \text{ monedas}$$

3.18) Valor esperado de la edad de los alumnos:

$$11 \times 0,04 + 12 \times 0,14 + 13 \times 0,11 + 14 \times 0,15 + 15 \times 0,13 + 16 \times 0,17 + \\ + 17 \times 0,18 + 18 \times 0,08 = 14,82 \text{ años}$$

Es la edad promedio de la población de todos los actuales alumnos del establecimiento educacional.

3.19) Valor esperado del índice de delitos a través de todas las comunas:

$$0 \times 1/345 + 1 \times 6/345 + 2 \times 15/346 + \dots + 22 \times 1/346 = 9,951.$$

Es el valor promedio poblacional a través de todas las comunas.

El valor esperado se calculó redondeando las probabilidades a 4 decimales.

3.20) a) Los resultados pueden ser DDDDD con 5 días en que el turno de día supera al de noche; DDDDN, DDDND, DDNDD, DNDDD, NDDDD con 4 días



(son 5 posibilidades); DDDNN y otros con 3 días (son 10 posibilidades), DDNNNN con 2 días (son 10 posibilidades), DNNNN con 1 día (son 5 posibilidades), NNNNN ningún día (es 1 posibilidad). Hay 32 resultados posibles.

La función de probabilidad es:

|              |      |      |       |       |      |      |
|--------------|------|------|-------|-------|------|------|
| Días D       | 0    | 1    | 2     | 3     | 4    | 5    |
| Probabilidad | 1/32 | 5/32 | 10/32 | 10/32 | 5/32 | 1/32 |

b) Valor esperado del número de días (de lunes a viernes) en que el turno de día supera al de noche

$$0 \times 1/32 + 1 \times 5/32 + 2 \times 10/32 + 3 \times 10/32 + 4 \times 5/32 + 5 \times 1/32 =$$

$$= 80/32 = 2,5 \text{ días.}$$

Justo la mitad entre 0 y 5.

#### **Respuestas Capítulo 4:**

4.1) b) Varianza del número de caras

$$V = 0^2 \times 0,0156 + 1^2 \times 0,1406 + 2^2 \times 0,8438 - 1,8281^2 =$$

$$= 3,5156 - 3,3420 = 0,1736 \text{ caras}^2.$$

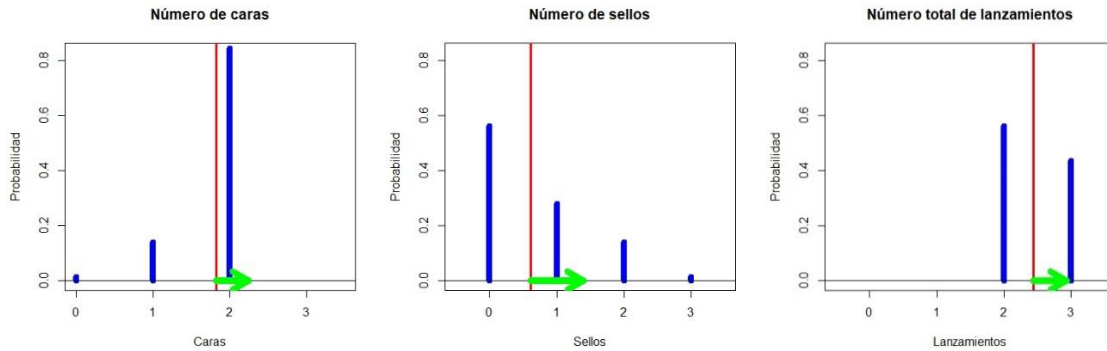
La desviación estándar del número de caras es la raíz cuadrada de la varianza, igual a 0,4166 caras.

c) Varianza del número de sellos  $V = 0,9844 - 0,3713 = 0,6130 \text{ sellos}^2$

La desviación estándar del número de sellos es 0,7830 sellos.

d) Varianza del total de lanzamientos  $V = 6,1875 - 5,9414 = 0,2461 \text{ lanzamientos}^2.$

La desviación estándar del número de lanzamientos es 0,4961 lanzamientos. Para comparar, a continuación aparecen los gráficos de las funciones de probabilidad, donde se muestran los valores esperados, en rojo, y las flechas verdes representan la magnitud de las respectivas desviaciones estándar:



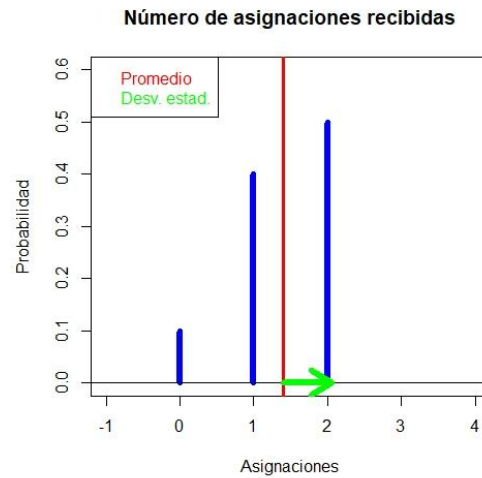
En los gráficos no se pueden representar las varianzas, por el hecho de tener otra unidad de medida. Las desviaciones sí, por estar medida en la misma unidad de medida de las observaciones originales, en este caso, lanzamientos.

#### 4.2) Varianza del número de asignaciones recibidas

$$V = 0^2 \times 0,1 + 1^2 \times 0,40 + 2^2 \times 0,50 - 1,4^2 = 2,4 - 1,96 = 0,44 \text{ asign}^2.$$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza = 0,6633 asignaciones.

Es una medida de la magnitud de la variación promedio.

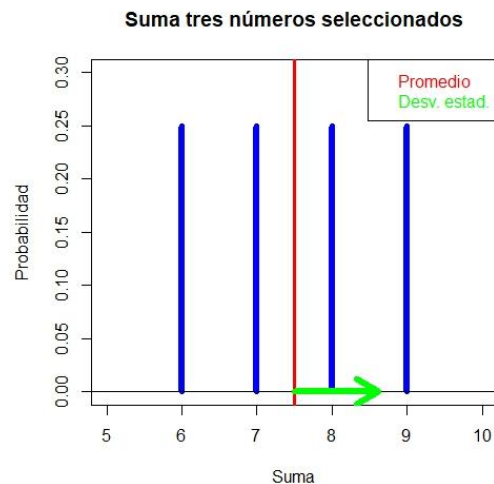


4.3) Varianza de la suma de tres números seleccionados al azar, de entre los primeros 4 números naturales

$$V = 6^2 \times 1/4 + 7^2 \times 1/4 + 8^2 \times 1/4 + 9^2 \times 1/4 - 7,5^2 = 57,5 - 56,25 = 1,25 \text{ asignaciones}^2.$$

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza

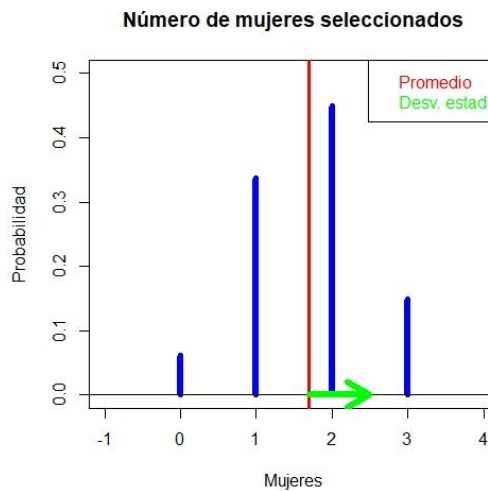
$$= 1,1180.$$



4.4) Varianza del número de computadores demandados

$$V = 0^2 \times 0,0625 + 1^2 \times 0,3375 + 2^2 \times 0,45 + 3^2 \times 0,15 - 1,6875^2 = \\ = 3,4875 - 2,8477 = 0,6398 \text{ mujeres}^2.$$

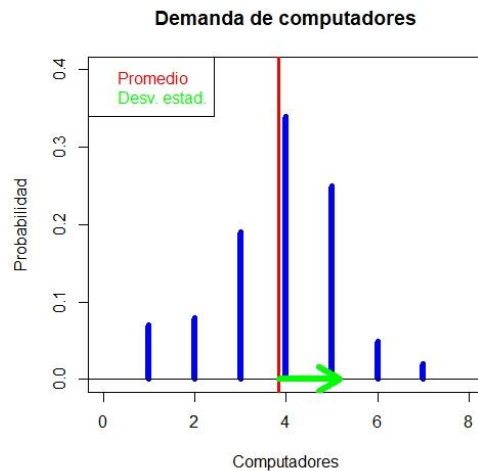
La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza  
= 0,7999 mujeres.



4.5) Varianza de la demanda de computadores:

$$V = 1^2 \times 0,07 + 2^2 \times 0,08 + 3^2 \times 0,19 + 4^2 \times 0,34 + 5^2 \times 0,25 + \\ + 6^2 \times 0,05 + 7^2 \times 0,02 - 3,85^2 = 16,57 - 14,8225 = 1,7475 \text{ computadores}^2.$$

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza  
= 1,3219 computadores.



4.6) a) Varianza del número del número de bolas azules extraídas

$$V = 0^2 \times 0,1667 + 1^2 \times 0,3333 + 2^2 \times 0,5000 - 1,3333^2 =$$

$$= 2,3333 - 1,7778 = 0,5556 \text{ bolas}^2.$$

La desviación estándar del número de bolas es la raíz cuadrada de la varianza

$$= 0,7454 \text{ bolas.}$$

b) Varianza del número del número total de bolas extraídas

$$V = 2^2 \times 0,1667 + 3^2 \times 0,3333 + 4^2 \times 0,5000 - 3,3333^2 =$$

$$= 11,6665 - 11,1109 = 0,5556 \text{ bolas}^2.$$

La desviación estándar del total de bolas es la raíz cuadrada de la varianza

$$= 0,7454 \text{ bolas.}$$

4.7) Varianza del número del número de hombres seleccionados

$$V = 0^2 \times 0,1785 + 1^2 \times 0,5357 + 2^2 \times 0,2679 + 3^2 \times 0,0179 - 1,1250^2 =$$

$$= 1,7679 - 1,2656 = 0,5022 \text{ hombres}^2.$$

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza

$$\text{Igual a } 0,7087 \text{ hombres.}$$

4.8) Varianza de la suma de los resultados del dado de 4 caras

$$V = 2^2 \times 1/16 + 3^2 \times 2/16 + 4^2 \times 3/16 + 5^2 \times 4/16 + \\ + 6^2 \times 3/16 + 7^2 \times 2/16 + 8^2 \times 1/16 - 5^2 = 27,5 - 25 = 2,5.$$

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza,  
igual a 1,5811.

4.9) Varianza de la diferencia absoluta de los resultados de 2 giros de un trompo

$$V = 0^2 \times 1/16 + 1^2 \times 2/16 + 2^2 \times 3/16 + 3^2 \times 4/16 + 4^2 \times 3/16 - 1,6^2 = \\ = 4 - 2,56 = 1,44$$

La desviación estándar de la diferencia absoluta es la raíz cuadrada de la  
varianza, igual a 1,2.

4.10) Varianza de la suma de los resultados del lanzamiento de dado de 5  
caras

$$V = 2^2 \times 1/25 + 3^2 \times 2/25 + 4^2 \times 3/25 + 5^2 \times 4/25 + \dots + 9^2 \times 2/25 + 10^2 \times \\ 1/25 - 6^2 = 40 - 36 = 4.$$

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza,  
igual a 2.

4.11) Varianza de la suma de los resultados del lanzamiento de dado de 5  
caras

$$V = 3^2 \times 1/64 + 4^2 \times 3/64 + 5^2 \times 6/64 + 6^2 \times 10/64 + \dots + 12^2 \times 1/64 - 7,5^2 \\ = 60 - 56,25 = 3,75$$

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza  
= 1,9365

4.12) Varianza del número de plantas que sobreviven

$$V = 0^2 \times 0,16 + 1^2 \times 0,0768 + 2^2 \times 0,5904 + 3^2 \times 0,1728 - 1,776^2 = \\ = 3,9936 - 3,1542 = 0,8394 \text{ plantas}^2.$$

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza igual a 0,9162.

4.13) a) Varianza del número total de ensayos

$$V = 2^2 \times 0,09 + 3^2 \times 0,469 + 4^2 \times 0,441 - 3,351^2 = \\ = 11,637 - 11,2292 = 0,4078 \text{ ensayos}^2.$$

La desviación estándar del total es la raíz cuadrada de la varianza = 0,6386 ensayos.

b) Varianza del número de éxitos

$$V = 0^2 \times 0,343 + 1^2 \times 0,3087 + 2^2 \times 0,3483 - 1,0053^2 = \\ = 1,7015 - 1,0106 = 0,6913 \text{ éxitos}^2.$$

La desviación estándar del producto es la raíz cuadrada de la varianza igual a 0,8314 éxitos.

c) Varianza del número de fracasos

$$V = 0^2 \times 0,09 + 1^2 \times 0,126 + 2^2 \times 0,1323 + 3^2 \times 0,6517 - 2,3457^2 = \\ = 6,5205 - 5,5023 = 1,0182 \text{ fracasos}^2.$$

La desviación estándar del producto es la raíz cuadrada de la varianza Igual a 1,0091 fracasos.

Observa que la desviación estándar del número de éxitos y la desviación estándar del número de fracasos son ambas mayores que la desviación estándar del número total de ensayos.

4.14) Varianza del producto de los números en dos tarjetas

$$V = (2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2 + 10^2 + 15^2 + 18^2 + 20^2 + 24^2 + 30^2) \times 1/15 + (6^2 + 12^2) \times 2/15 - 11,6667^2 = 200,2 - 136,1111 = 64,0881.$$

La desviación estándar del producto es la raíz cuadrada de la varianza

Igual a 8,0055.

4.15) Varianza del número de éxitos

$$V = 0^2 \times 0,144 + 1^2 \times 0,468 + 2^2 \times 0,332 + 3^2 \times 0,056 - 1,3^2 = \\ = 5 - 1,69 = 3,31 \text{ éxitos}^2.$$

La desviación estándar del número de éxitos es la raíz cuadrada de la varianza

Igual a 1,8193 éxitos.

4.16) Varianza de la suma de dos lanzamientos

$$V = 2^2 \times 0,0204 + 3^2 \times 0,0612 + 4^2 \times 0,1071 + \dots + 10^2 \times 0,1531 - 6,2858^2 \\ = 43,1838 - 39,5113 = 3,6725 \text{ éxitos}^2$$

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza

Igual a 1,9164 éxitos.

4.17) a) Varianza del número de monedas de \$ 100

$$V = 0^2 \times 0,3333 + 1^2 \times 0,6667 - 0,6667^2 = \\ = 0,6667 - 0,4444 = 0,2222 \text{ éxitos}^2.$$

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza

igual a 0,4714 éxitos.



a) Varianza del número total de monedas extraídas

$$V = 2^2 \times 0,1667 + 3^2 \times 0,3333 + 4^2 \times 0,5 - 3,3333^2 = \\ = 11,6667 - 11,1111 = 0,5556 \text{ éxitos}^2.$$

La desviación estándar de la suma es la raíz cuadrada de la varianza  
Igual a 0,7454 éxitos.

4.18) Varianza de la edad de los alumnos

$$V = 11^2 \times 0,04 + 12^2 \times 0,14 + 13^2 \times 0,11 + \dots + 18 \times 0,08 - 14,82^2 = \\ = 223,7 - 219,6324 = 4,0676 \text{ años}^2.$$

La desviación estándar de la edad es la raíz cuadrada de la varianza  
Igual a 2,0168 años.

4.19) Varianza del índice de criminalidad

$$V = 0^2 \times 1/346 + 1^2 \times 6/346 + 2^2 \times 15/346 + 3^2 \times 21/346 + 4^2 \times 15/346 + \dots \\ \dots + 21^2 \times 2/346 + 22^2 \times 1/346 - 9,9509^2 = \\ = 126,0199 - 99,0196 = 27,0003.$$

La desviación estándar de la edad es la raíz cuadrada de la varianza  
Igual a 5,1962.

4.20) Varianza del índice de producción

$$V = 0^2 \times 1/32 + 1^2 \times 5/32 + 2^2 \times 10/32 + 3^2 \times 10/32 + 4^2 \times 5/32 + 5^2 \times 1/32 \\ - 2,5^2 = 7,5 - 6,25 = 1,25.$$

La desviación estándar de la edad es la raíz cuadrada de la varianza,  
igual a 1,1180 años.

### **Respuestas Capítulo 5:**

5.1) a) Revisa la definición y verás que con cualquier  $n$ ,

$$C(n,0) = C(n,n) = 1 \text{ y que } C(n,1) = n$$

$$\text{Luego } C(2,0) = 1 ; C(2,1) = 2 ; C(2,2) = 1$$

$$b) \quad C(3,0) = 1 ; C(3,1) = 3 ; C(3,2) = 3 , C(3,3) = 1$$

$$c) \quad C(4,0) = 1 ; C(4,1) = 4 ; C(4,2) = 2 \times 3 = 6 ; C(4,3) = 4 ; C(4,4) = 1$$

d)  $C(n,r)$  del triángulo de Pascal es igual al número de combinaciones de  $n$  objetos tomando  $r$  a la vez.

$$5.2) \text{ Permutaciones de 6 objetos } P(6,6) = 6! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

5.3) Permutaciones de 12 objetos tomando 3 a la vez

$$P(12,3) = 12! / 9! = 10 \times 11 \times 12 = 1320$$

5.4) Combinaciones de 20 objetos tomando 5 a la vez

$$C(20,5) = 20! / (5! 15!) = 10 \times 11 \times 12 = 15504$$

¡Son hartas!

5.5) Combinaciones de 10 objetos tomando 6 a la vez

$$C(10,6) = 10! / (4! 6!) = 7 \times 8 \times 9 \times 10 / (2 \times 3 \times 4) = 210$$

5.6) Asumamos que uno está fijo, cualquiera.

Las ordenaciones posibles de las restantes 5 son Permutaciones de 5 objetos:

$$P(5,5) = 5! = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$5.7) \text{ a) } C(50,3) = 50! / (3! 47!) = 48 \times 49 \times 50 / (2 \times 3) = 19600$$

$$b) P(50,3) = 50! / 47! = 48 \times 49 \times 50 = 117600$$

$$5.8) \text{ a) } P(7,7) = 7! = 5040 \quad b) \quad 1/5040 = 0,000198$$

5.9) Hay dos premios distintos a repartir entre 40 empleados.

$$\text{El número de posibilidades es } P(40,2) = 40! / 38! = 1560.$$

5.10) a) Permutaciones de 23 objetos, tomando 4 a la vez.

$$\text{Son } P(23,4) = 23!/19! = 23 \times 22 \times 21 \times 20 = 212520.$$

¡Son muchas posibilidades!

5.11) a) Supongamos que elegimos 2 alumnas de entre 12, se puede hacer de  $C(12,2)$ .

Elegimos 2 alumnos de entre 10, se puede hacer de  $C(10,2)$  maneras.

El total de posibilidades es el producto (principio multiplicativo)

$$C(12,2) \times C(10,2) = (12!/(2! \times 10!)) \times (10!/(2! \times 8!)) = 2970.$$

b) Si salen elegidas Amanda y Constanza entre las alumnas y salen elegidos David y Jorge como alumnos, hay una posibilidad de que esto ocurra. Y el total de posibilidades son 2970. Por el modelo de Laplace, la probabilidad del evento en cuestión es

$$\text{Posibilidades favorables} / \text{posibilidades total} = 1/2970 = 0,000337$$

5.12) a)  $C(17,5) = 17!/(5! \times 12!) = 6188$

b) Por el modelo de Laplace, la probabilidad es

$$\begin{aligned} &= C(5,2) \times C(12,3) / C(17,5) = (5!/(2! \times 3!)) \times (12!/(3! \times 9!)) / 6188 = \\ &= 2200 / 6188 = 0,3555 \end{aligned}$$

5.13) Por el modelo de Laplace, la probabilidad es

$$C(16,2)/C(18,4) = (16!/(2! \times 14!)) / (18!/(4! \times 14!)) = 120/3060 = 0,0392$$

5.14) a) El total de posibilidades es

$$C(40,2) = 40!/(2! \times 38!) = 39 \times 40 / 2 = 780$$

Las posibilidades favorables a que no obtenga ningún premio corresponden a todas las formas posibles que salgan sorteados los dos ganadores entre los 38 números que no son míos. Esto es  $C(38,2) = 38!/(2! \times 36!) = 37 \times 38 / 2 = 703$ .

Por el modelo de Laplace, la probabilidad es el cociente  $703/780 = 0,9013$

b) El denominador es el mismo.

Las posibilidades favorables corresponden a sortear un número premiado entre los dos míos, y el otro entre los 38 que no son míos. Estos dos números van multiplicados, porque por cada uno mío, se dan todos los posibles del que no es mío.

Es decir,  $C(2,1) \times C(38,1) = 2 \times 38!/(1! \times 37!) = 2 \times 38 = 76$

La probabilidad de obtener un premio es el cociente  $76/780 = 0,0974$ .

c) El mismo denominador. El numerador corresponde a que los 2 sorteados sean los dos que yo compré. Es decir, una posibilidad. Luego la probabilidad es  $1/780 = 0,0013$ .

Observa que la probabilidad de un premio es mucho menos que la probabilidad de no obtener ningún premio, y la probabilidad de dos premios es mucho menos que la primera.

5.15) a) Con la siguiente información puedes construir un diagrama de árbol.

Los 6 números del dado tienen igual probabilidad.

Si el dado sale 1 o 2 (con probabilidad  $1/3$ ), se lanza 1 moneda con dos resultados posibles: Cara o Sello, con probabilidad  $1/2$  cada una.

Si el dado sale 3 o 4 (con probabilidad  $1/3$ ), se lanzan 2 monedas, con resultados posibles CC, CS, SC, SS, con probabilidad  $1/4$  cada una.

Si sale 5 o 6 (con probabilidad  $1/3$ ), son 3 monedas, con resultados posibles CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS, con probabilidades  $1/8$  cada uno.

En consecuencia, el número de sellos puede ser 0, 1, 2 o 3.

Para obtener las probabilidades de estos resultados se debe sumar las correspondientes probabilidades.

Por ejemplo, la probabilidad de 2 sellos es  $1/3 \times (1/4 + 3/8) = 5/24$

De esta manera obtenemos las probabilidades que se dan en la siguiente tabla:

| Sellos | Probabilidad     |
|--------|------------------|
| 0      | $7/24 = 0,2917$  |
| 1      | $11/24 = 0,4583$ |
| 2      | $5/24 = 0,2083$  |
| 3      | $1/24 = 0,0417$  |
| Suma   | 1                |

b) Multiplicando los números de sellos por sus respectivas probabilidades y sumando, se obtiene el valor esperado de 1 sello.

### **Respuestas Capítulo 6:**

6.1) Sea  $X$  la variable aleatoria *número de sellos*.

El primer elemento de  $S$  tiene 0 sellos, con probabilidad  $1/8$ ;

los siguientes tres tienen 1 sello, con probabilidad  $3/8$ ;

los siguientes tres tienen 2 sellos, con probabilidad  $3/8$ ;

y el último tiene 3 sellos, con probabilidad  $1/8$ .

La tabla siguiente resume los resultados para la variable aleatoria  $X$ :

| $x$  | Probabilidad |
|------|--------------|
| 0    | 0,125        |
| 1    | 0,375        |
| 2    | 0,375        |
| 3    | 0,125        |
| Suma | 1            |

Se trata de una población con 2 valores posibles, sello (éxito) y cara (fracaso). La variable aleatoria es el número de sellos en la muestra de 3. En

cada lanzamiento, la probabilidad de éxito es  $p = 0,5$  y los resultados de cada lanzamiento son independientes. Por lo tanto,  $X$  tiene distribución binomial con parámetros  $n = 3$  y  $p = 0,5$ .

6.2) Sea  $X$  el número de mujeres menores sin sobrepeso.

La tabla siguiente muestra los posibles valores de  $X$  y las respectivas probabilidades asignadas (C con sobrepeso, S sin sobrepeso).

Las probabilidades conjuntas se obtienen multiplicando las probabilidades marginales, por la independencia:

| Persona 1 | Persona 2 | Persona 3 | Sin<br>sobrepeso | Probabilidad                        |
|-----------|-----------|-----------|------------------|-------------------------------------|
| S         | S         | S         | 3                | $0,8 \times 0,8 \times 0,8 = 0,512$ |
| C         | S         | S         | 2                | $0,2 \times 0,8 \times 0,8 = 0,128$ |
| S         | C         | S         | 2                | $0,8 \times 0,2 \times 0,8 = 0,128$ |
| S         | S         | C         | 2                | $0,8 \times 0,8 \times 0,2 = 0,128$ |
| C         | C         | S         | 1                | $0,2 \times 0,2 \times 0,8 = 0,032$ |
| C         | S         | C         | 1                | $0,2 \times 0,8 \times 0,2 = 0,032$ |
| S         | C         | C         | 1                | $0,8 \times 0,2 \times 0,2 = 0,032$ |
| C         | C         | C         | 0                | $0,2 \times 0,2 \times 0,2 = 0,008$ |
|           |           |           | Suma             | 1                                   |

Lo que se resume en la tabla siguiente:

| Sin<br>sobrepeso | Probabilidad |
|------------------|--------------|
| 0                | 0,512        |
| 1                | 0,384        |
| 2                | 0,096        |
| 3                | 0,008        |
| Suma             | 1            |

Observa que  $X$  tiene distribución binomial con parámetros  $n = 3$  y  $p = 0,8$ .

6.3) a) Hay que imaginarse que en la caja hay 50 fichas, de las cuales potencialmente 5 tienen premio (son las que saldrán en el proceso de extracción), y 45 no tienen premio.

Al comprar uno y no obtener ningún premio, las mía es del grupo de las 45 sin premio.

El espacio es equiprobable, por lo tanto, se aplica el modelo de Laplace,

*posibilidades favorables a no ganar premio / total de posibilidades,*

luego la probabilidad de que no tenga premio es  $45/50=0,9$ .

b) Para obtener un premio, el número mío pertenece al grupo de las cinco con premio.

Luego la probabilidad de obtener premio es  $5/50=0,1$

c) La probabilidad de no obtener premio es igual al producto de la probabilidad de no obtener premio con el primer número ( $45/50$ ) y la probabilidad condicional de no obtenerlo en el segundo, dado que no lo obtuve en el primero ( $44/49$ ):

$$(45/50) \times (44/49) = 0,8081$$

La probabilidad de obtener un premio es la suma de las probabilidades de las probabilidades de obtener premio con el primero y no en el segundo, más la probabilidad de no premio en el primero y sí en el segundo,

$$(5/50) \times (45/49) + (45/50) \times (5/49) = 2 \times 0,0918 = 0,1837$$

Análogamente, la probabilidad de obtener dos premios es

$$(5/50) \times (4/49) = 0,0082.$$

6.4) Si consideramos  $X$  la variable aleatoria *número de los que están viendo Domingo Show entre los 25 encuestados*, esta variable aleatoria tiene distribución binomial con parámetros  $n = 25$  y  $p = 0,01$ .

La probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor  $x$  está dada por

$$f(x) = \frac{25!}{x!(25-x)!} 0,01^x (1 - 0,01)^{25-x} \text{ si } x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Reemplazando x por 0 y recordando que  $0! = 1$  y que  $0,01^0 = 1$ , tenemos

$$f(0) = \frac{25!}{0!25!} 0,01^0 0,99^{25} = 0,7778$$

Reemplazando x por 1,

$$f(1) = \frac{25!}{1!24!} 0,01^1 0,99^{24} = 0,1964$$

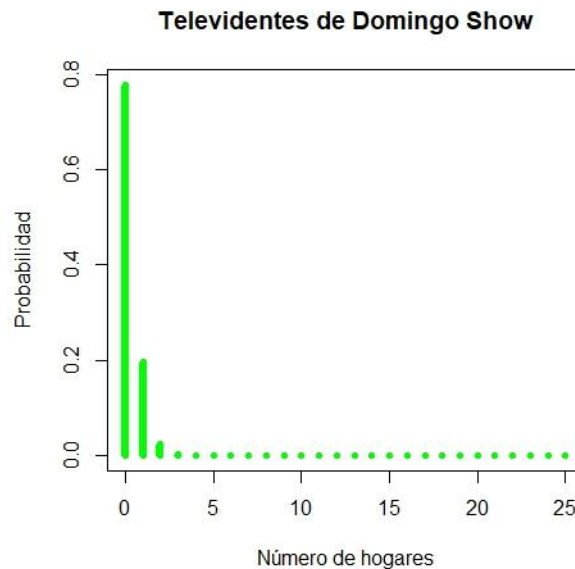
Reemplazando x por 2,

$$f(2) = \frac{25!}{2!23!} 0,01^2 0,99^{23} = 0,0238$$

De esta forma se continúa hasta que X vale 25.

$f(3) = 0,0018$ ;  $f(4) = 0,0001$ ; los demás son 0 si los aproximamos a 4 decimales.

Gráfico de la función de probabilidad:



Observa que a medida que aumentamos X, la probabilidad disminuye rápidamente. Tiene sentido eso porque la probabilidad de que en un encuestado se esté viendo el programa es muy baja.



6.5) Sea la variable aleatoria  $X$  el *número de ingenieros informáticos en la muestra*.

En este ejercicio la variable aleatoria no corresponde a una distribución binomial, pues no hay independencia entre cada selección, debido a que es sin reemplazo. Por lo tanto, cambia la proporción de ingenieros informáticos (iinf) cada vez que se selecciona un trabajador.

Si  $X = 0$ , los tres son seleccionados de entre los 105 no iinf. Usamos el modelo de Laplace para la probabilidad de cada uno.

$$\text{Prob}(X = 0) = (105/120)(104/119)(103/118) = 0,6675.$$

En efecto, la probabilidad de que los dos primeros son iinf, es igual a la probabilidad de que el primero lo es, por la probabilidad condicional que el segundo es iinf dado que el primero lo es. Y la probabilidad de los tres, es la probabilidad condicional de que el tercero es iinf dado que los dos primeros lo son, por la probabilidad conjunta que los dos primeros lo son. De esta forma se va formando una cadena de multiplicaciones.

Si  $X = 1$ , dos son seleccionados entre los no iinf y uno entre los iinf. El iinf puede ser el primero, el segundo o el tercero, por lo que en total son tres las posibilidades. De forma análoga,

$$\text{Prob}(X = 1) = 3(105/120)(104/119)(15/118) = 0,2916.$$

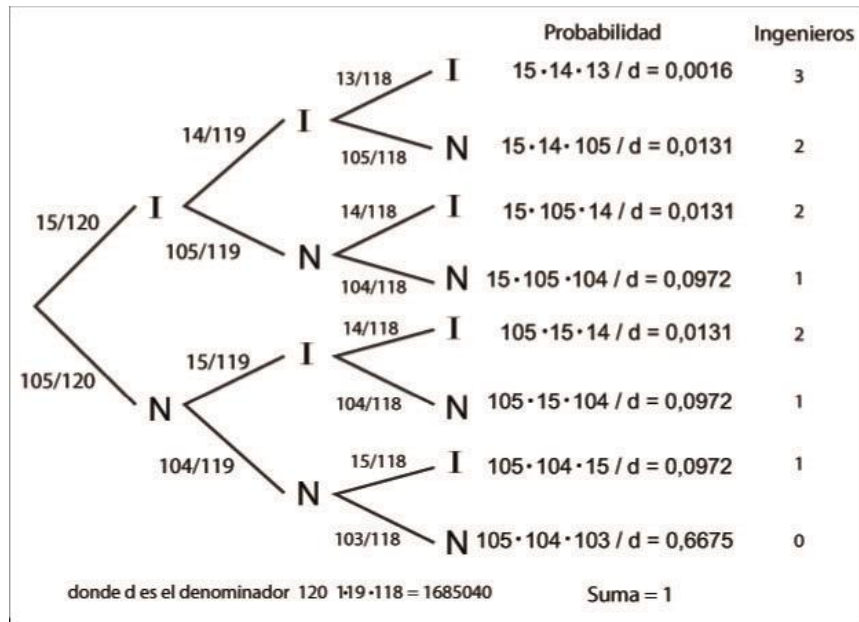
Si  $X = 2$ , uno es seleccionado entre los no iinf y dos entre los iinf. Esta vez, en no iinf

$$\text{Prob}(X = 2) = 3(105/120)(15/119)(14/118) = 0,0396.$$

Si  $X = 3$ , los tres son seleccionados entre los iinf.

$$\text{Prob}(X = 3) = (15/120)(14/119)(13/118) = 0,0016.$$

El diagrama siguiente resume todas las situaciones posibles, con sus probabilidades:



6.6) Consideraremos una venta como un éxito. La probabilidad de que una visita resulte en una venta individual es 0,3. Supondremos que hay independencia entre los resultados de las visitas. Entonces el número de ventas (éxitos) tiene distribución binomial con parámetros  $n = 10$  y  $p = 0,3$ .

La función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{10!}{x!(10-x)!} 0,3^x (1 - 0,3)^{10-x} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, 10$$

La tabla siguiente entrega las probabilidades de cada valor de  $x$  (ve el Anexo 1):

| Ventas | Probabilidad |  | Ventas | Probabilidad |  | Ventas | Probabilidad |
|--------|--------------|--|--------|--------------|--|--------|--------------|
| 0      | 0,0282       |  | 4      | 0,2001       |  | 8      | 0,0014       |
| 1      | 0,1211       |  | 5      | 0,1029       |  | 9      | 0,0001       |
| 2      | 0,2335       |  | 6      | 0,0368       |  | 10     | 0,0000       |
| 3      | 0,2668       |  | 7      | 0,0090       |  | Suma   | 1            |

Puedes observar que las probabilidades aumentan, hasta llegar a 0,2668 con 3 ventas, y de ahí disminuyen hasta llegar a casi 0 (aproximamos a 4 decimales, por eso el último valor dio cero)

6.7) Se trata de una muestra aleatoria, de 8 trabajadores sociales. Como el total de trabajadores sociales es muy grande, consideraremos que el seleccionar un trabajador no afecta la proporción de los que tienen el grado de doctor (éxitos). Luego podemos asumir que la proporción de doctores se mantiene constante (5%) durante el proceso de selección y podemos considerar la variable aleatoria *número de doctores en la muestra* como una binomial, con parámetros  $n = 8$  y  $p = 0,05$ .

Su función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{8!}{x!(8-x)!} 0,05^x (1 - 0,05)^{8-x} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, 8$$

Los valores de las probabilidades están dados en la tabla siguiente (ve Anexo 1):

| x | Probabilidad |  | x | Probabilidad |  | x | Probabilidad |
|---|--------------|--|---|--------------|--|---|--------------|
| 0 | 0,6634       |  | 3 | 0,0054       |  | 6 | 0,0000       |
| 1 | 0,2793       |  | 4 | 0,0004       |  | 7 | 0,0000       |
| 2 | 0,0515       |  | 5 | 0,0000       |  | 8 | 0,0000       |

6.8) Sea  $X$  la variable aleatoria *número de mensajes que llegan correctamente entre los 50*.

$X$  tiene distribución binomial con parámetros  $n = 50$  y  $p = 0,75$ .

La función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{50!}{x!(50-x)!} 0,75^x (1 - 0,75)^{50-x} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, 50$$

a)  $P(X \geq 40) = \sum_{x=40}^{50} f(x) = 0,0985 + 0,0721 + \dots = 0,2621$

b)  $P(X < 25) = \sum_{x=0}^{24} f(x) = 0,0000 + \dots + 0,0432 + 0,0648 = 0,1630$

6.9) Sea  $X$  la variable aleatoria *número de personas que consideran que las medidas son insuficientes*.

$X$  tiene distribución binomial, con parámetros  $n = 18$  y  $p = 0,60$ .

La función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{18!}{x!(18-x)!} 0,60^x (1 - 0,60)^{18-x} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, 18$$

La tabla siguiente entrega la función de probabilidad (ve el Anexo 1):

| x | Probabilidad | x | Probabilidad | x  | Probabilidad | x    | Probabilidad |
|---|--------------|---|--------------|----|--------------|------|--------------|
| 0 | 0,0000       | 5 | 0,0045       | 10 | 0,1734       | 15   | 0.0246       |
| 1 | 0,0000       | 6 | 0,0145       | 11 | 0,1892       | 16   | 0,0069       |
| 2 | 0,0000       | 7 | 0,0374       | 12 | 0,1655       | 17   | 0,0012       |
| 3 | 0,0002       | 8 | 0,0771       | 13 | 0,1146       | 18   | 0,0001       |
| 4 | 0,0011       | 9 | 0,1284       | 14 | 0,0614       | suma | 1            |

6.10) Sea X la variable aleatoria *número de personas que acceden, de entre tres intentos*.

X es una variable aleatoria binomial con parámetros  $n = 3$  y  $p = 0,3$ .

La función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{3!}{x!(3-x)!} 0,3^x (1 - 0,3)^{3-x} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, 3$$

La probabilidad de que ninguno acceda es  $f(0) = (1 - 0,3)^3 = 0,343$ .

La probabilidad de que 1 acceda es  $f(1) = 3 \times 0,3 \times (1 - 0,3)^2 = 0,441$ .

La probabilidad de que 2 accedan es  $f(2) = 3 \times 0,3^2 \times (1 - 0,3) = 0,189$ .

La probabilidad de que 3 accedan es  $f(3) = 0,3^3 = 0,027$ .

6.11) La variable aleatoria *número de los que ponen Agronomía como primera opción* tiene distribución binomial con parámetros  $n = 30$  y  $p = 0,17$ .

Aunque la muestra es sin repetición, podemos asumir la independencia debido a que la población de la que se extrae la muestra es extremadamente grande.

a) El número de postulantes que desean estudiar Agronomía (diremos que es un éxito), de la muestra de 30, corresponde a una variable aleatoria binomial.

Su función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{30!}{x!(30-x)!} 0,17^x 0,83^{30-x} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, 30$$

Luego la probabilidad de que 3 de la muestra de 30 deseen estudiar

Agronomía es  $f(3) = \frac{30!}{3!27!} 0,17^3 0,83^{27} = 0,1303$ .

No nos sirve la tabla, porque ésta no tiene  $p = 0,17$ .

b) La probabilidad de ningún éxito es  $f(0) = 0,0037$ .

c) La probabilidad de más de 2 éxitos es, por complemento,

$$1 - f(0) - f(1) - f(2) = 1 - 0,0037 - 0,0230 - 0,0612 = 0,9051$$

d) Valor esperado del número de éxitos en la muestra:

$n \times p = 30 \times 0,17 = 5,1$  postulantes. Es el valor promedio del número de éxitos, entre todas las muestras posibles.

Varianza  $n \times p \times (1-p) = 30 \times 0,17 \times 0,83 = 4,233$  postulantes<sup>2</sup>. Es una medida de la variación del número de éxitos, entre una muestra y otra, expresada en el cuadrado de la unidad de medida original (el número de éxitos al cuadrado)

Desviación estándar  $\sqrt{4,233} = 2,0574$  postulantes. Es otra medida de la variación del número de éxitos, entre una muestra y otra, expresada en la misma unidad de medida original (el número de éxitos).

6.12) Aquí no hay independencia entre el resultado de los ensayos: la probabilidad de cada resultado depende de los resultados anteriores, luego no es aplicable la binomial.

a) Los resultados posibles, con e como éxito (informe erróneo) y f como fracaso (informe no erróneo), son

eee, eef, efe, eff, fee, fef, ffe, fff. Las probabilidades respectivas son

eee:  $2/10 \times 1/9 \times 0 = 0$ ; 3 éxitos

eef:  $2/10 \times 8/9 \times 8/8 = 16 / 720 = 0,0222$  ; 2 éxitos

efe:  $2/10 \times 8/9 \times 1/8 = 16/720 = 0,0222$  ; 2 éxitos

eff:  $2/10 \times 8/9 \times 7/8 = 112/720 = 0,1556$  ; 1 éxito

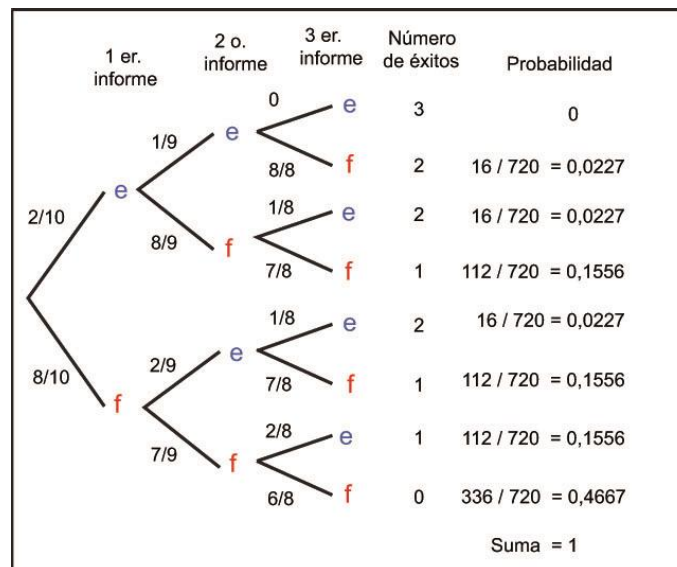
fee:  $8/10 \times 2/9 \times 1/8 = 16/720 = 0,0222$  ; 2 éxitos

fef:  $8/10 \times 2/9 \times 7/8 = 112/720 = 0,1556$  ; 1 éxito

ffe:  $8/10 \times 7/9 \times 2/8 = 112/720 = 0,1556$  ; 1 éxito

fff:  $8/10 \times 7/9 \times 6/8 = 336/720 = 0,4667$  ; 0 éxito

Puedes ayudarte con un diagrama de árbol:



Resumiendo, según número de éxitos, obtenemos la siguiente tabla que muestra la función de probabilidad de la variable aleatoria:

| x    | Probabilidad f(x) |
|------|-------------------|
| 0    | 0,4667            |
| 1    | 0,4667            |
| 2    | 0,0667            |
| 3    | 0,0000            |
| Suma | 1                 |

Observa que no se trata de una distribución binomial

b)  $f(0) + f(1) = 0,9333$

c)  $f(2) + f(3) = 0,0667$

6.13) Sea e un éxito (si la empresa viola las disposiciones) y f un fracaso (caso contrario).

Hay una posibilidad con 4 éxitos, con probabilidad

$$6/18 \times 5/17 \times 4/16 \times 3/15 = 0,0049$$

Hay 4 posibilidades con 3 éxitos: eeef, eefe, efee y feee. Son mutuamente excluyentes, cada una tiene probabilidad

$6 \times 5 \times 4 \times 12 / d = 1440 / d$ , en que d es el denominador común a todos los casos, igual a  $18 \times 17 \times 16 \times 15 = 73440$ . Luego la probabilidad de los 4 casos con 3 éxitos es

$$4 \times 1440 / d = 4 \times 1440 / 73440 = 0,0784.$$

Hay 6 posibilidades con 2 éxitos: eeff, efef, feef, effe, fefe, ffee. Cada uno con probabilidad  $6 \times 5 \times 12 \times 11 / d = 3960 / d$ . Luego la probabilidad de los 6 casos es

$$6 \times 3960 / 73440 = 0,3235.$$

Hay 4 posibilidades con 1 éxito: efff, feff, ffef y fffe. Cada uno con probabilidad

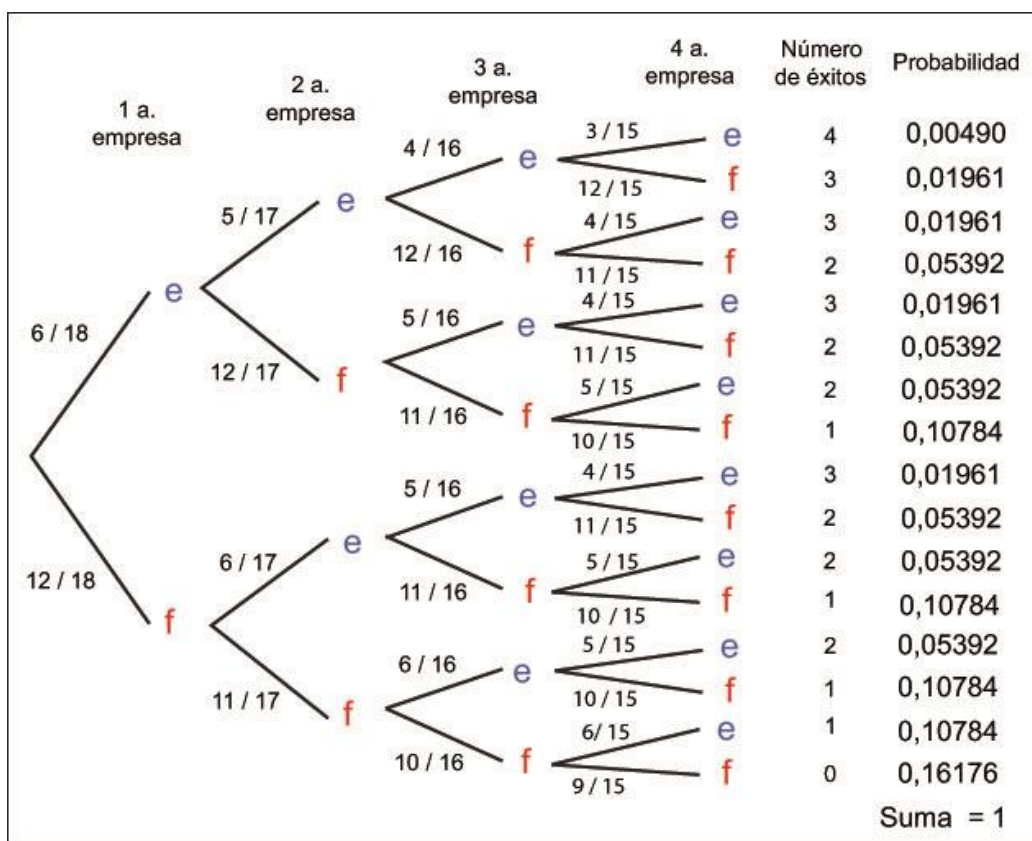
$6 \times 12 \times 11 \times 10 / d = 7920 / d$ . Luego la probabilidad de los 4 casos es

$$4 \times 7920 / d = 0,4314.$$

Hay 1 posibilidad con 0 éxitos, ffff. Tiene probabilidad

$$12 \times 11 \times 10 \times 9 / d = 11880 / d = 0,1618.$$

Alternativamente, te puedes ayudar con un diagrama de árbol:



La tabla siguiente resume la función de probabilidad:

| x    | Probabilidad |
|------|--------------|
| 0    | 0,1618       |
| 1    | 0,4314       |
| 2    | 0,3235       |
| 3    | 0,0784       |
| 4    | 0,0049       |
| Suma | 1            |

6.14) Sea  $X$  la variable aleatoria *número de alumnos que reprobaron todas las asignaturas de primer semestre, de la muestra de 15.*

$X$  tiene distribución binomial con parámetros  $n = 15$ ,  $p = 0,25$ .

La función de probabilidad está dada por



$$f(x) = \frac{15!}{x!(15-x)!} 0,25^x (0,75)^{15-x} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, 15$$

$$a) \quad f(5) = \frac{15!}{5!(10)!} 0,25^5 (0,75)^{10} = 0,1651$$

$$b) \quad f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 0,0134 + 0,0668 + 0,1559 + 0,2252 = 0,4613$$

$$c) \quad f(8) + f(9) + f(10) + f(11) + f(12) + \dots + f(14) + f(15) = \\ = 0,0131 + 0,0034 + 0,0007 + 0,0001 + 0,0000 + \dots + 0,0000 = 0,0173$$

6.15) La función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{12!}{x!(12-x)!} 0,7^x (0,3)^{12-x} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, 12$$

Los valores de  $f(x)$  están dados en la tabla del Anexo 1, correspondiente a  $n=12$  y  $p=0,7$ .

La tabla siguiente muestra los valores de  $f(x)$ ,  $x f(x)$  y de  $x^2 f(x)$ :

| x     | f(x)    | x f(x)  | $x^2 f(x)$ |
|-------|---------|---------|------------|
| 0     | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000    |
| 1     | 0,00001 | 0,00001 | 0,00001    |
| 2     | 0,00019 | 0,00038 | 0,00076    |
| 3     | 0,00149 | 0,00447 | 0,01341    |
| 4     | 0,00780 | 0,03120 | 0,12480    |
| 5     | 0,02911 | 0,14555 | 0,72775    |
| 6     | 0,07925 | 0,47550 | 2,85300    |
| ..    | ..      | ..      | ..         |
| ..    | ..      | ..      | ..         |
| 11    | 0,07118 | 0,78298 | 8,61278    |
| 12    | 0,01384 | 0,16608 | 1,99296    |
| Sumas | 1       | 8,40000 | 73,0796    |

a) La probabilidad de que  $x = 5$  es 0,02911.

b) La tercera columna de la tabla contiene los valores de  $x f(x)$ .

El valor esperado es la suma  $E(X) = 8,4$  ensayos exitosos. Es una medida de centro: representa una aproximación al número promedio que se encontraría si se repite la experiencia muchas veces.

c) La cuarta columna contiene los valores de  $x^2f(x)$ .

La suma es igual a 73,07963. Entonces la varianza es

$$\text{Var}(X) = \sum x^2f(x) - [\sum xf(x)]^2 = 73,07963 - (8,4)^2 = 2,52 \text{ (ensayos exitosos)}^2.$$

La desviación estándar es la raíz cuadrada  $\sqrt{2,52} = 1,5874$  ensayos exitosos.

Ambas son medidas de variación del número de éxitos, entre una muestra y otra. Se miden en distinta unidad. La varianza está medida en el cuadrado de la medida de la variable original (número de éxitos al cuadrado). La desviación estándar en la misma medida que la variable original (número de éxitos).

d) En el caso de la binomial, y sólo en este caso, el valor esperado se puede obtener fácilmente mediante el producto  $n \times p = 12 \times 0,7 = 8,4$ .

Y la varianza se puede obtener mediante

$$n \times p \times (1-p) = 12 \times 0,7 \times 0,3 = 2,52.$$

Luego la desviación estándar es  $\sqrt{2,52} = 1,5875$ .

Repetimos que estas propiedades sólo son válidas si la variable aleatoria es binomial.

6.16) La función de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{17!}{x!(17-x)!} 0,5^x (0,5)^{17-x} \quad \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, 17$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X \geq 10) &= f(10) + f(11) + f(12) + \dots + f(17) = \\ &= 0,1855 + 0,1484 + 0,0944 + 0,0472 + \dots + 0,0000 = 0,3145. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \leq 3) &= f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \\ &= 0,0000 + 0,0001 + 0,0010 + 0,0052 = 0,0063 \end{aligned}$$

6.17) a) D representa una mayor producción en el turno de día, N, mayor en el turno de noche.

Hay básicamente 6 situaciones posibles: 5N, 4N, 3N, 2N, 1N, 0N.

Pero cada una tiene diferentes posibilidades, según la combinación de los días D dentro de los 5 días:

DDDDD tiene un resultado posible, que corresponde a las combinaciones de 5 tomando 0 a la vez,  $C(5,0) = 5!/(5! \times 0!) = 1$ . En este caso  $x = 0$ .

DDDDN tiene 5 resultados posibles: DDDDN, DDDND, DDNDD, DNDDD, NDDDD. En estos casos  $x = 1$ .

El número de ellas está dado por las combinaciones de 5 sobre 1:

$$C(5,1) = 5!/(1! \times 4!) = 5.$$

Dos días N tiene muchas más posibilidades:

$$C(5,2) = 10. \text{ Ahora } x = 2.$$

Tres días N tiene  $C(5,3) = 10$  posibilidades.  $x = 3$ .

Cuatro días D tiene  $C(5,4) = 5$  posibilidades.  $x = 4$ .

Finalmente cinco días D tiene  $C(5,5) = 1$  posibilidad.  $x = 5$ .

El conjunto de todas estas posibilidades es el espacio muestral asociado a este experimento aleatorio.

b) X tiene distribución binomial con parámetros  $n = 5$  y  $p = 0,46$ .

La tabla siguiente muestra las probabilidades asociadas a la variable aleatoria X:

| X    | Probabilidad                              |
|------|-------------------------------------------|
| 0    | $5 \times 0,54^5 = 0,0459$                |
| 1    | $5 \times 0,46^1 \times 0,54^4 = 0,1956$  |
| 2    | $10 \times 0,46^2 \times 0,54^3 = 0,3332$ |
| 3    | $10 \times 0,46^3 \times 0,54^2 = 0,2838$ |
| 4    | $5 \times 0,46^4 \times 0,54^1 = 0,1209$  |
| 5    | $0,46^5 = 0,0206$                         |
| Suma | 1                                         |

c) Valor esperado  $E = n \times p = 5 \times 0,46 = 2,3$  días

Varianza  $V = n \times p \times (1-p) = 5 \times 0,46 \times 0,54 = 1,242$  días<sup>2</sup>

Desviación estándar  $de = \sqrt{1,242} = 1,1145$  días

6.18) a)  $f(x) = \frac{12!}{x!(12-x)!} 0,7^x (0,3)^{12-x}$  donde  $x = 0, 1, 2, \dots, 12$

La tabla siguiente entrega los valores de probabilidad:

| x | Probabilidad | x | Probabilidad | x    | Probabilidad |
|---|--------------|---|--------------|------|--------------|
| 0 | 0,0000       | 5 | 0,0291       | 10   | 0,1678       |
| 1 | 0,0000       | 6 | 0,0792       | 11   | 0,0712       |
| 2 | 0,0002       | 7 | 0,1585       | 12   | 0,0138       |
| 3 | 0,0015       | 8 | 0,2311       | Suma | 1            |
| 4 | 0,0078       | 9 | 0,2398       |      |              |

Estos valores se pueden encontrar en el Anexo 1.

b) Valor esperado de X :  $E(X) = n \times p = 12 \times 0,7 = 8,4$  ensayos

c) Varianza  $V = n \times p \times (1-p) = 12 \times 0,7 \times 0,3 = 2,52$  ensayos<sup>2</sup>

Desviación estándar  $de = \sqrt{2,52} = 1,5875$  ensayos.

6.19) a) Sea X la variable aleatoria *número de microempresas que sobreviven, de la muestra de 8.*

X tiene distribución binomial. Su función de probabilidad es

$$f(x) = \frac{8!}{x!(8-x)!} 0,6^x (0,4)^{8-x} \quad \text{donde } x = 0, 1, 2, \dots, 8$$

Los valores se pueden encontrar en la tabla siguiente (ve el Anexo 1):

| x | f(x)   | x | f(x)   | x | f(x)   |
|---|--------|---|--------|---|--------|
| 0 | 0,0006 | 3 | 0,1239 | 6 | 0,2090 |
| 1 | 0,0079 | 4 | 0,2322 | 7 | 0,0896 |
| 2 | 0,0413 | 5 | 0,2781 | 8 | 0,0168 |

b) Valor esperado del número de microempresas que sobreviven

$$E = n \times p = 8 \times 0,6 = 4,8 \text{ microempresas.}$$

Observa que no es entero, pero recuerda que el valor esperado es un promedio, por lo que no es necesario que sea entero.

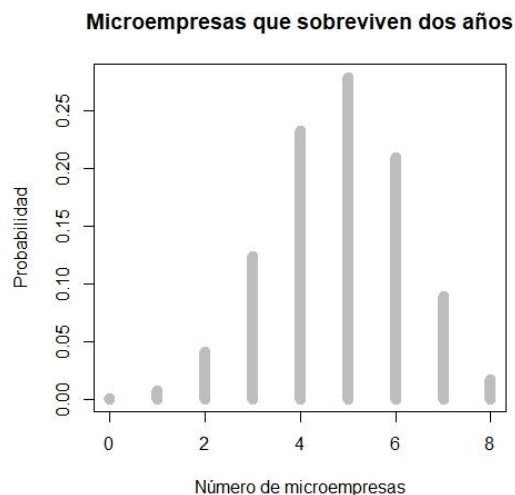
c) La varianza está dada por

$$\text{Var} = n \times p \times (1-p) = 8 \times 0,6 \times 0,4 = 1,92 \text{ microempresas}^2.$$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza:

$$de = \sqrt{\text{Var}} = \sqrt{1,92} = 1,3856 \text{ microempresas.}$$

d) Gráfico de la función de probabilidad:



6.20) a) La variable aleatoria **X**, *número de trozos en la muestra que tiene un nivel de mercurio superior al establecido* tiene distribución binomial con parámetros  $n = 7$  y  $p = 0,4$ .

Los valores de la función de probabilidad se dan en el Anexo 1.

De donde  $P(X = 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 2) = 0,5941 - 0,3154 = 0,2787$ .

b)  $P(X \leq 5) = 0,9502$ .

c)  $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,9502 = 0,0498$ .

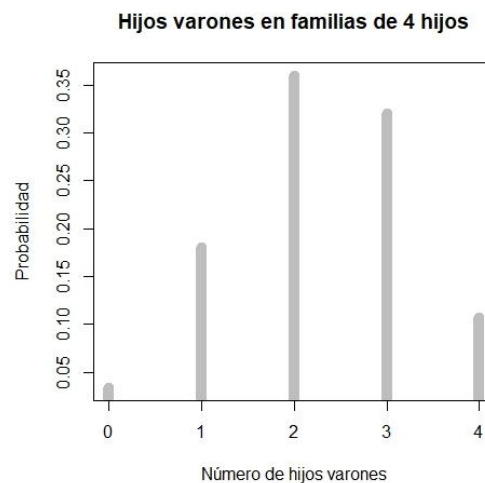
6.21) Asumimos que la variable aleatoria *número de hijos varones* tiene distribución binomial con parámetros  $n = 4$  y  $p = 4/7$ .

En este caso el éxito es que sea varón.

a)  $P(X = 0) = (1 - p)^4 = (3/7)^4 = 0,0337$

b) 1 varón, probabilidad 0,1799; 2 varones, probabilidad 0,3599; 3 varones, probabilidad 0,3199; 4 varones, probabilidad 0,1066.

c)



d) Valor esperado del número de varones:  $n \times p = 4 \times (4/7) = 2,2857$ . Un poco mayor que 2, que sería el caso de igual probabilidad de hombres que de mujeres.

e) La varianza es  $V = n \times p \times (1-p) = 9,9796$ .

La desviación estándar es la raíz cuadrada 0,9897.

6.22) El valor esperado es  $n \times p = 5,4$ . Como  $n = 9$ ,  $p = 5,4/9 = 0,6$ .

Entonces la variable aleatoria  $X$ , número de pasajeros en el minibús tiene distribución binomial  $B(n = 9, p = 0,6)$ .

a) De la tabla binomial del Anexo 1,

$$P(X = 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 8) = 1,0000 - 0,9899 = 0,0101$$

b)  $P(X = 0) = 0,0003$

c) Varianza  $V = n \times p \times (1-p) = 9 \times 0,6 \times 0,4 = 2,16$

La desviación estándar es la raíz cuadrada, 1,4697.

6.23) El valor esperado es  $n \times p = 2,4$  y la varianza es  $n \times p \times (1-p) = 1,68$

a) Dividiendo la 2ª. Ecuación por la 1ª,

$$n \times p \times (1-p) / (n \times p) = 1-p = 1,68 \text{ de donde } p = 1 - 0,3 = 0,7$$

Reemplazando en la 1ª ecuación:  $n = 2,4/0,3 = 8$

b) De la tabla binomial del Anexo 1,  $P(X \leq 5) = 0,4482$ .

### **Respuestas Capítulo 7:**

7.1) De la tabla normal estándar, ingresando los valores en los márgenes izquierdos y superiores:

a)  $P(Z < 1,7) = 0,9554$

b)  $P(Z > 0,25) = 1 - P(Z \leq 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$

c)  $P(Z > -2,6) = 1 - P(Z \leq -2,6) = 1 - 0,0047 = 0,9953$

d)  $P(Z \leq 1,2) = 0,8849$ .

Recuerda que, por ser la normal una variable aleatoria continua, esta probabilidad es igual a  $P(Z < 1,2)$

7.2) De la tabla normal estándar, ingresando las probabilidades en la parte interior de la tabla, encontramos los cuantiles pedidos en los márgenes izquierdos y superiores. Los valores obtenidos son aproximados, por el hecho de que la tabla es discreta.

a)  $P(Z < t) = 0,92$  si  $t = 1,405$ .

b)  $P(Z > t) = 0,22$  equivale a que  $P(Z \leq t) = 1 - 0,22 = 0,77$ . De donde  $t = 0,770$ .

c)  $P(Z < t) = 0,16$  si  $t = -0,995$ .

d)  $P(Z \geq t) = 0,45$  equivale a que  $P(Z < t) = 1 - 0,45 = 0,55$ . De donde  $t = 0,125$ .

7.3) En este ejercicio se trata de una normal distinta a la normal estándar. Luego antes de usar la tabla, debemos estandarizar la variable aleatoria, restando la media y dividiendo por la desviación estándar.

a)  $P(X < 9) = P((X - \mu) / s < (9 - 15)/3,5) = P(Z < -1,7143) = 0,0432$ .

b)  $P(X \leq 23) = P(Z \leq 2,1857) = 0,9856$ .

c)  $P(X > 10,5) = 1 - P(X \leq 10,5) = 1 - P(Z \leq -1,2857) = 1 - 0,0993 = 0,9007$ .

d)  $P(X \geq 12) = 1 - P(X < 12) = 1 - P(Z < -0,8571) = 1 - 0,1963 = 0,8043$ .

7.4) Ahora el procedimiento es recíproco al del Ejercicio 7.3: Debemos encontrar el valor de  $s$ , como si la normal fuese una normal estándar. Luego se debe desestandarizar, multiplicando por la desviación estándar y sumando la media, es decir,

$X = \mu + \sigma Z = 7,4 + 2,2 Z$ . Los valores obtenidos son aproximados, por lo discreto de la tabla.



a) De la normal estándar, si  $P(Z < z) = 0,33$  entonces  $z = -0,435$ .

Pero aplicando la desestandarización en ambos lados de la desigualdad,

$$\begin{aligned} P(Z < z) &= P(7,4 + 2,2 Z < 7,4 + 2,2 z) = P(X < 7,4 + 2,2 (-0,435)) = \\ &= P(X < 6,443) . \text{ Entonces } s = 6,443. \end{aligned}$$

b)  $P(X \leq s) = 0,88$ ; entonces  $z = 1,1750$ .

$$\text{Pero } P(Z < z) = P(X < 7,4 + 2,2 (1,1750)) = P(X < 9,9850).$$

Entonces  $s = 9,9850$ .

a)  $P(X > s) = 0,42$  equivale a  $P(X \leq s) = 1 - 0,42 = 0,58$  luego  $z = 0,20$ .

$$\begin{aligned} \text{Pero } P(Z < z) &= P(7,4 + 2,2 Z < 7,4 + 2,2 z) = P(X < 7,4 + 2,2 (0,20)) = \\ &= P(X < 7,84) . \text{ Entonces } s = 7,84. \end{aligned}$$

b)  $P(X \geq s) = 0,82$  equivale a  $P(X < s) = 1 - 0,82 = 0,18$   
luego  $z = -0,915$ .

$$\text{Pero } P(Z < z) = P(X < 7,4 + 2,2 (-0,915)) = P(X < 5,386) .$$

Entonces  $s = 5,387$ .

7.5) Sea  $X$  la variable aleatoria *cantidad de radiación en el agua*.

Nos dicen que  $X$  tiene distribución normal con media 2,5 y desviación estándar 0,5.

Es decir,  $X \sim N(2,5 ; 0,5)$ .

Se pide  $P(X > 3)$ . Estandarizamos ambos lados de la desigualdad, restando la media y dividiendo por la desviación estándar:

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= P((X-2,5)/0,5 > (3-2,5)/0,5) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) \text{ con } Z \\ &\text{una variable aleatoria normal estándar (media 0 y desviación estándar 1). Es} \\ &\text{la } X \text{ estandarizada.} \end{aligned}$$

Por lo tanto se encuentra  $P(Z \leq 1)$  en la tabla normal estándar y resulta ser igual a 0,8413. Entonces  $P(X > 3) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$ .

Usando R no es necesario estandarizar.

El comando es **1 - pnorm(3, 2.5, 0.5)** = 1 - 0,8413 = 0,1587 aproximado a 4 decimales.

7.6) Sea  $X$  la duración de una entrevista.

Tenemos que  $X \sim N(30,5)$ . Primero usaremos la tabla:

Estandarizando,  $Z = (X - 30) / 5$  tiene distribución normal estándar  $N(0,1)$ .

a) Estandarizamos el 25:  $(25 - 30)/5 = -1$

Entonces  $P(X \leq 25) = P(Z < -1) = 0,1587$

c) Estandarizamos el 40:  $(40 - 30)/5 = 2$

Entonces  $P(X > 40) = P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$

d) Estandarizamos el 35:  $(35 - 30)/5 = 1$ . El 40 ya lo estandarizamos en b).

$P(35 < X < 40) = P(1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < 1) = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359$

e) Estandarizamos el 24 y el 38:  $(24 - 30)/5 = -1,2$  y  $(38 - 30)/5 = 1,6$

Entonces  $P(X < 24 \text{ o } X > 38) = P(Z < -1,2 \text{ o } Z > 1,6) =$

$= P(Z < -1,2) + P(Z > 1,6) =$

$= P(Z < -1,2) + 1 - P(Z < 1,6) = 0,1151 + 1 - 0,9452 = 0,1699$

Usando R:

a) **pnorm(25, 30, 5)** = 0,1587

b) **1 - pnorm(40, 30, 5)** = 1 - 0.9772 = 0,0228

c) **pnorm(40, 30, 5) - pnorm(35, 30, 5)** = 0,9772 - 0,8413 = 0,1359

d) **pnorm(24, 30, 5) + 1 - pnorm(38, 30, 5)** = 0,1151 + (1 - 0,9452) = 0,1699

Vemos que se obtienen los mismos resultados, si redondeamos a 4 decimales.

7.7) Sea  $X$  el contenido de nicotina en un cigarrillo.

Tenemos que  $X \sim N(0,56; 0,16)$

a)  $P(X < 0,8)$ . El comando R es **pnorm(0.8, 0.56, 0.16)** = 0,9154.

b)  $P(X > 0,5) = 1 - P(X \leq 0,5) = 1 - \mathbf{pnorm(0.5, 0.56, 0.16)} =$   
 $= 1 - 0,3085 = 0,6915$ .

O bien, indicándole que la probabilidad acumulada es en la cola derecha:

**pnorm(0.5, 0.56, 0.16, lower.tail=FALSE)**

Recuerda que en R en lugar de la coma decimal se usa el punto.

7.8) Sea  $X$  la variable aleatoria *puntaje obtenido por un alumno al azar*.

$X$  tiene distribución normal  $N(550,120)$ .

a) Debemos encontrar el cuantil  $t$  de la normal con media 550 y desviación estándar 120, tal que  $P(X \leq t) = 0,87$ .

El comando R para el cuantil es **qnorm(0.87, 550, 120)** = 685,1669.

Como el puntaje es entero, lo aproximamos al entero más cercano: el puntaje de Felipe es 685.

b) Ahora se da la probabilidad acumulada y se debe encontrar el cuantil:

Cuartil 1: **qnorm(0.25, 550, 120)** = 469,0612 que aproximamos a 469 puntos.

Mediada: **qnorm(0.50, 550, 120)** = 550 puntos. Esto es evidente, pues, por la simetría de la distribución normal, la mediana es igual a la media.

Cuartil 1: **qnorm(0.75, 550, 120)** = 630,938 que aproximamos a 631 puntos.

7.9) Sea  $X$  el *número de periódicos vendidos al día*.

Tenemos que  $X \sim N(3000, 200)$  aproximadamente. Es así, pues el número de periódicos es entero, pero como es un número grande, podemos hacer la aproximación a una variable continua.

a) Estandarizando,  $z = (x - 3000)/200$ .

Luego  $P(2500 \leq X \leq 3100) =$

$$= P((2500 - 3000)/200 \leq Z \leq (3100 - 3000)/200) = P(-1 \leq Z \leq 0,5) =$$

$$P(Z \leq 0,5) - P(Z \leq -1) = 0,6915 - 0,1587 \text{ (de tabla).}$$

$$\text{Entonces } P(2500 \leq X \leq 3100) = 0,5328$$

$$\text{Usando R, } P(2800 \leq X \leq 3100) = P(X \leq 3100) - P(X < 2800) =$$

$$\mathbf{pnorm(3100, 3000, 200) - pnorm(2800, 3000, 200) =}$$

$$= 0,6915 - 0,1587 = 0,5328$$

b)  $P(Z \leq 1,280) = 0,90$  (de tabla). Luego  $z = 1,280$

$$\text{y } x = 3000 + 200 \times 1,280 = 3256 \text{ periódicos.}$$

Debemos encontrar el cuantil  $t$ , tal que  $P(X \leq t) = 0,90$ .

En R, el cuantil se obtiene con  $\mathbf{qnorm(0.90, 300, 200)} = 3256,31$ . Son 3256 periódicos, redondeado al entero.

7.10) Sea  $X$  el *tiempo de reacción*.

$X$  tiene distribución normal media 100, desviación estándar 9.  $X \sim N(100,9)$ .

a) La normal es una variable aleatoria continua, por lo tanto, la probabilidad de un punto es cero. Luego  $P(X = 100) = 0$

b) 100 es igual a la media. Luego, por la simetría de la normal,

$$P(X > 100) = 0,5.$$

c) Hay que encontrar un valor de  $t$  tal que  $P(X > t) = 0,25$ .

Con R,  $\mathbf{qnorm(1 - 0.25, 100, 9)} = 106,0704$  que podemos aproximar a 106 horas.

O bien **pnorm(0.25, 100, 9, lower.tail=FALSE)**

7.11) Sea  $X$  la cantidad de radiación del agua potable.  $X \sim N(2,5;0,5)$

Usando R,  $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = \mathbf{1 - pnorm(3, 2.5, 5.5) =}$   
 $= 1 - 0,8413 = 0,1587.$

7.12) Sea  $X$  la duración de una entrevista, en minutos.

$X$  tiene distribución normal media 95, desviación estándar 16 minutos.

$X \sim N(95,16).$

a)  $P(X \leq 80) = \mathbf{pnorm(80, 95, 16) = 0,1743.}$

b)  $P(X > 100) = 1 - P(X \leq 100) = \mathbf{1 - pnorm(100, 95, 16) =}$   
 $= 1 - 0,6227 = 0,3773.$

c)  $P(80 < X < 100) = P(X < 100) - P(X \leq 80) =$   
 $= \mathbf{pnorm(100, 95, 16) - pnorm(80, 95, 16) = 0,6227 - 0,1793 = 0,4484.}$

d)  $P(X > 120 \text{ o } X < 70) = P(X > 120) + P(X < 70) =$   
 $\mathbf{1 - pnorm(120, 95, 16) + pnorm(70, 95, 16) =}$   
 $= 1 - 0,9409 + 0,0591 = 0,1182.$

7.13) Sea  $X$  la variable aleatoria *temperatura del procesador*.  $X$  tiene distribución normal con media 32,5 °C y desviación estándar 2,6°C.

O sea,  $X \sim N(32,5;2,6)$

a)  $P(X < 40) = \mathbf{pnorm(40, 32.5, 2.6) = 0.9454}$

b)  $P(X > 36) = 1 - P(X \leq 36) = \mathbf{1 - pnorm(36, 32.5, 2.6) =}$   
 $= 1 - 0,9109 = 0,0891$

O bien obtener directamente la probabilidad acumulada en la cola derecha:  
**pnorm(26, 32.5, 2.6, lower.tail=FALSE)**

7.14) Sea  $X$  la *calificación* obtenida.  $X$  tiene distribución normal con media 525 y desviación estándar 80 puntos. O sea,  $X \sim N(525;80)$

a)  $P(X < 350)$ , **pnorm(350, 525, 80)** = 0,0144 que corresponde al 1,44%.

b) Ahora se debe encontrar el cuantil, dada la probabilidad acumulada a la derecha. Sea  $t$  el puntaje mínimo para estar en el 12% superior.

Entonces  $P(X \geq t) = 0,12$  luego  $P(X < t) = 0,88$ . **qnorm(0.88, 525, 80)** = 618,9989. Redondeando, la calificación mínima es 619 puntos.

7.15) Sea  $X$  el *puntaje* obtenido.  $X$  tiene distribución normal con media 100 y desviación estándar 16 puntos. O sea,  $X \sim N(100;16)$ .

a)  $P(100 < X < 125) = P(X < 125) - P(X \leq 100)$ . Por la simetría de la normal, sabemos que la probabilidad que  $X$  sea menor que la media es 0,5.

Por otra parte, **pnorm(125, 100, 16)** = 0,9409. Luego la probabilidad es  $0,9409 - 0,5 = 0,4409$ .

b)  $P(90 < X < 120) = P(X < 120) - P(X \leq 90) =$   
**= pnorm(120, 100, 16) - pnorm(90, 100, 16) =**  
**= 0,8944 - 0,2660 = 0,6284.**

7.16) Tenemos que  $P(X \leq 30) = 200/2000 = 0,10$  y que

$P(X \leq 90) = 1700/2000 = 0,85$ . Pero no conocemos la media ni la desviación estándar.

Entonces partimos buscando las probabilidades de una variable aleatoria normal estándar.

$P(Z \leq t) = 0,10$  de donde  $t$  se obtiene con **qnorm(0.30)** = - 1,28155.

Recuerda que si no se agregan los parámetros al comando, R asume que es una normal estándar, con parámetros media 0 y desviación estándar 1.

Análogamente,  $P(Z < s) = 0,85$  de donde  $s$  se obtiene con

**qnorm(0.85)** = 1,03643.

Desestandarizando estos valores, tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\mu - 1,28155 \sigma = 30 \text{ puntos.}$$

$$\mu + 1,03645 \sigma = 90 \text{ puntos.}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos los parámetros de la normal,  $\mu = 63,1724$  y  $\sigma = 25,8846$  (restando ambas ecuaciones se obtiene  $\sigma$ . Luego se reemplaza en la primera ecuación).

7.17) Sea  $X$  el *puntaje* obtenido para la beca.  $X$  tiene distribución normal con media 367 y desviación estándar 36 puntos. O sea,  $X \sim N(367; 36)$

a)  $P(X < 355) = \mathbf{pnorm(355, 367, 36)} = 0,3694$

b)  $P(X < 348 \text{ o } X > 373) = P(X < 348) + 1 - P(X \leq 373),$

$$\mathbf{pnorm(348, 367, 36)} + 1 - \mathbf{pnorm(373, 367, 36)} = 0,2988 + 1 - 0,5662 = 0,7326$$

c) Se debe repartir  $1 - 0,90 = 0,10$  en dos partes iguales de 0,05.

Entonces debemos encontrar  $t$  y  $s$  tales que  $P(X < t) = 0,05$  y  $P(X < s) = 0,95$

$$\mathbf{qnorm(0.05, 367, 36)} = 307,7856 \text{ que redondeamos a 308 puntos.}$$

$$\mathbf{qnorm(0.95, 367, 36)} = 426,2147 \text{ que redondeamos a 426 puntos.}$$

7.18) Para transformar a unidades estándar basta restar la media y dividir por la desviación estándar.

a)  $(60 - 72)/15 = -0,8.$

b)  $(93 - 72)/15 = 1,4.$

c)  $(72 - 72)/15 = 0.$

7.19) Sea  $X$  el *peso* de los estudiantes.  $X$  tiene distribución normal con media 75,5 kg y desviación estándar 7,5 kg.

a)  $P(X < 80) = \mathbf{pnorm(80, 75.5, 7.5)} = 0.7257$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X > 92,5) &= 1 - P(X \leq 92,5) = \mathbf{1 - pnorm(80, 75.5, 7.5) =} \\ &= 1 - 0,9883 = 0,0117 \end{aligned}$$

o bien **pnorm(80, 75.5, 7.5, lower.tail= FALSE)**

$$\begin{aligned} \text{c) } P(60 < X < 77,5) &= P(X < 77,5) - P(X \leq 60) = \mathbf{pnorm(77.5, 75.5, 7.5) -} \\ &\mathbf{- pnorm(60, 75.5, 7.5) = 0,6051 - 0,0194 = 0,5858} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } P(X \leq 63 \text{ o } X > 83) &= P(X \leq 63) + 1 - P(X \leq 83) = \\ &\mathbf{pnorm(63, 75.5, 7.5) + 1 - pnorm(83, 75.5, 7.5) =} \\ &= 0,0478 + 1 - 0,8413 = 0,2064 \end{aligned}$$

7.20) Sea  $X$  la *puntuación* en la prueba de biología.  $X$  tiene distribución normal con media 6,7 y desviación estándar 1,2.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(5,5 < X < 6,5) &= \\ &= \mathbf{pnorm(6.5, 6.7, 1.2) - pnorm(5.5, 6.7, 1.2) = 0,4338 - 0,1587 =} \\ &= 0,2752 \text{ que equivale a un } 27,52\%. \end{aligned}$$

b) Ahora se da la probabilidad, se pide el cuantil.

$P(X > t) = 0,10$ .  $t$  está dado por **qnorm(0.10, 6.7, 1.2) = 5,2** puntos, redondeado a un decimal.

$$\begin{aligned} \text{c) } P(X > s) &= 0,10 \text{ que equivale a } P(X \leq s) = 0,90. s \text{ está dado por} \\ &\mathbf{qnorm(0.90, 6.7, 1.2) = 8,2} \text{ puntos, redondeado a un decimal.} \end{aligned}$$

7.21) a) Sea  $X$  el *Indice de Reemplazo de Población Activa*.  $X$  tiene distribución normal con media 50,2 y desviación estándar 0,5.

Para usar la tabla normal estándar, primero se debe estandarizar los valores, quitándoles la media y dividiendo por la desviación estándar. Sea  $Z$  la variable aleatoria estandarizada.

$$\begin{aligned} P(49,6 < X < 50,8) &= P(X < 50,8) - P(X \leq 49,6) \text{ estandarizando, queda igual} \\ &\text{a } P(Z < 1,2) - P(Z \leq -1,2) = 0,8849 - 0,1151 = 0,7699 \end{aligned}$$



Usando R:

**`pnorm(50.8, 50.2, 0.5) - pnorm(49.6, 50.2, 0.5)`** =

= 0,8849 - 0,1151 = 0,7699

Usando Excel, se debe posicionar el cursor en cualquier cuadrícula y presionar el símbolo de función **`fx`**. Aparecerá una lista de funciones, selecciones

**Estadísticas**. Se deberá seleccionar **DISTR.NORM** y presionar **Siguiente** o

**Aceptar**. Esto hará que aparezca un menú en el que se deberá completar

**Número o X**, (50,8), dependiente de la versión de Excel, **Media** (50,2) y

**Desvest** o **Desv.estándar** (0,5), **Acumulado** (Verdadero), para  $P(X < 50.8)$

Presionando **Aceptar** aparecerá el resultado 0,8849.

Para  $P(X \leq 49,6)$  se hará lo mismo, con 49.6 en la casilla **Número**.

Comparando los resultados, podemos observar que usando la tabla, R o Excel, obtenemos lo mismo.

b) La respuesta es la media 50,2. Esto es porque, debido a la simetría respecto a la media, de la normal, la probabilidad acumulada hasta la media es exactamente 0,50 o 50 %.

7.22) a) Sea  $X$  el *puntaje* en la prueba.  $X$  tiene distribución normal con media 525 y desviación estándar 80.

Para usar la tabla normal estándar, primero se debe estandarizar los valores, quitándoles la media y dividiendo por la desviación estándar. Sea  $Z$  la variable aleatoria estandarizada.

$P(X < 350) = P(Z < 2,1875) = 0,0144$ .

Usando Excel, se debe posicionar el cursor en cualquier cuadrícula y presionar el símbolo de función **`fx`**. luego seleccionar **DISTR.NORM** y presionar

**Siguiente**. Completar **Número** (350), **Media** (525) y **Desvest**(80),

para  $P(X < 350)$ . Presionando **Aceptar** aparecerá el resultado 0,0144.

b) Se debe encontrar  $t$  tal que

$P(Z > t) = 0,12$  que equivale a  $P(Z \leq t) = 0,88$  donde  $Z$  es una variable aleatoria normal estándar.

Usando la tabla, entre las probabilidades (centro de la tabla) debemos encontrar el 0,88.

El cuantil correspondiente es  $t = 1,170$  (en los márgenes).

Para encontrar  $s$  tal que  $P(X > s) = 0,12$  se debe desestandarizar  $t$ :

$s = 525 + 80 \times 1,170 = 618,6$  que aproximamos al entero 619.

Usando Excel, se debe posicionar el cursor en cualquier cuadrícula y presionar el símbolo de función  $f_x$ . luego seleccionar **DISTR.NORM.INV** y presionar **Siguiente**. Completar **Número o X** (0,88), **Media** (525) y **Desvest**(80). Presionando **Aceptar** aparecerá el resultado 618,999 que nuevamente aproximamos a 619.

7.23) a) Sea  $X$  la *cantidad de aceite*.  $X$  tiene distribución normal con media 2lt y desviación estándar 0,1 lt.

Debemos estandarizar los valores, quitándoles la media y dividiendo por la desviación estándar. Sea  $Z$  la variable aleatoria estandarizada.

$P(X > 2,3) = 1 - P(X \leq 2,3) = 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$ . Se reprocesa un 0,13 % de los envases.

Usando Excel, se debe posicionar el cursor en cualquier cuadrícula y presionar el símbolo de función  $f_x$ . Luego seleccionar **DIST.NORM** y presionar **Siguiente**. Completar **Número** (2,3), **Media** (2) y **Desvest**(0,1). Presionando **Aceptar** aparecerá el resultado 0,00135.

Se reprocesa un 0,135 %.

b)  $P(1,8 < X < 2,3) = P(X < 2,3) - P(X \leq 1,8) = P(Z < 3) - P(Z < -2) = 0,9987 - 0,0228 = 0,9759$ .

Usando Excel, en la parte a) vimos que  $P(X < 2,3) = 0,9987$ . Para  $P(X \leq 1,8)$  seleccionamos **DIST.NORM** y completamos **Número** (1,8), **Media** (2) y **Desvest**(0,1), y obtenemos el resultado 0,0228.

La diferencia es  $0,9987 - 0,0228 = 0,9759$ .

En la parte b) ambos resultados coinciden.

7.24) a) Sea  $X$  el *coeficiente de habilidad mecánica*.  $X$  tiene distribución normal con media 100 y desviación estándar 16.

Estandarizamos los valores y consultamos la tabla.

$P(100 < X < 125) = P(X \leq 125) - P(X \leq 100) = P(Z < 1,5625) - P(Z < 0) = 0,9412 - 0,5 = 0,4412$  que equivale a un 44,12 %.

Usando Excel, con **Número** (125), **Media** (100) y **Desvest**(16). El resultado es 0,9409

La probabilidad de que  $X$  sea menor que la media es 0,5.

La diferencia es  $0,9409 - 0,5 = 0,4409$ . Equivale a un 44,09 %.

b)  $P(92 < X < 100) = P(X < 100) - P(X \leq 92) = P(Z < 0) - P(Z < -0,5) = 0,5 - 0,3085 = 0,1915$ . Corresponde a un 19,15 %.

Usando Excel obtenemos el resultado  $0,5 - 0,3085 = 0,1915$ . Equivale a un 19,15 %.

El resultado de la parte a) difiere en 0,03 puntos porcentuales.

En la parte b) ambos resultados coinciden.

7.25) Sea  $X$  la *puntuación* en el test de competencia.  $X$  tiene distribución normal con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma$ , ambas desconocidas.

Tenemos que  $P(X \leq 20) = 0,0281$  y además  $P(20 < X < 35) = 0,8192$

que equivale a  $P(X < 35) - P(X \leq 20) = 0,8192$ .

Resumiendo, tenemos dos igualdades:

$$P(X \leq 20) = 0,0281 \text{ y } P(X < 35) = 0,8192 \quad (1)$$

Sea  $Z$  una variable aleatoria normal estándar.

Usando la tabla normal estándar, vemos que

$$\text{Vemos que } P(Z \leq -1,910) = 0,0281 \text{ y } P(Z < 1,025) = 0,8473.$$

Comparando estas igualdades con las igualdades de (1), tenemos que

-1,910 equivale a la estandarización de 20 y que 1,025 es la estandarización de 35.

O sea,  $(20 - \mu)/\sigma = -1,910$  y  $(35 - \mu)/\sigma = 1,025$  que equivalen a

$$20 - \mu = -1,910 \sigma \text{ y } 35 - \mu = 1,025 \sigma$$

Resolviendo el sistema lineal, resulta que  $\mu = 29,7595$  y  $\sigma = 5,1110$

---

**ANEXO 1.** Probabilidades acumuladas de la distribución binomial, desde  $n = 1$  hasta  $n = 23$ ,  $p$  en múltiplos de 0,05.

TABLA DE DISTRIBUCION BINOMIAL (1)

|                  |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $n = 1$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.9500 | 0.9000 | 0.8500 | 0.8000 | 0.7500 | 0.7000 | 0.6500 | 0.6000 | 0.5500 |
| 1                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 2$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.9025 | 0.8100 | 0.7225 | 0.6400 | 0.5625 | 0.4900 | 0.4225 | 0.3600 | 0.3025 |
| 1                | 0.9975 | 0.9900 | 0.9775 | 0.9600 | 0.9375 | 0.9100 | 0.8775 | 0.8400 | 0.7975 |
| 2                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 3$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.8574 | 0.7290 | 0.6141 | 0.5120 | 0.4219 | 0.3430 | 0.2746 | 0.2160 | 0.1664 |
| 1                | 0.9927 | 0.9720 | 0.9393 | 0.8960 | 0.8438 | 0.7840 | 0.7182 | 0.6480 | 0.5748 |
| 2                | 0.9999 | 0.9990 | 0.9966 | 0.9920 | 0.9844 | 0.9730 | 0.9571 | 0.9360 | 0.9089 |
| 3                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 4$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.8145 | 0.6561 | 0.5220 | 0.4096 | 0.3164 | 0.2401 | 0.1785 | 0.1296 | 0.0915 |
| 1                | 0.9860 | 0.9477 | 0.8905 | 0.8192 | 0.7383 | 0.6517 | 0.5630 | 0.4752 | 0.3910 |
| 2                | 0.9995 | 0.9963 | 0.9880 | 0.9728 | 0.9492 | 0.9163 | 0.8735 | 0.8208 | 0.7585 |
| 3                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9984 | 0.9961 | 0.9919 | 0.9850 | 0.9744 | 0.9590 |
| 4                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 5$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.7738 | 0.5905 | 0.4437 | 0.3277 | 0.2373 | 0.1681 | 0.1160 | 0.0778 | 0.0503 |
| 1                | 0.9774 | 0.9185 | 0.8352 | 0.7373 | 0.6328 | 0.5282 | 0.4284 | 0.3370 | 0.2562 |
| 2                | 0.9988 | 0.9914 | 0.9734 | 0.9421 | 0.8965 | 0.8369 | 0.7648 | 0.6826 | 0.5931 |
| 3                | 1.0000 | 0.9995 | 0.9978 | 0.9933 | 0.9844 | 0.9692 | 0.9460 | 0.9130 | 0.8688 |
| 4                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9976 | 0.9947 | 0.9898 | 0.9815 |
| 5                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 6$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.7351 | 0.5314 | 0.3771 | 0.2621 | 0.1780 | 0.1176 | 0.0754 | 0.0467 | 0.0277 |
| 1                | 0.9672 | 0.8857 | 0.7765 | 0.6554 | 0.5339 | 0.4202 | 0.3191 | 0.2333 | 0.1636 |
| 2                | 0.9978 | 0.9841 | 0.9527 | 0.9011 | 0.8306 | 0.7443 | 0.6471 | 0.5443 | 0.4415 |
| 3                | 0.9999 | 0.9987 | 0.9941 | 0.9830 | 0.9624 | 0.9295 | 0.8826 | 0.8208 | 0.7447 |
| 4                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9954 | 0.9891 | 0.9777 | 0.9590 | 0.9308 |
| 5                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9982 | 0.9959 | 0.9917 |
| 6                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

# DISTRIBUCION BINOMIAL (2)

| $n = 1$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
| 0                | 0.5000 | 0.4500 | 0.4000 | 0.3500 | 0.3000 | 0.2500 | 0.2000 | 0.1500 | 0.1000 | 0.0500 |
| 1                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 2$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
| 0                | 0.2500 | 0.2025 | 0.1600 | 0.1225 | 0.0900 | 0.0625 | 0.0400 | 0.0225 | 0.0100 | 0.0025 |
| 1                | 0.7500 | 0.6975 | 0.6400 | 0.5775 | 0.5100 | 0.4375 | 0.3600 | 0.2775 | 0.1900 | 0.0975 |
| 2                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 3$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
| 0                | 0.1250 | 0.0911 | 0.0640 | 0.0429 | 0.0270 | 0.0156 | 0.0080 | 0.0034 | 0.0010 | 0.0001 |
| 1                | 0.5000 | 0.4253 | 0.3520 | 0.2818 | 0.2160 | 0.1563 | 0.1040 | 0.0607 | 0.0280 | 0.0073 |
| 2                | 0.8750 | 0.8336 | 0.7840 | 0.7254 | 0.6570 | 0.5781 | 0.4880 | 0.3859 | 0.2710 | 0.1426 |
| 3                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 4$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
| 0                | 0.0625 | 0.0410 | 0.0256 | 0.0150 | 0.0081 | 0.0039 | 0.0016 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 |
| 1                | 0.3125 | 0.2415 | 0.1792 | 0.1265 | 0.0837 | 0.0508 | 0.0272 | 0.0120 | 0.0037 | 0.0005 |
| 2                | 0.6875 | 0.6090 | 0.5248 | 0.4370 | 0.3483 | 0.2617 | 0.1808 | 0.1095 | 0.0523 | 0.0140 |
| 3                | 0.9375 | 0.9085 | 0.8704 | 0.8215 | 0.7599 | 0.6836 | 0.5904 | 0.4780 | 0.3439 | 0.1855 |
| 4                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 5$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
| 0                | 0.0313 | 0.0185 | 0.0102 | 0.0053 | 0.0024 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.1875 | 0.1312 | 0.0870 | 0.0540 | 0.0308 | 0.0156 | 0.0067 | 0.0022 | 0.0005 | 0.0000 |
| 2                | 0.5000 | 0.4069 | 0.3174 | 0.2352 | 0.1631 | 0.1035 | 0.0579 | 0.0266 | 0.0086 | 0.0012 |
| 3                | 0.8125 | 0.7438 | 0.6630 | 0.5716 | 0.4718 | 0.3672 | 0.2627 | 0.1648 | 0.0815 | 0.0226 |
| 4                | 0.9688 | 0.9497 | 0.9222 | 0.8840 | 0.8319 | 0.7627 | 0.6723 | 0.5563 | 0.4095 | 0.2262 |
| 5                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 6$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
| 0                | 0.0156 | 0.0083 | 0.0041 | 0.0018 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.1094 | 0.0692 | 0.0410 | 0.0223 | 0.0109 | 0.0046 | 0.0016 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 |
| 2                | 0.3438 | 0.2553 | 0.1792 | 0.1174 | 0.0705 | 0.0376 | 0.0170 | 0.0059 | 0.0013 | 0.0001 |
| 3                | 0.6563 | 0.5585 | 0.4557 | 0.3529 | 0.2557 | 0.1694 | 0.0989 | 0.0473 | 0.0159 | 0.0022 |
| 4                | 0.8906 | 0.8364 | 0.7667 | 0.6809 | 0.5798 | 0.4661 | 0.3446 | 0.2235 | 0.1143 | 0.0328 |
| 5                | 0.9844 | 0.9723 | 0.9533 | 0.9246 | 0.8824 | 0.8220 | 0.7379 | 0.6229 | 0.4686 | 0.2649 |
| 6                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

DISTRIBUCION BINOMIAL (3)

| $n = 7$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.6983 | 0.4783 | 0.3206 | 0.2097 | 0.1335 | 0.0824 | 0.0490 | 0.0280 | 0.0152 |
| 1                | 0.9556 | 0.8503 | 0.7166 | 0.5767 | 0.4449 | 0.3294 | 0.2338 | 0.1586 | 0.1024 |
| 2                | 0.9962 | 0.9743 | 0.9262 | 0.8520 | 0.7564 | 0.6471 | 0.5323 | 0.4199 | 0.3164 |
| 3                | 0.9998 | 0.9973 | 0.9879 | 0.9667 | 0.9294 | 0.8740 | 0.8002 | 0.7102 | 0.6083 |
| 4                | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9953 | 0.9871 | 0.9712 | 0.9444 | 0.9037 | 0.8471 |
| 5                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9962 | 0.9910 | 0.9812 | 0.9643 |
| 6                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9994 | 0.9984 | 0.9963 |
| 7                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 8$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.6634 | 0.4305 | 0.2725 | 0.1678 | 0.1001 | 0.0576 | 0.0319 | 0.0168 | 0.0084 |
| 1                | 0.9428 | 0.8131 | 0.6572 | 0.5033 | 0.3671 | 0.2553 | 0.1691 | 0.1064 | 0.0632 |
| 2                | 0.9942 | 0.9619 | 0.8948 | 0.7969 | 0.6785 | 0.5518 | 0.4278 | 0.3154 | 0.2201 |
| 3                | 0.9996 | 0.9950 | 0.9786 | 0.9437 | 0.8862 | 0.8059 | 0.7064 | 0.5941 | 0.4770 |
| 4                | 1.0000 | 0.9996 | 0.9971 | 0.9896 | 0.9727 | 0.9420 | 0.8939 | 0.8263 | 0.7396 |
| 5                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9958 | 0.9887 | 0.9747 | 0.9502 | 0.9115 |
| 6                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9964 | 0.9915 | 0.9819 |
| 7                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9983 |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 9$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.6302 | 0.3874 | 0.2316 | 0.1342 | 0.0751 | 0.0404 | 0.0207 | 0.0101 | 0.0046 |
| 1                | 0.9288 | 0.7748 | 0.5995 | 0.4362 | 0.3003 | 0.1960 | 0.1211 | 0.0705 | 0.0385 |
| 2                | 0.9916 | 0.9470 | 0.8591 | 0.7382 | 0.6007 | 0.4628 | 0.3373 | 0.2318 | 0.1495 |
| 3                | 0.9994 | 0.9917 | 0.9661 | 0.9144 | 0.8343 | 0.7297 | 0.6089 | 0.4826 | 0.3614 |
| 4                | 1.0000 | 0.9991 | 0.9944 | 0.9804 | 0.9511 | 0.9012 | 0.8283 | 0.7334 | 0.6214 |
| 5                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9969 | 0.9900 | 0.9747 | 0.9464 | 0.9006 | 0.8342 |
| 6                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9957 | 0.9888 | 0.9750 | 0.9502 |
| 7                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9986 | 0.9962 | 0.9909 |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9992 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 10$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.5987 | 0.3487 | 0.1969 | 0.1074 | 0.0563 | 0.0282 | 0.0135 | 0.0060 | 0.0025 |
| 1                | 0.9139 | 0.7361 | 0.5443 | 0.3758 | 0.2440 | 0.1493 | 0.0860 | 0.0464 | 0.0233 |
| 2                | 0.9885 | 0.9298 | 0.8202 | 0.6778 | 0.5256 | 0.3828 | 0.2616 | 0.1673 | 0.0996 |
| 3                | 0.9990 | 0.9872 | 0.9500 | 0.8791 | 0.7759 | 0.6496 | 0.5138 | 0.3823 | 0.2660 |
| 4                | 0.9999 | 0.9984 | 0.9901 | 0.9672 | 0.9219 | 0.8497 | 0.7515 | 0.6331 | 0.5044 |
| 5                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9986 | 0.9936 | 0.9803 | 0.9527 | 0.9051 | 0.8338 | 0.7384 |
| 6                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9965 | 0.9894 | 0.9740 | 0.9452 | 0.8980 |
| 7                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9952 | 0.9877 | 0.9726 |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9983 | 0.9955 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (4)

| $n = 7$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
| 0                | 0.0078 | 0.0037 | 0.0016 | 0.0006 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0625 | 0.0357 | 0.0188 | 0.0090 | 0.0038 | 0.0013 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.2266 | 0.1529 | 0.0963 | 0.0556 | 0.0288 | 0.0129 | 0.0047 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 |
| 3                | 0.5000 | 0.3917 | 0.2898 | 0.1998 | 0.1260 | 0.0706 | 0.0333 | 0.0121 | 0.0027 | 0.0002 |
| 4                | 0.7734 | 0.6836 | 0.5801 | 0.4677 | 0.3529 | 0.2436 | 0.1480 | 0.0738 | 0.0257 | 0.0038 |
| 5                | 0.9375 | 0.8976 | 0.8414 | 0.7662 | 0.6706 | 0.5551 | 0.4233 | 0.2834 | 0.1497 | 0.0444 |
| 6                | 0.9922 | 0.9848 | 0.9720 | 0.9510 | 0.9176 | 0.8665 | 0.7903 | 0.6794 | 0.5217 | 0.3017 |
| 7                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 8$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
| 0                | 0.0039 | 0.0017 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0352 | 0.0181 | 0.0085 | 0.0036 | 0.0013 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.1445 | 0.0885 | 0.0498 | 0.0253 | 0.0113 | 0.0042 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.3633 | 0.2604 | 0.1737 | 0.1061 | 0.0580 | 0.0273 | 0.0104 | 0.0029 | 0.0004 | 0.0000 |
| 4                | 0.6367 | 0.5230 | 0.4059 | 0.2936 | 0.1941 | 0.1138 | 0.0563 | 0.0214 | 0.0050 | 0.0004 |
| 5                | 0.8555 | 0.7799 | 0.6846 | 0.5722 | 0.4482 | 0.3215 | 0.2031 | 0.1052 | 0.0381 | 0.0058 |
| 6                | 0.9648 | 0.9368 | 0.8936 | 0.8309 | 0.7447 | 0.6329 | 0.4967 | 0.3428 | 0.1869 | 0.0572 |
| 7                | 0.9961 | 0.9916 | 0.9832 | 0.9681 | 0.9424 | 0.8999 | 0.8322 | 0.7275 | 0.5695 | 0.3366 |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 9$          |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
| 0                | 0.0020 | 0.0008 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0195 | 0.0091 | 0.0038 | 0.0014 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0898 | 0.0498 | 0.0250 | 0.0112 | 0.0043 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.2539 | 0.1658 | 0.0994 | 0.0536 | 0.0253 | 0.0100 | 0.0031 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 |
| 4                | 0.5000 | 0.3786 | 0.2666 | 0.1717 | 0.0988 | 0.0489 | 0.0196 | 0.0056 | 0.0009 | 0.0000 |
| 5                | 0.7461 | 0.6386 | 0.5174 | 0.3911 | 0.2703 | 0.1657 | 0.0856 | 0.0339 | 0.0083 | 0.0006 |
| 6                | 0.9102 | 0.8505 | 0.7682 | 0.6627 | 0.5372 | 0.3993 | 0.2618 | 0.1409 | 0.0530 | 0.0084 |
| 7                | 0.9805 | 0.9615 | 0.9295 | 0.8789 | 0.8040 | 0.6997 | 0.5638 | 0.4005 | 0.2252 | 0.0712 |
| 8                | 0.9980 | 0.9954 | 0.9899 | 0.9793 | 0.9596 | 0.9249 | 0.8658 | 0.7684 | 0.6126 | 0.3698 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 10$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
| 0                | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0107 | 0.0045 | 0.0017 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0547 | 0.0274 | 0.0123 | 0.0048 | 0.0016 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.1719 | 0.1020 | 0.0548 | 0.0260 | 0.0106 | 0.0035 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.3770 | 0.2616 | 0.1662 | 0.0949 | 0.0473 | 0.0197 | 0.0064 | 0.0014 | 0.0001 | 0.0000 |
| 5                | 0.6230 | 0.4956 | 0.3669 | 0.2485 | 0.1503 | 0.0781 | 0.0328 | 0.0099 | 0.0016 | 0.0001 |
| 6                | 0.8281 | 0.7340 | 0.6177 | 0.4862 | 0.3504 | 0.2241 | 0.1209 | 0.0500 | 0.0128 | 0.0010 |
| 7                | 0.9453 | 0.9004 | 0.8327 | 0.7384 | 0.6172 | 0.4744 | 0.3222 | 0.1798 | 0.0702 | 0.0115 |
| 8                | 0.9893 | 0.9767 | 0.9536 | 0.9140 | 0.8507 | 0.7560 | 0.6242 | 0.4557 | 0.2639 | 0.0861 |
| 9                | 0.9990 | 0.9975 | 0.9940 | 0.9865 | 0.9718 | 0.9437 | 0.8926 | 0.8031 | 0.6513 | 0.4013 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |



DISTRIBUCION BINOMIAL (5)

| $n = 11$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.5688 | 0.3138 | 0.1673 | 0.0859 | 0.0422 | 0.0198 | 0.0088 | 0.0036 | 0.0014 |
| 1                | 0.8981 | 0.6974 | 0.4922 | 0.3221 | 0.1971 | 0.1130 | 0.0606 | 0.0302 | 0.0139 |
| 2                | 0.9848 | 0.9104 | 0.7788 | 0.6174 | 0.4552 | 0.3127 | 0.2001 | 0.1189 | 0.0652 |
| 3                | 0.9984 | 0.9815 | 0.9306 | 0.8389 | 0.7133 | 0.5696 | 0.4256 | 0.2963 | 0.1911 |
| 4                | 0.9999 | 0.9972 | 0.9841 | 0.9496 | 0.8854 | 0.7897 | 0.6683 | 0.5328 | 0.3971 |
| 5                | 1.0000 | 0.9997 | 0.9973 | 0.9883 | 0.9657 | 0.9218 | 0.8513 | 0.7535 | 0.6331 |
| 6                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9980 | 0.9924 | 0.9784 | 0.9499 | 0.9006 | 0.8262 |
| 7                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9957 | 0.9878 | 0.9707 | 0.9390 |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9980 | 0.9941 | 0.9852 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9978 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 12$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.5404 | 0.2824 | 0.1422 | 0.0687 | 0.0317 | 0.0138 | 0.0057 | 0.0022 | 0.0008 |
| 1                | 0.8816 | 0.6590 | 0.4435 | 0.2749 | 0.1584 | 0.0850 | 0.0424 | 0.0196 | 0.0083 |
| 2                | 0.9804 | 0.8891 | 0.7358 | 0.5583 | 0.3907 | 0.2528 | 0.1513 | 0.0834 | 0.0421 |
| 3                | 0.9978 | 0.9744 | 0.9078 | 0.7946 | 0.6488 | 0.4925 | 0.3467 | 0.2253 | 0.1345 |
| 4                | 0.9998 | 0.9957 | 0.9761 | 0.9274 | 0.8424 | 0.7237 | 0.5833 | 0.4382 | 0.3044 |
| 5                | 1.0000 | 0.9995 | 0.9954 | 0.9806 | 0.9456 | 0.8822 | 0.7873 | 0.6652 | 0.5269 |
| 6                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9961 | 0.9857 | 0.9614 | 0.9154 | 0.8418 | 0.7393 |
| 7                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9972 | 0.9905 | 0.9745 | 0.9427 | 0.8883 |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9983 | 0.9944 | 0.9847 | 0.9644 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9972 | 0.9921 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 13$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.5133 | 0.2542 | 0.1209 | 0.0550 | 0.0238 | 0.0097 | 0.0037 | 0.0013 | 0.0004 |
| 1                | 0.8646 | 0.6213 | 0.3983 | 0.2336 | 0.1267 | 0.0637 | 0.0296 | 0.0126 | 0.0049 |
| 2                | 0.9755 | 0.8661 | 0.6920 | 0.5017 | 0.3326 | 0.2025 | 0.1132 | 0.0579 | 0.0269 |
| 3                | 0.9969 | 0.9658 | 0.8820 | 0.7473 | 0.5843 | 0.4206 | 0.2783 | 0.1686 | 0.0929 |
| 4                | 0.9997 | 0.9935 | 0.9658 | 0.9009 | 0.7940 | 0.6543 | 0.5005 | 0.3530 | 0.2279 |
| 5                | 1.0000 | 0.9991 | 0.9925 | 0.9700 | 0.9198 | 0.8346 | 0.7159 | 0.5744 | 0.4268 |
| 6                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9987 | 0.9930 | 0.9757 | 0.9376 | 0.8705 | 0.7712 | 0.6437 |
| 7                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9944 | 0.9818 | 0.9538 | 0.9023 | 0.8212 |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9990 | 0.9960 | 0.9874 | 0.9679 | 0.9302 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9975 | 0.9922 | 0.9797 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9959 |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (6)

 $n = 11$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0005 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0059 | 0.0022 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0327 | 0.0148 | 0.0059 | 0.0020 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.1133 | 0.0610 | 0.0293 | 0.0122 | 0.0043 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.2744 | 0.1738 | 0.0994 | 0.0501 | 0.0216 | 0.0076 | 0.0020 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.5000 | 0.3669 | 0.2465 | 0.1487 | 0.0782 | 0.0343 | 0.0117 | 0.0027 | 0.0003 | 0.0000 |
| 6                | 0.7256 | 0.6029 | 0.4672 | 0.3317 | 0.2103 | 0.1146 | 0.0504 | 0.0159 | 0.0028 | 0.0001 |
| 7                | 0.8867 | 0.8089 | 0.7037 | 0.5744 | 0.4304 | 0.2867 | 0.1611 | 0.0694 | 0.0185 | 0.0016 |
| 8                | 0.9673 | 0.9348 | 0.8811 | 0.7999 | 0.6873 | 0.5448 | 0.3826 | 0.2212 | 0.0896 | 0.0152 |
| 9                | 0.9941 | 0.9861 | 0.9698 | 0.9394 | 0.8870 | 0.8029 | 0.6779 | 0.5078 | 0.3026 | 0.1019 |
| 10               | 0.9995 | 0.9986 | 0.9964 | 0.9912 | 0.9802 | 0.9578 | 0.9141 | 0.8327 | 0.6862 | 0.4312 |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

 $n = 12$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0002 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0032 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0193 | 0.0079 | 0.0028 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0730 | 0.0356 | 0.0153 | 0.0056 | 0.0017 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.1938 | 0.1117 | 0.0573 | 0.0255 | 0.0095 | 0.0028 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.3872 | 0.2607 | 0.1582 | 0.0846 | 0.0386 | 0.0143 | 0.0039 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 |
| 6                | 0.6128 | 0.4731 | 0.3348 | 0.2127 | 0.1178 | 0.0544 | 0.0194 | 0.0046 | 0.0005 | 0.0000 |
| 7                | 0.8062 | 0.6956 | 0.5618 | 0.4167 | 0.2763 | 0.1576 | 0.0726 | 0.0239 | 0.0043 | 0.0002 |
| 8                | 0.9270 | 0.8655 | 0.7747 | 0.6533 | 0.5075 | 0.3512 | 0.2054 | 0.0922 | 0.0256 | 0.0022 |
| 9                | 0.9807 | 0.9579 | 0.9166 | 0.8487 | 0.7472 | 0.6093 | 0.4417 | 0.2642 | 0.1109 | 0.0196 |
| 10               | 0.9968 | 0.9917 | 0.9804 | 0.9576 | 0.9150 | 0.8416 | 0.7251 | 0.5565 | 0.3410 | 0.1184 |
| 11               | 0.9998 | 0.9992 | 0.9978 | 0.9943 | 0.9862 | 0.9683 | 0.9313 | 0.8578 | 0.7176 | 0.4596 |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

 $n = 13$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0017 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0112 | 0.0041 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0461 | 0.0203 | 0.0078 | 0.0025 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.1334 | 0.0698 | 0.0321 | 0.0126 | 0.0040 | 0.0010 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.2905 | 0.1788 | 0.0977 | 0.0462 | 0.0182 | 0.0056 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.5000 | 0.3563 | 0.2288 | 0.1295 | 0.0624 | 0.0243 | 0.0070 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 |
| 7                | 0.7095 | 0.5732 | 0.4256 | 0.2841 | 0.1654 | 0.0802 | 0.0300 | 0.0075 | 0.0009 | 0.0000 |
| 8                | 0.8666 | 0.7721 | 0.6470 | 0.4995 | 0.3457 | 0.2060 | 0.0991 | 0.0342 | 0.0065 | 0.0003 |
| 9                | 0.9539 | 0.9071 | 0.8314 | 0.7217 | 0.5794 | 0.4157 | 0.2527 | 0.1180 | 0.0342 | 0.0031 |
| 10               | 0.9888 | 0.9731 | 0.9421 | 0.8868 | 0.7975 | 0.6674 | 0.4983 | 0.3080 | 0.1339 | 0.0245 |
| 11               | 0.9983 | 0.9951 | 0.9874 | 0.9704 | 0.9363 | 0.8733 | 0.7664 | 0.6017 | 0.3787 | 0.1354 |
| 12               | 0.9999 | 0.9996 | 0.9987 | 0.9963 | 0.9903 | 0.9762 | 0.9450 | 0.8791 | 0.7458 | 0.4867 |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (7)

| $n = 14$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |  |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |  |
| 0                | 0.4877 | 0.2288 | 0.1028 | 0.0440 | 0.0178 | 0.0068 | 0.0024 | 0.0008 | 0.0002 |  |
| 1                | 0.8470 | 0.5846 | 0.3567 | 0.1979 | 0.1010 | 0.0475 | 0.0205 | 0.0081 | 0.0029 |  |
| 2                | 0.9699 | 0.8416 | 0.6479 | 0.4481 | 0.2811 | 0.1608 | 0.0839 | 0.0398 | 0.0170 |  |
| 3                | 0.9958 | 0.9559 | 0.8535 | 0.6982 | 0.5213 | 0.3552 | 0.2205 | 0.1243 | 0.0632 |  |
| 4                | 0.9996 | 0.9908 | 0.9533 | 0.8702 | 0.7415 | 0.5842 | 0.4227 | 0.2793 | 0.1672 |  |
| 5                | 1.0000 | 0.9985 | 0.9885 | 0.9561 | 0.8883 | 0.7805 | 0.6405 | 0.4859 | 0.3373 |  |
| 6                | 1.0000 | 0.9998 | 0.9978 | 0.9884 | 0.9617 | 0.9067 | 0.8164 | 0.6925 | 0.5461 |  |
| 7                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9976 | 0.9897 | 0.9685 | 0.9247 | 0.8499 | 0.7414 |  |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9996 | 0.9978 | 0.9917 | 0.9757 | 0.9417 | 0.8811 |  |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9983 | 0.9940 | 0.9825 | 0.9574 |  |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9989 | 0.9961 | 0.9886 |  |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9978 |  |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 |  |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |  |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |  |
| $n = 15$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |  |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |  |
| 0                | 0.4633 | 0.2059 | 0.0874 | 0.0352 | 0.0134 | 0.0047 | 0.0016 | 0.0005 | 0.0001 |  |
| 1                | 0.8290 | 0.5490 | 0.3186 | 0.1671 | 0.0802 | 0.0353 | 0.0142 | 0.0052 | 0.0017 |  |
| 2                | 0.9638 | 0.8159 | 0.6042 | 0.3980 | 0.2361 | 0.1268 | 0.0617 | 0.0271 | 0.0107 |  |
| 3                | 0.9945 | 0.9444 | 0.8227 | 0.6482 | 0.4613 | 0.2969 | 0.1727 | 0.0905 | 0.0424 |  |
| 4                | 0.9994 | 0.9873 | 0.9383 | 0.8358 | 0.6865 | 0.5155 | 0.3519 | 0.2173 | 0.1204 |  |
| 5                | 0.9999 | 0.9977 | 0.9832 | 0.9389 | 0.8516 | 0.7216 | 0.5643 | 0.4032 | 0.2608 |  |
| 6                | 1.0000 | 0.9997 | 0.9964 | 0.9819 | 0.9434 | 0.8689 | 0.7548 | 0.6098 | 0.4522 |  |
| 7                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9958 | 0.9827 | 0.9500 | 0.8868 | 0.7869 | 0.6535 |  |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9958 | 0.9848 | 0.9578 | 0.9050 | 0.8182 |  |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9963 | 0.9876 | 0.9662 | 0.9231 |  |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9972 | 0.9907 | 0.9745 |  |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9981 | 0.9937 |  |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 |  |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |  |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |  |
| 15               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |  |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (8)

 $n = 14$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0009 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0065 | 0.0022 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0287 | 0.0114 | 0.0039 | 0.0011 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0898 | 0.0426 | 0.0175 | 0.0060 | 0.0017 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.2120 | 0.1189 | 0.0583 | 0.0243 | 0.0083 | 0.0022 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.3953 | 0.2586 | 0.1501 | 0.0753 | 0.0315 | 0.0103 | 0.0024 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.6047 | 0.4539 | 0.3075 | 0.1836 | 0.0933 | 0.0383 | 0.0116 | 0.0022 | 0.0002 | 0.0000 |
| 8                | 0.7880 | 0.6627 | 0.5141 | 0.3595 | 0.2195 | 0.1117 | 0.0439 | 0.0115 | 0.0015 | 0.0000 |
| 9                | 0.9102 | 0.8328 | 0.7207 | 0.5773 | 0.4158 | 0.2585 | 0.1298 | 0.0467 | 0.0092 | 0.0004 |
| 10               | 0.9713 | 0.9368 | 0.8757 | 0.7795 | 0.6448 | 0.4787 | 0.3018 | 0.1465 | 0.0441 | 0.0042 |
| 11               | 0.9935 | 0.9830 | 0.9602 | 0.9161 | 0.8392 | 0.7189 | 0.5519 | 0.3521 | 0.1584 | 0.0301 |
| 12               | 0.9991 | 0.9971 | 0.9919 | 0.9795 | 0.9525 | 0.8990 | 0.8021 | 0.6433 | 0.4154 | 0.1530 |
| 13               | 0.9999 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9976 | 0.9932 | 0.9822 | 0.9560 | 0.8972 | 0.7712 | 0.5123 |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

 $n = 15$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0037 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0176 | 0.0063 | 0.0019 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0592 | 0.0255 | 0.0093 | 0.0028 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.1509 | 0.0769 | 0.0338 | 0.0124 | 0.0037 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.3036 | 0.1818 | 0.0950 | 0.0422 | 0.0152 | 0.0042 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.5000 | 0.3465 | 0.2131 | 0.1132 | 0.0500 | 0.0173 | 0.0042 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.6964 | 0.5478 | 0.3902 | 0.2452 | 0.1311 | 0.0566 | 0.0181 | 0.0036 | 0.0003 | 0.0000 |
| 9                | 0.8491 | 0.7392 | 0.5968 | 0.4357 | 0.2784 | 0.1484 | 0.0611 | 0.0168 | 0.0022 | 0.0001 |
| 10               | 0.9408 | 0.8796 | 0.7827 | 0.6481 | 0.4845 | 0.3135 | 0.1642 | 0.0617 | 0.0127 | 0.0006 |
| 11               | 0.9824 | 0.9576 | 0.9095 | 0.8273 | 0.7031 | 0.5387 | 0.3518 | 0.1773 | 0.0556 | 0.0055 |
| 12               | 0.9963 | 0.9893 | 0.9729 | 0.9383 | 0.8732 | 0.7639 | 0.6020 | 0.3958 | 0.1841 | 0.0362 |
| 13               | 0.9995 | 0.9983 | 0.9948 | 0.9858 | 0.9647 | 0.9198 | 0.8329 | 0.6814 | 0.4510 | 0.1710 |
| 14               | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9984 | 0.9953 | 0.9866 | 0.9648 | 0.9126 | 0.7941 | 0.5367 |
| 15               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (9)

| $n = 16$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |  |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |  |
| 0                | 0.4401 | 0.1853 | 0.0743 | 0.0281 | 0.0100 | 0.0033 | 0.0010 | 0.0003 | 0.0001 |  |
| 1                | 0.8108 | 0.5147 | 0.2839 | 0.1407 | 0.0635 | 0.0261 | 0.0098 | 0.0033 | 0.0010 |  |
| 2                | 0.9571 | 0.7892 | 0.5614 | 0.3518 | 0.1971 | 0.0994 | 0.0451 | 0.0183 | 0.0066 |  |
| 3                | 0.9930 | 0.9316 | 0.7899 | 0.5981 | 0.4050 | 0.2459 | 0.1339 | 0.0651 | 0.0281 |  |
| 4                | 0.9991 | 0.9830 | 0.9209 | 0.7982 | 0.6302 | 0.4499 | 0.2892 | 0.1666 | 0.0853 |  |
| 5                | 0.9999 | 0.9967 | 0.9765 | 0.9183 | 0.8103 | 0.6598 | 0.4900 | 0.3288 | 0.1976 |  |
| 6                | 1.0000 | 0.9995 | 0.9944 | 0.9733 | 0.9204 | 0.8247 | 0.6881 | 0.5272 | 0.3660 |  |
| 7                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9989 | 0.9930 | 0.9729 | 0.9256 | 0.8406 | 0.7161 | 0.5629 |  |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9985 | 0.9925 | 0.9743 | 0.9329 | 0.8577 | 0.7441 |  |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9984 | 0.9929 | 0.9771 | 0.9417 | 0.8759 |  |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9984 | 0.9938 | 0.9809 | 0.9514 |  |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9951 | 0.9851 |  |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9991 | 0.9965 |  |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 |  |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |  |
| 15               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |  |
| 16               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |  |
| $n = 17$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |  |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |  |
| 0                | 0.4181 | 0.1668 | 0.0631 | 0.0225 | 0.0075 | 0.0023 | 0.0007 | 0.0002 | 0.0000 |  |
| 1                | 0.7922 | 0.4818 | 0.2525 | 0.1182 | 0.0501 | 0.0193 | 0.0067 | 0.0021 | 0.0006 |  |
| 2                | 0.9497 | 0.7618 | 0.5198 | 0.3096 | 0.1637 | 0.0774 | 0.0327 | 0.0123 | 0.0041 |  |
| 3                | 0.9912 | 0.9174 | 0.7556 | 0.5489 | 0.3530 | 0.2019 | 0.1028 | 0.0464 | 0.0184 |  |
| 4                | 0.9988 | 0.9779 | 0.9013 | 0.7582 | 0.5739 | 0.3887 | 0.2348 | 0.1260 | 0.0596 |  |
| 5                | 0.9999 | 0.9953 | 0.9681 | 0.8943 | 0.7653 | 0.5968 | 0.4197 | 0.2639 | 0.1471 |  |
| 6                | 1.0000 | 0.9992 | 0.9917 | 0.9623 | 0.8929 | 0.7752 | 0.6188 | 0.4478 | 0.2902 |  |
| 7                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9983 | 0.9891 | 0.9598 | 0.8954 | 0.7872 | 0.6405 | 0.4743 |  |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9974 | 0.9876 | 0.9597 | 0.9006 | 0.8011 | 0.6626 |  |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9969 | 0.9873 | 0.9617 | 0.9081 | 0.8166 |  |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9968 | 0.9880 | 0.9652 | 0.9174 |  |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9970 | 0.9894 | 0.9699 |  |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9975 | 0.9914 |  |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9981 |  |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 |  |
| 15               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |  |
| 16               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |  |
| 17               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |  |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (10)

 $n = 16$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0021 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0106 | 0.0035 | 0.0009 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0384 | 0.0149 | 0.0049 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.1051 | 0.0486 | 0.0191 | 0.0062 | 0.0016 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.2272 | 0.1241 | 0.0583 | 0.0229 | 0.0071 | 0.0016 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.4018 | 0.2559 | 0.1423 | 0.0671 | 0.0257 | 0.0075 | 0.0015 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.5982 | 0.4371 | 0.2839 | 0.1594 | 0.0744 | 0.0271 | 0.0070 | 0.0011 | 0.0001 | 0.0000 |
| 9                | 0.7728 | 0.6340 | 0.4728 | 0.3119 | 0.1753 | 0.0796 | 0.0267 | 0.0056 | 0.0005 | 0.0000 |
| 10               | 0.8949 | 0.8024 | 0.6712 | 0.5100 | 0.3402 | 0.1897 | 0.0817 | 0.0235 | 0.0033 | 0.0001 |
| 11               | 0.9616 | 0.9147 | 0.8334 | 0.7108 | 0.5501 | 0.3698 | 0.2018 | 0.0791 | 0.0170 | 0.0009 |
| 12               | 0.9894 | 0.9719 | 0.9349 | 0.8661 | 0.7541 | 0.5950 | 0.4019 | 0.2101 | 0.0684 | 0.0070 |
| 13               | 0.9979 | 0.9934 | 0.9817 | 0.9549 | 0.9006 | 0.8029 | 0.6482 | 0.4386 | 0.2108 | 0.0429 |
| 14               | 0.9997 | 0.9990 | 0.9967 | 0.9902 | 0.9739 | 0.9365 | 0.8593 | 0.7161 | 0.4853 | 0.1892 |
| 15               | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9990 | 0.9967 | 0.9900 | 0.9719 | 0.9257 | 0.8147 | 0.5599 |
| 16               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

 $n = 17$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0012 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0064 | 0.0019 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0245 | 0.0086 | 0.0025 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.0717 | 0.0301 | 0.0106 | 0.0030 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.1662 | 0.0826 | 0.0348 | 0.0120 | 0.0032 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.3145 | 0.1834 | 0.0919 | 0.0383 | 0.0127 | 0.0031 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.5000 | 0.3374 | 0.1989 | 0.0994 | 0.0403 | 0.0124 | 0.0026 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9                | 0.6855 | 0.5257 | 0.3595 | 0.2128 | 0.1046 | 0.0402 | 0.0109 | 0.0017 | 0.0001 | 0.0000 |
| 10               | 0.8338 | 0.7098 | 0.5522 | 0.3812 | 0.2248 | 0.1071 | 0.0377 | 0.0083 | 0.0008 | 0.0000 |
| 11               | 0.9283 | 0.8529 | 0.7361 | 0.5803 | 0.4032 | 0.2347 | 0.1057 | 0.0319 | 0.0047 | 0.0001 |
| 12               | 0.9755 | 0.9404 | 0.8740 | 0.7652 | 0.6113 | 0.4261 | 0.2418 | 0.0987 | 0.0221 | 0.0012 |
| 13               | 0.9936 | 0.9816 | 0.9536 | 0.8972 | 0.7981 | 0.6470 | 0.4511 | 0.2444 | 0.0826 | 0.0088 |
| 14               | 0.9988 | 0.9959 | 0.9877 | 0.9673 | 0.9226 | 0.8363 | 0.6904 | 0.4802 | 0.2382 | 0.0503 |
| 15               | 0.9999 | 0.9994 | 0.9979 | 0.9933 | 0.9807 | 0.9499 | 0.8818 | 0.7475 | 0.5182 | 0.2078 |
| 16               | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9993 | 0.9977 | 0.9925 | 0.9775 | 0.9369 | 0.8332 | 0.5819 |
| 17               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (11)

$n = 18$

| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.3972 | 0.1501 | 0.0536 | 0.0180 | 0.0056 | 0.0016 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 |
| 1                | 0.7735 | 0.4503 | 0.2241 | 0.0991 | 0.0395 | 0.0142 | 0.0046 | 0.0013 | 0.0003 |
| 2                | 0.9419 | 0.7338 | 0.4797 | 0.2713 | 0.1353 | 0.0600 | 0.0236 | 0.0082 | 0.0025 |
| 3                | 0.9891 | 0.9018 | 0.7202 | 0.5010 | 0.3057 | 0.1646 | 0.0783 | 0.0328 | 0.0120 |
| 4                | 0.9985 | 0.9718 | 0.8794 | 0.7164 | 0.5187 | 0.3327 | 0.1886 | 0.0942 | 0.0411 |
| 5                | 0.9998 | 0.9936 | 0.9581 | 0.8671 | 0.7175 | 0.5344 | 0.3550 | 0.2088 | 0.1077 |
| 6                | 1.0000 | 0.9988 | 0.9882 | 0.9487 | 0.8610 | 0.7217 | 0.5491 | 0.3743 | 0.2258 |
| 7                | 1.0000 | 0.9998 | 0.9973 | 0.9837 | 0.9431 | 0.8593 | 0.7283 | 0.5634 | 0.3915 |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9957 | 0.9807 | 0.9404 | 0.8609 | 0.7368 | 0.5778 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9946 | 0.9790 | 0.9403 | 0.8653 | 0.7473 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 | 0.9939 | 0.9788 | 0.9424 | 0.8720 |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9986 | 0.9938 | 0.9797 | 0.9463 |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9986 | 0.9942 | 0.9817 |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9951 |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9990 |
| 15               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| 16               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 17               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 18               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

$n = 19$

| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.3774 | 0.1351 | 0.0456 | 0.0144 | 0.0042 | 0.0011 | 0.0003 | 0.0001 | 0.0000 |
| 1                | 0.7547 | 0.4203 | 0.1985 | 0.0829 | 0.0310 | 0.0104 | 0.0031 | 0.0008 | 0.0002 |
| 2                | 0.9335 | 0.7054 | 0.4413 | 0.2369 | 0.1113 | 0.0462 | 0.0170 | 0.0055 | 0.0015 |
| 3                | 0.9868 | 0.8850 | 0.6841 | 0.4551 | 0.2631 | 0.1332 | 0.0591 | 0.0230 | 0.0077 |
| 4                | 0.9980 | 0.9648 | 0.8556 | 0.6733 | 0.4654 | 0.2822 | 0.1500 | 0.0696 | 0.0280 |
| 5                | 0.9998 | 0.9914 | 0.9463 | 0.8369 | 0.6678 | 0.4739 | 0.2968 | 0.1629 | 0.0777 |
| 6                | 1.0000 | 0.9983 | 0.9837 | 0.9324 | 0.8251 | 0.6655 | 0.4812 | 0.3081 | 0.1727 |
| 7                | 1.0000 | 0.9997 | 0.9959 | 0.9767 | 0.9225 | 0.8180 | 0.6656 | 0.4878 | 0.3169 |
| 8                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9992 | 0.9933 | 0.9713 | 0.9161 | 0.8145 | 0.6675 | 0.4940 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9984 | 0.9911 | 0.9674 | 0.9125 | 0.8139 | 0.6710 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9977 | 0.9895 | 0.9653 | 0.9115 | 0.8159 |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9995 | 0.9972 | 0.9886 | 0.9648 | 0.9129 |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9969 | 0.9884 | 0.9658 |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9969 | 0.9891 |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9972 |
| 15               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 |
| 16               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| 17               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 18               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 19               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (12)

 $n = 18$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0038 | 0.0010 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0154 | 0.0049 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.0481 | 0.0183 | 0.0058 | 0.0014 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.1189 | 0.0537 | 0.0203 | 0.0062 | 0.0014 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.2403 | 0.1280 | 0.0576 | 0.0212 | 0.0061 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.4073 | 0.2527 | 0.1347 | 0.0597 | 0.0210 | 0.0054 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9                | 0.5927 | 0.4222 | 0.2632 | 0.1391 | 0.0596 | 0.0193 | 0.0043 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 |
| 10               | 0.7597 | 0.6085 | 0.4366 | 0.2717 | 0.1407 | 0.0569 | 0.0163 | 0.0027 | 0.0002 | 0.0000 |
| 11               | 0.8811 | 0.7742 | 0.6257 | 0.4509 | 0.2783 | 0.1390 | 0.0513 | 0.0118 | 0.0012 | 0.0000 |
| 12               | 0.9519 | 0.8923 | 0.7912 | 0.6450 | 0.4656 | 0.2825 | 0.1329 | 0.0419 | 0.0064 | 0.0002 |
| 13               | 0.9846 | 0.9589 | 0.9058 | 0.8114 | 0.6673 | 0.4813 | 0.2836 | 0.1206 | 0.0282 | 0.0015 |
| 14               | 0.9962 | 0.9880 | 0.9672 | 0.9217 | 0.8354 | 0.6943 | 0.4990 | 0.2798 | 0.0982 | 0.0109 |
| 15               | 0.9993 | 0.9975 | 0.9918 | 0.9764 | 0.9400 | 0.8647 | 0.7287 | 0.5203 | 0.2662 | 0.0581 |
| 16               | 0.9999 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9954 | 0.9858 | 0.9605 | 0.9009 | 0.7759 | 0.5497 | 0.2265 |
| 17               | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9984 | 0.9944 | 0.9820 | 0.9464 | 0.8499 | 0.6028 |
| 18               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

 $n = 19$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0022 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0096 | 0.0028 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.0318 | 0.0109 | 0.0031 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.0835 | 0.0342 | 0.0116 | 0.0031 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.1796 | 0.0871 | 0.0352 | 0.0114 | 0.0028 | 0.0005 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.3238 | 0.1841 | 0.0885 | 0.0347 | 0.0105 | 0.0023 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9                | 0.5000 | 0.3290 | 0.1861 | 0.0875 | 0.0326 | 0.0089 | 0.0016 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 10               | 0.6762 | 0.5060 | 0.3325 | 0.1855 | 0.0839 | 0.0287 | 0.0067 | 0.0008 | 0.0000 | 0.0000 |
| 11               | 0.8204 | 0.6831 | 0.5122 | 0.3344 | 0.1820 | 0.0775 | 0.0233 | 0.0041 | 0.0003 | 0.0000 |
| 12               | 0.9165 | 0.8273 | 0.6919 | 0.5188 | 0.3345 | 0.1749 | 0.0676 | 0.0163 | 0.0017 | 0.0000 |
| 13               | 0.9682 | 0.9223 | 0.8371 | 0.7032 | 0.5261 | 0.3322 | 0.1631 | 0.0537 | 0.0086 | 0.0002 |
| 14               | 0.9904 | 0.9720 | 0.9304 | 0.8500 | 0.7178 | 0.5346 | 0.3267 | 0.1444 | 0.0352 | 0.0020 |
| 15               | 0.9978 | 0.9923 | 0.9770 | 0.9409 | 0.8668 | 0.7369 | 0.5449 | 0.3159 | 0.1150 | 0.0132 |
| 16               | 0.9996 | 0.9985 | 0.9945 | 0.9830 | 0.9538 | 0.8887 | 0.7631 | 0.5587 | 0.2946 | 0.0665 |
| 17               | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9969 | 0.9896 | 0.9690 | 0.9171 | 0.8015 | 0.5797 | 0.2453 |
| 18               | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9989 | 0.9958 | 0.9856 | 0.9544 | 0.8649 | 0.6226 |
| 19               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |



## DISTRIBUCION BINOMIAL (13)

| $n = 20$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.3585 | 0.1216 | 0.0388 | 0.0115 | 0.0032 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.7358 | 0.3917 | 0.1756 | 0.0692 | 0.0243 | 0.0076 | 0.0021 | 0.0005 | 0.0001 |
| 2                | 0.9245 | 0.6769 | 0.4049 | 0.2061 | 0.0913 | 0.0355 | 0.0121 | 0.0036 | 0.0009 |
| 3                | 0.9841 | 0.8670 | 0.6477 | 0.4114 | 0.2252 | 0.1071 | 0.0444 | 0.0160 | 0.0049 |
| 4                | 0.9974 | 0.9568 | 0.8298 | 0.6296 | 0.4148 | 0.2375 | 0.1182 | 0.0510 | 0.0189 |
| 5                | 0.9997 | 0.9887 | 0.9327 | 0.8042 | 0.6172 | 0.4164 | 0.2454 | 0.1256 | 0.0553 |
| 6                | 1.0000 | 0.9976 | 0.9781 | 0.9133 | 0.7858 | 0.6080 | 0.4166 | 0.2500 | 0.1299 |
| 7                | 1.0000 | 0.9996 | 0.9941 | 0.9679 | 0.8982 | 0.7723 | 0.6010 | 0.4159 | 0.2520 |
| 8                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9987 | 0.9900 | 0.9591 | 0.8867 | 0.7624 | 0.5956 | 0.4143 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9974 | 0.9861 | 0.9520 | 0.8782 | 0.7553 | 0.5914 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9961 | 0.9829 | 0.9468 | 0.8725 | 0.7507 |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9991 | 0.9949 | 0.9804 | 0.9435 | 0.8692 |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9987 | 0.9940 | 0.9790 | 0.9420 |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9985 | 0.9935 | 0.9786 |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9984 | 0.9936 |
| 15               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9985 |
| 16               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 |
| 17               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 18               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 19               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 20               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $n = 21$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.3406 | 0.1094 | 0.0329 | 0.0092 | 0.0024 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.7170 | 0.3647 | 0.1550 | 0.0576 | 0.0190 | 0.0056 | 0.0014 | 0.0003 | 0.0001 |
| 2                | 0.9151 | 0.6484 | 0.3705 | 0.1787 | 0.0745 | 0.0271 | 0.0086 | 0.0024 | 0.0006 |
| 3                | 0.9811 | 0.8480 | 0.6113 | 0.3704 | 0.1917 | 0.0856 | 0.0331 | 0.0110 | 0.0031 |
| 4                | 0.9968 | 0.9478 | 0.8025 | 0.5860 | 0.3674 | 0.1984 | 0.0924 | 0.0370 | 0.0126 |
| 5                | 0.9996 | 0.9856 | 0.9173 | 0.7693 | 0.5666 | 0.3627 | 0.2009 | 0.0957 | 0.0389 |
| 6                | 1.0000 | 0.9967 | 0.9713 | 0.8915 | 0.7436 | 0.5505 | 0.3567 | 0.2002 | 0.0964 |
| 7                | 1.0000 | 0.9994 | 0.9917 | 0.9569 | 0.8701 | 0.7230 | 0.5365 | 0.3495 | 0.1971 |
| 8                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9980 | 0.9856 | 0.9439 | 0.8523 | 0.7059 | 0.5237 | 0.3413 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9996 | 0.9959 | 0.9794 | 0.9324 | 0.8377 | 0.6914 | 0.5117 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9990 | 0.9936 | 0.9736 | 0.9228 | 0.8256 | 0.6790 |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9983 | 0.9913 | 0.9687 | 0.9151 | 0.8159 |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9996 | 0.9976 | 0.9892 | 0.9648 | 0.9092 |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9969 | 0.9877 | 0.9621 |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9964 | 0.9868 |
| 15               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9963 |
| 16               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 |
| 17               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| 18               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 19               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 20               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 21               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (14)

 $n = 20$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0059 | 0.0015 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.0207 | 0.0064 | 0.0016 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.0577 | 0.0214 | 0.0065 | 0.0015 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.1316 | 0.0580 | 0.0210 | 0.0060 | 0.0013 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.2517 | 0.1308 | 0.0565 | 0.0196 | 0.0051 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9                | 0.4119 | 0.2493 | 0.1275 | 0.0532 | 0.0171 | 0.0039 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 10               | 0.5881 | 0.4086 | 0.2447 | 0.1218 | 0.0480 | 0.0139 | 0.0026 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| 11               | 0.7483 | 0.5857 | 0.4044 | 0.2376 | 0.1133 | 0.0409 | 0.0100 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 |
| 12               | 0.8684 | 0.7480 | 0.5841 | 0.3990 | 0.2277 | 0.1018 | 0.0321 | 0.0059 | 0.0004 | 0.0000 |
| 13               | 0.9423 | 0.8701 | 0.7500 | 0.5834 | 0.3920 | 0.2142 | 0.0867 | 0.0219 | 0.0024 | 0.0000 |
| 14               | 0.9793 | 0.9447 | 0.8744 | 0.7546 | 0.5836 | 0.3828 | 0.1958 | 0.0673 | 0.0113 | 0.0003 |
| 15               | 0.9941 | 0.9811 | 0.9490 | 0.8818 | 0.7625 | 0.5852 | 0.3704 | 0.1702 | 0.0432 | 0.0026 |
| 16               | 0.9987 | 0.9951 | 0.9840 | 0.9556 | 0.8929 | 0.7748 | 0.5886 | 0.3523 | 0.1330 | 0.0159 |
| 17               | 0.9998 | 0.9991 | 0.9964 | 0.9879 | 0.9645 | 0.9087 | 0.7939 | 0.5951 | 0.3231 | 0.0755 |
| 18               | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9979 | 0.9924 | 0.9757 | 0.9308 | 0.8244 | 0.6083 | 0.2642 |
| 19               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9968 | 0.9885 | 0.9612 | 0.8784 | 0.6415 |
| 20               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

 $n = 21$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0036 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.0133 | 0.0037 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.0392 | 0.0132 | 0.0036 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.0946 | 0.0379 | 0.0123 | 0.0031 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.1917 | 0.0908 | 0.0352 | 0.0108 | 0.0024 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9                | 0.3318 | 0.1841 | 0.0849 | 0.0313 | 0.0087 | 0.0017 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 10               | 0.5000 | 0.3210 | 0.1744 | 0.0772 | 0.0264 | 0.0064 | 0.0010 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 11               | 0.6682 | 0.4883 | 0.3086 | 0.1623 | 0.0676 | 0.0206 | 0.0041 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0000 |
| 12               | 0.8083 | 0.6587 | 0.4763 | 0.2941 | 0.1477 | 0.0561 | 0.0144 | 0.0020 | 0.0001 | 0.0000 |
| 13               | 0.9054 | 0.8029 | 0.6505 | 0.4635 | 0.2770 | 0.1299 | 0.0431 | 0.0083 | 0.0006 | 0.0000 |
| 14               | 0.9608 | 0.9036 | 0.7998 | 0.6433 | 0.4495 | 0.2564 | 0.1085 | 0.0287 | 0.0033 | 0.0000 |
| 15               | 0.9867 | 0.9611 | 0.9043 | 0.7991 | 0.6373 | 0.4334 | 0.2307 | 0.0827 | 0.0144 | 0.0004 |
| 16               | 0.9964 | 0.9874 | 0.9630 | 0.9076 | 0.8016 | 0.6326 | 0.4140 | 0.1975 | 0.0522 | 0.0032 |
| 17               | 0.9993 | 0.9969 | 0.9890 | 0.9669 | 0.9144 | 0.8083 | 0.6296 | 0.3887 | 0.1520 | 0.0189 |
| 18               | 0.9999 | 0.9994 | 0.9976 | 0.9914 | 0.9729 | 0.9255 | 0.8213 | 0.6295 | 0.3516 | 0.0849 |
| 19               | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9985 | 0.9944 | 0.9810 | 0.9424 | 0.8450 | 0.6353 | 0.2830 |
| 20               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9976 | 0.9908 | 0.9671 | 0.8906 | 0.6594 |
| 21               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (14)

 $n = 20$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0059 | 0.0015 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.0207 | 0.0064 | 0.0016 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.0577 | 0.0214 | 0.0065 | 0.0015 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.1316 | 0.0580 | 0.0210 | 0.0060 | 0.0013 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.2517 | 0.1308 | 0.0565 | 0.0196 | 0.0051 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9                | 0.4119 | 0.2493 | 0.1275 | 0.0532 | 0.0171 | 0.0039 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 10               | 0.5881 | 0.4086 | 0.2447 | 0.1218 | 0.0480 | 0.0139 | 0.0026 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| 11               | 0.7483 | 0.5857 | 0.4044 | 0.2376 | 0.1133 | 0.0409 | 0.0100 | 0.0013 | 0.0001 | 0.0000 |
| 12               | 0.8684 | 0.7480 | 0.5841 | 0.3990 | 0.2277 | 0.1018 | 0.0321 | 0.0059 | 0.0004 | 0.0000 |
| 13               | 0.9423 | 0.8701 | 0.7500 | 0.5834 | 0.3920 | 0.2142 | 0.0867 | 0.0219 | 0.0024 | 0.0000 |
| 14               | 0.9793 | 0.9447 | 0.8744 | 0.7546 | 0.5836 | 0.3828 | 0.1958 | 0.0673 | 0.0113 | 0.0003 |
| 15               | 0.9941 | 0.9811 | 0.9490 | 0.8818 | 0.7625 | 0.5852 | 0.3704 | 0.1702 | 0.0432 | 0.0026 |
| 16               | 0.9987 | 0.9951 | 0.9840 | 0.9556 | 0.8929 | 0.7748 | 0.5886 | 0.3523 | 0.1330 | 0.0159 |
| 17               | 0.9998 | 0.9991 | 0.9964 | 0.9879 | 0.9645 | 0.9087 | 0.7939 | 0.5951 | 0.3231 | 0.0755 |
| 18               | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9979 | 0.9924 | 0.9757 | 0.9308 | 0.8244 | 0.6083 | 0.2642 |
| 19               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9992 | 0.9968 | 0.9885 | 0.9612 | 0.8784 | 0.6415 |
| 20               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

 $n = 21$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0036 | 0.0008 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.0133 | 0.0037 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.0392 | 0.0132 | 0.0036 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.0946 | 0.0379 | 0.0123 | 0.0031 | 0.0006 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.1917 | 0.0908 | 0.0352 | 0.0108 | 0.0024 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9                | 0.3318 | 0.1841 | 0.0849 | 0.0313 | 0.0087 | 0.0017 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 10               | 0.5000 | 0.3210 | 0.1744 | 0.0772 | 0.0264 | 0.0064 | 0.0010 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 11               | 0.6682 | 0.4883 | 0.3086 | 0.1623 | 0.0676 | 0.0206 | 0.0041 | 0.0004 | 0.0000 | 0.0000 |
| 12               | 0.8083 | 0.6587 | 0.4763 | 0.2941 | 0.1477 | 0.0561 | 0.0144 | 0.0020 | 0.0001 | 0.0000 |
| 13               | 0.9054 | 0.8029 | 0.6505 | 0.4635 | 0.2770 | 0.1299 | 0.0431 | 0.0083 | 0.0006 | 0.0000 |
| 14               | 0.9608 | 0.9036 | 0.7998 | 0.6433 | 0.4495 | 0.2564 | 0.1085 | 0.0287 | 0.0033 | 0.0000 |
| 15               | 0.9867 | 0.9611 | 0.9043 | 0.7991 | 0.6373 | 0.4334 | 0.2307 | 0.0827 | 0.0144 | 0.0004 |
| 16               | 0.9964 | 0.9874 | 0.9630 | 0.9076 | 0.8016 | 0.6326 | 0.4140 | 0.1975 | 0.0522 | 0.0032 |
| 17               | 0.9993 | 0.9969 | 0.9890 | 0.9669 | 0.9144 | 0.8083 | 0.6296 | 0.3887 | 0.1520 | 0.0189 |
| 18               | 0.9999 | 0.9994 | 0.9976 | 0.9914 | 0.9729 | 0.9255 | 0.8213 | 0.6295 | 0.3516 | 0.0849 |
| 19               | 1.0000 | 0.9999 | 0.9997 | 0.9985 | 0.9944 | 0.9810 | 0.9424 | 0.8450 | 0.6353 | 0.2830 |
| 20               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9994 | 0.9976 | 0.9908 | 0.9671 | 0.8906 | 0.6594 |
| 21               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (15)

| $n = 22$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.3235 | 0.0985 | 0.0280 | 0.0074 | 0.0018 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.6982 | 0.3392 | 0.1367 | 0.0480 | 0.0149 | 0.0041 | 0.0010 | 0.0002 | 0.0000 |
| 2                | 0.9052 | 0.6200 | 0.3382 | 0.1545 | 0.0606 | 0.0207 | 0.0061 | 0.0016 | 0.0003 |
| 3                | 0.9778 | 0.8281 | 0.5752 | 0.3320 | 0.1624 | 0.0681 | 0.0245 | 0.0076 | 0.0020 |
| 4                | 0.9960 | 0.9379 | 0.7738 | 0.5429 | 0.3235 | 0.1645 | 0.0716 | 0.0266 | 0.0083 |
| 5                | 0.9994 | 0.9818 | 0.9001 | 0.7326 | 0.5168 | 0.3134 | 0.1629 | 0.0722 | 0.0271 |
| 6                | 0.9999 | 0.9956 | 0.9632 | 0.8670 | 0.6994 | 0.4942 | 0.3022 | 0.1584 | 0.0705 |
| 7                | 1.0000 | 0.9991 | 0.9886 | 0.9439 | 0.8385 | 0.6713 | 0.4736 | 0.2898 | 0.1518 |
| 8                | 1.0000 | 0.9999 | 0.9970 | 0.9799 | 0.9254 | 0.8135 | 0.6466 | 0.4540 | 0.2764 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9993 | 0.9939 | 0.9705 | 0.9084 | 0.7916 | 0.6244 | 0.4350 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9984 | 0.9900 | 0.9613 | 0.8930 | 0.7720 | 0.6037 |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9971 | 0.9860 | 0.9526 | 0.8793 | 0.7543 |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9957 | 0.9820 | 0.9449 | 0.8672 |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9989 | 0.9942 | 0.9785 | 0.9383 |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9984 | 0.9930 | 0.9757 |
| 15               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9981 | 0.9920 |
| 16               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9979 |
| 17               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 |
| 18               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 |
| 19               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 20               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 21               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 22               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

| $n = 23$         |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x \backslash p$ | .05    | .10    | .15    | .20    | .25    | .30    | .35    | .40    | .45    |
| 0                | 0.3074 | 0.0886 | 0.0238 | 0.0059 | 0.0013 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.6794 | 0.3151 | 0.1204 | 0.0398 | 0.0116 | 0.0030 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 |
| 2                | 0.8948 | 0.5920 | 0.3080 | 0.1332 | 0.0492 | 0.0157 | 0.0043 | 0.0010 | 0.0002 |
| 3                | 0.9742 | 0.8073 | 0.5396 | 0.2965 | 0.1370 | 0.0538 | 0.0181 | 0.0052 | 0.0012 |
| 4                | 0.9951 | 0.9269 | 0.7440 | 0.5007 | 0.2832 | 0.1356 | 0.0551 | 0.0190 | 0.0055 |
| 5                | 0.9992 | 0.9774 | 0.8811 | 0.6947 | 0.4685 | 0.2688 | 0.1309 | 0.0540 | 0.0186 |
| 6                | 0.9999 | 0.9942 | 0.9537 | 0.8402 | 0.6537 | 0.4399 | 0.2534 | 0.1240 | 0.0510 |
| 7                | 1.0000 | 0.9988 | 0.9848 | 0.9285 | 0.8037 | 0.6181 | 0.4136 | 0.2373 | 0.1152 |
| 8                | 1.0000 | 0.9998 | 0.9958 | 0.9727 | 0.9037 | 0.7709 | 0.5860 | 0.3884 | 0.2203 |
| 9                | 1.0000 | 1.0000 | 0.9990 | 0.9911 | 0.9592 | 0.8799 | 0.7408 | 0.5562 | 0.3636 |
| 10               | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9975 | 0.9851 | 0.9454 | 0.8575 | 0.7129 | 0.5278 |
| 11               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9954 | 0.9786 | 0.9318 | 0.8364 | 0.6865 |
| 12               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9988 | 0.9928 | 0.9717 | 0.9187 | 0.8164 |
| 13               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9979 | 0.9900 | 0.9651 | 0.9063 |
| 14               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9995 | 0.9970 | 0.9872 | 0.9589 |
| 15               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9992 | 0.9960 | 0.9847 |
| 16               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9990 | 0.9952 |
| 17               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9988 |
| 18               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 |
| 19               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 20               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 21               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 22               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 23               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## DISTRIBUCION BINOMIAL (16)

 $n = 22$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0022 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.0085 | 0.0021 | 0.0004 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.0262 | 0.0080 | 0.0019 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.0669 | 0.0243 | 0.0070 | 0.0016 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.1431 | 0.0617 | 0.0215 | 0.0058 | 0.0011 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9                | 0.2617 | 0.1328 | 0.0551 | 0.0180 | 0.0043 | 0.0007 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 10               | 0.4159 | 0.2457 | 0.1207 | 0.0474 | 0.0140 | 0.0029 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 11               | 0.5841 | 0.3963 | 0.2280 | 0.1070 | 0.0387 | 0.0100 | 0.0016 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 |
| 12               | 0.7383 | 0.5650 | 0.3756 | 0.2084 | 0.0916 | 0.0295 | 0.0061 | 0.0007 | 0.0000 | 0.0000 |
| 13               | 0.8569 | 0.7236 | 0.5460 | 0.3534 | 0.1865 | 0.0746 | 0.0201 | 0.0030 | 0.0001 | 0.0000 |
| 14               | 0.9331 | 0.8482 | 0.7102 | 0.5264 | 0.3287 | 0.1615 | 0.0561 | 0.0114 | 0.0009 | 0.0000 |
| 15               | 0.9738 | 0.9295 | 0.8416 | 0.6978 | 0.5058 | 0.3006 | 0.1330 | 0.0368 | 0.0044 | 0.0001 |
| 16               | 0.9915 | 0.9729 | 0.9278 | 0.8371 | 0.6866 | 0.4832 | 0.2674 | 0.0999 | 0.0182 | 0.0006 |
| 17               | 0.9978 | 0.9917 | 0.9734 | 0.9284 | 0.8355 | 0.6765 | 0.4571 | 0.2262 | 0.0621 | 0.0040 |
| 18               | 0.9996 | 0.9980 | 0.9924 | 0.9755 | 0.9319 | 0.8376 | 0.6680 | 0.4248 | 0.1719 | 0.0222 |
| 19               | 0.9999 | 0.9997 | 0.9984 | 0.9939 | 0.9793 | 0.9394 | 0.8455 | 0.6618 | 0.3800 | 0.0948 |
| 20               | 1.0000 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9990 | 0.9959 | 0.9851 | 0.9520 | 0.8633 | 0.6608 | 0.3018 |
| 21               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9996 | 0.9982 | 0.9926 | 0.9720 | 0.9015 | 0.6765 |
| 22               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

 $n = 23$ 

| $x \backslash p$ | .50    | .55    | .60    | .65    | .70    | .75    | .80    | .85    | .90    | .95    |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 1                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 2                | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 3                | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 4                | 0.0013 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 5                | 0.0053 | 0.0012 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 6                | 0.0173 | 0.0048 | 0.0010 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 7                | 0.0466 | 0.0153 | 0.0040 | 0.0008 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 8                | 0.1050 | 0.0411 | 0.0128 | 0.0030 | 0.0005 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 9                | 0.2024 | 0.0937 | 0.0349 | 0.0100 | 0.0021 | 0.0003 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 10               | 0.3388 | 0.1836 | 0.0813 | 0.0283 | 0.0072 | 0.0012 | 0.0001 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 11               | 0.5000 | 0.3135 | 0.1636 | 0.0682 | 0.0214 | 0.0046 | 0.0006 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 12               | 0.6612 | 0.4722 | 0.2871 | 0.1425 | 0.0546 | 0.0149 | 0.0025 | 0.0002 | 0.0000 | 0.0000 |
| 13               | 0.7976 | 0.6364 | 0.4438 | 0.2592 | 0.1201 | 0.0408 | 0.0089 | 0.0010 | 0.0000 | 0.0000 |
| 14               | 0.8950 | 0.7797 | 0.6116 | 0.4140 | 0.2291 | 0.0963 | 0.0273 | 0.0042 | 0.0002 | 0.0000 |
| 15               | 0.9534 | 0.8848 | 0.7627 | 0.5864 | 0.3819 | 0.1963 | 0.0715 | 0.0152 | 0.0012 | 0.0000 |
| 16               | 0.9827 | 0.9490 | 0.8760 | 0.7466 | 0.5601 | 0.3463 | 0.1598 | 0.0463 | 0.0058 | 0.0001 |
| 17               | 0.9947 | 0.9814 | 0.9460 | 0.8691 | 0.7312 | 0.5315 | 0.3053 | 0.1189 | 0.0226 | 0.0008 |
| 18               | 0.9987 | 0.9945 | 0.9810 | 0.9449 | 0.8644 | 0.7168 | 0.4993 | 0.2560 | 0.0731 | 0.0049 |
| 19               | 0.9998 | 0.9988 | 0.9948 | 0.9819 | 0.9462 | 0.8630 | 0.7035 | 0.4604 | 0.1927 | 0.0258 |
| 20               | 1.0000 | 0.9998 | 0.9990 | 0.9957 | 0.9843 | 0.9508 | 0.8668 | 0.6920 | 0.4080 | 0.1052 |
| 21               | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9993 | 0.9970 | 0.9884 | 0.9602 | 0.8796 | 0.6849 | 0.3206 |
| 22               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9997 | 0.9987 | 0.9941 | 0.9762 | 0.9114 | 0.6926 |
| 23               | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

**ANEXO 2.** Probabilidades acumuladas de la distribución normal estándar, desde  $x = -4.0$  hasta  $x = 4.0$ , en múltiplos de 0,005.

TABLA DE DISTRIBUCION NORMAL (1)

| z    | Cuantiles negativos |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      | -95                 | -90   | -85   | -80   | -75   | -70   | -65   | -60   | -55   | -50   |
| -4.0 | .0000               | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| -3.9 | .0000               | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| -3.8 | .0000               | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 |
| -3.7 | .0001               | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 |
| -3.6 | .0001               | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 |
| -3.5 | .0002               | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 |
| -3.4 | .0002               | .0002 | .0002 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 |
| -3.3 | .0003               | .0003 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 |
| -3.2 | .0005               | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0006 | .0006 | .0006 |
| -3.1 | .0007               | .0007 | .0007 | .0007 | .0007 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 |
| -3.0 | .0010               | .0010 | .0010 | .0010 | .0011 | .0011 | .0011 | .0011 | .0011 | .0011 |
| -2.9 | .0014               | .0014 | .0014 | .0014 | .0015 | .0015 | .0015 | .0015 | .0016 | .0016 |
| -2.8 | .0019               | .0019 | .0020 | .0020 | .0020 | .0021 | .0021 | .0021 | .0022 | .0022 |
| -2.7 | .0026               | .0026 | .0027 | .0027 | .0028 | .0028 | .0028 | .0029 | .0029 | .0030 |
| -2.6 | .0035               | .0036 | .0036 | .0037 | .0037 | .0038 | .0038 | .0039 | .0040 | .0040 |
| -2.5 | .0047               | .0048 | .0049 | .0049 | .0050 | .0051 | .0052 | .0052 | .0053 | .0054 |
| -2.4 | .0063               | .0064 | .0065 | .0066 | .0067 | .0068 | .0069 | .0069 | .0070 | .0071 |
| -2.3 | .0083               | .0084 | .0085 | .0087 | .0088 | .0089 | .0090 | .0091 | .0093 | .0094 |
| -2.2 | .0109               | .0110 | .0112 | .0113 | .0115 | .0116 | .0118 | .0119 | .0121 | .0122 |
| -2.1 | .0141               | .0143 | .0144 | .0146 | .0148 | .0150 | .0152 | .0154 | .0156 | .0158 |
| -2.0 | .0181               | .0183 | .0185 | .0188 | .0190 | .0192 | .0195 | .0197 | .0199 | .0202 |
| -1.9 | .0230               | .0233 | .0236 | .0239 | .0241 | .0244 | .0247 | .0250 | .0253 | .0256 |
| -1.8 | .0290               | .0294 | .0297 | .0301 | .0304 | .0307 | .0311 | .0314 | .0318 | .0322 |
| -1.7 | .0363               | .0367 | .0371 | .0375 | .0379 | .0384 | .0388 | .0392 | .0396 | .0401 |
| -1.6 | .0450               | .0455 | .0460 | .0465 | .0470 | .0475 | .0480 | .0485 | .0490 | .0495 |
| -1.5 | .0554               | .0559 | .0565 | .0571 | .0576 | .0582 | .0588 | .0594 | .0600 | .0606 |
| -1.4 | .0675               | .0681 | .0688 | .0694 | .0701 | .0708 | .0715 | .0721 | .0728 | .0735 |
| -1.3 | .0815               | .0823 | .0830 | .0838 | .0846 | .0853 | .0861 | .0869 | .0877 | .0885 |
| -1.2 | .0977               | .0985 | .0994 | .1003 | .1012 | .1020 | .1029 | .1038 | .1047 | .1056 |
| -1.1 | .1160               | .1170 | .1180 | .1190 | .1200 | .1210 | .1220 | .1230 | .1240 | .1251 |
| -1.0 | .1368               | .1379 | .1390 | .1401 | .1412 | .1423 | .1434 | .1446 | .1457 | .1469 |
| -0.9 | .1599               | .1611 | .1623 | .1635 | .1648 | .1660 | .1673 | .1685 | .1698 | .1711 |
| -0.8 | .1854               | .1867 | .1881 | .1894 | .1908 | .1922 | .1935 | .1949 | .1963 | .1977 |
| -0.7 | .2133               | .2148 | .2162 | .2177 | .2192 | .2206 | .2221 | .2236 | .2251 | .2266 |
| -0.6 | .2435               | .2451 | .2467 | .2483 | .2498 | .2514 | .2530 | .2546 | .2562 | .2578 |
| -0.5 | .2759               | .2776 | .2793 | .2810 | .2826 | .2843 | .2860 | .2877 | .2894 | .2912 |
| -0.4 | .3103               | .3121 | .3138 | .3156 | .3174 | .3192 | .3210 | .3228 | .3246 | .3264 |
| -0.3 | .3464               | .3483 | .3501 | .3520 | .3538 | .3557 | .3576 | .3594 | .3613 | .3632 |
| -0.2 | .3840               | .3859 | .3878 | .3897 | .3917 | .3936 | .3955 | .3974 | .3994 | .4013 |
| -0.1 | .4227               | .4247 | .4266 | .4286 | .4305 | .4325 | .4345 | .4364 | .4384 | .4404 |
| -0.0 | .4622               | .4641 | .4661 | .4681 | .4701 | .4721 | .4741 | .4761 | .4781 | .4801 |

## DISTRIBUCION NORMAL (2)

| z    | Cuantiles negativos |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      | -45                 | -40   | -35   | -30   | -25   | -20   | -15   | -10   | -05   | -00   |
| -4.0 | .0000               | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| -3.9 | .0000               | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 | .0000 |
| -3.8 | .0001               | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 |
| -3.7 | .0001               | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 |
| -3.6 | .0001               | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0001 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 |
| -3.5 | .0002               | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 | .0002 |
| -3.4 | .0003               | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 |
| -3.3 | .0004               | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 | .0005 |
| -3.2 | .0006               | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0007 | .0007 | .0007 | .0007 |
| -3.1 | .0008               | .0008 | .0009 | .0009 | .0009 | .0009 | .0009 | .0009 | .0010 | .0010 |
| -3.0 | .0012               | .0012 | .0012 | .0012 | .0012 | .0013 | .0013 | .0013 | .0013 | .0013 |
| -2.9 | .0016               | .0016 | .0017 | .0017 | .0017 | .0018 | .0018 | .0018 | .0018 | .0019 |
| -2.8 | .0022               | .0023 | .0023 | .0023 | .0024 | .0024 | .0024 | .0025 | .0025 | .0026 |
| -2.7 | .0030               | .0031 | .0031 | .0032 | .0032 | .0033 | .0033 | .0034 | .0034 | .0035 |
| -2.6 | .0041               | .0041 | .0042 | .0043 | .0043 | .0044 | .0045 | .0045 | .0046 | .0047 |
| -2.5 | .0055               | .0055 | .0056 | .0057 | .0058 | .0059 | .0060 | .0060 | .0061 | .0062 |
| -2.4 | .0072               | .0073 | .0074 | .0075 | .0077 | .0078 | .0079 | .0080 | .0081 | .0082 |
| -2.3 | .0095               | .0096 | .0098 | .0099 | .0100 | .0102 | .0103 | .0104 | .0106 | .0107 |
| -2.2 | .0124               | .0125 | .0127 | .0129 | .0130 | .0132 | .0134 | .0136 | .0137 | .0139 |
| -2.1 | .0160               | .0162 | .0164 | .0166 | .0168 | .0170 | .0172 | .0174 | .0176 | .0179 |
| -2.0 | .0204               | .0207 | .0209 | .0212 | .0214 | .0217 | .0220 | .0222 | .0225 | .0228 |
| -1.9 | .0259               | .0262 | .0265 | .0268 | .0271 | .0274 | .0277 | .0281 | .0284 | .0287 |
| -1.8 | .0325               | .0329 | .0333 | .0336 | .0340 | .0344 | .0348 | .0351 | .0355 | .0359 |
| -1.7 | .0405               | .0409 | .0414 | .0418 | .0423 | .0427 | .0432 | .0436 | .0441 | .0446 |
| -1.6 | .0500               | .0505 | .0510 | .0516 | .0521 | .0526 | .0532 | .0537 | .0542 | .0548 |
| -1.5 | .0612               | .0618 | .0624 | .0630 | .0636 | .0643 | .0649 | .0655 | .0662 | .0668 |
| -1.4 | .0742               | .0749 | .0756 | .0764 | .0771 | .0778 | .0785 | .0793 | .0800 | .0808 |
| -1.3 | .0893               | .0901 | .0909 | .0918 | .0926 | .0934 | .0943 | .0951 | .0959 | .0968 |
| -1.2 | .1066               | .1075 | .1084 | .1093 | .1103 | .1112 | .1122 | .1131 | .1141 | .1151 |
| -1.1 | .1261               | .1271 | .1282 | .1292 | .1303 | .1314 | .1324 | .1335 | .1346 | .1357 |
| -1.0 | .1480               | .1492 | .1503 | .1515 | .1527 | .1539 | .1551 | .1562 | .1574 | .1587 |
| -0.9 | .1723               | .1736 | .1749 | .1762 | .1775 | .1788 | .1801 | .1814 | .1827 | .1841 |
| -0.8 | .1991               | .2005 | .2019 | .2033 | .2047 | .2061 | .2075 | .2090 | .2104 | .2119 |
| -0.7 | .2281               | .2297 | .2312 | .2327 | .2342 | .2358 | .2373 | .2389 | .2404 | .2420 |
| -0.6 | .2595               | .2611 | .2627 | .2643 | .2660 | .2676 | .2693 | .2709 | .2726 | .2743 |
| -0.5 | .2929               | .2946 | .2963 | .2981 | .2998 | .3015 | .3033 | .3050 | .3068 | .3085 |
| -0.4 | .3282               | .3300 | .3318 | .3336 | .3354 | .3372 | .3391 | .3409 | .3427 | .3446 |
| -0.3 | .3650               | .3669 | .3688 | .3707 | .3726 | .3745 | .3764 | .3783 | .3802 | .3821 |
| -0.2 | .4032               | .4052 | .4071 | .4090 | .4110 | .4129 | .4149 | .4168 | .4188 | .4207 |
| -0.1 | .4424               | .4443 | .4463 | .4483 | .4503 | .4522 | .4542 | .4562 | .4582 | .4602 |
| -0.0 | .4821               | .4840 | .4860 | .4880 | .4900 | .4920 | .4940 | .4960 | .4980 | .5000 |

## DISTRIBUCION NORMAL (3)

| z   | Cuantiles positivos |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 00                  | 05     | 10     | 15     | 20     | 25     | 30     | 35     | 40     | 45     |
| 0.0 | .5000               | .5020  | .5040  | .5060  | .5080  | .5100  | .5120  | .5140  | .5160  | .5179  |
| 0.1 | .5398               | .5418  | .5438  | .5458  | .5478  | .5497  | .5517  | .5537  | .5557  | .5576  |
| 0.2 | .5793               | .5812  | .5832  | .5851  | .5871  | .5890  | .5910  | .5929  | .5948  | .5968  |
| 0.3 | .6179               | .6198  | .6217  | .6236  | .6255  | .6274  | .6293  | .6312  | .6331  | .6350  |
| 0.4 | .6554               | .6573  | .6591  | .6609  | .6628  | .6646  | .6664  | .6682  | .6700  | .6718  |
| 0.5 | .6915               | .6932  | .6950  | .6967  | .6985  | .7002  | .7019  | .7037  | .7054  | .7071  |
| 0.6 | .7257               | .7274  | .7291  | .7307  | .7324  | .7340  | .7357  | .7373  | .7389  | .7405  |
| 0.7 | .7580               | .7596  | .7611  | .7627  | .7642  | .7658  | .7673  | .7688  | .7703  | .7719  |
| 0.8 | .7881               | .7896  | .7910  | .7925  | .7939  | .7953  | .7967  | .7981  | .7995  | .8009  |
| 0.9 | .8159               | .8173  | .8186  | .8199  | .8212  | .8225  | .8238  | .8251  | .8264  | .8277  |
| 1.0 | .8413               | .8426  | .8438  | .8449  | .8461  | .8473  | .8485  | .8497  | .8508  | .8520  |
| 1.1 | .8643               | .8654  | .8665  | .8676  | .8686  | .8697  | .8708  | .8718  | .8729  | .8739  |
| 1.2 | .8849               | .8859  | .8869  | .8878  | .8888  | .8897  | .8907  | .8916  | .8925  | .8934  |
| 1.3 | .9032               | .9041  | .9049  | .9057  | .9066  | .9074  | .9082  | .9091  | .9099  | .9107  |
| 1.4 | .9192               | .9200  | .9207  | .9215  | .9222  | .9229  | .9236  | .9244  | .9251  | .9258  |
| 1.5 | .9332               | .9338  | .9345  | .9351  | .9357  | .9364  | .9370  | .9376  | .9382  | .9388  |
| 1.6 | .9452               | .9458  | .9463  | .9468  | .9474  | .9479  | .9484  | .9490  | .9495  | .9500  |
| 1.7 | .9554               | .9559  | .9564  | .9568  | .9573  | .9577  | .9582  | .9586  | .9591  | .9595  |
| 1.8 | .9641               | .9645  | .9649  | .9652  | .9656  | .9660  | .9664  | .9667  | .9671  | .9675  |
| 1.9 | .9713               | .9716  | .9719  | .9723  | .9726  | .9729  | .9732  | .9735  | .9738  | .9741  |
| 2.0 | .9772               | .9775  | .9778  | .9780  | .9783  | .9786  | .9788  | .9791  | .9793  | .9796  |
| 2.1 | .9821               | .9824  | .9826  | .9828  | .9830  | .9832  | .9834  | .9836  | .9838  | .9840  |
| 2.2 | .9861               | .9863  | .9864  | .9866  | .9868  | .9870  | .9871  | .9873  | .9875  | .9876  |
| 2.3 | .9893               | .9894  | .9896  | .9897  | .9898  | .9900  | .9901  | .9902  | .9904  | .9905  |
| 2.4 | .9918               | .9919  | .9920  | .9921  | .9922  | .9923  | .9925  | .9926  | .9927  | .9928  |
| 2.5 | .9938               | .9939  | .9940  | .9940  | .9941  | .9942  | .9943  | .9944  | .9945  | .9945  |
| 2.6 | .9953               | .9954  | .9955  | .9955  | .9956  | .9957  | .9957  | .9958  | .9959  | .9959  |
| 2.7 | .9965               | .9966  | .9966  | .9967  | .9967  | .9968  | .9968  | .9969  | .9969  | .9970  |
| 2.8 | .9974               | .9975  | .9975  | .9976  | .9976  | .9976  | .9977  | .9977  | .9977  | .9978  |
| 2.9 | .9981               | .9982  | .9982  | .9982  | .9982  | .9983  | .9983  | .9983  | .9984  | .9984  |
| 3.0 | .9987               | .9987  | .9987  | .9987  | .9987  | .9988  | .9988  | .9988  | .9988  | .9988  |
| 3.1 | .9990               | .9990  | .9991  | .9991  | .9991  | .9991  | .9991  | .9991  | .9992  | .9992  |
| 3.2 | .9993               | .9993  | .9993  | .9993  | .9994  | .9994  | .9994  | .9994  | .9994  | .9994  |
| 3.3 | .9995               | .9995  | .9995  | .9995  | .9995  | .9996  | .9996  | .9996  | .9996  | .9996  |
| 3.4 | .9997               | .9997  | .9997  | .9997  | .9997  | .9997  | .9997  | .9997  | .9997  | .9997  |
| 3.5 | .9998               | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  |
| 3.6 | .9998               | .9998  | .9998  | .9998  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  |
| 3.7 | .9999               | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  |
| 3.8 | .9999               | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  |
| 3.9 | 1.0000              | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.0 | 1.0000              | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |



## DISTRIBUCION NORMAL (4)

| z   | Cuantiles positivos |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|---------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     | 50                  | 55     | 60     | 65     | 70     | 75     | 80     | 85     | 90     | 95     |
| 0.0 | .5199               | .5219  | .5239  | .5259  | .5279  | .5299  | .5319  | .5339  | .5359  | .5378  |
| 0.1 | .5596               | .5616  | .5636  | .5655  | .5675  | .5695  | .5714  | .5734  | .5753  | .5773  |
| 0.2 | .5987               | .6006  | .6026  | .6045  | .6064  | .6083  | .6103  | .6122  | .6141  | .6160  |
| 0.3 | .6368               | .6387  | .6406  | .6424  | .6443  | .6462  | .6480  | .6499  | .6517  | .6536  |
| 0.4 | .6736               | .6754  | .6772  | .6790  | .6808  | .6826  | .6844  | .6862  | .6879  | .6897  |
| 0.5 | .7088               | .7106  | .7123  | .7140  | .7157  | .7174  | .7190  | .7207  | .7224  | .7241  |
| 0.6 | .7422               | .7438  | .7454  | .7470  | .7486  | .7502  | .7517  | .7533  | .7549  | .7565  |
| 0.7 | .7734               | .7749  | .7764  | .7779  | .7794  | .7808  | .7823  | .7838  | .7852  | .7867  |
| 0.8 | .8023               | .8037  | .8051  | .8065  | .8078  | .8092  | .8106  | .8119  | .8133  | .8146  |
| 0.9 | .8289               | .8302  | .8315  | .8327  | .8340  | .8352  | .8365  | .8377  | .8389  | .8401  |
| 1.0 | .8531               | .8543  | .8554  | .8566  | .8577  | .8588  | .8599  | .8610  | .8621  | .8632  |
| 1.1 | .8749               | .8760  | .8770  | .8780  | .8790  | .8800  | .8810  | .8820  | .8830  | .8840  |
| 1.2 | .8944               | .8953  | .8962  | .8971  | .8980  | .8988  | .8997  | .9006  | .9015  | .9023  |
| 1.3 | .9115               | .9123  | .9131  | .9139  | .9147  | .9154  | .9162  | .9170  | .9177  | .9185  |
| 1.4 | .9265               | .9272  | .9279  | .9285  | .9292  | .9299  | .9306  | .9312  | .9319  | .9325  |
| 1.5 | .9394               | .9400  | .9406  | .9412  | .9418  | .9424  | .9429  | .9435  | .9441  | .9446  |
| 1.6 | .9505               | .9510  | .9515  | .9520  | .9525  | .9530  | .9535  | .9540  | .9545  | .9550  |
| 1.7 | .9599               | .9604  | .9608  | .9612  | .9616  | .9621  | .9625  | .9629  | .9633  | .9637  |
| 1.8 | .9678               | .9682  | .9686  | .9689  | .9693  | .9696  | .9699  | .9703  | .9706  | .9710  |
| 1.9 | .9744               | .9747  | .9750  | .9753  | .9756  | .9759  | .9761  | .9764  | .9767  | .9770  |
| 2.0 | .9798               | .9801  | .9803  | .9805  | .9808  | .9810  | .9812  | .9815  | .9817  | .9819  |
| 2.1 | .9842               | .9844  | .9846  | .9848  | .9850  | .9852  | .9854  | .9856  | .9857  | .9859  |
| 2.2 | .9878               | .9879  | .9881  | .9882  | .9884  | .9885  | .9887  | .9888  | .9890  | .9891  |
| 2.3 | .9906               | .9907  | .9909  | .9910  | .9911  | .9912  | .9913  | .9915  | .9916  | .9917  |
| 2.4 | .9929               | .9930  | .9931  | .9931  | .9932  | .9933  | .9934  | .9935  | .9936  | .9937  |
| 2.5 | .9946               | .9947  | .9948  | .9948  | .9949  | .9950  | .9951  | .9951  | .9952  | .9953  |
| 2.6 | .9960               | .9960  | .9961  | .9962  | .9962  | .9963  | .9963  | .9964  | .9964  | .9965  |
| 2.7 | .9970               | .9971  | .9971  | .9972  | .9972  | .9972  | .9973  | .9973  | .9974  | .9974  |
| 2.8 | .9978               | .9978  | .9979  | .9979  | .9979  | .9980  | .9980  | .9980  | .9981  | .9981  |
| 2.9 | .9984               | .9984  | .9985  | .9985  | .9985  | .9985  | .9986  | .9986  | .9986  | .9986  |
| 3.0 | .9989               | .9989  | .9989  | .9989  | .9989  | .9989  | .9990  | .9990  | .9990  | .9990  |
| 3.1 | .9992               | .9992  | .9992  | .9992  | .9992  | .9993  | .9993  | .9993  | .9993  | .9993  |
| 3.2 | .9994               | .9994  | .9994  | .9995  | .9995  | .9995  | .9995  | .9995  | .9995  | .9995  |
| 3.3 | .9996               | .9996  | .9996  | .9996  | .9996  | .9996  | .9996  | .9996  | .9997  | .9997  |
| 3.4 | .9997               | .9997  | .9997  | .9997  | .9997  | .9997  | .9997  | .9998  | .9998  | .9998  |
| 3.5 | .9998               | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  | .9998  |
| 3.6 | .9999               | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  |
| 3.7 | .9999               | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  |
| 3.8 | .9999               | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | .9999  | 1.0000 |
| 3.9 | 1.0000              | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.0 | 1.0000              | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## EXPLICACIÓN ACERCA LOS ELEMENTOS PRESENTADOS ENTRE FRANJAS DE COLORES.

### **EJEMPLO**

Ejemplos resueltos que ilustran los conceptos presentados.

Los ejemplos aparecen a continuación de los conceptos que se pretendió explicar con anterioridad.

### **MOTIVACIÓN**

Similares a los Ejemplos, pero puestos antes de los conceptos, con el objeto de despertar el interés de los estudiantes hacia lo que se presentará a continuación.

### **ACTIVIDAD PRÁCTICA**

Actividades propuestas que implican la aplicación práctica de los conceptos, a través de alguna acción física.

### **ACTIVIDAD COMPUTACIONAL**

Actividades propuestas que implican la aplicación de los conceptos, a través de acciones realizadas utilizando un programa computacional, como Excel o R.

### **EJERCICIOS**

Ejemplos de aplicación de los conceptos presentados al final de cada sección, para ser resueltos por los estudiantes.

## **Índice alfabético**

Bernoulli, modelo 111, 112

Binomial, modelo, variable aleatoria o distribución, 110, 115

Categoría, escala categórica, 4, 9

Combinaciones, 94, 95, 99

Cuantiles, 151, 156, 159, 182

Desviación estándar muestral, 80

Desviación estándar poblacional, 80, 81, 152

e, 61

Elemento, 4

Enfoque frecuentista, 6

Enfoque bayesiano, 6

Ensayo Bernoulli, 111, 112

Enumerable, 14

Escala numérica, 16

Espacio discreto, 4

Espacio continuo, 4

Espacio equiprobable, 6, 17

Espacio muestral, 4

Evento, 4

Evento imposible, 4

Eventos independientes, 5, 7, 24

Eventos mutuamente excluyentes o disjuntos, 5, 24

Evento seguro, 4

Evento simple o básico, 5

Éxito, 110, 111, 112

Experimentos, experimento aleatorio, 4, 10

Factorial, 23, 94

Familia de distribuciones de probabilidad, 115

Fórmula de cálculo de la varianza, 81

Fracaso, 110

Función de densidad de probabilidad, 30, 151

Función de distribución, 116

Función de probabilidad, 18, 20, 22, 33, 115

Intersección, 24

Modelo de Laplace, 6

Muestra, 65

Normal o de Gauss, modelo, variable aleatoria o distribución, 30, 149, 150

Normal estándar, 155, 156, 157

Número entero, 4

Número real, 4

Parámetro, 54, 111, 112

Permutaciones, 94, 96 a 99

Población, 65

Principio aditivo, 5

Principio multiplicativo, 5

Probabilidad, 4

Probabilidad acumulada, 116, 157, 160, 164

Probabilidad binomial, 116

Probabilidad condicional, 7, 9, 28, 35

Probabilidad conjunta, 7

Probabilidad incondicional, 7, 28

Probabilidad marginal, 7, 25

Propiedades de la binomial, 130

Propiedades de la normal, 152, 163

Propiedades del promedio poblacional, 69

Propiedades de la desviación estándar poblacional, 84

Propiedades de la varianza poblacional, 84

Promedio o media muestral, 65

Promedio o media poblacional, 65, 152

Regla multiplicativa, 7, 29, 44, 51

Soporte, 16

Tabla de distribución binomial, 116, 264 a 280

Tabla de distribución normal estándar, 155, 164, 281 a 284

Uniforme, modelo, variable aleatoria o distribución, 54

Unión, 24

Valor esperado, 65

Variable aleatoria, 10, 11, 16, 65

Variable aleatoria discreta, 29, 33

Variable aleatoria continua, 15, 29, 150

Variable aleatoria independiente, 84

Varianza muestral, 80

Varianza poblacional, 80

## EL AUTOR

Jorge Mauricio Galbiati Riesco, Ph.D.

Doctor en Estadística, Universidad de Iowa, U.S.A

Master en Estadística Matemática, Centro Interamericano de Enseñanza de Estadística (CIENES), Universidad de Chile.

Profesor de Matemáticas y Física y Licenciado en Filosofía y Educación, Universidad Católica de Valparaíso.



Académico de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso desde 1971. Ejerce en el Instituto de Estadística desde su fundación, en 1975. Fue su Director entre 2001 y 2006.

Ha ejercido la docencia desde 1971, elaborando gran cantidad de material didáctico.

Ha participado en varios proyectos de investigación, con un número de publicaciones en revistas científicas internacionales, fundamentalmente en el tema de Procesamiento Estadístico de Imágenes Digitales.

Ha tomado parte de numerosos proyectos de asesoría a instituciones y empresas.

Entre 2008 hasta 2011 fue miembro del Consejo Superior de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Fue miembro del Consejo Nacional de Estadísticas, entre 2010 y 2011, en representación del Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas.

[www.jorgegalbiati.cl](http://www.jorgegalbiati.cl)

---

# ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

## TOMO 3. MODELOS DE PROBABILIDAD; DESCRIBIENDO EL AZAR

En este Tomo 3, profundizaremos en la distinción entre la población y una muestra de esa población.

Y tendremos una primera aproximación a la idea del uso de indicadores muestrales, que conocemos porque se obtienen a partir de una muestra, y el correspondiente valor de la población, o parámetro.

Recordaremos que el estudio de la probabilidad nos dice que los resultados de un experimento al azar, no se producen en forma totalmente impredecible.

Existen leyes que determinan ciertos comportamientos que muestran patrones o pautas que los gobiernan estos resultados.

Esos patrones dependen de la forma que tiene el fenómeno bajo estudio, y permiten saber cuáles resultados son más probables que otros, incluso nos dan una idea cuantitativa de las probabilidades de los distintos resultados.

En este tomo veremos modelos que sirven para explicar algunos de esos patrones, en particular, el modelo binomial y el modelo normal.