ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

TOMO 2
INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD; COMPRENDIENDO EL AZAR

Jorge Galbiati Riesco

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

Tomo 2: Introducción a las probabilidades; Comprendiendo el azar.

Jorge Mauricio Galbiati Riesco Ph.D.

Profesor del Instituto de Estadística de la

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

3a. Edición 2024

ILUSTRACIONES:

Paola Galbiati Valverde, Diseñadora gráfica.

www.talleronce.cl

AGRADECIMIENTOS:

- Al Instituto de Estadística de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, por el apoyo entregado para la elaboración de este tomo.

- A la Doctora en Ciencias *Pamela Reyes Santander*, Coordinadora de Matemática, Unidad de Curriculum y Evaluación, Ministerio de Educación, Gobierno de Chile. Por la revisión del original y por sus valiosas sugerencias

- A *Fernanda Calcina Núñez.* Por la revisión de la resolución de los Ejercicios.

PORTADA:

La forma en que los INCAS registraban y comunicaban información cuantitativa era mediante los QUIPUS, consistentes en cuerdas coloreadas y anudadas, con patrones determinados.

Ilustración del autor.

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

TOMO 2: INTRODUCCIÓN A LAS PROBABILIDADES;

COMPRENDIENDO EL AZAR.

Contenidos

1 - Introducción

¿Cuántas veces decidimos bajo incertidumbre?

En la vida, a nivel personal, laboral, o profesional, se debe tomar **decisiones** con mucha frecuencia. Cuando decidimos algo, elegimos **una alternativa** de entre varias disponibles. Y la **consecuencia** de nuestra decisión dependerá de la elección que hagamos; en algunos casos será favorable, en otros casos no lo será.

El problema es que siempre estas decisiones se toman en un entorno de **incertidumbre**, en que no conocemos las consecuencias de nuestra decisión. Decimos, entonces, que está presente el **azar**.

El nivel de importancia del azar es variable, y depende de cuánta **información** tenemos respecto del fenómeno sobre el que estamos decidiendo.

Mientras menos información tenemos, más **incierta** es para nosotros la consecuencia de lo que decidamos. Mientras más información, mayor el grado de c**erteza** sobre el resultado de nuestra decisión.

Pero, en cualquier caso, es seguro que no disponemos de toda la información acerca del fenómeno; siempre hay una componente de azar.

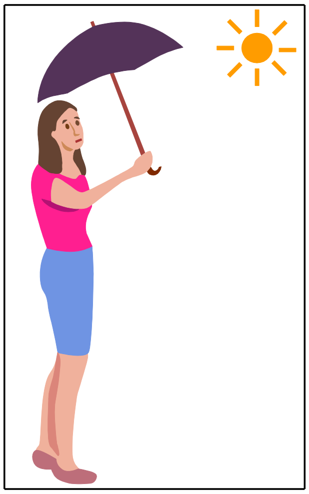
Lo que veremos en el tomo 2, es una forma de entender, lo mejor posible, cómo se **comporta el azar**, de modo que la información que tenemos nos permita tomar nuestras decisiones de la mejor manera posible, reduciendo el riesgo de decidir erróneamente.

EJEMPLO 1.1

Las decisiones pequeñas y las grandes decisiones.

Hay decisiones sencillas cuyas consecuencias no son importantes.

Por ejemplo, si debemos trasladarnos a un punto y tenemos que decidir si tomamos locomoción o nos trasladamos a pie.

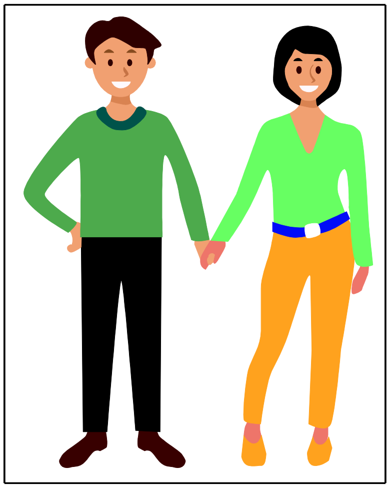


Otra situación: vamos a salir y han anunciado que es posible que llueva.

Si decidimos ir con paraguas y no llueve, sólo tendremos la molestia de llevar un paraguas en la mano, cuando no lo necesitamos.

Si decidimos no llevar paraguas y llueve, nos mojaremos.

En ambos casos las consecuencias de una decisión equivocada no son graves.



Pero en algún momento un estudiante tendrá que decidir qué hará con su vida futura.

Si irá a trabajar, si estudiará una carrera en la universidad, ¿qué carrera?, si estudiará una carrera técnica, o elegirá otra opción.

También llegará el momento en que un joven decidirá unir su vida a la de otra persona.

En ambos casos la decisión que tome afectará toda su vida futura.

Un profesional que ocupe un cargo ejecutivo o un emprendedor, deberá decidir acerca de una inversión.

En este caso una **mala decisión** podrá tener consecuencias económicas graves para la empresa en que trabaja o para su emprendimiento.

Cada vez que decidimos algo, debemos considerar toda la **información** que hay disponible.

Pero, aun así, siempre que se decide algo, se hace bajo condiciones de **incertidumbre**.

La razón de esto es porque nunca hay información suficiente para tener la certeza de que la **consecuencia** de nuestra decisión es la más favorable.

En casos en que hay **incertidumbre** sobre el resultado de una acción, se dice que este resultado es **aleatorio** o al **azar**.

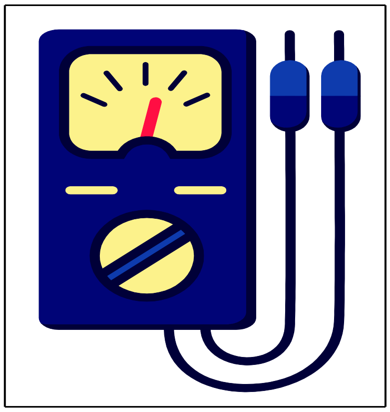
2 - Experimentos al azar

Hacemos algo cuyo resultado no podemos anticipar.

MOTIVACIÓN

Consideremos las siguientes situaciones:

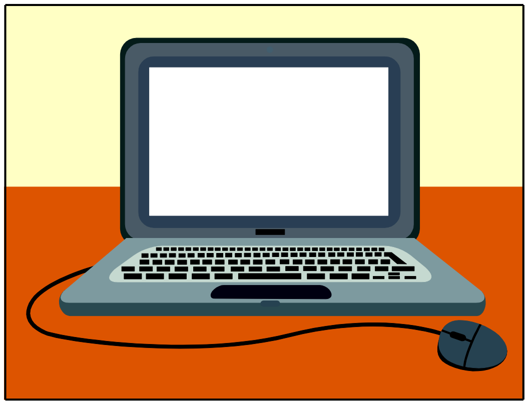
1. Los electricistas usan un instrumento que se denomina **amperímetro** para medir la cantidad de corriente que pasa por un cable eléctrico.



Esta se mide en **amperios**. Es una medida de la cantidad de corriente que está circulando.

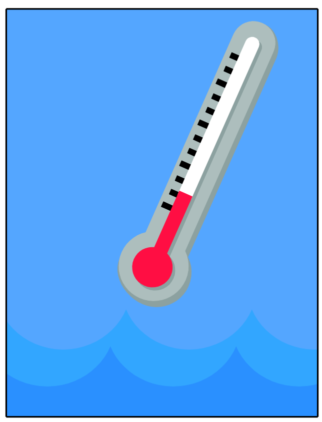
Antes de medir, el electricista no sabe cuántos amperios están pasando por el conductor. Para él, el valor que obtendrá cuando mida, es **aleatorio**.

2. Determinar el número de bytes que se transmiten en un sistema computacional, por segundo.



Como no sabemos qué está transmitiendo, para nosotros el número de bytes transmitidos por segundo, es aleatorio.

3. Tomar la temperatura del agua de mar en un determinado lugar.

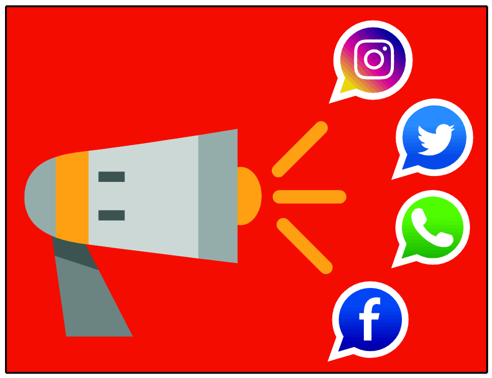


Antes de hacerlo, no se sabe cuál será el valor de la temperatura.

4. Lanzar tres monedas y observar el resultado.

Es evidente que el resultado es al azar.

5. Llevar a cabo una campaña publicitaria y registrar el efecto sobre las ventas, en pesos, de un determinado producto o servicio.

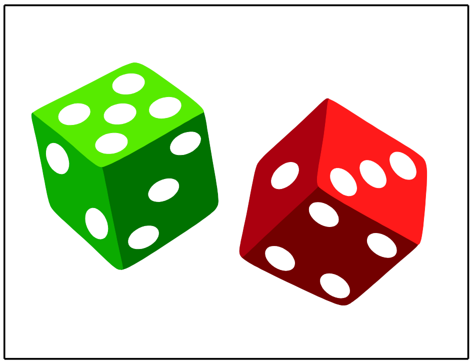


La empresa hace la campaña porque supone que con eso aumentará sus ventas. Pero existe el riesgo de que lo invertido en la campaña no dé los resultados esperados. Podría ser que las ventas se mantengan iguales. Incluso, podría haber otro factor que influya, y para desgracia de la empresa, las ventas disminuyan. En ese caso habrá una pérdida económica.

Mientras no se observe los resultados no se sabrá cuánto aumentarán, sólo se podrá hacer una estimación vaga.

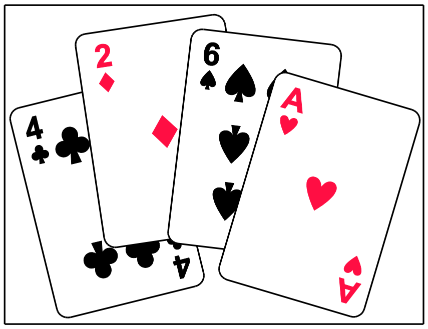
6. Lanzar dos dados y registrar la suma.

Como alternativa, podemos registrar el valor del dado que muestra el número mayor.



En ambos casos, antes de hacerlo, no es posible conocer el resultado. Es aleatorio.

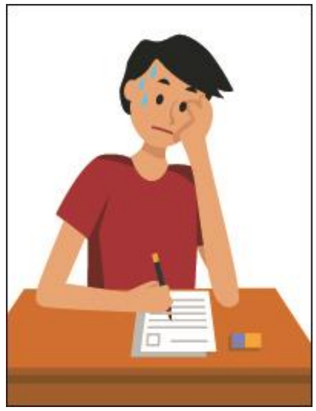
7. Extraer una carta de un mazo.



Si el mazo estaba bien barajado y uno no es un mago, no es posible saber qué carta será elegida, por lo que el resultado será al azar.

8. Tomar un examen a un postulante a un trabajo, que se evaluará con un puntaje entero de 0 a 100.

Antes de que el postulante rinda el examen, el resultado es aleatorio para el postulante.



Incluso una vez que el postulante terminó el examen y no se haya corregido, el resultado es aleatorio.

Aunque él puede tener una idea de cómo le fue, pero su puntaje no lo conoce de antemano.

9. Contar el número de personas que entran a un banco, cada minuto.

La cantidad de personas que entran es aleatoria, y también varía según la hora del día.

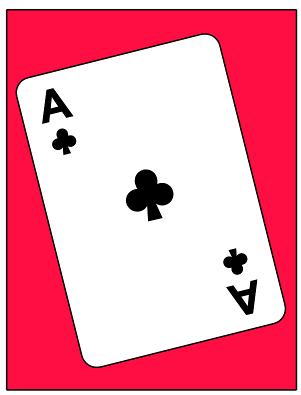
Lo más probable es que entre las doce y las dos de la tarde, los valores tiendan a ser mayores que entre las nueve y las once.

10. Lanzar una moneda de dos caras y observar el resultado.

En este caso la moneda sólo puede mostrar una cara, por lo que el resultado es perfectamente **predecible**.

El resultado de esta última acción no es aleatoria.

11. Se tiene un mazo de cartas inglés y se busca entre ellas hasta encontrar el as de trébol, y retirarlo del mazo.



El resultado de este experimento tampoco es aleatorio. Desde antes se sabía cuál sería el resultado.

Si se realiza una acción que puede resultar de más de una forma, aunque se repita en idénticas condiciones, y antes de realizarla no se sabe cómo va a resultar, esto se denomina **experimento aleatorio** o **experimento al azar**.

Los primeros 9 de los 11 casos descritos en la motivación son experimentos al azar: los 9 ejemplos tienen más de un resultado posible, y antes de realizarlo no se sabe cuál de los posibles resultados va a ocurrir.

El número 10 no es un experimento al azar, pues antes de lanzar la moneda sabemos que va a salir cara; tiene sólo un resultado posible.

Al elegir una carta de un mazo de cartas, como en el caso 11, se sabía antes de extraer la carta, que ésta sería un as de trébol. Por lo tanto, no es un experimento al azar.

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es el **espacio muestral** asociado a ese experimento.

Un espacio muestral puede estar formado por **números** o por **categorías no numéricas**.

Cada cosa que hay dentro del **espacio muestral** es un **elemento** de él.

En el caso de números pueden ser **enteros** o **números reales no enteros**.

Si está formado por **números enteros**, puede ser **finito** o **infinito**.

Un espacio muestral es **discreto** si está formado por un conjunto **finito** o por un conjunto **infinito**, pero que se puede enumerar, como 1, 2, 3, … etc.

Un ejemplo de un espacio muestral discreto infinito es $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots.\}$.

Un espacio muestral es **continuo** si es un intervalo de los números reales, como, por ejemplo, [0,1], todos los números reales entre 0 y 1, incluyendo el 0 y el 1. Otro ejemplo, (10, 100), todos los números reales entre el 10 y el 100, sin incluir el 1 ni el 100.

En ese caso el espacio muestral es **infinito**.

A veces el espacio muestral está muy bien definido, pero en otros casos es muy grande y es difícil determinar con exactitud los límites del espacio muestral.

Por ejemplo, lo que gastan los habitantes de una región, al mes, en movilización. Es muy difícil precisar quiénes son los habitantes de la región. Siempre hay algunos que llegan otros que se van, unos que nacen, otros que se mueren.

Más difícil es determinar exactamente cuánto gasta en movilización cada uno.

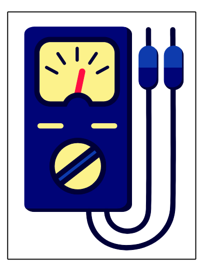
EJEMPLO 2.1

Experimentos al azar y sus espacios muestrales.

Consideremos los 11 **experimentos** presentados en la Motivación anterior y veamos, en cada caso, cuáles son sus **espacios muestrales**.

En el experimento descrito en la situación 1, **medir la corriente** que pasa por un conductor, el resultado es un número real, positivo si circula en una dirección determinada (asumiendo que se trata de corriente continua, que circula en una dirección definida), negativo si circula en la dirección opuesta, y cero si no hay circulación de corriente.

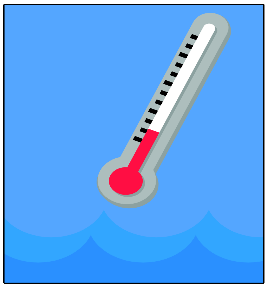
El espacio muestral es continuo.



En el experimento 2, **número de bytes transmitidos**, el espacio muestral es el conjunto {0, 1, 2, 3, 4, ….}, está formado por los elementos 0, 1, 2, etc.. El valor máximo corresponde al máximo número de bytes que puede transmitir en un segundo el sistema.

Es numérico, discreto, pero con la información que tenemos, no está bien definido el límite superior, por lo que teóricamente es infinito.

En el experimento 3, los valores posibles de la **temperatura del mar** son números reales, con decimales, y que pueden incluir valores negativos. Teóricamente es infinito, el espacio muestral es continuo.

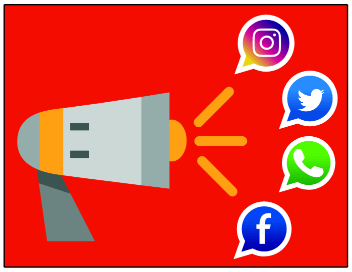


En el experimento 4, **lanzar tres monedas**, si la letra "c" indica cara y "s" sello, los resultados posibles son los elementos del espacio muestral

M={(c,c,c),(c,c,s),(c,s,c),(c,s,s),(s,c,c),(s,c,s),(s,s,c),(s,s,s)}.

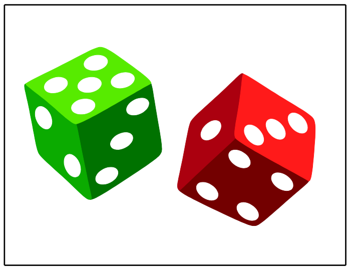
Este espacio muestral es no numérico, discreto.

En el 5, sobre el **aumento de las ventas** después de la campaña publicitaria, pareciera ser que el resultado se mide en las ventas en un período de tiempo posterior a la campaña, medida en pesos. Es numérico, discreto.



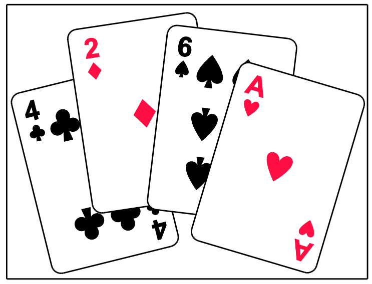
En el 6, la **suma de dos dados**, un primer espacio muestral que es el conjunto

$$M = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

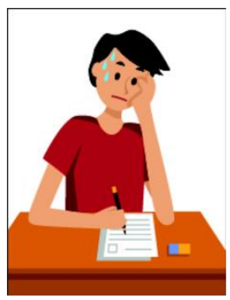


Este conjunto es numérico, discreto y finito. La situación consistía en registrar el **número mayor**. Si los dos dados resultan iguales, el mayor es el valor que salió en ambos dados. En este caso el espacio muestral es {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

En el 7, la **extracción de una carta**, el espacio muestral es el conjunto de las 52 cartas del mazo, los números 1 al 10, mas J, Q, K, cada uno de las cuatro pintas (corazón, pick, caró y trébol, asumiendo un naipe inglés). Es no numérico, pues algunos valores no son números. El espacio muestral es discreto.



En el experimento 8, el **puntaje en el examen**, los resultados posibles son 0, 1, 2, ..., 99, 100. Por lo tanto, ese es el espacio muestral. Es finito, formado por números.



En la situación 9, de los **clientes que entran al banco por minuto**, el espacio muestral es el conjunto de números enteros {0,1,2,3,...}, teóricamente sin límite superior, es decir, infinito.

Las situaciones 10 y 11 no corresponden a experimentos aleatorios, por lo que no se puede definir espacios muestrales asociados a ellas.

Pudimos observar que hay diferencias grandes en los espacios muestrales de los distintos casos del ejemplo anterior.

Además, es posible medir **más de una cosa** como resultado de un experimento aleatorio. Es el caso número 6 del Ejemplo anterior. Una situación consiste en sumar los números de los dos dados. Otra es tomar el número mayor. Y uno podría observar otras cosas, como el cociente entre el mayor y el menor. Cada cosa que se mida, como resultado del mismo experimento, dará origen a un espacio muestral distinto.

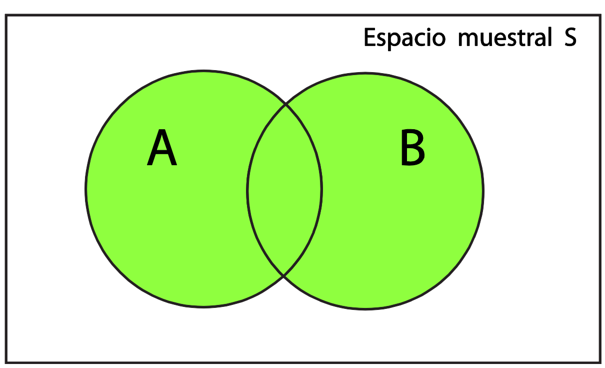
Si tomamos un espacio muestral asociado a algún experimento aleatorio, cualquier subconjunto del espacio muestral se denomina **evento** o **suceso**.

A los eventos formados por un solo **elemento** se les llama **eventos simples**.

Supongamos que A y B son dos eventos de un espacio muestral S.

Un evento que contiene los elementos del evento A, más los del evento B, incluyendo los que están en ambos eventos, se llama **unión** de A y B**.**

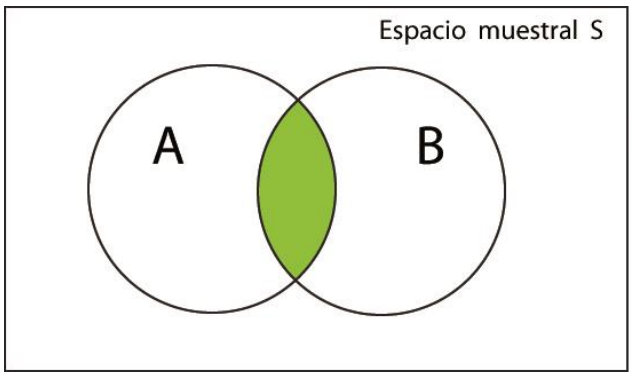
Lo representaremos como **(A o B).** Un elemento está en A o B si está en A, o si está en B, o si está en ambos. Como el área coloreada en la figura siguiente, que sirve para representar conjuntos, y se denomina **diagrama de venn**:



Unión
A o B

Sigamos con los eventos A y B. Un evento que **contiene** exclusivamente los elementos que están simultáneamente en A y en B, se llama **intersección de A** y **B.**

Lo representaremos por **(A y B).** Un elemento está en **(A y B)** si está simultáneamente en ambos eventos. Como el área coloreada de la siguiente figura:



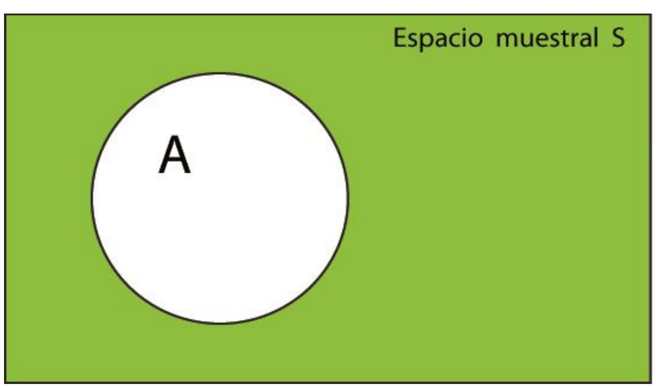
Intersección
A y B

Por las definiciones de unión e intersección, se desprende de inmediato que se pueden permutar los eventos.

Es decir, **(A o B) = (B o A)** y también **(A y B) = (B y A)**.

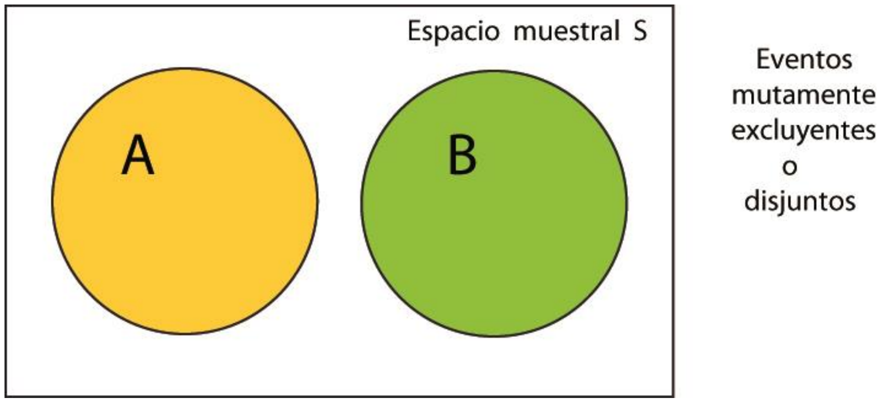
Por último, el **complemento** de A es el evento que contiene los elementos del espacio muestral S, pero que no están en A.

Se denota $\mathbf{A^C}$. Está representado en la figura siguiente:

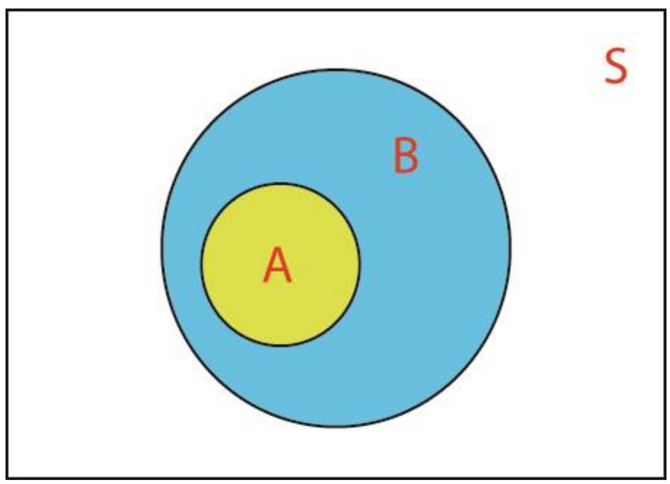


Complemento
de A
A^C

Decimos que dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes** o **disjuntos** si no tienen elementos en común, como en la figura



Un evento A está contenido en otro evento B, si todos los elementos de A están en B. Lo denotaremos como **(A en B)**, y se representa como se ilustra en la figura siguiente:



EJEMPLO 2.2

Bolsa con cuadraditos de papel.

Una bolsa contiene cuatro cuadraditos de papel, numerados 1, 2, 3 y 4.

Consideremos el experimento que consiste en extraer un papel de la bolsa, seleccionado al azar.

El espacio muestral es S={1,2,3,4}

Los eventos posibles son {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}, {1,2,3,4} y el vacío, que se representa por la letra griega Φ (fi), evento que no contiene ningún elemento.

Entre los eventos, está S={1,2,3,4}, el **evento seguro**, que es el espacio muestral completo (y que es uno de los subconjuntos de S) y también el evento **imposible**, el vacío, que no tiene elementos.

El espacio muestral, S, es un **evento** muy especial: contiene a todos los elementos.

Por eso, si se realiza el experimento cuyo espacio muestral asociado es S, siempre se va a cumplir uno de los elementos, por lo tanto, S siempre se va a cumplir.

Por eso a S se le llama **evento seguro**, pues siempre que se haga el experimento, este va a ocurrir (algún elemento de él va a ocurrir).

El vacío, Φ, es el evento que no contiene ningún elemento. También se llama **evento imposible,** porque nunca va a ocurrir si se hace el experimento.

EJEMPLO 2.3

Bolsa con cuadritos de papel. Continuación.

En el ejemplo anterior los eventos {1}, {2}, {3}, y {4} son **eventos simples**.

Se puede hacer algunas operaciones con los eventos, como por ejemplo las siguientes:

{2, 4} ó {3, 4} = {2, 3, 4} es la **unión**, y es el evento que contiene los elementos del primer evento, más los del segundo evento, incluyendo el 4 que está en ambos eventos, pero es el mismo 4 en los dos. Por eso **no** se anota dos veces, como sería {2, 3, 4, 4}.

{2, 4} y {3, 4} = {4} es la **intersección**, que consiste en el evento que contiene los elementos que están simultáneamente en ambos eventos.

El **complemento** de {2,3} es el evento que contiene los elementos del espacio muestral que no están en el evento {2,3}, es decir, {1,4}.

Se denota $\{2,3\}^c$

EJEMPLO 2.4

Cuatro lanzamientos de una moneda.

Se lanza una moneda equilibrada cuatro veces y se registra el número máximo de resultados seguidos que se obtienen, sean caras o sellos.

¿Cuál es el espacio muestral?

Los resultados posibles son 16, a saber:

CCCC, CCCS, CCSC, CSCC, SCCC,

CCSS, CSCS, SCCS, CSSC, SCSC, SSCC

CSSS, SCSS, SSCS, SSSC, SSSS

A continuación, colocamos el número máximo de resultados iguales seguidos, siguiendo el mismo orden:

4, 3, 2, 2, 3,

2, 1, 2, 2, 1, 2,

3, 2, 2, 3, 4

Entonces el espacio muestral es {1, 2, 3, 4}.

Observemos que algunos, como el 2, ocurren más veces que otros, como el 4.

A veces una **presentación tabular** de los resultados del experimento resulta conveniente, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.5

Dos preguntas de un test.

Se aplica un test a un grupo de 100 personas. La pregunta 1 es de tipo verdadero o falso y la pregunta 2 tiene 4 respuestas posibles: a, b, c y d.

La tabla siguiente resume el total de personas que contestó cada una de las combinaciones de respuestas posibles, a estas dos preguntas. Una tabla de este tipo se denomina **tabla de doble entrada** o **tabla a dos criterios de clasificación**:

	Pregunta 2	a	b	c	d
Pregunta 1	V	23	21	5	14
	F	13	7	7	10

Por ejemplo, 21 personas respondieron *Verdadero* a la Pregunta 1 y **b** a la Pregunta 2.

Sea A el evento *la respuesta a la pregunta 1 es V*

y sea B el evento *la respuesta a la pregunta 2 es b*.

Entonces el evento (A o B) tiene 70 elementos (23 + 21 + 5 + 14 + 7),

el evento (A y B) tiene 21 elementos y B^C tiene

23 + 13 + 5 + 7 + 14 + 10 = 72 elementos.

Cuando el espacio muestral se puede construir en varias etapas, puede ser conveniente representarlo mediante un **diagrama de árbol,** también llamado **árbol de decisiones**.

El diagrama de árbol muestra las diferentes posibilidades que se puede dar, en un experimento en dos o más etapas. Estas posibilidades aparecen como **ramas** de árbol.

Más adelante agregaremos probabilidades a las ramas, pero para eso falta aún.

El Ejemplo siguiente muestra un experimento en tres etapas.

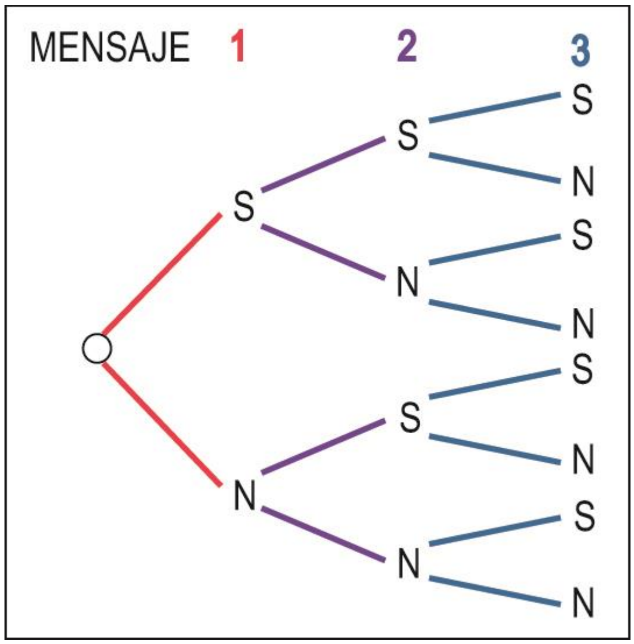
EJEMPLO 2.6

Sistema de comunicación digital.

En un sistema de comunicación digital cada mensaje se clasifica como llegado o no dentro del tiempo especificado.

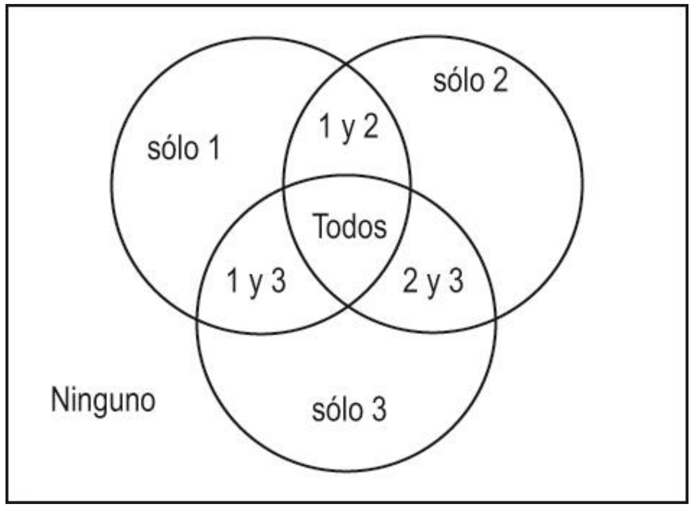
Se clasifican tres mensajes, de acuerdo a si llegaron en el tiempo (S) o no (N).

Los posibles resultados de este experimento aleatorio se pueden representar mediante el siguiente **diagrama de árbol**.



Vemos que hay 8 formas posibles en que puede resultar el experimento completo. Corresponde a los 8 caminos posibles que se puede seguir, siguiendo las líneas, de izquierda a derecha.

También se puede representar esta situación mediante un **diagrama de Venn**, como el siguiente, donde aparecen claramente las ocho formas posibles en que puede verificarse el experimento:

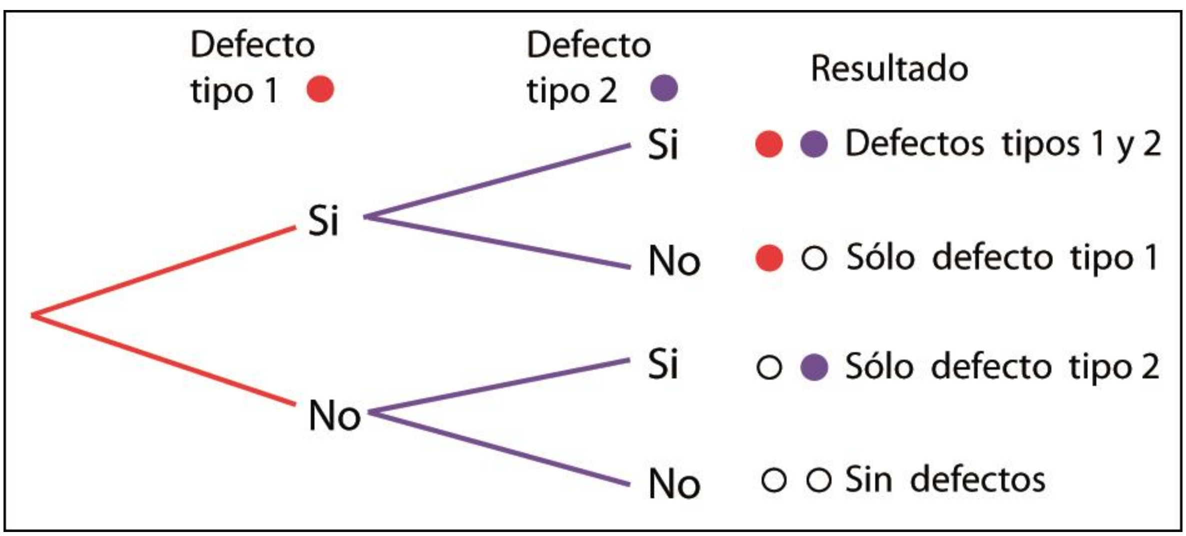


EJEMPLO 2.7

Defectos de fabricación.

En la fabricación de un cierto artículo puede ocurrir dos tipos de defecto, *Defecto tipo 1* y *Defecto tipo 2*.

El siguiente diagrama de árbol en dos etapas representa todas las posibilidades



EJEMPLO 2.8

Eventos como intervalos en la recta de números reales.

Tomemos el intervalo $S = \{x \mid 0 \leq x \leq 20\}$ como nuestro espacio muestral.

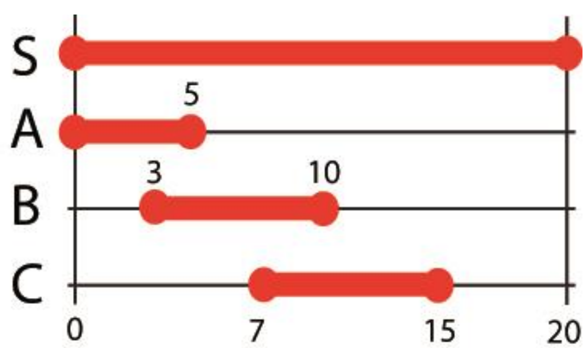
Sean los intervalos A, B y C los siguientes eventos:
$A = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid 3 \leq x \leq 10\}$, $C = \{x \mid 7 \leq x \leq 15\}$,

Encuentra los siguientes eventos:

a) (A o B) b) A^C c) B^C

d) [A o (B y C^C)] e) $(A \text{ o } C)^C$ f) (A y B^C)

Resolución: La figura ayudará a encontrar los eventos:



Para simplificar la notación, prescindiremos del símbolo "x |" y entenderemos que son todos los valores de x que están en los intervalos indicados.

a) (A o B) = $\{0 \leq x \leq 10\}$

b) $A^C = \{5 < x \leq 20\}$ Debes tener cuidado con las desigualdades. No es lo mismo "<" que "≤".

c) $B^C = \{0 \leq x < 3\}$ o $\{10 < x \leq 20\}$.

d) $C^C = \{0 \leq x < 7\}$ o $\{15 < x \leq 20\}$

Entonces (B y C^C) = $\{3 \leq x < 7\}$

y por lo tanto [A o (B y C^C)] = $\{0 \leq x < 7\}$

e) (A o C) = $\{0 \leq x \leq 5\}$ o $\{7 \leq x \leq 15\}$

Luego $(A \text{ o } C)^C = \{5 < x < 7\}$ o $\{15 < x \leq 20\}$

f) $B^C = \{0 \leq x < 3\}$ o $\{10 < x \leq 20\}$

Luego (A y B^C) = $\{0 \leq x < 3\}$

EJERCICIOS

2.1) a) Describe con tus propias palabras qué es un espacio muestral. ¡Utiliza a lo más 10 palabras!

b) Describe un evento utilizando sólo 7 palabras. Compara tu descripción con las de tus compañeros.

2.2) Un candidato a diputado, cuyas iniciales son MA, contrata una empresa que lleva a cabo una encuesta en su distrito, dos meses antes de la elección, con el objeto de saber cuáles son sus posibilidades de ser elegido.

La empresa obtiene una muestra aleatoria de 1500 personas seleccionadas al azar, para hacerle varias preguntas. Una de las preguntas es "¿por qué candidato a diputado va a votar en la próxima elección?"

Los otros candidatos al diputado por el mismo distrito, según sus iniciales, son FG, DE, LS, WZ, RE, JM, y HT.

a) ¿Cuál es la población objetivo?

b) Describe la muestra.

c) Describe la variable que se está midiendo al hacer la pregunta descrita.

d) Describe el espacio muestral. Puedes incluir la opción de que el entrevistado no quiere mencionar a ninguno de los candidatos (no responde) o vote en blanco o nulo.

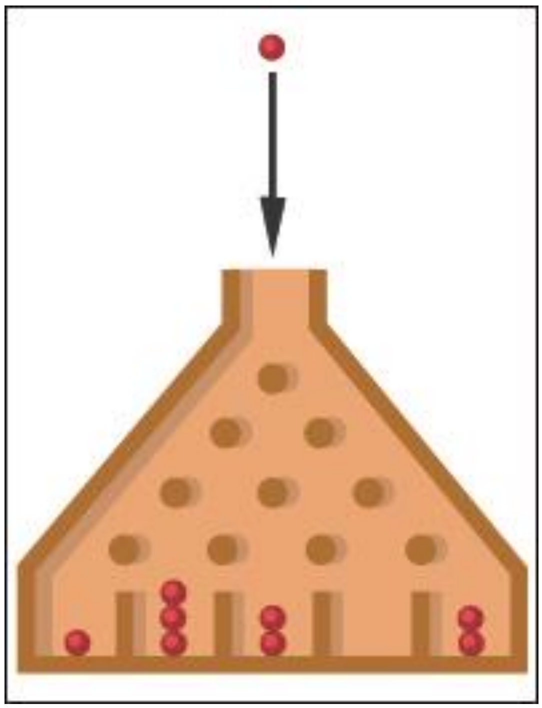
e) ¿Qué tipo de espacio muestral es este?

f) ¿Por qué la selección debe hacerse al azar?

3 - la máquina de Galton

Una caída al azar.

También llamada **tablero de Galton** o **tabla de Galton**, fue inventada por Francis Galton (1822-1911), y consiste en un tablero con varias f**ilas** horizontales de clavos, o **niveles**, la primera con un clavo, la segunda con dos, la tercera con tres, y así sucesivamente, como se muestra en la figura.



Si se lanzan bolitas a la parte superior, y a medida que descienden, rebotan en los clavos que golpean, dirigiéndose al azar a **derecha** o **izquierda** en cada clavo, y finalmente se van depositando en casilleros ubicados en la parte inferior.

El camino que sigue la bolita hasta llegar al nivel inferior se denomina **paseo al azar**.

La máquina de Galton constituye un muy buen instrumento para ejecutar un experimento en que el **azar** juega un papel preponderante.

EJEMPLO 3.1

Máquina de Galton con 3 niveles.

Veamos cuántos resultados posibles tiene una máquina de Galton que tiene 3 filas.

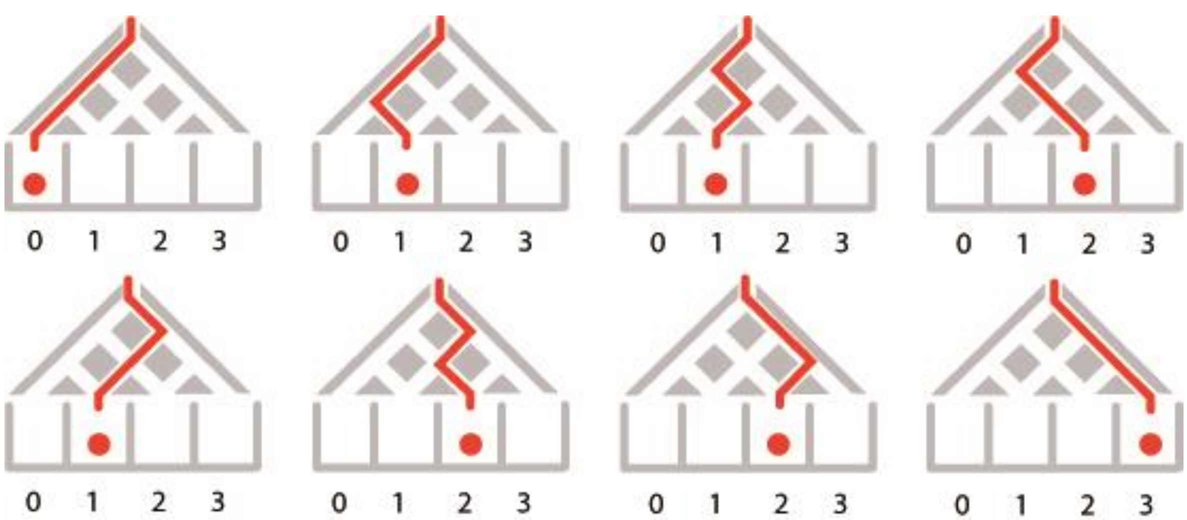
La bolita golpea el único clavo de la primera fila, y tiene dos **camino**s posibles a seguir, cae a la derecha o cae a la izquierda.

En ambos casos golpea uno de los clavos de la segunda fila, con dos caminos posibles, derecha o izquierda.

Por lo tanto, el total de caminos por los que puede seguir la bolita hasta ahora es 2 x 2=4.

De ahí pasa a la tercera fila, con tres clavos. Por lo que el número total de caminos posibles es dos veces las cuatro que ya tenía, o sea, 2 x 2 x 2=8.

La figura siguiente muestra los ocho caminos posibles:



En general, si hay n niveles, el total de **caminos** posibles que puede seguir la bolita es

$$2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^n$$

Se acostumbra a decir que, si la bolita se mueve a la derecha, se trata de un **éxito**, o un **1**. Si se mueve a la izquierda, un **fracaso** o un **0**.

En la figura, los números que están debajo de las casillas indican el número de éxitos, que va de 0 a 3, en este caso. En general, si la máquina de Galton tuviera n niveles, las **casillas** finales estarían numerada de 0 a n.

Observa que un camino conduce al 0, tres conducen al 1, tres conducen al 2 y uno conduce al 3.

Si registramos como resultado del experimento de lanzar una bolita a la máquina de Galton, el **número de éxitos**, entonces los resultados posibles del experimento son 0, 1, 2, ..., n. Son n+1 en total.

Concluimos que hay menos caminos que llevan a los valores extremos, y más caminos que llevan a los valores centrales.

Claramente el camino que seguirá la bolita y la casilla a la que caerá son aleatorios.

Recordemos que el recorrido que hace la bolita se llama **paseo al azar**.

Aquí tenemos un experimento en que podemos registrar al menos dos tipos de resultados posibles.

Uno es el **camino** que sigue la bolita, con 2^n resultados posibles, y el otro es el **número de éxitos**, con n + 1 resultados posibles.

Puedes encontrar una variedad de máquinas de Galton simuladas en Internet, usando un buscador, como Google.

ACTIVIDAD PRÁCTICA 3.1

Vamos a simular una máquina de Galton en forma bien básica.

Tomaremos una cantidad de monedas, tantas como el número de niveles de la máquina, digamos 10, o bien podría ser cualquier otro número distinto de 10.

Cada uno de los alumnos del curso lanza las monedas.

Cada vez que se lanzan las monedas, asumiremos que la más cercana a quien las lanza corresponde al nivel superior, la segunda al segundo nivel, etc.

Si una moneda salió cara, lo tomamos con **éxito**, si salió sello, lo consideramos como **fracaso**.

Los alumnos toman nota de los resultados. En realidad, sólo debe registrar el **número de éxitos** (número de caras).

Lo anterior se repite 10 veces por alumno. Si en el curso hay 25 alumnos, habremos simulado el lanzamiento de 250 bolitas.

Si reunimos todos los datos, tendremos una tabla de frecuencias de los números de éxitos por cada bolita simulada.

Con esto haremos un gráfico de barras.

¿Qué se puede observar?

Debería haber, en forma aproximada, más observaciones en los valores centrales, disminuyendo a medida que nos acercamos a los valores extremos.

Esto se debe a que hay más caminos que llevan a los valores del centro, menos a los extremos.

EJERCICIOS

3.1) Considera una máquina de Galton con dos niveles, que llamaremos 0 y 1. El nivel 1 tiene dos puntos finales de llegada.

a) ¿Cuántos camino hay para llegar a cada uno de los puntos finales? Haz un croquis que muestre los caminos.

b) Agrégale un nivel 2, con tres puntos finales. Cuenta cuántos caminos posibles hay para llegar a cada uno de ellos.

c) Ahora agrégale un nivel 3, con cuatro puntos finales. Cuenta el número de caminos posibles para llegar a cada uno de ellos.

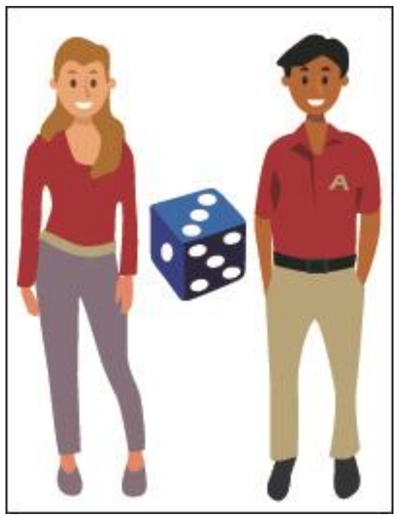
d) Agrégale un nivel 4, con cinco puntos finales. Haz lo mismo que en las partes anteriores.

4 - Definición intuitiva de probabilidad

¿Cuál es la idea de la probabilidad?

MOTIVACIÓN

Dos jóvenes, Alejandra y Marcelo, están jugando con un dado. Alejandra va a lanzar el dado. Antes que lo lance, el resultado que salga es **aleatorio** o **al azar**.



Eso significa que puede salir cualquiera de los números 1, 2, 3, 4, 5 o 6, pero ella no se sabe cuál.

Una vez que se lanzó el dado y ambos lo ven, el resultado ya se conoce y por lo tanto no es aleatorio.

Pero si lo lanza Alejandra, lo ve ella y no deja que Marcelo lo vea, es aleatorio para Marcelo, pero no para Alejandra. Para Marcelo es igual que si aún no se hubiera lanzado.

Entonces el que algo sea **aleatorio** no es **absoluto**, sino que depende del conocimiento que la persona tenga sobre el fenómeno.

En este contexto, los términos **incertidumbre**, **azar**, y **aleatorio** son sinónimos.

Ahora vamos a introducir la noción de **Probabilidad** de un evento.

Recuerda que un evento es un subconjunto del conjunto de todos les resultados posibles, llamado **espacio muestral**, asociado a un **experimento aleatorio**.

De manera **informal**, debemos pensar en la probabilidad de un evento como una medida de la **certeza** de que va a ocurrir.

La medida se suele expresar como una **fracción**, en escala entre 0 y 1. Alternativamente, se puede expresar como un **porcentaje**, en escala de 0 a 100.

Por ejemplo, si lanzamos un dado, el espacio muestral es el conjunto S={1,2,3,4,5,6}.

El evento **impar** es el conjunto {1,3,5}.

El evento **par** es {2,4,6}.

Ambos eventos se dice que son **disjuntos** o **mutuamente excluyentes**, porque no tienen elementos comunes.

Diremos que, si la probabilidad de un evento vale 1, es absolutamente seguro que el evento se va a cumplir. Es un **evento seguro**. Es el caso del propio espacio muestral, que, por ser un subconjunto de él mismo, también es un evento, y siempre es un evento seguro.

Si vale 0 es seguro que no se va a cumplir. Es un **evento imposible.** Es el caso del **evento vacío**, que no tiene elementos, y por lo tanto nunca se va a cumplir.

Cualquier evento en que hay incertidumbre sobre si se va producir o no, cuando se realiza el experimento, tiene una probabilidad cuyo valor indica el grado de certeza que tenemos de que va a ocurrir el evento.

¿Cómo se asignan probabilidades a eventos?

Una forma es considerando un **experimento repetible**. Pensamos que se repite el experimento muchísimas veces.

¿En qué **proporción** de veces ocurre el evento que nos interesa?

Por ejemplo, en el lanzamiento del dado, parece razonable pensar que si se lanza muchísimas veces, idealmente el 50% de las veces se va a cumplir el evento **par**.

Por lo tanto, asignamos la probabilidad $1/2$ o 0,5 a ese evento.

Al evento {1,2} le asignaríamos la probabilidad 1/3, porque parece razonable pensar que, si se repite **muchas veces**, la proporción de veces que se va a cumplir este evento va a ser aproximadamente 1/3.

Idealmente, cuando hablamos de **muchísimas veces**, estamos pensando en una cantidad **infinita** de veces, un número **ilimitado** de veces.

A esta forma de asignar probabilidades, asociadas a eventos de **experimentos repetibles**, se le conoce como **enfoque frecuentista**.

Hay otra forma de asignar probabilidades a eventos. En este caso, aparte de los experimentos **repetibles**, podemos incluir experimentos que **no son repetibles** en iguales condiciones.

La probabilidad se asigna en forma intuitiva, de acuerdo con lo que la persona **cree** que sería una medida de certeza de que el evento va a ocurrir, según los **antecedentes** que tiene y a su **conocimiento** del fenómeno.

Por ejemplo, supongamos que un alumno de Primero Medio tiene deseos de ser arquitecto.

Tienen que pasar muchas cosas, durante un período de varios años, para que ese alumno realmente pueda ingresar a una escuela de arquitectura, tenga éxito en sus estudios y finalmente se titule de arquitecto.

El alumno puede pensar que tiene una probabilidad de 0,6 de llegar a ser arquitecto.

¿Cómo llegó a ese número?

Por el conocimiento que tiene de otros casos, la confianza que se tiene en si mismo, su deseo y voluntad que posee de llegar a ser arquitecto, y un sinnúmero de otros factores, todos **subjetivos**.

Un economista puede pensar que la probabilidad de que al año siguiente habrá una recesión económica, es de 0,25.

También es algo subjetivo, basado en su conocimiento de economía que él tiene y de las condiciones del momento.

En iguales condiciones, otro economista puede pensar que la probabilidad de recesión es 0,30.

Esta segunda forma de asignar probabilidades se conoce como **enfoque bayesiano**, por Thomas Bayes (1702-1761), monje inglés dedicado a las probabilidades.

EJEMPLO 4.1

La máquina de Galton.

Consideremos de nuevo la **máquina de Galton**.

Cada vez que la bolita golpea un clavo, puede saltar a la izquierda o a la derecha, indistintamente.

Entonces resulta razonable asignarle una probabilidad de 1/2 a cada una de esas opciones.

Si llamamos **éxito** al salto a la derecha y **fracaso** el salto a la izquierda, diremos que la probabilidad de éxito es 1/2.

Cuando atraviesa el segundo nivel de la máquina de Galton, la bolita habrá seguido uno de cuatro **caminos** posibles: Si E es éxito y F fracaso, los cuatro caminos son EE, EF, FE y FF.

No hay razón para pensar que algunos van a ocurrir con más certeza que otros, por lo que podríamos asignarle una probabilidad de 1/4 a cada una de ellas.

Cuando la bolita atraviese la tercera fila, va a haber golpeado tres clavos, por lo que los caminos posibles que siguió son EEE, EEF, EFE, FEE, EFF, FEF, FFE, y FFF. Son $2^3=8$ caminos en total.

Sería razonable asignarle la probabilidad 1/8 a cada camino.

Si quieres visualizar los 8 caminos posibles, fíjate en la segunda figura que se mostró cuando se introdujo el tema de la máquina de Galton.

Podemos generalizar lo anterior: si la bolita atraviesa n niveles (partiendo de 0), el número de **caminos** posibles es 2^n. Esto toma los valores 2, 4, 8, 16, 32,..., etc.

Y la probabilidad razonable que podríamos asignarle a cada **camino**, entonces, es $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

El número de **éxitos** que puede haber en su camino es 0, 1, 2, ..., o n.

Asignarles probabilidades a estos resultados es más complicado, por cuanto no todos van a salir el mismo número de veces, si se repite el experimento muchísimas veces.

Eso lo dejaremos para más adelante.

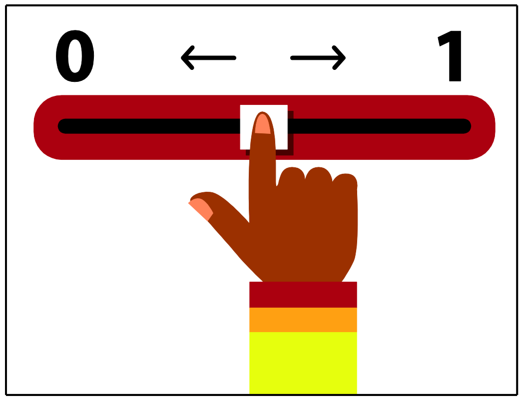
Una forma intuitiva de representar la probabilidad que ayuda a comprender el concepto, es mediante la **franja de probabilidad**.

Permite expresar los diferentes **grados de certeza** de que un evento va a ocurrir, desde un extremo, que es el **imposible**, hasta el otro extremo, que es el **seguro,** por un conjunto creciente de grados de certeza.

El evento **imposible** se suele denotar con la letra griega Φ.

El evento **seguro** corresponde a todo el espacio muestral, S.

La **franja de probabilidad** consiste en un trazo de la recta real, limitado por el 0 y el 1.



Sobre esta franja representas, mediante una marca, el grado de certeza de que tienes acerca del evento.

En la medida que pones la marca cerca del 0, se interpreta como que tienes muy poca certeza que el evento se va a cumplir.

Por otra parte, si la marca está cerca del 1, estás diciendo que tienes un mayor grado de certeza que el evento va a ocurrir.

Si la marca está cerca de mitad camino entre el 0 y el 1, se interpreta como que eres indiferente si el evento se cumplirá o no.

La marca cerca de 1/2 significa que no se tiene mucha información acerca de si el evento va a ocurrir o no.

El valor numérico de la posición de la marca es la probabilidad del evento.

Se puede pensar como un deslizador que puedes mover entre el 0 y el 1, que marca cuán seguro estás, que el evento se va a cumplir.

EJEMPLO 4.2

Estudio para negocio de venta de tortas.

Un emprendedor decide poner un negocio de fabricación y venta de tortas, queques, panes dulces, y otros productos de repostería, en un barrio de la ciudad, para lo que deberá hacer una inversión inicial importante en equipamiento.

Antes de arriesgarse, decide hacer un pequeño estudio de mercado, seleccionando una muestra de 200 hogares del barrio.

En esos hogares repartió volantes publicitarios y en cada uno consultó a uno de sus moradores acerca de su gusto por los productos promocionados y de su eventual intención de compra de esos productos.

Con los datos recogidos, y considerando los costos involucrados y los precios de venta, este emprendedor logra hacer una estimación de la probabilidad de lo que él entiende por tener éxito. Este es el evento de interés para él.

Si su estimación es cercana al 1, debería considerar el emprender el negocio, pues todo indica que el negocio será exitoso.

Si su estimación es cercana a 0, más le vale no hacer la inversión y olvidarse de su proyecto, pues la información apunta hacia un posible fracaso y pérdida de lo invertido.

La peor situación es que la estimación de la probabilidad de éxito se encuentre en torno a 1/2. Pues lo deja en una absoluta falta de certeza acerca del éxito o no de su emprendimiento. Cualquier decisión que tome, involucra una alta posibilidad de haber tomado la decisión equivocada.

En el primer caso, baja probabilidad de éxito, de echar adelante su proyecto, y fracasa, le puede significar una pérdida importante de sus recursos económicos.

En el otro caso, alta probabilidad de éxito, si no se embarca en el negocio, nunca va a saber si hubiera sido exitoso y posiblemente perdió una buena oportunidad.

Si llega a un valor de probabilidad cercana a un medio, debería profundizar en el estudio, complementando su encuesta con una nueva encuesta, o abordando el estudio de mercado mediante otra técnica.

ACTIVIDAD PRÁCTICA 4.1

Toma una cantidad de palitos de helado. Por ejemplo, 30. Alternativamente, pueden ser trozos de cartulina o cartón, pero que sean todos iguales. Esta será nuestra población.

Sepáralos en dos grupos, por ejemplo, un grupo de 10 y el otro grupo de 20.

Dividiendo el número de éxitos por el total de palitos, obtenemos la proporción de éxitos en la población, en el ejemplo, 1/3.

Con un lápiz de grafito, marca los de un grupo con la letra **e**, de éxito, y los del otro grupo con una **f**, de fracaso, en el centro.

Mezcla los palitos, y sin mirar la marca que tienen, extrae uno y toma nota de lo que resultó. La proporción de éxitos en la población, razonablemente puede considerarse como la **probabilidad** de obtener un éxito.

Devuélvelo a la población, mézclalos y extrae un segundo palito. Esto lo puedes hacer varias veces, por ejemplo, n = 12 veces.

Lo que has hecho es obtener una **muestra con reposición**, de tamaño n.

El número de éxitos, el número de fracasos en la población, y el tamaño de la muestra, se denominan **parámetros** del experimento.

Compara la proporción de éxitos obtenidos en la muestra, con la proporción en la población. Comenta lo que observas y compáralo con lo que esperabas.

Repite todo varias veces y ve qué observas.

Ahora suma el total de éxitos y el total de fracasos, en todas las muestras. Calcula la proporción y compárala con la proporción de la población. Comenta lo que observas.

Puedes repetir todo, cambiando los **parámetros**. También, si varios estudiantes han hecho lo mismo, pero **con los mismos parámetros**, pueden sumar el total de éxitos obtenidos y el total de fracasos, calcular la proporción de éxitos, y compararla con la proporción de la población.

EJEMPLO 4.3

Asignación de probabilidades por frecuencias relativas.

a) Se lanza un dado. A la probabilidad de que salga un 4 se le puede asignar el valor 1/6, pues se supone que como hay 6 resultados posibles, si se lanza un número muy grande de veces, como límite, la sexta parte de las veces aparecerá el 4. La **frecuencia relativa**, a largo plazo, se acercará a 1/6.

b) Una rifa tiene 10 boletos, numerados del 1 al 10, y un premio.

Se sortea un número, utilizando una tómbola. El que posea ese número gana el premio.

Uno se puede imaginar que, si se repite el sorteo un número muy grande de veces, un número determinado, por ejemplo, el 2, va a salir sorteado aproximadamente la décima parte de las veces, porque son 10 números, y no hay por qué suponer que algún número va a salir muchas veces más que otro.

Esa es la frecuencia relativa. Por eso es razonable asignar la probabilidad 1/10 de salir sorteado, a cada número.

b) Una rueda de la fortuna tiene 50 casillas, 5 de ellas tienen premios.

El concursante hace girar la rueda, y si sale una de las 5 casillas premiadas, gana premio.

La frecuencia relativa de las casillas con premio es 5/50 = 1/10.

Es decir, si se gira la rueda un número muy grande de veces, se espera que 1/10 de las veces muestre una casilla premiada, o 10% de las veces.

Por lo tanto, asignamos la probabilidad 1/10 = 0,10 al hecho de ganar premio.

EJEMPLO 4.4

Asignación de probabilidades subjetivas.

a) Un hombre piensa que las posibilidades de obtener un nuevo empleo están 7 a favor contra 4 en contra.

Entonces su probabilidad de obtener un empleo es P =7/(7+4) = 0,6364.

b) Un estudiante está dispuesto a apostar $ 30000 contra $ 10000 a que aprobará una asignatura.

Su probabilidad subjetiva de aprobar la asignatura es 30/(30+10)= 0,75

c) Considera la siguiente afirmación, lanzada por un economista: *La probabilidad de que haya una crisis económica este año es 0,20*.

Es una experiencia no repetible. La asignación de probabilidad es puramente subjetiva, la hizo el economista teniendo presente las condiciones particulares de este año, y su conocimiento. Otro economista podría asignarle un valor distinto.

ACTIVIDAD COMPUTACIONAL 4.1

Utilizando R simula el lanzamiento de un dado de 12 caras n veces.

Repite para un número creciente de lanzamientos, n = 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000, 1.000.000.

En cada caso construye un gráfico de barras de la cara versus la frecuencia.

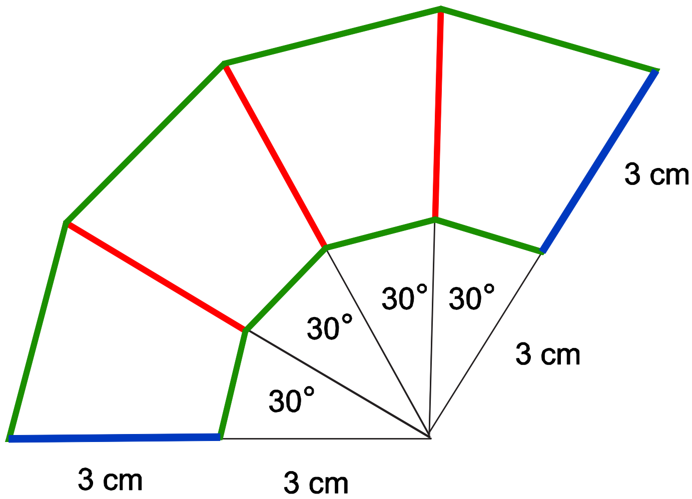
Compara los gráficos y describe lo que observas.

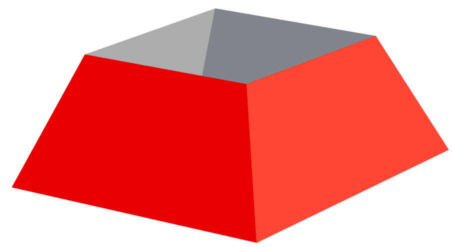
El programa R para efectuar esta actividad está en el Apéndice, también lo puedes encontrar en el sitio web www.aprendoestadistica.cl , de donde lo puedes bajar.

ACTIVIDAD PRÁCTICA 4.2

Fabrica un gorro trapezoidal en cartulina. Para ello debes copiar la figura que se muestra, a un trozo de cartulina, usando una regla y un transportador, según las medidas indicadas.

Recorta la figura por las líneas verdes y azules, dobla en 90° las líneas marcadas en rojo. Une las dos líneas en azul con un trozo de cinta adhesiva, quedando como se muestra a la derecha de la figura.





La actividad consiste en lanzar el gorro hacia arriba, de modo que salga girando.

LLeva un registro de cómo cae:

De lado, sobre un costado, sobre la parte inferior o sobre la parte superior.

El ideal es que se construyan varios de estos gorros, todos iguales, y se lancen muchas veces.

Por ejemplo, si en el curso hay 20 alumnos, cada uno puede lanzarlo 25 veces.

Con eso tendremos 500 lanzamientos.

Una vez hecho eso, se calculan las frecuencias relativas del costado, parte inferior y parte superior.

Estas frecuencias relativas serán nuestras aproximaciones o estimaciones de las probabilidades de cada uno de los tres modos de caída.

Observa que claramente el espacio muestral asociado a este experimento no es equiprobable. Tampoco es fácil anticipar un valor aproximado de las probabilidades.

EJERCICIOS

4.1) Considera una máquina de Galton con tres niveles 0, 1, y 2. Supongamos que, en todos los clavos, la probabilidad de que la bolita a caiga a cada lado es la misma.

El nivel 2 tiene 3 puntos finales de llegada, y hay 4 caminos posibles en total. Asumimos que la probabilidad de seguir cada camino es la misma.

a) Asígnale un valor de probabilidad a cada punto de llegada.

b) Ahora agrégale un nivel 3, con 4 puntos finales. Haz lo mismo que se hizo en a).

c) Agrégale un nivel 4, con 5 puntos finales y haz lo mismo que en b).

4.2) Si se lanza una moneda 30 veces, ¿cuántas caras esperarías obtener? Lanza una moneda 30 veces y registra la cantidad de caras. ¿Cómo estuvo el resultado comparado con tu suposición inicial?

4.3) Haz un listado de eventos asociados a la vida diaria. Por ejemplo, que tengas que esperar más de 20 minutos para que pase el bus que necesitas. Por cada evento dibuja una franja de probabilidad y coloca una marca donde creas que está la probabilidad de que ocurra. Luego transfórmalas a números en escala de 0 a 1 y que suman 1.

5 - Definición formal de probabilidad

Un poco de rigurosidad.

** Esta sección puede no ser cubierta sin alterar la continuidad.*

Ahora daremos una definición formal de la noción de Probabilidad.

Ya dijimos que dos eventos E1 y E2 son **mutuamente excluyentes** o **disjuntos** si no tienen elementos en común.

Sea S un espacio muestral asociado a algún experimento aleatorio. Consideremos el conjunto de todos los subconjuntos o **eventos** de S.

Sea P una función que le asigna a cada evento un número real.

P es una **función de probabilidad** si cumple las siguientes **tres** condiciones:

Primera condición, si A es un evento cualquiera del **espacio muestral**, P(A) toma un valor entre 0 y 1, inclusive.

Segunda condición, si tomamos el **evento seguro** consistente en todo el espacio muestral, es decir, todos los resultados posibles del experimento, P(S)=1, es decir, tiene **probabilidad 1**.

Tercera condición, si A y B son dos eventos **mutuamente excluyentes** o **disjuntos** (o sea que no tienen elementos comunes), entonces la probabilidad de la unión (A o B) es la suma de la probabilidad de A más la probabilidad de B.

Cuando sólo se dan a conocer las probabilidades de los eventos básicos, no es necesario comprobar que se cumple esta tercera condición.

Por ejemplo, si se dice que P(A)=0,3 y P(B)=0,5 y no se dice cuál es la probabilidad P(A,B), no importa. Por la tercera condición,

P(A o B) = P(A) + P(B) = 0,3 + 0,5 = 0,8.

Una propiedad que es consecuencia de las anteriores tres, es que si tomamos el **evento imposible,** Φ, que no se cumple nunca cuando realizamos el experimento aleatorio, entonces P(Φ)=0, es decir, tiene **probabilidad 0**.

EJEMPLO 5.1

Experimento con tres resultados posibles.

Un experimento tiene tres resultados posibles, a, b y c.

Verifica, en cada caso, si la asignación de probabilidades es permisible:

a) P(a)= 1/3; P(b)= 1/3; P(c)= 1/3

b) P(a)= 0,64; P(b)= 0,73; P(c)= - 0,37

c) P(a)= 0,35; P(b)= 0,52; P(c)= 0,26

d) P(a)= 0,57; P(b)= 0,24; P(c)= 0,19

e) P(a)=0,3; P(b)=0,4; P(c)=0,3; P(a,b)=0,8

Resolución:

a) La asignación de probabilidades es permisible porque todos los valores están entre 0 y 1, y 1/3 + 1/3 + 1/3 = 1.

b) No es permisible porque P(c) es negativa.

c) No es permisible porque la suma es 0,35 + 0,52 + 0,26 = 1,13 > 1.

d) La asignación es permisible porque todos los valores están entre 0 y 1, y la suma es 1.

e) Las probabilidades de a, b y de c suman 1, lo que estaría correcto.

Pero P(a) + P(b) = 0,3 + 0,4 = 0,7 distinto de P(a,b) = 0,8. Este caso no es permisible.

EJEMPLO 5.2

Distribución de profesor y ayudante.

Dos profesores y tres ayudantes están a cargo de un laboratorio.

Al menos un profesor y un ayudante deben estar presentes en cada sesión.

Si **(r,s)** representa el número **r** de profesores y el número **s** de ayudantes presentes.

De alguna manera se llegó a que al par (r,s) se le ha asignado una probabilidad 15/[28(r+s)].

a) Verifica que esta asignación de probabilidades es correcta.

b) Calcula las probabilidades de los eventos B={(1,3),(2,3)},

C={(1,1),(2,2)} y D={(1,2),(2,1)}

Resolución:

a) Todos los valores están entre 0 y 1.

Si sumamos a través de r=1, 2 y s=1, 2, 3, nos da

$$\frac{15}{28}\left[\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3}+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}+\frac{1}{2+3}\right]=1$$

La tercera condición para que una función sea función de probabilidad se cumple por la forma como está definida.

b) $P(B) = \frac{15}{28}\left[\frac{1}{1+3} + \frac{1}{2+3}\right] = 0{,}2411$

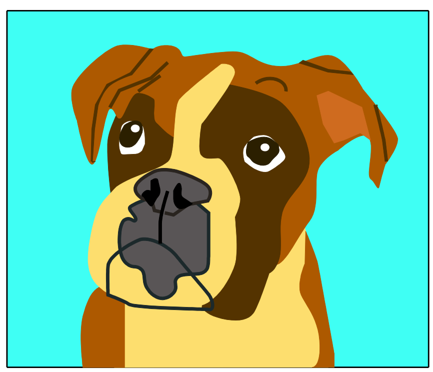
$$P(C) = \frac{15}{28}\left[\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+2}\right] = 0{,}4018$$

$$P(D) = \frac{15}{28}\left[\frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+1}\right] = 0{,}3571$$

EJEMPLO 5.3

Estudio de le efectividad de una vacuna para perros.

Se está haciendo un estudio acerca la efectividad de una determinada vacuna antiparasitaria para perros.



Se eligieron tres razas de perros: Boxer, Doberman y Pomerania.

Se aplicó la vacuna a un grupo a las seis semanas de nacidos, y a otro grupo a las ocho semanas de nacidos.

De todos los perros utilizados en el estudio, un 36% son Boxer, un 34% Doberman, los restantes Pomerania.

A un 36% se les aplicó la vacuna a los ocho meses, a los restantes a los seis meses.

También sabemos que el 55,56% de los Boxer recibieron la vacuna a los seis meses.

El 37,50% de los que recibieron la vacuna a los seis meses son Doberman. Estos porcentajes están redondeados a dos decimales.

a) Haz una lista de todos los eventos posibles asociados a este estudio. Por ejemplo, Doberman, Boxer vacunado a los 8 meses, etc.
b) Asigna probabilidades a todos los eventos.
c) Verifica que cumplen con la definición formal de probabilidad.
Resolución:
a) La tabla siguiente contiene la lista de los eventos, que son 5 eventos simples y 6 eventos que podríamos llamar compuestos o conjuntos, total 11:

Eventos marginales	*Eventos conjuntos*
Boxer	Boxer vacunado a los seis meses
Doberman	Boxer vacunado a los ocho meses
Pomerania	Doberman vacunado a los seis meses
Vacuna a los seis meses	Doberman vacunado a los ocho meses
Vacuna a los ocho meses	Pomerania vacunado a los seis meses
	Pomerania vacunado a los ocho meses

b) Para obtener las probabilidades debemos calcular los porcentajes que nos faltan.
36% de los perros son Boxer, 34% son Doberman, por lo tanto 30% tienen que ser Pomerania.
36% recibieron la vacuna a los ocho meses, por lo tanto 64% la recibieron a los seis meses.
Con esto construimos la siguiente tabla de doble entrada:

	Vacuna 6 meses	Vacuna 8 meses	Total
Boxer			36
Doberman			34
Pomerania			30
Total	64	36	100

Ahora vemos por qué hablamos de eventos marginales: aparecen en los márgenes.

Tenemos los porcentajes marginales, ahora tenemos que completar los del centro, o conjuntos.

Sabemos que el 55,56% de los Boxer recibieron la vacuna a los ocho meses.

También que un 36% son Boxer. No sabemos cuántos Boxer hay, pero podemos suponer que hay 100 perros. Entonces serían 36 Boxer, y el 55,56% de los Boxer correspondería a 55,56 x 36/100 = 20 perros, aproximando al entero. Entonces el porcentaje de Boxer con vacuna a los 6 meses es 20%, sobre el total de perros.

Y como habría 36 Boxer, 36 - 20 = 16 corresponde a Boxer con vacuna a los 8 meses.

Nuestra tabla se está viendo así:

	Vacuna 6 meses	Vacuna 8 meses	Total
Boxer	20	16	36
Doberman			34
Pomerania			30
Total	64	36	100

Usamos el mismo razonamiento para completar las casillas que faltan, suponiendo que son 100 perros:

El 37,50% de los 64 que recibieron la vacuna a los seis meses son Doberman, lo que corresponde a 37,50 x 64/100 = 24. El 24% de los perros son Doberman y recibieron la vacuna a los seis meses.

Y como el total de Doberman serían 34, quedarían 10 que recibieron la vacuna a los 8 meses

Por diferencia, 64 - 24 - 20 = 20 son Pomerania y fueron vacunados a los seis meses.

También 30 - 20 = 10 son Pomerania y fueron vacunados a los ocho meses.

Si completamos la tabla anterior, queda como sigue:

	Vacuna 6 meses	Vacuna 8 meses	Total
Boxer	20	16	36
Doberman	24	10	34
Pomerania	20	10	30
Total	64	36	100

Ahora es fácil calcular las probabilidades, simplemente dividiendo los números por 100 y nos da lo siguiente, la primera tabla con las respectivas probabilidades:

Eventos marginales	Probabilidad	Eventos conjuntos	Probabilidad
Boxer	0,36	Boxer vacunado a los seis meses	0,20
Doberman	0,34	Boxer vacunado a los ocho meses	0,16
Pomerania	0,30	Doberman vacunado a los seis meses	0,24
Vacuna a los seis meses	0,64	Doberman vacunado a los ocho meses	0,10
Vacuna a los ocho meses	0,36	Pomerania vacunado a los seis meses	0,20
		Pomerania vacunado a los ocho meses	0,10

c) Para verificar que corresponden a la definición formal de probabilidad, hay que considerar que todos los eventos conjuntos son eventos simples: son mutuamente excluyentes, por ejemplo, no hay un perro que haya recibido una vacuna a los seis y otra a los ocho meses. Tampoco hay un perro con dos razas.

Además, constituyen el espacio muestral completo, no hay otras opciones.

Por lo tanto, la suma de sus probabilidades debe ser uno. Puedes verificar que es así.

La tercera condición, sobre la probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes, se cumple por cuanto las probabilidades de los eventos conjuntos son sumas de las probabilidades de los eventos simples que los constituyen.

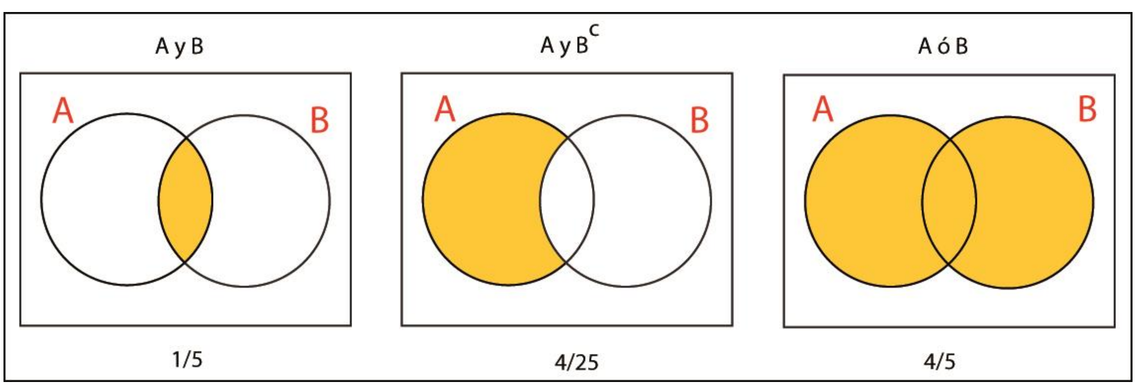
EJEMPLO 5.4

Probabilidades asociadas a dos eventos.

Sean A y B dos eventos. Se conocen las probabilidades de tres eventos:

P(A y B) = 1/5 , P(A y B^C) = 4/25 , P(A o B) = 4/5

¿Cuánto son las probabilidades P(A) y P(B)?



Observa los diagramas de Venn, donde se representan

(A y B) , (A y B^C) y (A o B).

Vemos que (A y B), (A y B^C) son eventos mutuamente excluyentes, y su unión es A, luego si sumamos las probabilidades P(A y B^C) con P(A o B) obtenemos la probabilidad de A:

P(A) = P(A y B) + P(A y B^C) = 1/5 + 4/25 = 9/25 = 0,36

Además, si le quitamos P(A y B^C) a P(A o B) obtenemos P(B):

P(B) = P(A o B) – P(A y B^C) = 4/5 – 4/25 = 16/25 = 0,64

EJEMPLO 5.5

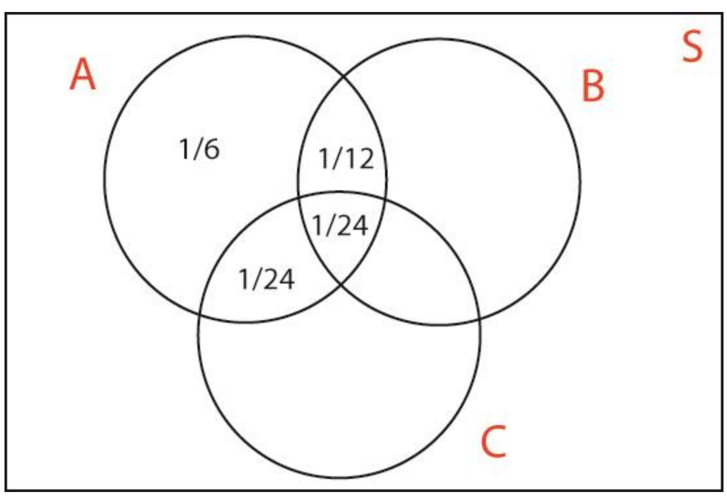
Probabilidades asociadas a tres eventos.

Sean A, B, y C tres eventos tales que

P(A y B y C) = 1/24, P(A y B)=1/8, P[A y (B ó C)^C] = 1/6, P(A y C) = 1/12

Encuentra la probabilidad de A.

Observa el diagrama de Venn de la figura:



P(A y B y C) =1/24 es lo se parece a un “triángulo”, en el centro.

P[A y (B o C)^C] = 1/6 es lo de A, que no está en B ni en C

P(A y B)=1/8 incluye el "triángulo" de 1/24, luego lo que queda en (A y B) pero fuera de él es 1/8 – 1/24 = 1/12

P(A y C) =1/12 también incluye el "triángulo" de 1/24. Luego lo que queda en (A y C) pero fuera del "triángulo" es 1/12 – 1/24 = 1/24.

Viendo la figura, podemos sumar las probabilidades de los eventos mutuamente excluyentes que forman el evento A, y obtenemos

P(A) = 1/6 + 1/12 + 1/24 + 1/24 = 1/3 = 0,3333

EJERCICIOS

5.1) 30 por ciento de los habitantes de un conjunto residencial son menores de 21 años, 18 por ciento son mayores de 75 años, los restantes son de edad intermedia. De todos los habitantes, 56 por ciento son mujeres, 44 porciento son hombres.
De los menores de 21 años 60 por ciento son mujeres. De los mayores de 75 años un tercio son hombres. De los de edad intermedia 50 por ciento son hombres.
Se selecciona uno, al azar, de una lista.
a) Haz una lista de todos los eventos posibles asociados a la condición de menor de 21, mayor de 75, edad intermedia, mujer u hombre, etc.. Por ejemplo, hombre, mujer mayor de 75 años, menor de 21, etc. (son 11).
b) Asigna probabilidades a todos los eventos.

5.2) Un registro de 400 estudiantes que cursan álgebra, física y estadística mostró los siguientes números de matriculados en estas tres asignaturas:

álgebra	288	álgebra y física	72
física	157	álgebra y estadística	164
estadística	238	física y estadística	59

Álgebra, física y estadística 12

Los 400 estudiantes están inscritos en al menos una de estas tres asignaturas.

¿Qué probabilidad hay de que un estudiante seleccionado al azar esté matriculado en

a) las tres asignaturas?

b) álgebra, pero no estadística?

c) física, pero no algebra?

d) álgebra o estadística, pero no física?

e) álgebra, pero no física ni estadística?

5.3) Un experimento tiene tres resultados posibles, r, s y t. Su espacio muestral es S = {r, s, t}. Los tres, r, s, y t, son eventos simples.

Verifica en cada caso si la asignación de probabilidades es permisible o no:

a) P(r)= 1/2; P(s)= 1/3; P(t)= 1/4

b) P(r y s)= 0,25; P(r o s)= 0,64; P(t)= 0,36

c) P(r)= 0,15; P(s)= 0,52; P(t)= 0,26

d) P(s o t)= 0,17; P(r o t)= 0,43; P(r)= 0,08

e) P(r)=0,4; P(s)=0,3; P(r o s)=0,7; P(s o t)=0.8

6 - Propiedades de la probabilidad

Ayudas para calcular probabilidades.

Nos interesa destacar cinco de las propiedades relativas a la probabilidad, que son consecuencia de la definición formal. Pero también son compatibles con las definiciones intuitivas que dimos. Son las siguientes.

Propiedad 1, complemento. Si uno tiene un evento A, recuerda que su complemento es el conjunto de todos los elementos del espacio muestral, que no están en el evento A.

Además, ambos eventos, A y su complemento A^C son mutuamente excluyentes, por la definición de complemento.

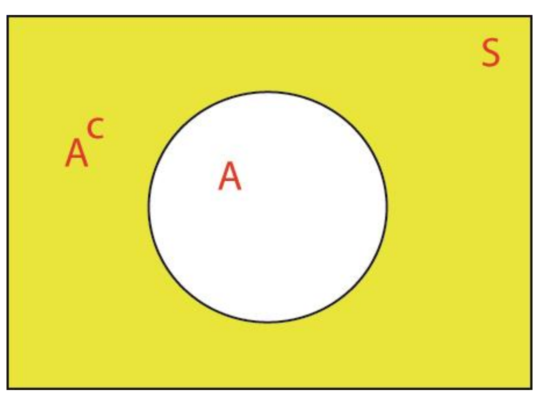
Por lo tanto, la suma de las probabilidades de A y de A^C es igual a la probabilidad de la unión de ambos eventos, pero su unión es el espacio muestral, que tiene probabilidad 1, como sabemos.

Luego la probabilidad del complemento de un evento es 1 menos la probabilidad del evento.

En símbolos,

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

El **diagrama de Venn** ilustra esta situación. El área coloreada corresponde al complemento de A:

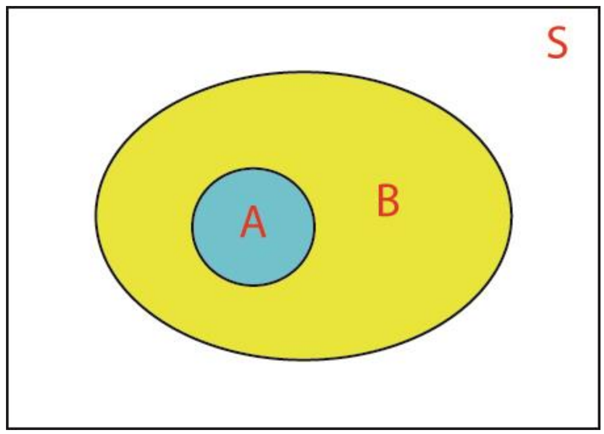


Propiedad 2, Inclusión de eventos. Si un evento A está incluido en otro evento B, entonces la probabilidad de A es menor o igual a la probabilidad de B.

En símbolos, si (A en B), entonces P(A) ≤ P(B).

El que A esté incluido en B significa que todos los elementos de A están en B.

Pero todos los de B no necesariamente están en A.



Propiedad 3, probabilidad de la unión. Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades de cada uno, menos la probabilidad de la intersección.

En símbolos, P(A o B) = P(A) + P(B) − P(A y B)

Esto es porque si sumamos la probabilidad de A más la probabilidad de B, estaríamos contando dos veces la probabilidad de la intersección, pues está incluida en ambos eventos.

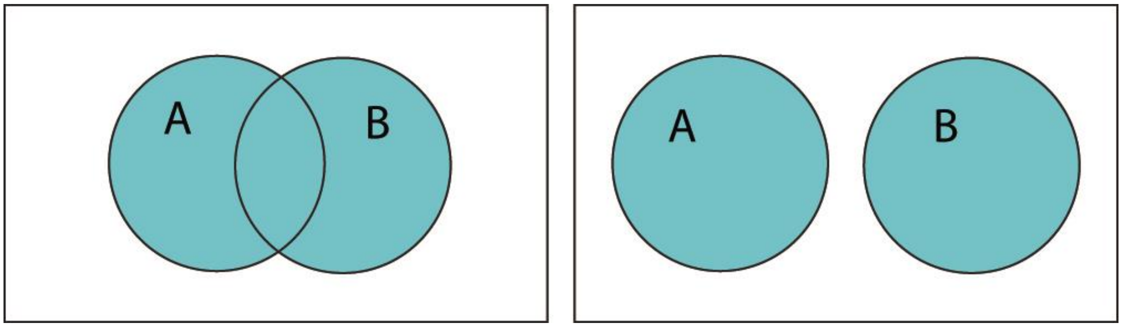
Esta situación se ilustra en la figura siguiente, a la izquierda.

Observa que si A y B son **mutuamente excluyente**s, P(A y B) es cero.

Por lo tanto, la propiedad se reduce a lo siguiente,

P(A o B) = P(A) + P(B)

que es un resultado esperado. Se ilustra al lado derecho de la figura.



Propiedad 4, leyes de De Morgan. Son en realidad dos propiedades duales. Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces la probabilidad del complemento de la intersección de A y B es igual a la probabilidad del complemento de A o el complemento de B. En símbolos,

$$P[(A \text{ y } B)^C] = P(A^C \text{ o } B^C)$$

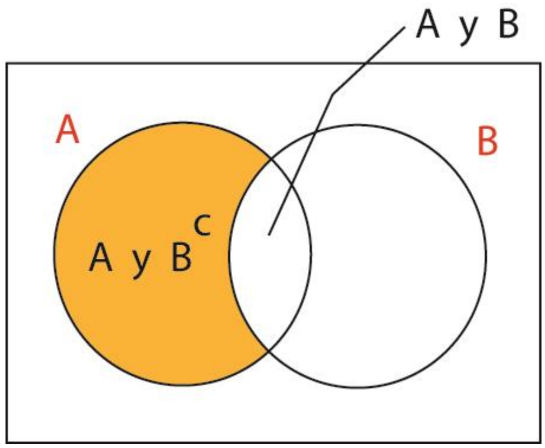
También la probabilidad del complemento de la unión de A y B es igual a la probabilidad del complemento de A y el complemento de B. En símbolos,

$$P[(A \text{ o } B)^C] = P(A^C \text{ y } B^C)$$

Estas dos propiedades se denominan **leyes de De Morgam**.

Propiedad 5, absorción. Por último (hay más propiedades, pero aquí sólo veremos estas cinco), si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces la probabilidad de la intersección de A y el complemento de B es igual a la probabilidad de A menos la probabilidad de la intersección de A y B. En símbolos,

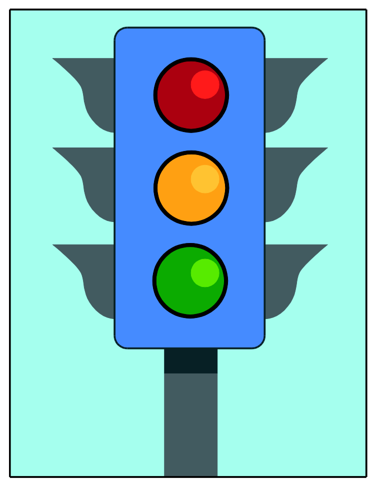
$$P(A \text{ y } B^C) = P(A) - P(A \text{ y } B)$$



Veamos algunos ejemplos de cómo se pueden aplicar estas propiedades.

EJEMPLO 6.1

Un automovilista y dos semáforos.



Un automovilista sigue una ruta para ir al trabajo, que tiene dos semáforos.

La probabilidad de que tenga que parar en el primer semáforo es 0,4.

La probabilidad de que tenga que parar en el segundo es 0,5.

La probabilidad de que se detenga en por lo menos uno es 0,6.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga que detener en los dos semáforos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que detenerse en el primero, pero no en el segundo?

c) ¿Cuál es la probabilidad que se detenga en exactamente un semáforo?

d) Cuál es la probabilidad de que no se tenga que detener en ninguno de los dos?

Usaremos las propiedades de la probabilidad para responder, apoyándonos en un diagrama de Venn.

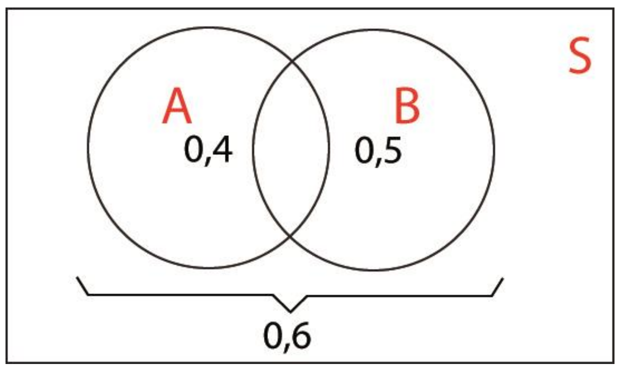
Resolución:

Siempre debemos definir los eventos que están involucrados:

Sea A el evento "*se detiene en el primer semáforo*" y B el evento "*se detiene en el segundo*".

Se tiene que P(A) = 0,4 ; P(B) = 0,5 ; P(A o B) = 0,6.

El diagrama de Venn siguiente muestra estos eventos y sus probabilidades:



a) Se pide P(A y B). Por la Propiedad 1,

P(A y B) = P(A) + P(B) – P(A o B) =

= 0,4 + 0,5 – 0,6 = 0,3

b) P(A y B^C) = P(A) – P(A y B) =

=0,4 – 0,3 = 0,1 usando la Propiedad 5 y el resultado de la parte a)

c) P[(A y B^C) o (A^C o B)] = P(A y B^C) + P(A^C y B) – P[(A y B^C) y (A^C y B)], por la Propiedad 3.

Pero esta última probabilidad es igual a 0, pues

[(A y B^C) y (A^C y B)] = [(A y A^C) y (B y B^C)] es un evento imposible.

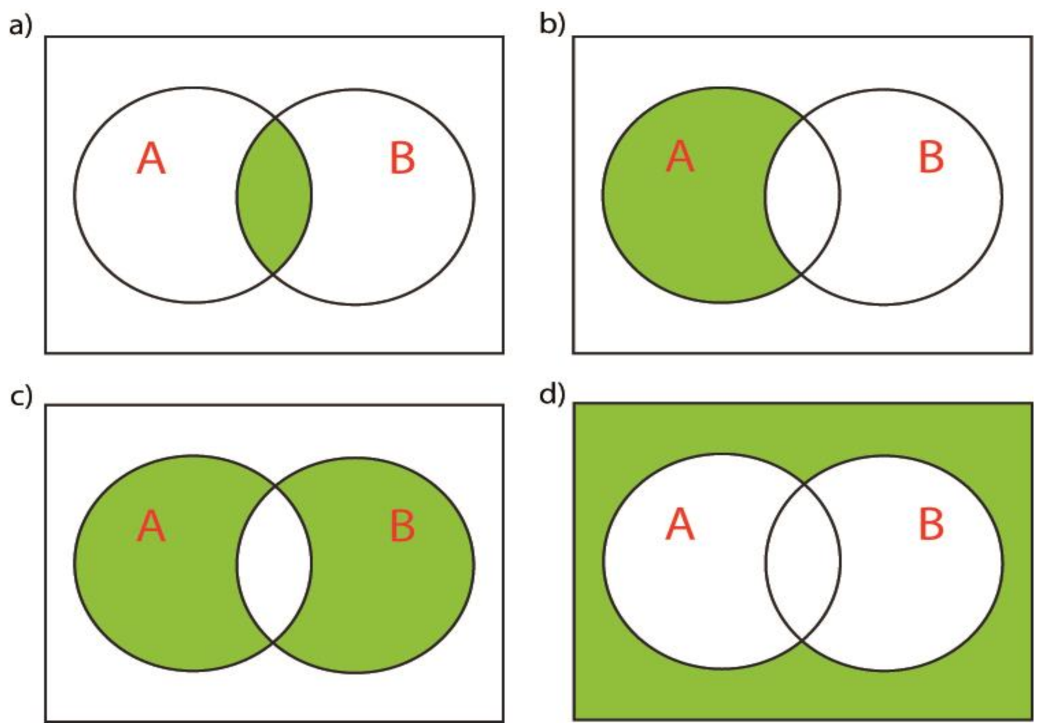
Entonces, por la Propiedad 5,

$P[(A \text{ y } B^C) \text{ o } (A^C \text{ o } B)] = P(A \text{ y } B^C) + P(A^C \text{ y } B) = [P(A) - P(A \text{ y } B)] + [P(B) - P(A \text{ y } B)]$

$= 0,4 - 0,3 + 0,5 - 0,3 = 0,3$

d) $P[(A \text{ o } B)^C] = 1 - P(A \text{ o } B) = 1 - 0,6 = 0,4$ por la Propiedad 1.

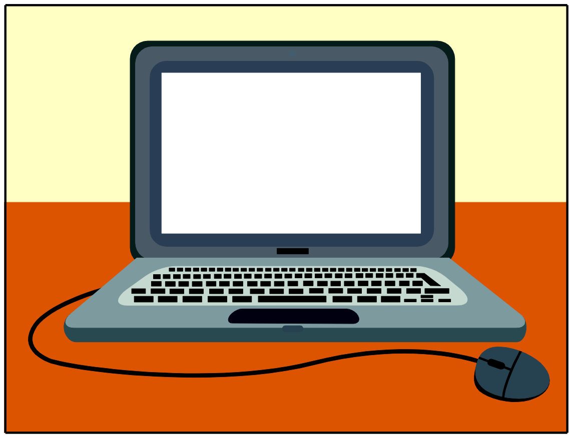
En la figura siguiente se muestras las cuatro situaciones:



EJEMPLO 6.2

Computadores para una escuela rural.

Una escuela rural ha recibido una partida de computadores recién adquiridos.



Los computadores tienen procesadores de dos tipos: de 5 núcleos y de 7 núcleos.

Los discos duros son de 250 giga bytes y de 500 giga bytes.

El cargamento tiene las siguientes características:

15% tienen procesador de 5 núcleos y disco de duro de 250 giga bytes;

20 % tienen procesador de 5 núcleos y disco duro de 500 giga bytes;

35 % tienen procesador de 7 núcleos y disco duro de 250 giga bytes;

30 % tienen procesador de 7 núcleos y disco duro de 500 giga bytes;

Calcula la probabilidad de que un computador seleccionado al azar:

a) tenga disco duro de 250 giga bytes,

b) tenga procesador de cinco núcleos,

c) tenga procesador de siete núcleos y disco duro de 500 giga bytes,

d) tenga procesador de cinco núcleos y disco duro de 500 giga bytes.

Resolución:

Definimos los siguientes eventos:

C, *"tiene procesador de cinco núcleos"*;

C^C, *"tiene procesador de siete núcleos"*;

D, *"tiene disco de 250 giga bytes"*;

D^C, *"tiene disco de 500 giga bytes"*.

Se han dado los siguientes datos:

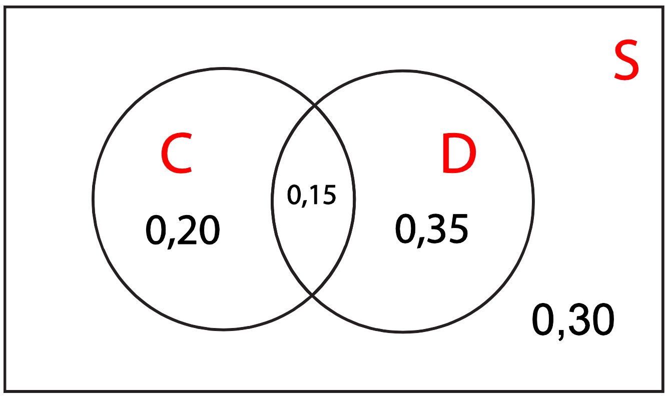
$P(C \text{ y } D) = 0{,}15$

$P(C \text{ y } D^C) = 0{,}20$

$P(C^C \text{ y } D) = 0{,}35$

$P(C^C \text{ y } D^C) = 0{,}30$

En el gráfico siguiente hemos representado los eventos C y D mediante dos círculos y las probabilidades dadas:



Con esto podemos responder las preguntas:

a) $P(D) = 0{,}15 + 0{,}35 = 0{,}50$

b) $P(C) = 0{,}20 + 0{,}15 = 0{,}35$

c) $P(C^C \text{ y } D^C) = 0{,}30$

d) $P(C \text{ y } D^C) = 0{,}20$

EJEMPLO 6.3

Estudio sobre transporte urbano.

Entre 200 personas entrevistadas para un estudio de transporte urbano, algunos usan la línea A, otras usan la línea B y otras la línea C.

Se determinó que 84 personas usan la línea A, 99 usan la línea B, y 80 usan la línea C.

Además 45 personas usan las líneas A y B, 31 usan las líneas B y C, 38 usan las líneas A y C, y 24 usan las tres líneas.

Sean A, B y C los eventos *usar las líneas A, B* y *C*, respectivamente. Si usamos las frecuencias relativas como asignación de probabilidades, calcula las probabilidades siguientes, usando las propiedades vistas en esta sección (podemos ayudarnos con un gráfico), e interpreta las probabilidades:

a) P(A y B)

b) P(B o C)

c) P(A o B o C)

d) P[B o (A y C)]

e) P(A^C o B^C o C).

El siguiente diagrama de Venn ilustra las frecuencias observadas.

En la parte central, (A y B y C), hay 24 encuestados.

En (A y B) hay 45, pero ya tenemos 24, luego fuera de centro quedan

45 - 24 = 21.

De manera análoga, en (A y C), pero fuera de la zona central, hay

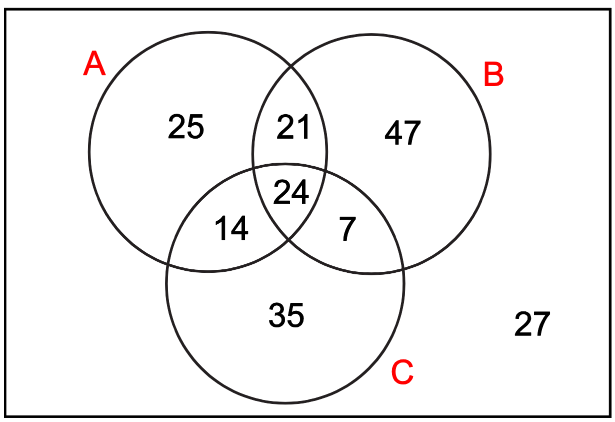
38 - 24 = 14.

Y en (B y C) sin la zona central hay 31 - 24 = 7.

En A hay 84, pero ya hay consideradas 24 + 21 + 14 = 59. Luego en A, pero fuera de (A y B), fuera de (A y C) y fuera de (A y B y C) hay 84 - 59 = 25.

De forma análoga, en B pero fuera de las tres zonas que se intersectan con otros conjuntos, hay 99 - (24 + 21 + 7) = 47.

Y en C hay 80 - (24 + 7 + 14) = 35.



Vamos a usar las frecuencias relativas para asignar probabilidades. Estas se obtienen dividiendo las frecuencias observadas por 200, el total de encuestados.

a) Esto está dado en el enunciado. P(A y B) = 45/200 = 0,225.

Es la probabilidad de que una persona cualquiera, seleccionada al azar, use las dos líneas A y B.

b) Por la propiedad 4,

P(B o C)=

= P(B) + P(C) – P(B y C)=

= (99+80-31)/200

= 148/200=0,74

Es la probabilidad de que una persona cualquiera, seleccionada al azar, use la línea B o la línea C.

c) Generalizando la propiedad 4 a tres conjuntos,

P(A o B o C) =

= P(A) + P(B) + P(C) – P(A o B) – P(A o C) – P(B o C) + P(A o B o C) =

= 84 + 99 + 80 – 45 – 38 – 31 + 24)/200 =

= 173 / 200 = 0,865

Es la probabilidad de que una persona cualquiera, seleccionada al azar, use alguna de las tres líneas.

d) P[B o (A y C)]=P(B) + P(A y C) – P(B y A y C) =

= (99 + 38 – 24 / 200} =

= 113 / 200 = 0,565

Es la probabilidad de que una persona cualquiera use la línea B o bien ambas A y C.

e) A^C o B^C o C = (A y B)^C o C, por la Propiedad 4.

Luego por la propiedad 3,

P[(A y B)^C o C] = P[(A y B)^C] + P(C) – P[(A y B)^C y C] =

= 1 - P(A y B) + P(C) - [P(C) – P(A y B y C)]

aplicando las propiedades 1 y 5.

Por lo tanto,

P(A^C o B^C o C) =

= 1 – P(A y B) + P(A y B y C) =

= 1 – 45 / 200 + 24 / 200 =

= 31 / 200 = 0,895

Otra forma de resolver este Ejemplo, usando un diagrama de árbol, agregándole probabilidades:

La figura siguiente muestra un diagrama de árbol que describe esta situación.

Si se le preguntamos a una persona si usa la línea A, su respuesta es sí o no. En ambos casos, le preguntamos si usa la línea B, su respuesta es sí o no. Con esto tenemos cuatro combinaciones, finalmente le preguntamos si usa la línea C, su respuesta también es sí o no, y completamos ocho combinaciones de respuestas posibles.

La probabilidad que use las tres es 24/200 = 0,120.

La probabilidad que use A, B y no use C es (45 - 24)/200 = 21/200 = 0,105.

La probabilidad que use A, C y no use B es (38 - 24)/200=14/200 = 0,070.

La probabilidad que use B, C y no use A es (31 - 24)/200 = 7/200 = 0,035.

La probabilidad que use A y no use B ni C es (84 - 45 - 38 + 24)/200 = 0,125.

De esta manera se completan los ocho casos que se muestran en la figura.

Línea	A	B	C	Probabilidad	a	b	c	d	e
	Si	Si	Si	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120	0,120
			No	0,105	0,105	0,105	0,105	0,105	—
		No	Si	0,070	—	0,070	0,070	0,070	0,070
			No	0,125	—	—	0,125	—	0,125
	No	Si	Si	0,035	—	0,035	0,035	0,035	0,035
			No	0,235	—	0,235	0,235	0,235	0,235
		No	Si	0,175	—	0,175	0,175	—	0,175
			No	0,135	—	—	—	—	0,135
			Sumas	1,000	0,225	0,740	0,865	0,565	0,895

Debemos hacer énfasis en que, en este caso, si se dice, por ejemplo, "A o B", se deberán sumar las probabilidades de A y de B, pues en el diagrama de árbol, las diferentes ramas son **mutuamente excluyentes**.

Por otro lado, si se dice "A y B" se considerarán sólo las probabilidades que correspondan a ambas alternativas simultáneamente.

a) P(A y B).

En este caso se debe sumar las probabilidades de todas las alternativas en que A y B, ambas, sean *Sí*.

Son las primeras dos alternativas. Se muestran en la columna rotulada "a". La suma es 0,225.

Por lo tanto P(A y B) = 0,225.

b) P(B o C).

Se debe sumar todas las alternativas en que B es *Si* o bien C es *Si*. Es decir, todas menos aquellas en que tanto B como C son *No*. Corresponden a todas menos la tercera y la última alternativa.

Se muestran en la columna rotulada "b". La suma es 0,740.

Entonces P(B o C) = 0,740.

c) P(A o B o C).

Ahora se sumarán las probabilidades de todas las alternativas que tengan *Si*, ya sea en A, o en B, o en C.

Son todas las alternativas, excepto la última, en que A, B y C son *No*,

Y aparecen en la columna rotulada c).

Entonces, sumando, P(A o B o C) = 0,865.

d) P[B o (A y C)].

Primero se debe escoger las alternativas que corresponden al paréntesis redondo, es decir, todas aquellas en que A y C son *Si*. Son la 1 y la 3.

A eso se agregarán las alternativas en que B es *Si.* Son la 1, la 2, la 5 y la 6.

Pero hay que tener cuidado de sumar alguna dos veces. Y resulta que la 1 ya estaba considerada. Quedan, la 1, la 2, la 3, la 5 y la 6.

La suma aparece en la columna rotulada d).

P[B o (A y C)] = 0,565.

e) P(A^C o B^C o C).

Se suman todas las que tienen *No* en A y B, más las que tienen *Si* en C, cuidado de no considerar la misma más de una vez.

Las con *No* en A son las cuatro últimas. Las con *No* en B son la 3 y la 4, más otras que ya están consideradas.

Por último, la única con *Si* en C que nos queda es la primera. Es decir, son todas menos la segunda, que corresponde a *Si* en A y en B, y *No* en C.

En consecuencia P(A^C o B^C o C) = 0,895.

Diremos, provisoriamente, que dos eventos son **independientes** si el hecho que sabemos que se cumpla o no uno de ellos, no altera la probabilidad de que el otro se cumpla.

Más adelante daremos una definición formal de eventos **independientes**.

En caso que al saber que se cumple uno de los eventos, hace que cambie la probabilidad del otro, los eventos no son **independientes**.

No se debe confundir eventos **independientes** con eventos **mutuamente excluyentes** (o disjuntos). Son cosas muy distintas, como puedes ver revisando las definiciones.

Siempre es más ventajoso medir en **escala numérica**, pues con los números podemos hacer más cosas, como obtener promedios, lo que no se puede hacer con las categorías.

En ciertos casos en que los resultados del experimento se expresan en una **escala categórica**, es posible asignarle, a cada categoría, un número que sea relevante al fenómeno que estamos estudiando.

Daremos una definición de un nuevo concepto, el de **variable aleatoria**.

Una **variable aleatoria** asociada a un experimento aleatorio es una **función** que asigna a cada elemento del espacio muestral, un número real.

EJEMPLO 6.4

Variable aleatoria asociada al lanzamiento de dados.

Si lanzamos una moneda tres veces, si C representa *cara* y S representa *sello*, los resultados posibles constituyen el siguiente espacio muestral:

{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS}

Podemos definir una variable aleatoria que asigna a cada resultado el número de sellos.

Entonces a CCC le corresponde el 0; a CCS, a CSC y a SCC se le asigna el 1; a CSS, a SCS y a SSC le corresponde el 2; y a SSS le corresponde el 3.

Entonces la variable aleatoria que definimos, da por resultado el nuevo espacio muestral {0, 1, 2, 3}.

Podemos extender este concepto a las probabilidades: Si los 8 eventos simples del espacio muestral original tienen igual probabilidad, vale decir 1/8, entonces los eventos simples del nuevo espacio muestral tienen probabilidades

P(0) = 1/8, P(1) = 3/8, P(2) = 3/8 y P(3) = 1/8.

Esto es así, porque hay una forma de obtener un 0, una forma de obtener un 3, pero hay tres formas de obtener un 1 y otras tres formas de obtener un 2.

EJERCICIOS

6.1) 25 por ciento de los funcionarios de una repartición son profesionales.

12 por ciento trabajan en el departamento de Adquisiciones.

3 por ciento de los funcionarios no son profesionales y trabaja en el departamento de Adquisiciones.

Alfredo es un funcionario seleccionado al azar.

a) Encuentra la probabilidad de que Alfredo es profesional y trabaja en el departamento de Adquisiciones.

b) Encuentra la probabilidad de que Alfredo no es profesional y no trabaja en el departamento de Adquisiciones.

c) Encuentra la probabilidad de que Alfredo es profesional y no trabaja en el departamento de Adquisiciones.

6.2) Un cacho tiene 3 monedas de $100 y dos monedas de $500.

Se lanzan las monedas y se observa cuáles salen cara.

a) Lista todas las posibles sumas de las monedas que salen cara.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor que 1000?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea mayor o igual que 600 y menor que 1300?

6.3) Sean A, B y C tres eventos tales que

P(A y B) = 5/27 P(B y C) = 1/3 P(A y B y C) = 1/27 P(B) = 8/9

Usando las propiedades de la probabilidad, encuentra

a) P[B y (A o C)^C]

b) P[(A y B)^C o C]

c) P[(B y A^C) o (B y C^C)]

d) P[B y (A o C)]

e) P[(B y C) o (B y C)^C]

6.4) Una cadena de tiendas de ropa tiene intención de abrir un nuevo local.

Las ciudades consideradas como elegibles son Algarrobo, Chillán, San Fernando, Los Vilos y Los Andes.

Se seleccionará una de estas ciudades, sólo una, al azar.

a) Asigna probabilidades a todos los eventos simples, suponiendo que todas las ciudades tienen igual probabilidad de ser elegidas.

Calcula las probabilidades de los siguientes eventos:

b) Se elige Los Vilos o Algarrobo

c) Se elige San Fernando o Los Andes.

d) No se elige San Fernando ni Los Vilos.

e) Se elige una de las ciudades San Fernando, San Vicente o Los Andes.

f) Se elige una de las cuatro primeras localidades mencionadas.

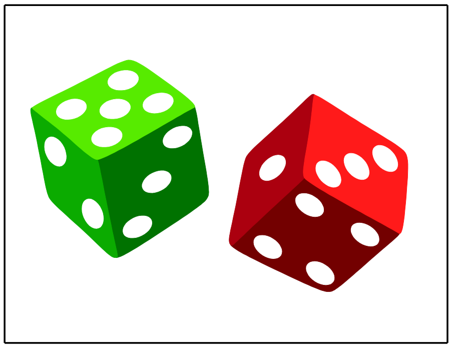
7 - Espacios muestrales equiprobables

Todos con igual probabilidad.

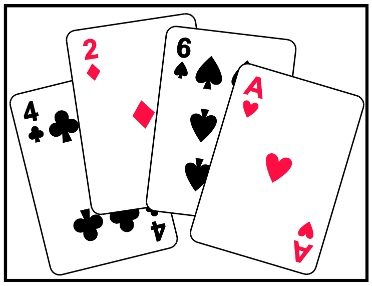
MOTIVACIÓN

Cuando se lanza una moneda, puede salir *cara* o *sello.*

Si la moneda está **balanceada**, no está cargada para que salga cara más veces que sello, o al revés, entonces podemos suponer que ambos resultados tienen igual probabilidad de salir.
Cuando se lanza un dado, puede resultar cualquiera de los números 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Si el dado no está cargado, se puede asumir que todos los números tienen igual probabilidad de salir, o sea, 1/6.



Un mazo de naipes inglés tiene cuatro pintas o palos: corazón, diamante, pica y trébol; de cada pinta hay un as (o 1), un 2, un 3, etc., hasta 10. También hay un Jack o Jota, una reina o Q, un rey o K, por cada palo.



Eso hace un total de 52 cartas.

Si se barajan bien, y se extrae una carta al azar, cualquiera de las 52 tiene igual probabilidad se salir.

Por otra parte, si se lanzan dos dados, uno rojo y uno verde, y se suman los resultados, tenemos que hay una posibilidad de que la suma sea 2, y es que ambos dados salgan 1.

Pero hay varias posibilidades para que la suma sea 7, son rojo 1 y verde 6, también rojo 2 y verde 5, rojo 3 y verde 4, rojo 4 y verde 3, rojo 5 y verde 2, rojo 6 y verde 1.

Como ves, son 6 posibilidades. Por eso es menos probable obtener una suma de 2 que una suma de 7.

Supón que un experimento tiene asociado el **espacio muestral finito**

$S=\{s_1 , s_2 , s_3 , ..., s_N \}$ y que todos los eventos simples tienen igual probabilidad.

Es decir, $P(s_i) = 1/N$, para $i = 1, 2, 3, \dots, N$

Si se cumplen las condiciones anteriores, decimos que el espacio muestral S es **equiprobable**.

Por la condición 3) de la de definición de función de probabilidad, si A es un evento cualquiera de un espacio muestral equiprobable S, entonces la probabilidad de A, P(A), es igual a la suma de las probabilidades de los elementos de A

Pero dijimos que todos tienen probabilidad 1/N.

Entonces la probabilidad de A es igual al número de elementos en A multiplicado por 1/N.

Podemos concluir que en un espacio equiprobable, si A es un evento, la probabilidad de A es el cociente entre los elementos de A dividido por el total de elementos en el espacio muestral.

Dicho de otra manera, la probabilidad de A es el *número de posibilidades favorables a A* dividido por el *número total de posibilidades*,

$$P(A) = \frac{Número\ de\ posibilidades\ favorables\ a\ A}{Número\ total\ de\ posibilidades}$$

La anterior es una forma de asignar probabilidades cuando los espacios muestrales son finitos y se sabe que son equiprobables. Se llama **modelo de Laplace**.

EJEMPLO 7.1

Lanzamiento de cuatro dados.

Se lanzan cuatro dados.

El espacio de los resultados posibles es equiprobable.

¿Cuál es la probabilidad de que el número mayor sea 3?

El número de posibilidades es 6 por cada dado, luego el total en los cuatro lanzamientos es 6^4.

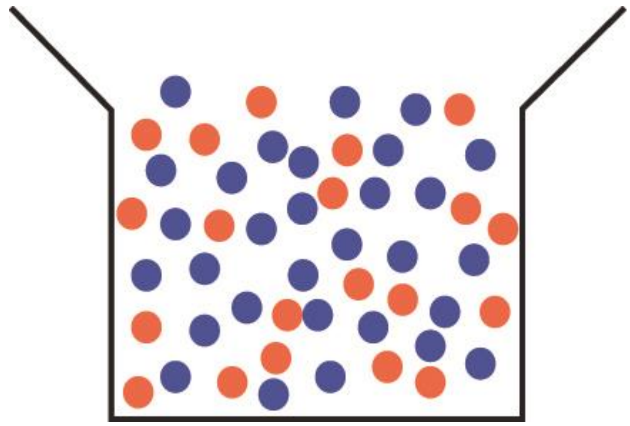
Las posibilidades favorables son todas aquellas en que sale un tres, y los otros dos dados son 1, 2 o 3. Por lo tanto el número de posibilidades favorables son 3 x 3 x 3=3^3

Luego, el modelo de Laplace dice que la probabilidad de que el mayor sea 3 es 3^3 /6^4 =1/48 = 0,0208

EJEMPLO 7.2

Caja con bolas de dos colores.

En una caja hay 30 bolas azules y 20 bolas naranja.



Se extraen 15 bolas, al azar, sin devolución.

Sin mirarlas, y sin devolver las anteriores, se extrae otra más, la número 16.

¿Cuál es la probabilidad de que sea azul?

Consideremos la primera extracción. Como es una extracción al azar, entonces el espacio muestral original de las 50 bolas es **equiprobable**. Significa que cualquier bola tiene igual probabilidad de salir.

Por lo tanto, es válido el **modelo de Laplace**. En consecuencia,

P(azul)=número de bolas azules/Número total de bolas = 30/50 = 3/5.

Ahora vamos a la bola 16. Pareciera que depende de los colores de las 15 bolas que se extrajeron antes.

Es cierto, pero nosotros no sabemos cuántas se extrajeron de cada color. Al extraer la bola 16, sin conocer las anteriores 15, es igual como si las 15 estuvieran en la caja.

Por lo tanto, para nosotros, la última bola extraída, la número 16, tiene igual probabilidad de ser azul que la primera que se extrajo.

Y esa probabilidad es 3/5.

EJEMPLO 7.3

Lanzamiento de dos dados y su suma.

Se lanzan dos dados.

¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 1, 2, 3, ..., o 12?

Para resolver esto hagamos el siguiente cuadro, en que en el margen izquierdo se representa el primer dado (cualquiera), y en el margen superior se representa el segundo. Las sumas están en la parte central:

	Dado 2						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado 1	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Contando cuántas combinaciones dan cada uno de los resultados posibles, y considerando que cada uno tiene probabilidad 1/36, tenemos la siguiente tabla que muestra los resultados con sus respectivas probabilidades:

Suma	Probabilidad	Suma	Probabilidad
2	1/36	8	5/36
3	2/36 = 1/18	9	4/36 = 1/9
4	3/36 = 1/12	10	3/36 = 1/12
5	4/36 = 1/9	11	2/36 = 1/18
6	5/36	12	1/36
7	6/36 = 1/6	-	-

Podemos ver claramente que el espacio muestral formado por las sumas, no es equiprobable. Los valores extremos tienen baja probabilidad, mientras que el valor central, el 7, tiene la más alta probabilidad, 1/6.

EJEMPLO 7.4

Sala con 10 personas numeradas.

En una sala hay 10 personas, cada una con una ficha prendida en su solapa con un número diferente, entre 1 y 10. 8 abandonan la sala.

¿Cuál es la probabilidad que la suma de los números en las solapas de los que quedan sea menor que 8?

Quedan dos en la sala. La tabla siguiente muestra todas las sumas posibles menores que 8, de los números de sus solapas.

Persona 1 en la sala	Persona 2 en la sala					
	1	2	3	4	5	6
1	--	3	4	5	6	7
2	3	--	5	6	7	
3	4	5	--	7		
4	5	6	7			
5	6	7				
6	7					

Podemos observar que son 5 + 4 + 3 + 3 + 2 +1 = 18 posibilidades favorables a que la suma sea menor que 8.

El total de posibilidades es 10 x 10 = 100

Entonces, como todas estas posibilidades tienen igual probabilidad, podemos usar el modelo de Laplace, y la probabilidad de que la suma sea menor que 8 es

Posibilidades favorables / total de posibilidades = 18/100 = 0,18

ACTIVIDAD COMPUTACIONAL 7.1

Simula un lanzamiento de un dado de 15 caras, un número creciente de veces, como 10, 25, 50, 100, 1000,..., 20000, 50000, con saltos más grandes entre tamaños más grandes.

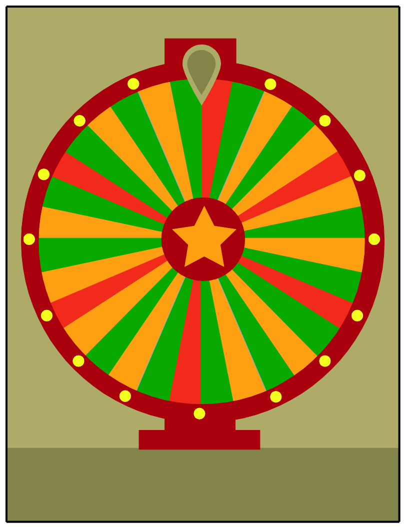
En cada caso calcula el promedio muestral.

Construye un gráfico de líneas de los promedios versus el tamaño juestral en el eje horizontal y compara con el promedio de los números en las caras de los dados.

El programa R para efectuar esta actividad está en el Apéndice, también lo puedes encontrar en el sitio web, www.aprendoestadistica.cl, de donde lo puedes bajar.

EJERCICIOS

7.1) Una rueda de la fortuna tiene 60 posiciones, 6 de ellas tienen premio.



Si hago girar la rueda una vez, ¿cuál es la probabilidad de sacarme un premio?

7.2) Se diseñó un experimento para comparar la efectividad de unas pastillas homeopáticas para reducir el peso.

a) Un número par de personas se ofrecieron como voluntarios para el experimento. Se dividieron al azar en dos grupos iguales.

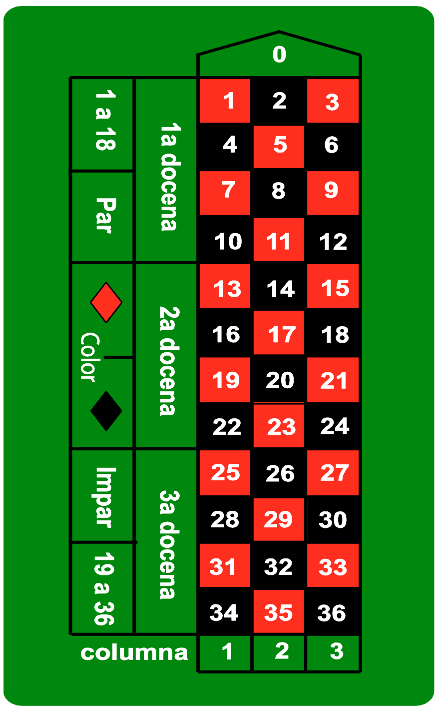
Un grupo recibiría el tratamiento y el otro grupo no, sin que ellos supieran si lo estaban recibiendo no. Si no, se les suministraba una pastilla farmacológicamente inerte, que no tenía efecto alguno. Eso se llama placebo.

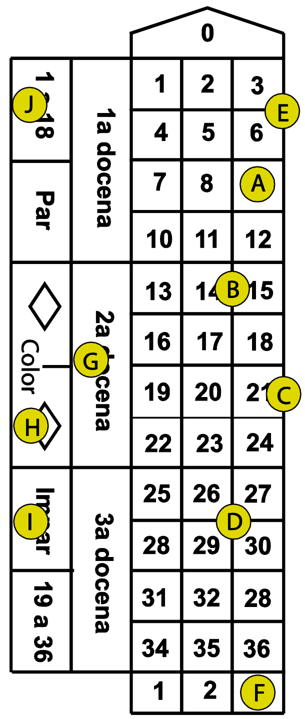
José se ofreció como voluntario. ¿Cuál es la probabilidad de que quede en el grupo de los que recibieron el placebo?

b) Si en lugar de dividir a los voluntarios en dos grupos iguales, se dividen de tal modo que los que reciben el placebo son un tercio, y los que reciben la pastilla homeopática son dos tercios. ¿Cuál es la probabilidad de que José reciba la pastilla homeopática?

7.3) Consideremos el juego de ruleta, que consiste en sortear un número, entre 0 y 36, de acuerdo de la posición en que cae una bolita lanzada sobre un plato que gira.

El jugador puede apostar de diferentes formas, poniendo su ficha según se muestra en la segunda imagen de la derecha:





La tabla siguiente muestra las posibilidades de ganar y lo que gana el jugador si la bolita cae en el o la opción apostada (en número de veces el monto que apostó), además de recuperar su ficha:

Apuesta	Posibilidades	Pago
A - Pleno	1	35
B - Semi pleno	2	17
C - Calle	3	11
D - Cuadro	4	8
E - Línea	6	5
F - Columna	12	2
G - Docena	18	1
H – Color	18	1
I - Par/impar	18	1
J - Mitad	18	1

Considerando que los 36 números tienen igual probabilidad de salir sorteados, calcula la probabilidad de cada una de las apuestas de la tabla anterior.

8 - Principios multiplicativo y aditivo

Son muchos los resultados posibles.

Hemos visto que para el cálculo de las probabilidades en los espacios equiprobables, es fundamental poder **contar** las posibilidades, tanto **a favor** como el **total**, con el objeto de aplicar el modelo de Laplace.

Cuando el número de posibilidades es pequeño, esto es relativamente fácil. Pero se complica en la medida que este número aumenta.

Hay dos principios que ayudan en esta labor de conteo. Son el **principio multiplicativo** y el **principio aditivo**.

Veamos primero el **principio multiplicativo**. Supongamos que tenemos un experimento consistente en dos partes, la primera con N resultados posibles, la segunda con M resultados posibles.

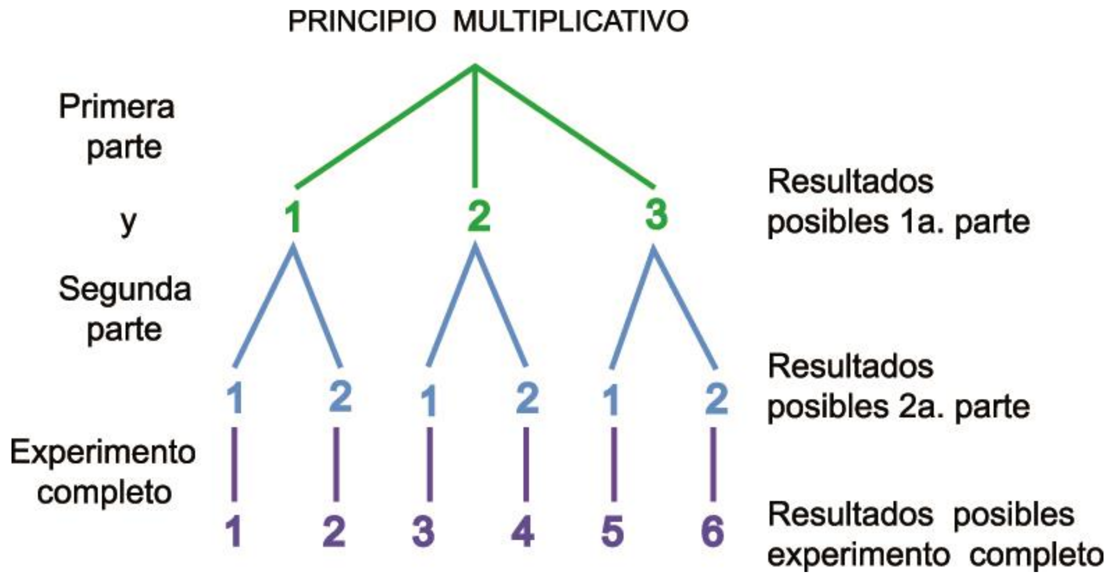
Ahora consideremos el experimento completo consistente en las dos partes anteriores ejecutadas en forma de simultánea. Por cada uno de los N resultados de la primera parte, puede ocurrir cada uno de los M resultados del segundo, lo que conduce al producto de N por M resultados de la combinación de ambas partes.

Resumiendo, el **principio multiplicativo** dice que, si un experimento tiene dos partes, la primera con N resultados posibles, y otra parte tiene M resultados posibles, el experimento completo tiene NxM resultados posibles.

El principio multiplicativo se asocia a la conjunción **y**. El experimento consiste en la primera parte **y** la segunda, ambas.

Se puede ver en la figura siguiente. La primera parte tiene N=3 resultados posibles. La segunda tiene N=2 resultados posibles.

Luego el experimento completo tiene 3 x 2 = 6 resultados posibles.



EJEMPLO 8.1

Riesgos de una compañía aseguradora de automóviles.

Una compañía aseguradora de automóviles clasifica sus clientes como de Bajo Riesgo (BR), de Riesgo Medio (RM), y de Alto Riesgo (AR), de acuerdo a su historial de siniestros.

Si un cliente hace un denuncio de que tuvo un accidente, o un **siniestro** usando el lenguaje de los seguros, con el objeto que la compañía asuma los costos de reparación de su vehículo, la compañía clasifica el siniestro en cuatro categorías según el rango del costo.

Las cuatro categorías son: Costo Bajo, Costo Medio-Bajo, Costo Medio-Alto, y Costo Alto.

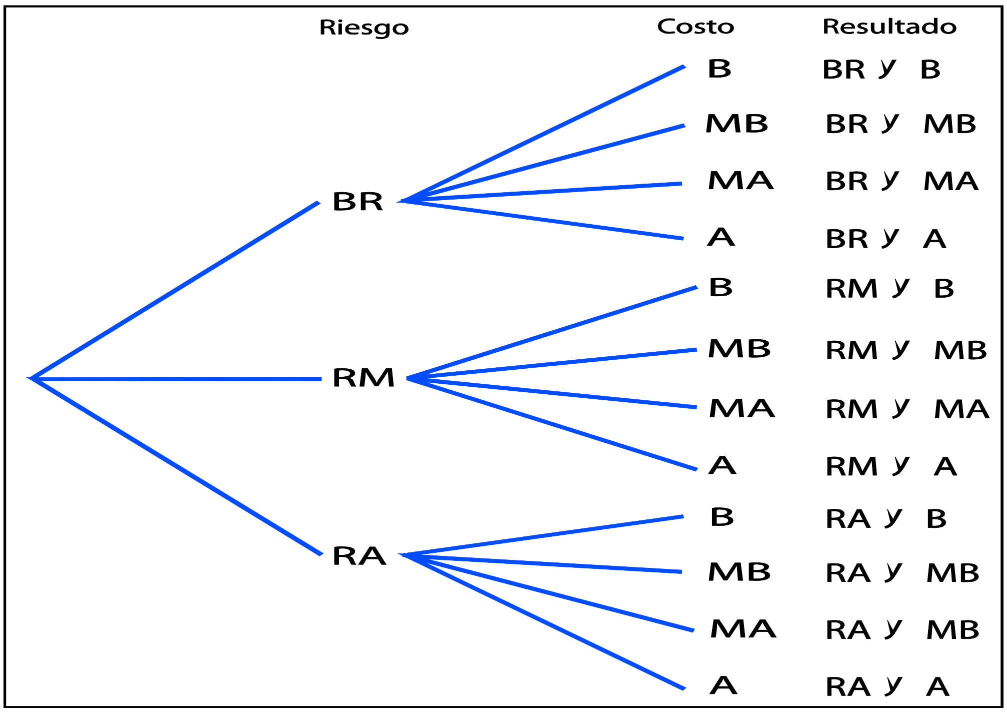
Supongamos que un cliente se presenta en las oficinas de la compañía para hacer un denuncio de un accidente.

¿Cuántas posibilidades hay?

Aquí podemos aplicar el **principio multiplicativo**: La primera parte, el riesgo, tiene 3 posibilidades; la segunda, el costo, tiene 4. Entonces el total de resultados posibles es

3 x 4 = 12.

El siguiente diagrama de árbol representa todas las posibilidades para este cliente:



Ahora veamos el **principio aditivo**. Otra vez supongamos que tenemos un experimento consistente en dos partes, la primera con N resultados posibles, la segunda con M resultados posibles.

Ahora consideremos un experimento consistente en **una parte o la otra parte**. No se verifican las dos partes simultáneamente, sino solamente una.

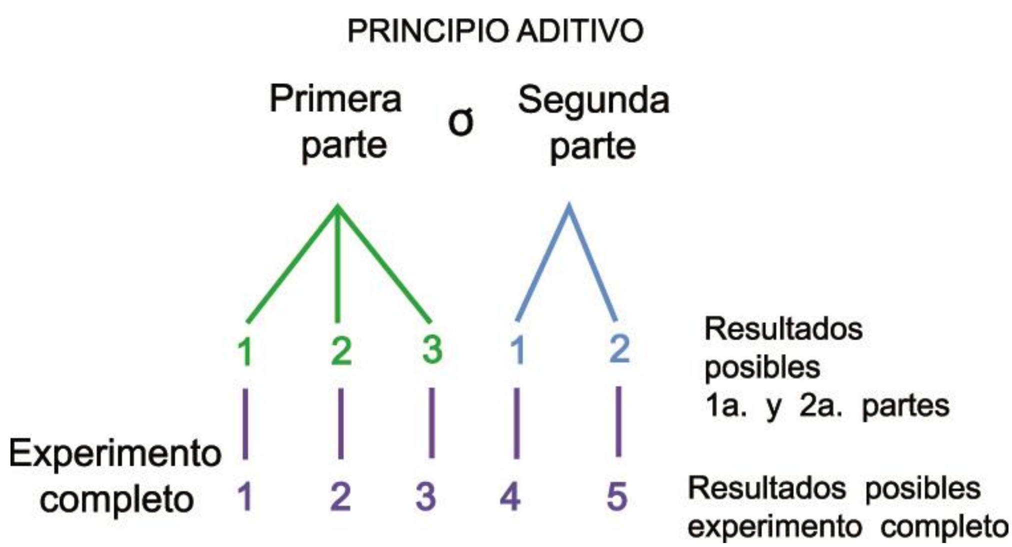
Entonces el número de resultados posibles es la suma N+M

La diferencia entre las dos situaciones, una en que se aplica el principio multiplicativo y la otra en que se aplica el principio aditivo, es que en la primera se dan simultáneamente las dos partes. En la segunda, se da una parte o la otra.

Tal como el principio multiplicativo se asocia a la conjunción **y**, el principio aditivo se asocia a la conjunción **o**. El experimento consiste en la primera parte **o** la segunda, pero no las dos.

La figura siguiente ilustra el principio aditivo, con N = 3 y M = 2, como en la ilustración anterior, correspondiente al principio multiplicativo.

En este caso, sólo se cumple una de las partes del experimento, por lo tanto, el número total de posibilidades es la suma N+M = 3 + 2 = 5.



EJEMPLO 8.2

Los cascos de los ingenieros.

Tres ingenieros, Pedro, Manuel y Fernando, tiene cada uno un casco para hacer las visitas a terreno. Los cascos tienen una etiqueta en su interior con el nombre del respectivo ingeniero.

Pero ellos están siempre apurados, así que cada uno toma cualquiera de los tres cascos al azar, sin importar si es el suyo o no.

a) Haz una lista de los resultados posibles, y al lado de cada resultado anota el número de coincidencias. Define el espacio muestral.

Asumiendo que cada distribución de cascos tiene igual probabilidad de ocurrir, construye una tabla que resuma el número de coincidencias con su respectiva probabilidad.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que los tres cascos coincidan con sus dueños?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno coincida?

Resolución:

La tabla siguiente muestra todos los posibles resultados. P, M y F representan el casco de Pedro, de Manuel y de Fernando, respectivamente.

A la derecha se muestra el número de coincidencias.

Casco que elige Pedro	Casco que elige Manuel	Casco que elige Fernando	Número de coincidencias
P	M	F	3
P	F	M	1
F	P	M	0
F	M	P	1
M	P	F	1
M	F	P	0

El espacio muestral es S = {0, 1, 3}.

Si cada una de las filas de la tabla tiene igual probabilidad, 1/6, podemos agregar aquellas en que el número de coincidencias es el mismo, y sumamos las respectivas probabilidades, obteniéndose la siguiente tabla resumen:

Número de coincidencias	Probabilidad
0	2/6 = 1/3
1	3/6 = 1/2
3	1/6
Suma	1

b) De la tabla, la probabilidad de que coincidan los tres cascos con sus dueños es 1/6.

c) La probabilidad de que ninguno coincida es 1/3.

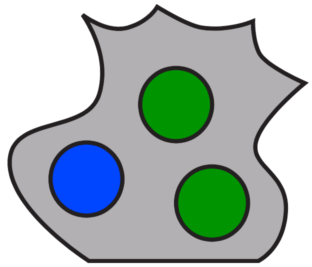
En muchos casos se utilizan ambos principios, **multiplicativo** y **aditivo** combinados.

En el siguiente ejemplo se aplica en forma combinada ambos principios.

EJEMPLO 8.3

Bolsa con fichas verdes y azules.

Una bolsa contiene tres fichas, dos verdes y una azul. Si se extraen fichas, todas las que están en la bolsa tienen igual probabilidad de salir.



a) Se extrae una muestra de dos fichas al azar, **sin reposición**. Se registra el número de fichas de cada color que salen en la muestra. Haz una lista de todos los resultados posibles, con sus respectivas probabilidades.

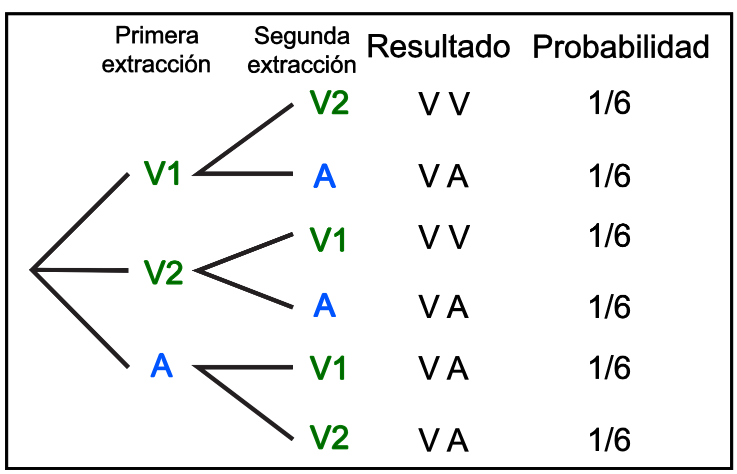
b) Lo mismo que en a), pero ahora la extracción es **con reposición**. Se registra el número de fichas de cada color que salen en la muestra. Haz una lista de todos los resultados posibles, con sus respectivas probabilidades.

Resolución:

a) En este problema podemos ayudarnos con un gráfico de árbol, pues es apropiado recurrir al **principio multiplicativo**. Por cada resultado de la primera extracción pueden ocurrir todos los resultados de la segunda.

Como son dos verdes, las llamaremos V1 y V2 para distinguirlas. La azul será A.

El gráfico siguiente muestra los posibles resultados:



La probabilidad de cada alternativa es 1/6. Son 2 formas de obtener VV y 4 formas de obtener AV, lo que suman, por el principio aditivo, las seis posibilidades.

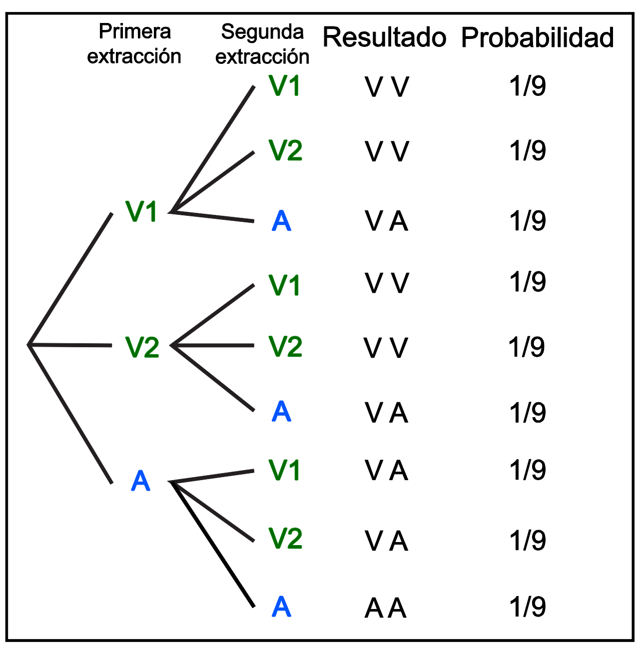
Como las seis son mutuamente excluyentes, las probabilidades de las alternativas que dan cada resultado, se suman.

Entonces la tabla siguiente resume los resultados posibles, con sus probabilidades.

Resultado	Probabilidad
2 verde	2/6 = 1/3
1 azul y 1 verde	4/6 = 2/3

Recuerda que sólo se pide que digas cuántos hay de cada tipo, así que en el resultado que das, no importa el orden en que hayan salido las fichas.

b) Ahora el gráfico cambia, pues la misma bola puede salir dos veces, pero básicamente el procedimiento es el mismo:



Usando el mismo razonamiento de la parte a, se obtienen los resultados que se muestran en la tabla siguiente:

Resultado	Probabilidad
2 verde	4/9
1 azul y 1 verde	4/9
2 azules	1/9
Suma	1

EJERCICIOS

8.1) Una empresa tiene 6 empleados. Cuatro de ellos tomaron un curso de prevención de riesgos.

a) Si se seleccionan dos, al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos hayan tomado el curso?

b) Si se seleccionan dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente uno haya tomado el curso?

c) Si se seleccionan tres, al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los tres hayan tomado el curso?

d) Si se seleccionan tres al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos hayan tomado el curso?

e) Si se seleccionan cuatro al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos haya tomado el curso?

8.2) Una agencia publicitaria tiene 10 clientes, de tres tipos distintos:

2 publicitan en diarios, 5 publicitan el radio y 3 publicitan en televisión.

Se seleccionan 2 clientes al azar, sin reposición y sin importar el orden en que son seleccionados. Sólo se distinguen los clientes por el tipo indicado.

a) Describe el espacio muestral (ayuda: tiene 6 elementos).

b) Calcula la probabilidad de cada evento simple.

9 - Probabilidad condicional

¿Qué sabemos y qué es incierto?

MOTIVACIÓN

Debemos salir durante la mañana. El cielo se ve amenazante. Estamos en la duda de si va a llover o no. Asignamos una cierta probabilidad de que se cumpla el evento "*va a llover durante la mañana*".

Pero alguien nos dice que en el pronóstico del tiempo anunciaron que llovería hoy. Entonces cambia la probabilidad que inicialmente le asignamos al evento de que llueva durante la mañana. Aumentamos esa probabilidad.

Encendimos el televisor y vimos que el frente de mal tiempo que se aproximaba se desvió hacia el sur. Con esta nueva información vuelve a cambiar la probabilidad que le asignamos al evento que lloverá esta mañana. Ahora disminuye.

Esta situación que planteamos muestra que la probabilidad que le asignamos a un evento, cambia cada vez que obtenemos nueva información.

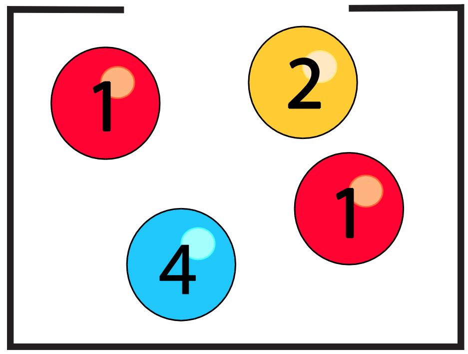
Estas probabilidades, con información, se denominan **probabilidades condicionales**. De eso nos ocuparemos en este capítulo.

EJEMPLO 9.1

Extracción de una caja con bolas numeradas.

Una caja contiene 4 bolas: dos rojas con un número 1, una amarilla con un número 2, y una celeste con un número 4.

Se extraen tres bolas, al azar, sin reposición.

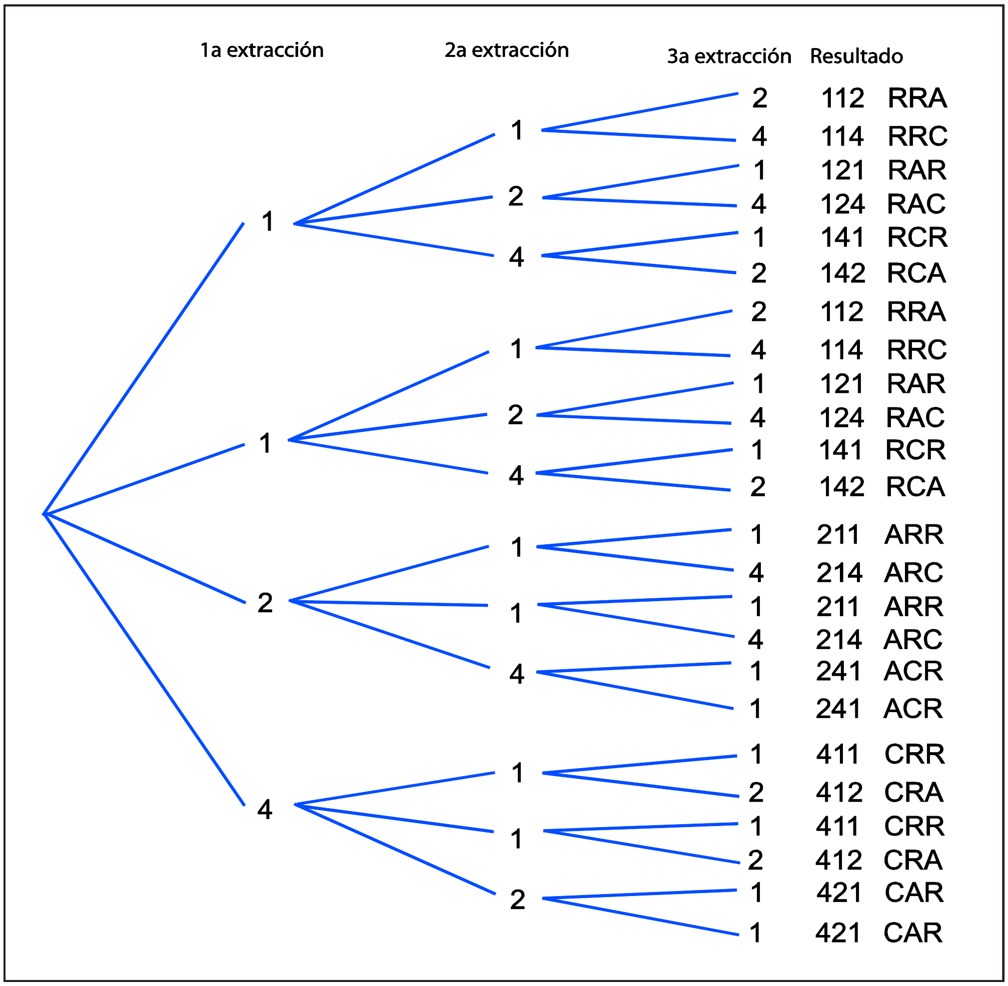


Cada vez que se extrae una, las fichas que están en la caja tienen igual probabilidad de salir elegidas.

Luego sumemos los números de las fichas que se extrajeron.

Haz una lista de los colores, los números y las sumas posibles que resultan de las tres extracciones, con sus respectivas probabilidades, sin importar el orden en que salen elegidas.

Si la extracción es sin reposición, son un total de 14, por lo tanto, la probabilidad de cada opción es 1/14. Pero podemos ver que hay varias posibilidades que son equivalentes. El gráfico siguiente muestra las posibilidades, con las iniciales de los colores, y sus equivalentes numéricos:



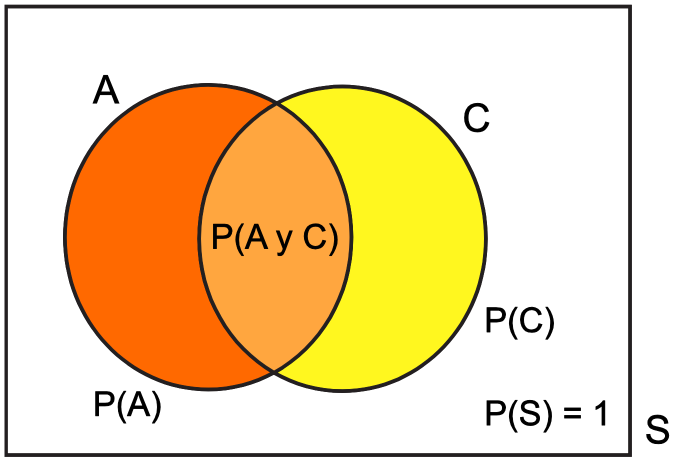
Observamos que no hay el mismo número de opciones en cada caso, por lo que el espacio muestral de las sumas no es equiprobable.

Combinación de colores	Números	Suma	Conteo	Probabilidad
RRA	112	4	6	6/24 = 1/4
RRC	114	6	6	6/24 = 1/4
RAC	124	7	12	12/24 = 1/2
Totales	--	--	24	1

Otra cosa que podemos observar es que el resultado de la segunda extracción depende de lo que resultó en la primera, y el resultado de la tercera extracción depende de lo resultó en la primera y en la segunda.

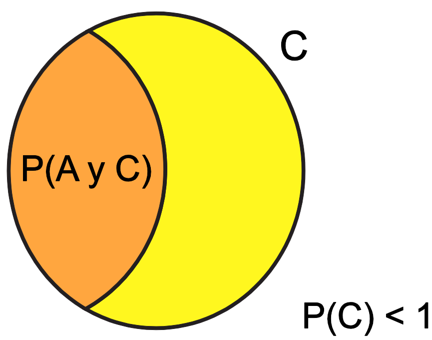
Supongamos que tenemos dos eventos, A y C.

Consideremos el siguiente diagrama que muestra diversos eventos derivados de la situación anterior, como A, C, (A y C), (A y C ^{C}), (A^{C} y C), (A y C)^{C}. las probabilidades de cada uno están representadas por cada una de las superficies de los conjunto correspondiente.



Ahora supongamos que **sabemos** que se cumplió el evento C.

Entonces todo lo que está fuera de C está demás, pues tiene probabilidad cero. Queda lo que se muestra en la figura siguiente:

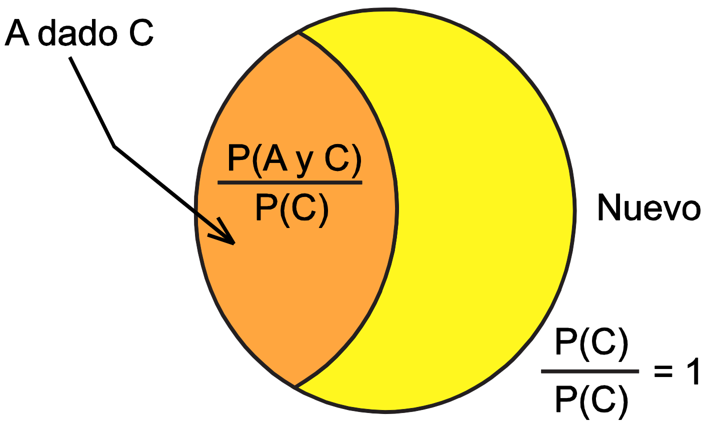


Resulta que el espacio muestral pasa a ser C. Estamos seguros que se cumplió, es un **evento seguro**.

Pero hay una falla, pues un **evento seguro** debiera tener debiera tener **probabilidad 1**.

Entonces al saber que se cumplió C, las probabilidades quedaron mal asignadas. Por lo tanto, hay que hacerles un ajuste para que la probabilidad total sea 1.

Y ese ajuste se logra dividiendo todas las probabilidades por la probabilidad de C, P(C). Queda como se muestra en la tercera figura, que muestra cómo se **agrandaron** todas las probabilidades dividiendo por P(C).



Le nueva probabilidad de A, **agrandada** o **aumentada**, se denomina **probabilidad condicional de A dado C**.

Se simboliza P(A|C). Debes tener presente que, en la expresión anterior, A es un **evento aleatorio** como hemos estado **pensando en los eventos hasta ahora.**

Sin embargo, C fue un **evento aleatorio**, pero ya no lo es. Pues, al decir **dado**, estamos diciendo que se cumplió. O sea, es un **evento seguro**.

Por eso, P(A|C) y P(C|A) son cosas muy distintas, y no deben confundirse.

Formalmente, la probabilidad condicional del evento A dado el evento C, está dada por

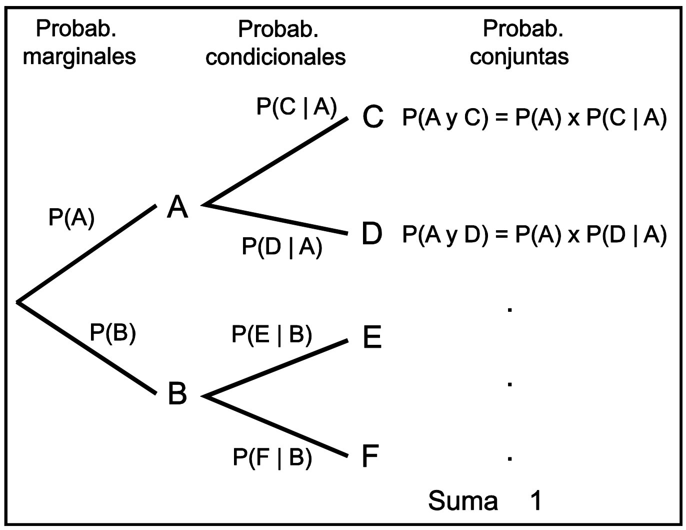
$$P(A|C) = \frac{P(AyC)}{P(C)}$$

Siempre que la probabilidad de C sea mayor que 0.

En caso que la probabilidad de la condición C sea 0, definimos la probabilidad condicional como 0.

Claro, pues al decir **probabilidad de A dado C** estamos diciendo que se cumplió C. Pero si C tiene probabilidad 0, no puede ser eso, por lo que la condicional de A dado C necesariamente tendría que ser 0.

Los gráficos de árbol que ya hemos usado para mostrar todas las posibilidades de un experimento en varias etapas, son muy útiles si le agregamos **probabilidades** a las diferentes ramas.



Son probabilidades **marginales**, probabilidades **condicionales** y probabilidades **conjuntas**, como se muestra en el siguiente diagrama de árbol en dos etapas.

Las primeras probabilidades a la izquierda, son probabilidades **marginales** de los eventos que resultan de la primera etapa.

Las de la segunda etapa son probabilidades **condicionales**, dado el resultado de la primera etapa. Por ejemplo, la probabilidad de la rama que conduce al evento C es la probabilidad condicional de C **dado** que el resultado de la primera etapa fue A.

Las probabilidades conjuntas se obtienen multiplicando las respectivas marginales y condicionales.

En efecto, $P(C|A) = P(AyC)/P(A)$, por definición de probabilidad condicional.

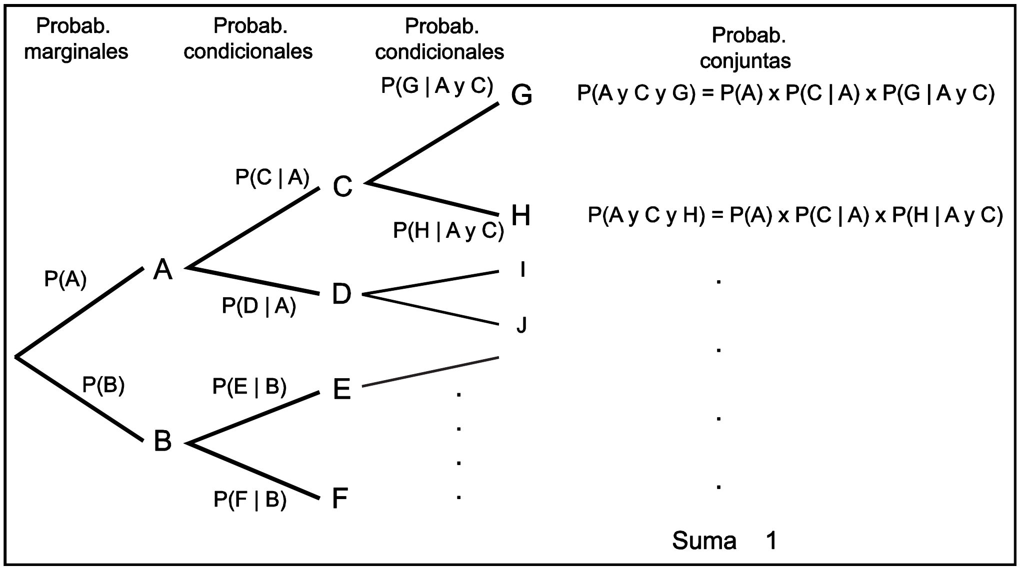
Despejando $P(A)$, tenemos que $P(A \text{ y } C) = P(A) \times P(C|A)$, como se muestra en la figura. Lo mismo para los otros casos.

Recordemos que los resultados de todas las ramas son mutuamente excluyentes o disjuntos. Pues el experimento sigue sólo una de las ramas cada vez que se ejecuta.

Por lo tanto, la probabilidad de dos ramas completas, se obtiene simplemente sumando las probabilidades de ambas ramas.

Por ejemplo, $P[(A \text{ y } C] \text{ o } (A \text{ y } D)] = P(A \text{ y } C) + P(A \text{ y } D)$

El caso de un experimento en tres etapas se ilustra parcialmente en la siguiente figura:



Tenemos que P(C|A) = P(A y C)/P(A) de donde P(A y C) = P(A) x P(C|A).

Además, por la definición de probabilidad condicional,

P(G|A y C) = P(A y C y G) /P(A y C) de donde

P(A y C y G) = P(G|A y C) x P(A y C). Entonces, combinando con la expresión anterior, P(A y C y G) = P(A) x P(C|A) x P(G|A y C).

Análogo para los demás casos.

EJEMPLO 9.2

Vendedor de seguros de salud y sus ventas.

Un vendedor de seguros de salud contacta a tres potenciales clientes cada día.

Si en un contacto logra vender un seguro es un éxito, si no, un fracaso.

Por experiencia anterior, le asigna una probabilidad de 0,3 al éxito, y obviamente que al fracaso un 0,7.

Su rutina diaria consiste en lo siguiente:

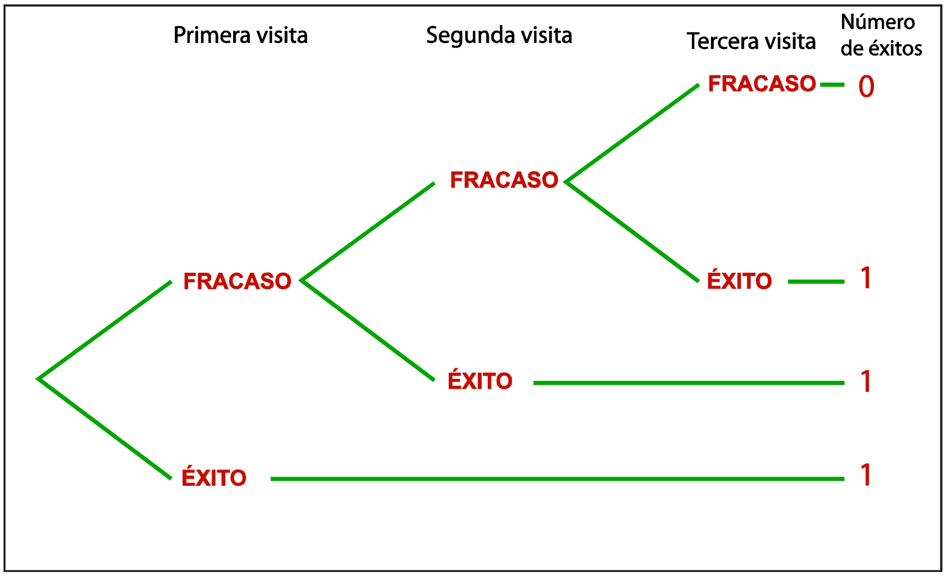
Contacta a una persona. Si tiene un éxito, no hace más contactos ese día.

Si es un fracaso, contacta a un segundo. Si este resulta ser un éxito, no hace más contactos.

Si es un fracaso, contacta un tercer y último cliente.

Encuentra el espacio muestral asociado al número de éxitos en un día. Encuentra las probabilidades asociadas a cada uno de estos números.

La siguiente figura muestra todos los resultados posibles, el número de éxitos, y las probabilidades de cada una de las alternativas:



Las probabilidades correspondientes a la primera visita son probabilidades **marginales**.

Pero las probabilidades de los eventos mostrados en segunda visita son probabilidades **condicionales dado** el resultado *fracaso* de la primera visita,

P(f2|f1) y P(e2|f1)

En que **f** indica fracaso, **e** indica éxito, y los números corresponden a la visita 1 y 2, respectivamente.

Y las probabilidades de los eventos de la tercera visita son probabilidades **condicionales dados** los resultados *fracaso* de las primeras dos visitas.

P(f3|f1 y f2) y P(e3|f1 y f2)

Nos interesa la probabilidad marginal

P(e1) = 0,3

y las probabilidades conjuntas

P(f1 y e2) , P(f1 y f2 y e3) y P(f1 y f2 y f3)

Estas cuatro últimas están representadas como las cuatro ramas finales del diagrama de árbol.

Las últimas tres se pueden calcular como sigue, según la definición de probabilidad condicional:

P(f1 y e2) = P(e2|f1) x P(f1) = 0,3 x 0,7 = 0,21

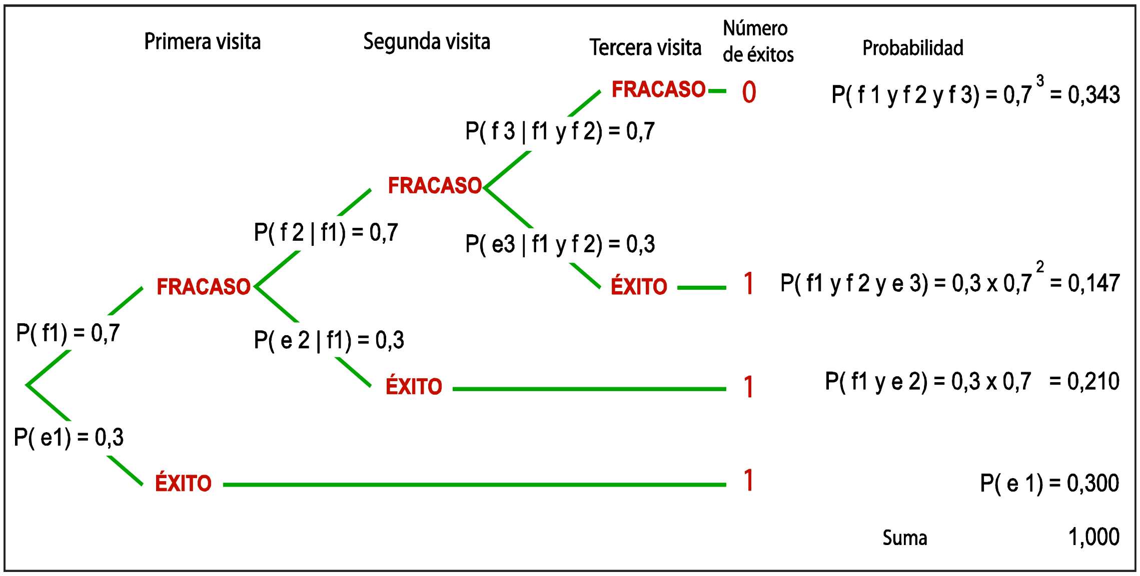
P(f1 y f2 y e3) = P(e3|f1 y f2) x P(f1 y f2) = P(e3|f1 y f2) x P(f2|f1) x P(f1) =

= 0,3 x 0,7 x 0,7 = 0,147

P(f1 y f2 y f3) = P(f3|f1 y f2) x P(f1 y f2) = P(f3|f1 y f2) x P(f2|f1) x P(f1) =

= 0,7 x 0,7 x 0,7 = 0,343

Todas estas probabilidades aparecen en el siguiente gráfico.



Ahora respondemos la pregunta:

El espacio muestral es S = {0,1}, los posibles éxitos en un día.

La probabilidad de 0 éxitos es 0,343, fracaso en los tres contactos.

Hay tres eventos que resultan en 1 éxito, y los tres son **mutuamente excluyentes** (sólo se puede dar uno a la vez), por lo tanto, las probabilidades se deben sumar para obtener la probabilidad global de un éxito:

P(1) = 0,147 + 0,210 + 0,300 = 0,657

Podemos resumir estos resultados en la **tabla de probabilidades** siguiente, que describe la función de probabilidad de la variable aleatoria:

Número de éxitos	Probabilidad
0	0,343
1	0,657
Suma	1,000

Es muy importante comprender el concepto de **probabilidad condicional**.

La razón es que en la gran mayoría de los fenómenos en que interviene el azar y en consecuencia está involucrada una probabilidad, algo se conoce del fenómeno.

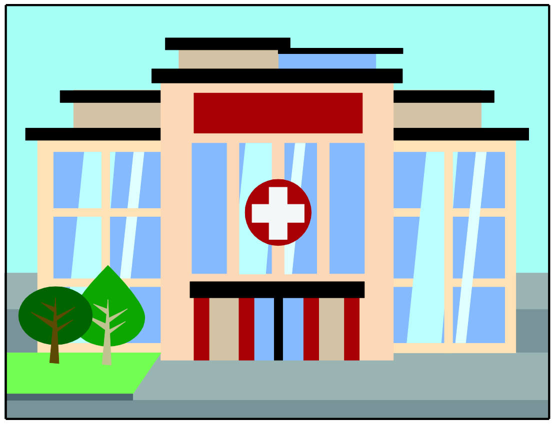
Luego no todo es aleatorio. Es decir, hay condiciones **dadas**.

Por lo tanto, las probabilidades involucradas son **condicionales**, **dados** los elementos conocidos.

EJENPLO 9.3

Central telefónica, llamadas entrantes y salientes.

Una empresa tiene una central telefónica donde llegan todas las llamadas entrantes y salientes. En número de llamadas entrantes y de llamadas salientes, por minuto, son aleatorios.



En base a registros existentes del comportamiento pasado de la central, se construyó la tabla siguiente, con las probabilidades conjuntas del número de llamadas entrantes y salientes, ambas por minuto.

Llamadas SALIENTES por minuto	Llamadas ENTRANTES por minuto						
	1	2	3	4	5	6	Sumas
1	0,02	0,03	0,04	0,03	0,03	0,02	0,17
2	0,05	0,04	0,10	0,07	0,02	0,04	0,32
3	0,05	0,12	0,08	0,06	0,01	0,02	0,34
4	0,01	0,04	0,04	0,04	0,03	0,01	0,17
Sumas	0,13	0,23	0,26	0,20	0,09	0,09	1,00

a) ¿Cuál es la probabilidad de que entren menos de 4 llamadas por minuto?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos 3 llamadas por minuto?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que entren al menos 5 llamadas y salgan a lo más 3 llamadas por minuto?

d) ¿Cuál es la probabilidad **condicional** de que salgan 3 llamadas por minuto, **dado** que entran 4 por minuto?

e) ¿Cuál es la probabilidad **condicional** que entren más de 4 llamadas por minuto, **dado** que salen menos de 3 llamadas por minuto?

Antes de resolver las preguntas unas observaciones:

Las probabilidades de los eventos simultáneos *"n llamadas entrantes por minuto"* y *"m llamadas salientes por minuto"* son las 24 que aparecen en el centro de la tabla. Se llaman **probabilidades conjuntas**, porque se asocian a decir n entrantes **y** m salientes, en forma conjunta.

Las probabilidades de las *"llamadas salientes por minuto"* aparecen en el margen derecho. Se obtienen sumando las probabilidades conjuntas por fila horizontal, en base a que los eventos conjuntos que aparecen en la tabla son mutuamente excluyentes (correspondientes a cada casilla de la tabla).

Las probabilidades de las *"llamadas entrantes por minuto"* aparecen en el margen inferior. Se obtienen sumando las probabilidades conjuntas por columna vertical.

Por estar en los márgenes, ambos tipos de probabilidades se denominan **probabilidades marginales**.

Resolución:

a) Sea E el número de llamadas entrantes, y S el número de llamadas salientes.

Se pide $P(E < 4) = P(E = 1) + P(E = 2) + P(E = 3)$

Estas probabilidades son las marginales de las entrantes, que están en el margen inferior.

$$P(E < 4) = 0{,}13 + 0{,}23 + 0{,}26 = 0{,}62$$

b) Se pide $P(S \geq 3) = P(S = 3) + P(S = 4)$

Estas probabilidades son las marginales de las salientes, en el margen derecho

$$P(S \geq 3) = 0{,}34 + 0{,}17 = 0{,}51$$

c) $P(E \geq 5 \text{ y } S \leq 3) =$

$= P(E=5 \text{ y } S=1) + P(E=5 \text{ y } S=2) + P(E=5 \text{ y } S=3) +$

$+ P(E=6 \text{ y } S=1) + P(E=6 \text{ y } S=2) + P(E=6 \text{ y } S=3)$

Estas son probabilidades conjuntas, y están en la parte central de la tabla. Se suman, pues los eventos son mutuamente excluyentes.

$P(E \geq 5 \text{ y } S \leq 3) = 0{,}03 + 0{,}02 + 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}04 + 0{,}02 = 0{,}14$

d) $P(S=3 \mid E=4) = P(S=3 \text{ y } E=4) / P(E=4) = 0{,}06 / 0{,}20 = 0{,}3$

e) $P(E > 4 \mid S < 3) = P(E > 4 \text{ y } S < 3) / P(S<3) =$

$= (0{,}03 + 0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}04) / (0{,}17 + 0{,}32) = 0{,}11/0{,}49 = 0{,}2245$

Las probabilidades del numerador son conjuntas, las del denominador son marginales de las salientes.

EJEMPLO 9.4

Probabilidades condicionales en un experimento con resultados no equiprobables.

Un experimento tiene como espacio muestral (el conjunto de todos los resultados posibles) S = {a, b, c, d, e}

El espacio no es equiprobable. Las probabilidades de los eventos simples son

$P(a) = 1/12$; $P(b) = 1/2$; $P(c) = 1/9$;

$P(d) = 1/4$; $P(e) = 1/18$

Sean los eventos A = {a, c} ; B = {a, c, e} ; C = {b, d, e}

a) ¿Cuál es la probabilidad condicional de A dado B?

b) ¿Cuál es la probabilidad condicional de B dado A?

c) ¿Cuál es la probabilidad condicional de C dado A?

Resolución:

a) (A y B) = {a, c}

Debido a que cada par de eventos simples son mutuamente excluyentes, entonces

P(A y B) = P(a, c) = P(a) + P(c) = 1/12 + 1/9 =7/36

Por otra parte, P(B) = P(a, c, e) = P(a) + P(c) + P(e) =

= 1/12 + 1/9 + 1/18 = 9/36

Entonces la probabilidad condicional es

$$P(A|B) = \frac{P(AyB)}{P(B)} = \frac{7/36}{9/36} = \frac{7}{9} = 0{,}7778$$

b) Ya vimos que P(B y A) = P(A y B} = 7/36

Además, P(A) = P(a, c) = P(a) + P(c) = 1/12 + 1/9 = 7/36

La probabilidad condicional es

$$P(B|A) = \frac{P(ByA)}{P(A)} = \frac{7/36}{7/36} = 1$$

Aquí podemos observar dos cosas:

Uno, que claramente P(A|B) no es igual a P(B|A)

La segunda es que P(B|A) nos dio 1. ¿Por qué será?

Lo que dice es que, si se sabe que se cumple A, entonces la probabilidad de que se cumpla B es 1.

Veamos cómo son los eventos A y B.

A = {a, c} y B = {a, c, e}

A está contenido en B. Entonces, si se cumple A, significa que resultó a o resultó b, y en ambos casos B se cumplió: luego su probabilidad condicional es 1.

c) (C y A) = vacío. No tienen elementos en común.

Por lo tanto

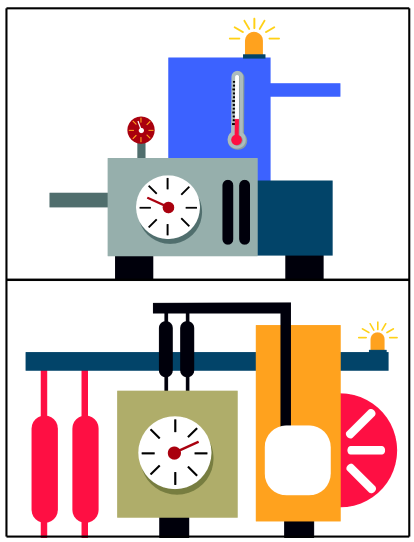
$$P(C|A) = \frac{P(CyA)}{P(A)} = \frac{0}{7/36} = 0$$

Como A y C no tienen elementos en común, si sabemos que se cumplió C, no pudo cumplirse A, por lo tanto, la probabilidad condicional de A dado C es 0.

EJEMPLO 9.5

Dos máquinas con producción de ítems defectuosos.

Una fábrica tiene dos máquinas que manufacturan el mismo producto. Designaremos las máquinas por M1 y M2.



De la producción total, un 40% corresponde a M1 y un 60% a M2.

M1 produce un 1% de ítems defectuosos.

M2 produce un 3% de defectuosos.

Se selecciona un ítem al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Se inspeccionó el ítem seleccionado y resultó ser defectuoso.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina M1?

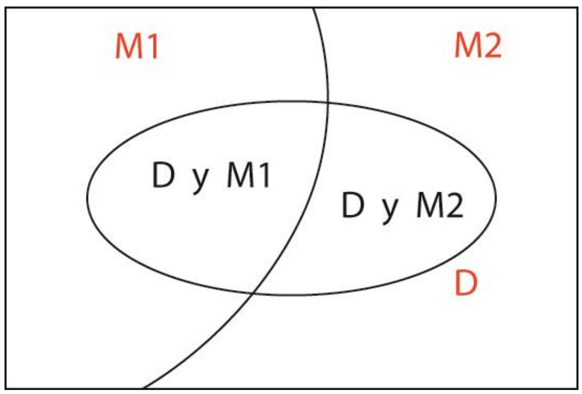
c) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina M2?

Resolución:

Primero definiremos los siguientes eventos: M1 es el evento “el ítem fue manufacturado por la máquina M1”, M2 el evento “fue manufacturado por M2”.

D es el evento “el ítem es defectuoso”.

La situación se ilustra en la siguiente figura.



Si se selecciona un ítem al azar, se tienen las siguientes probabilidades:

La probabilidad de que haya sido manufacturado por la máquina M1 es 0,40, es decir, P(M1) = 0,40.

De forma análoga P(M2) = 0,60.

Además se tienen las siguientes probabilidades condicionales; Si se sabe que el ítem ha sido manufacturado por la máquina M1, la probabilidad de que sea defectuoso es 0,1. Es decir, P(D | M1)=0,01.

Análogamente, P(D | M2) = 0,03.

a) Por ser M1 y M2 eventos mutuamente excluyentes, (D y M1) y (D y M2) también lo son.

Entonces, mira la figura y verás que P(D) = P(D y M1) + P(D y M2)

Pero por la relación entre la **probabilidad conjunta** y la **probabilidad condicional**, se tiene

P(D y M1) = P(D | M1) x P(D) = 0,01 x 0,40 = 0,004

y también P(D y M2) = P(D | M2) x P(M2) = 0,03 x 0,60 = 0,018.

Por lo tanto P(D) = P(D y M1) + P(D y M2) = 0,004 + 0,018 = 0,022

b) Sabemos que el ítem es defectuoso, luego se cumple el evento D.

Entonces queremos la probabilidad condicional de que proviene de la máquina M1.

Por la definición de probabilidad condicional,

P(M1 | D) = P(M1 y D)/P(D) = P(D y M1)/P(D) = 0,004/0,022 = 0,1818

c) De la misma forma,

P(M2 | D) = P(M2 y D)/P(D) = P(D y M2)/P(D) = 0,018/0,022 = 0,8182

Es mucho más probable que provenga de la máquina 2. Eso es porque esta máquina produce más que la máquina 1, y además produce tres veces más defectuosos.

Observación: (M1 y D) es el mismo evento que (D y M1), luego las probabilidades conjuntas P(M1 y D) y P(D y M1) son iguales.

Pero, ¡cuidado con las probabilidades condicionales!

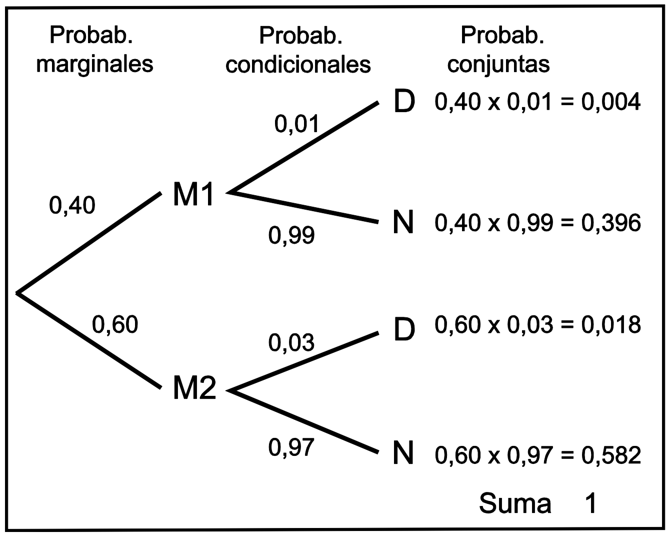
No es lo mismo P(D | M1) que P(M1 | D), pues ambos eventos juegan roles distintos.

En P(D | M1) estamos diciendo que D es un evento aleatorio, mientras que M1 es un evento que se sabe se cumplió, no es aleatorio.

En P(M1 | D) ocurre lo contrario.

Tenemos otra forma de resolver este Ejemplo.

Observa el diagrama de árbol de la figura siguiente, en que M1 y M2 son las máquinas, D es defectuoso, N es no defectuoso.



El diagrama contiene las probabilidades marginales, las probabilidades condicionales de ser defectuoso o no, dado que el ítem fue producido por la máquina M1 o la máquina M2.

Finalmente, contiene las probabilidades conjuntas de cada máquina y defectuoso, y cada máquina con no defectuoso. Estas probabilidades se obtienen multiplicando las marginales con las respectivas condicionales.

Los cálculos de las probabilidades son los mismos de la primera manera de solucionar este Ejemplo:

a) P(D) = P(D y M1) + P(D y M2) = 0,004 + 0,018 = 0,022.

Se suman por ser mutuamente excluyentes.

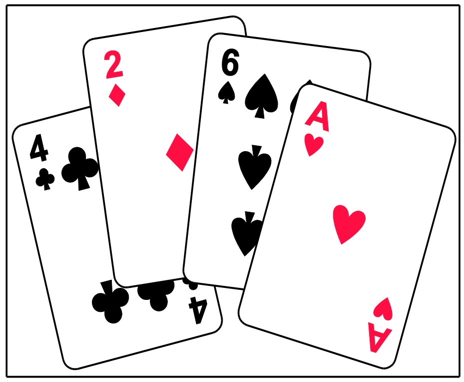
b) P(M1 | D) = P(M1 y D)/P(D) = P(D y M1)/P(D) = 0,004/0,022 = 0,1818

c) P(M2 | D) = P(M2 y D)/P(D) = P(D y M2)/P(D) = 0,018/0,022 = 0,8182

EJEMPLO 9.6

Extracción de cartas de un mazo inglés.

Se extraen 4 cartas de un mazo ingles de 52 cartas (13 corazones, 13 diamante, 13 pick y 13 trébol), sin devolución.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro sean trébol?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sean trébol?

Resolución:

a) Como todas las cartas tienen igual probabilidad de extraerse, en cada extracción se trata de un espacio equiprobable. Entonces podemos aplicar el modelo de Laplace.

En ambos casos las posibilidades totales se obtienen recurriendo al **principio multiplicativo**. Para la primera extracción las posibilidades son 52; para la segunda, son 51; para la tercera son 50; y para la cuarta, son 49.

Entonces el total de posibilidades son 52 x 51 x 50 x 49 = 6497400

Las posibilidades favorables a que las cuatro sean trébol, habiendo 13 en el mazo, por el mismo principio, son 13 x 12 x 11 x 10 = 17160

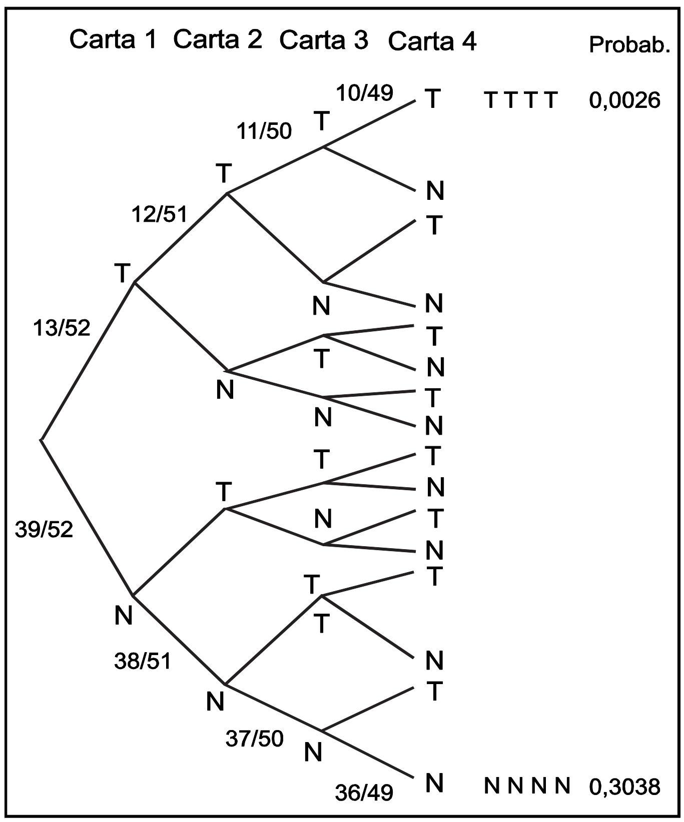
Entonces la probabilidad es 17160 / 6497400 = 0,0026

b) Las probabilidades favorables a que ninguna sea trébol, considerando que hay 39 que no son trébol, son 39 x 38 x 37 x 36 = 1974024.

Entonces la probabilidad es 1974024 / 6497400 = 0,3038 mucho más grande que la de la parte a).

Observa los números grandes de posibilidades, tanto del numerador como del denominador del modelo de Laplace. Hay que tener presente que en estos casos un pequeño error causaría un error grande en el cálculo de las probabilidades.

Otra solución usando un **diagrama de árbol** como el siguiente, en que T significa trébol, N es cualquier otra carta:



a) La probabilidad de que las cuatro sean trébol es igual a

13/52 X 12/51 x 11/50 x 10/49 = 0,0026

Esto se debe a que cada vez que sale un trébol, como es sin reposición, queda una carta menos en el mazo, y esa carta menos es precisamente un trébol.

b) La probabilidad de que ninguna sea trébol es

39/52 x 38/51 x 37/50 x 36/49 = 0,3038

EJEMPLO 9.7

Control de calidad en la fabricación de instrumentos de precisión.

En un taller se fabrican dos instrumentos de precisión en una semana.

Una vez que cada uno es terminado, pasa al laboratorio de control de calidad, donde se somete a pruebas para decidir si es aceptado o tiene que reprocesarse.

Por experiencia acumulada, se tiene lo siguiente:

La probabilidad de que el primero sea aceptado es 0,8.

Si el primer instrumento es aceptado, la probabilidad de que el segundo sea aceptado es 0,9.

Si el primero no es aceptado, la probabilidad de que se acepte el segundo es 0,7.

a) Encuentra la probabilidad de que los dos son aceptados.

b) Encuentra la probabilidad de que ninguno de los dos sea aceptado.

c) Encuentra la probabilidad de que uno de ellos es aceptado y el otro no.

Resolución:

Siempre, en un problema de probabilidades, se debe definir los eventos involucrados.

Sea A el evento "*el primer instrumento es aceptado*" y sea B el evento "*el segundo es aceptado*"

Se tiene lo siguiente:

$P(A) = 0,8$ $P(B \mid A) = 0,9$ $P(B \mid A^C) = 0,7$

a) El evento que ambos sean aceptados es equivalente al evento (A y B).

Por la definición de probabilidad condicional,

$P(A \text{ y } B) = P(B \mid A)\, P(A)$

$= 0,9 \times 0,8 = 0,72$

b) El evento que ninguno es aceptado es equivalente al evento (A^C y B^C).

Por la definición de probabilidad condicional,

$P(A^C \text{ y } B^C) = P(B^C \mid A^C)\, P(A^C)$

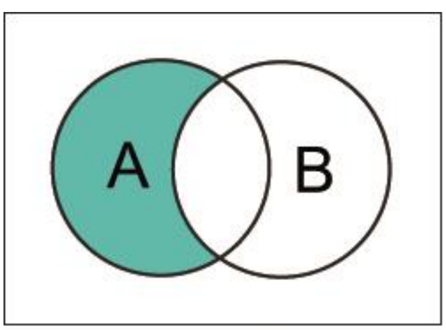
$= [1 - P(B \mid A^C)]\, [1 - P(A)]$

$= [1 – 0,7]\, [1 – 0,8] = 0,3 \times 0,2 = 0,06$

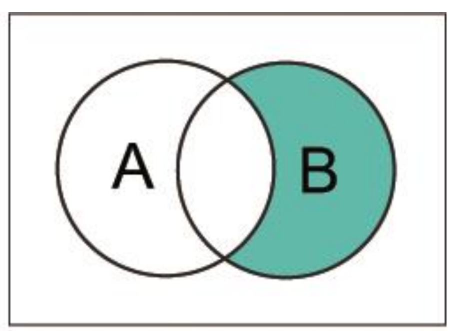
c) El evento que sólo uno es aceptado es equivalente al evento

[(A y B^C) o (A^C y B)].

Los dos eventos (A y B^C) y (A^C y B) son mutuamente excluyentes, pues en cada uno está el complemento de lo que está en el otro. Las figuras ilustran los dos eventos.



A y B^C



A^C y B

Entonces $P[(A \text{ y } B^C) \text{ o } (A^C \text{ y } B)] = P(A \text{ y } B^C) + P(A^C \text{ y } B) =$

$= P(B^C \mid A)\, P(A) + P(B \mid A^C)\, P(A^C) =$

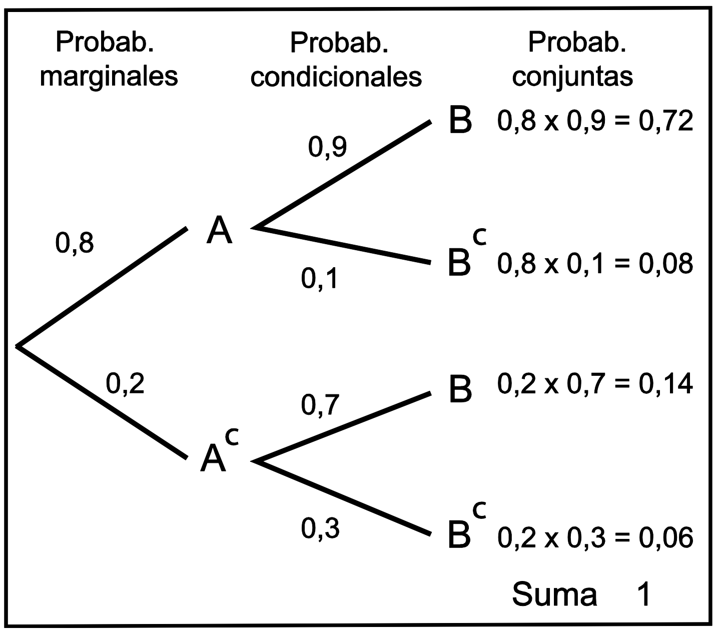
$= [1 - P(B \mid A)]\ P(A) + P(B \mid A^C)\ [1 - P(A)]$

$= [1 - 0{,}9] \times 0{,}8 + 0{,}7 \times [1 - 0{,}8] =$

$= 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}22$

Observa que las tres probabilidades calculadas en a), b) y c) suman 1. ¿Por qué debe ser así?

Otra forma de resolverlo, usando diagrama un de árbol, como el siguiente:



a) Ambos aceptados. Corresponde a las ramas superiores, en que la probabilidad conjunta es

$P(A \text{ y } B) = 0{,}72$.

b) Ninguno es aceptado. Corresponde a las ramas inferiores.

$P(A^C \text{ y } B^C) = 0{,}06$

c) Uno sólo es aceptado. Corresponde a las dos ramas centrales, que son mutuamente excluyentes. Por lo tanto, su probabilidad es la suma de ambas probabilidades conjuntas.

$P(A + B^C) + P(A^C + B) = 0{,}08 + 0{,}14 = 0{,}22$

Para complementar el tema de Probabilidad condicional, veremos una regla que permite expresar una **probabilidad condiciona**l de un evento A dado un evento B, en términos de la **probabilidad marginal** de A.

Esta regla se denomina **Regla de Bayes**.

Observa que, de acuerdo a la definición de probabilidad condicional,

$$P(A \text{ y } B) = P(B|A)\ P(A)$$

y por otra parte,

$$P(A|B) = P(A \text{ y } B) / P(B) = P(B|A)\ P(A) / P(B) = P(A)\ P(B|A) / P(B)$$

Entonces hemos visto que P(A|B) es proporcional a P(A), y el factor de proporcionalidad es P(B/A)/P(B).

Esta esa versión más simple de la Regla de Bayes. Existen otras versiones más complejas, que no cubriremos en este texto.

Para interpretar este importante resultado, supongamos que A es un evento cualquiera y B es información pertinente al evento A, obtenida de una muestra aleatoria, como, por ejemplo, el valor de un promedio muestral.

Entonces la diferencia entre P(A) y P(A|B) es que P(A) es la probabilidad marginal de A, **sin conocer la información** muestral B.

Mientras que P(A|B) es la probabilidad **una vez conocida** la información muestral B. En consecuencia, se espera que P(A|B) es una probabilidad **mejor** que P(A).

En este contexto, la probabilidad P(A) se le suele llamar **probabilidad a priori**. Antes de conocer la información sobre B.

Y a la probabilidad P(A|B) se le llama probabilidad **a posteriori**. Después de conocida la información sobre B.

Este ciclo se puede repetir, una vez que uno disponga de más información, puede tener una probabilidad P(B y C), que es mejor que las dos anteriores.

Esto refleja el hecho que, a medida que vamos acumulando información pertinente al evento A, nuestras probabilidades de A se hacen mejores.

Pero, ¿qué significa que sean mejores?

El que sean **mejores** significa que se acercan más a 0 o bien a 1.

Ya dijimos antes, que una probabilidad de A cercana a 0,5 corresponde a una situación en que hay mayor grado de **incertidumbre**. Si la probabilidad se acerca a 0 significa que hay más **certidumbre** que A **no** se va a cumplir.

Si la probabilidad de A se acerca a 1, hay más certidumbre que A **sí** se va a cumplir.

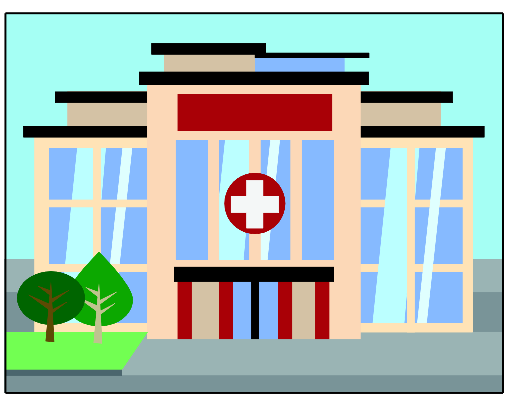
Por eso, mientras más información tenemos acerca del evento, menos incierto es su resultado. Eso lo dice la Regla de Bayes, pero también lo dice el sentido común.

Veamos cómo se aplica la regla de Bayes, en el ejemplo siguiente:

EJEMPLO 9.8

Concurso de proyectos de infraestructura hospitalaria.

Una firma desarrolla proyectos de infraestructura para el sistema hospitalario, y los presenta a concurso cada vez que se llama a propuesta pública.



Por experiencia de varios años, se sabe que la probabilidad de que uno de sus proyectos tenga menos puntaje **total** que otro, o sea que pierde la propuesta, es 0,4.

La probabilidad de que su proyecto tenga menos puntaje que otro en la parte **económica** es 0,5.

Y la probabilidad condicional de que tenga menos puntaje en la parte económica **dado** que tiene menos puntaje total que otro es 0,72.

¿Cuál es la probabilidad condicional que tenga menos puntaje total que otro **dado** que se sabe que tiene menos puntaje que otro en la parte económica?

Sea T el evento "*tiene menos puntaje total que otro*".

sea E el evento "*tiene menos puntaje que otro en la parte económica*".

Se tiene que P(T) = 0,4 ; P(E) = 0,5 ; P(E|T) = 0,72.

Se quiere conocer P(T|E)

Por la Regla de Bayes,

P(T|E) = P(E|T) P(T)/P(E) = 0,72 x 0,4/0,5 = 0,576.

Si sabemos que otro proyecto tiene menos puntaje en la parte económica, la probabilidad de que tenga menos puntaje total que otro proyecto es 0,576; mayor que la probabilidad de que tenga menos puntaje total de otro, 0,4 sin la información sobre la parte económica.

EJEMPLO 9.9

Seguros contra incendio.

La compañía de seguros Fogatita se especializa en seguros contra incendio de casas.

Como parte de un estudio orientado a fijar los valores que debe cobrar por los seguros, la compañía determinó lo siguiente:

Sea X el número de incendios ocurridos en un mes en el área de operaciones de Fogatita (esté o no asegurada por esta).

Entonces se tiene que

$P(X=1) = 0,54$

$P(X=2) = 0,28$

$P(X=3) = 0,18$

Sea A el evento "*no se incendia ninguna casa que esté asegurada por Fogatita, en un mes cualquiera*"

También se conocen las siguientes probabilidades condicionales:

$P(A \mid X=1) = 0,20$

Esto quiere decir que no se incendia ninguna casa que esté asegurada por Fogatita, dado que se incendió una casa en el área de operaciones de Fogatita, en un mes cualquiera.

Además se sabe que $P(A \mid X=2) = 0,12$

Y que $P(A \mid X=3) = 0,05$

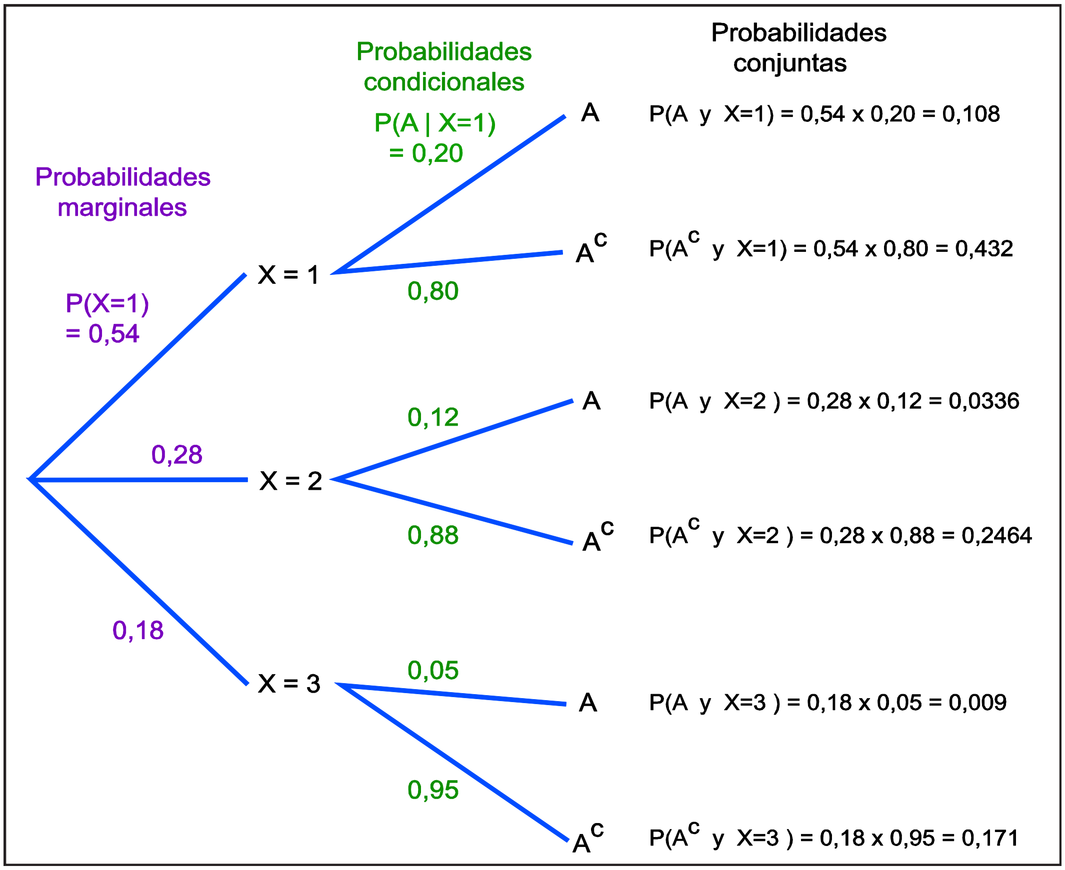
a) ¿Cuál es la probabilidad de que no se incendie ninguna casa asegurada por Fogatita?

b) Si no se incendia ninguna casa asegurada por Fogatita, ¿cuál es la probabilidad condicional de que se incendie una casa ($X = 1$) en el área de operaciones de Fogatita?

c) Si se incendia una casa ($X=1$) en el área de operaciones de Fogatita, ¿cuál es la probabilidad de que sí se haya incendiado alguna casa asegurada por Fogatita?

Resolución:

Nos ayudaremos por un gráfico de árbol:



a) Tenemos que P(A) = P(A y X1) + P(A y X2) + P(A y X3) =

P(A|X=1) x P(X=1) + P(A|X=2) x P(X=2) + P(A|X=3) x P(X=3) =

= 0,108 + 0,0336 + 0,009 = 0,1506

b) Se pide P(X=1 | A). Aquí usamos la Regla de Bayes

P(X=1 | A) = P(X=1) x P(A | X=1) / P(A) =

= 0,20 x 0,54 / 0,1506 = 0,7171

c) Se pide P(A^C | X=1)

Por complemento, P(A^C | X=1) = 1- P(A | X=1) =

1-0,20 = 0,80

EJEMPLO 9.10

Comparación de dos métodos de higiene bucal.

Se hizo un estudio consistente en probar la efectividad de dos métodos de higiene bucal en la prevención de caries, el método A y el método B. Después de un año, se observó el desarrollo de caries. El resultado observado se clasificó en tres categorías: bajo, moderado, alto.

Supongamos que participaron en el estudio un total de 200 personas. Con los resultados obtenidos, se construyó la siguiente tabla de frecuencias, clasificados según el **tratamiento** y según el **desarrollo de caries**. Este tipo de procedimiento de doble clasificación suele llamarse **cruce de variables**:

Frecuencias observadas	Desarrollo bajo	Desarrollo medio	Desarrollo alto	Totales
Tratamiento A	10	44	30	84
Tratamiento B	82	22	12	116
Totales	92	66	42	200

Podemos observar que al tratamiento A le corresponden más casos con desarrollo de caries moderado y alto, mientras que al tratamiento B le corresponden más casos de bajo desarrollo de caries. Entonces, hay un cierto grado de **asociación** entre ambas variables.

a)	Obtén las probabilidades **conjuntas** a partir de las frecuencias relativas.

Calcula las probabilidades marginales de las variables **tratamiento** y **desarrollo de caries**.

b)	Calcula las probabilidades condicionales del desarrollo de caries **dado** el tratamiento.

c)	Calcula las probabilidades condicionales del tratamiento **dado** el desarrollo de caries.

Resolución:

a)	A partir de estas frecuencias observadas, estimamos las probabilidades conjuntas de que una persona, seleccionado al azar, haya recibido uno de los tratamientos y haya desarrollado caries en la forma indicada.

Esto se hace mediante las **frecuencias relativas**, que se obtienen dividiendo las frecuencias por el total de observaciones, 200.

La tabla de probabilidades se muestra a continuación:

Probabilidades conjuntas	Desarrollo bajo	Desarrollo medio	Desarrollo alto	Probabilidades marginales de Tratamiento
Tratamiento A	0,05	0,22	0,15	0,42
Tratamiento B	0,41	0,11	0,06	0,58
Probabilidades marginales de Desarrollo	0,46	0,33	0,21	1,00

Veamos algunos ejemplos de cómo interpretar estas probabilidades:

Probabilidades conjuntas:

La probabilidad de que una persona cualquiera seleccionada al azar haya recibido el tratamiento A **y** tenga desarrollo bajo de caries, es 0,05.

La probabilidad de que haya recibido el tratamiento B **y** tenga un desarrollo alto de caries es 0,06.

Las **probabilidades marginales** están en los márgenes, derecho e inferior.

Probabilidades marginales de la variable **tratamiento**;

La probabilidad de que haya recibido el tratamiento A es 0,42.

La probabilidad de que haya recibido el tratamiento B es 0,58.

Probabilidades marginales de la variable **desarrollo de caries**:

La probabilidad de desarrollo bajo es 0,46.

La probabilidad de desarrollo medio es 0,33.

La probabilidad de desarrollo alto es 0,21.

b) Ahora calculemos las probabilidades **condicionales**.

Recordemos la definición de **probabilidad condicional**:

Si F e G son dos eventos cualesquiera, la probabilidad de F dado que se sane que se cumple G, es

$$P(F|G) = P(F \text{ y } G) / P(G)$$

Para simplificar la notación, llamaremos A al evento "*recibió el tratamiento A*",

B al evento "recibió el tratamiento B"; DB al evento "*ha tenido un desarrollo bajo de caries*", DM al evento "*ha tenido un desarrollo medio de caries*", DA al evento "*ha tenido un desarrollo alto de caries*".

Entonces para obtener las probabilidades condicionales **dado el tratamiento recibido**, basta dividir las probabilidades conjuntas por las respectivas probabilidades marginales del tratamiento:

Probabilidad de desarrollo bajo de caries **dado** que recibió el tratamiento A (probabilidad de desarrollo bajo si se sabe que recibió el tratamiento A): redondeado a cuatro decimales, es igual a

$$P(DB \mid A) = P(A \text{ y } DB) / P(A) = 0{,}05 / 0{,}42 = 0{,}1190$$

Análogamente,

$$P(DB \mid B) = P(B \text{ y } DB) / P(B) = 0{,}41 / 0{,}58 = 0{,}7069$$

$P(DM \mid A) = P(A \text{ y } DM) / P(A) = 0{,}22 / 0{,}42 = 0{,}5238$

Los seis valores están dados en la **tabla de probabilidad** siguiente:

Probabilidades condicionales dados los Tratamientos	Desarrollo bajo	Desarrollo medio	Desarrollo alto	Sumas
Tratamiento A	0,1190	0,5238	0,3572	1,0000
Tratamiento B	0,7069	0,1897	0,1034	1,0000

Veamos cómo de interpretan algunas de estas probabilidades:
La probabilidad de que una persona tenga un desarrollo bajo **dado** que recibió el tratamiento A es 0,1190.

La probabilidad de que tenga un desarrollo medio de caries **si se sabe** que recibió el tratamiento B es 0,1897.

c) Ahora veamos las probabilidades condicionales del tratamiento, **dado**, o **sabido**, que tuvo tal desarrollo de caries:

Para esto, basta dividir las probabilidades conjuntas por las respectivas probabilidades marginales del desarrollo de caries:

Probabilidad de que haya recibido el tratamiento A **dado** que tiene un desarrollo bajo de caries (Probabilidad de que haya recibido el tratamiento A si se sabe que tiene un desarrollo bajo de caries), redondeado a cuatro decimales, es igual a

$P(A \mid DB) = P(A \text{ y } DB) / P(DB) = 0{,}05 / 0{,}46 = 0{,}1087$

Análogamente,

$P(A \mid DM) = P(A \text{ y } DM) / P(DM) = 0{,}22 / 0{,}33 = 0{,}6667$

$P(A \mid DA) = P(A \text{ y } DA) / P(DA) = 0{,}15 / 0{,}21 = 0{,}7143$

Los seis valores están dados en la **tabla de doble entrada** siguiente:

Probabilidades condicionales dados los Desarrollos de caries	Desarrollo bajo	Desarrollo medio	Desarrollo alto
Tratamiento A	0,1087	0,6667	0,7143
Tratamiento B	0,8913	0,3333	0,2857
Sumas	1,0000	1,0000	1,0000

Veamos cómo es la interpretación de algunas de estas probabilidades:

La probabilidad de que una persona recibió el tratamiento A **dado** que tiene un desarrollo bajo de caries 0,1087.

La probabilidad de que recibió el tratamiento B **si se sabe** que tiene un desarrollo alto de caries es 0,2857.

Recordemos que si A y B son dos eventos, la relación entre las probabilidades marginal P(A), la condicional P(B|A) y la conjunta P(A y B) es

$$P(A \text{ y } B) = P(B \mid A) \times P(A)$$

Esto se puede generalizar a tres eventos, A, B y C:

P(A) es la probabilidad marginal de A

P(B | A) es la probabilidad condicional de B dado A. Por la definición de probabilidad condicional, P(B | B) es igual a P(A y B)/P(A).

P(C | A y B) es la probabilidad condicional de C dados A y B. Es igual a

P(A y B y C) / P(A y B).

Y P(A y B y C) es la probabilidad conjunta de los tres eventos A, B y C.

Entonces la relación entre estas cuatro probabilidades es

P(A y B y C) = P(C | A y B) x P(B | A) x P(A)

Te dejamos que verifiques que esta relación es correcta.

EJERCICIOS

9.1) Un juego consiste en lo siguiente:

Primero se lanzan dos monedas. Luego se lanzan tantas monedas como el número de caras que salió en el primer lanzamiento (0, 1, o 2).

a) Si se cuenta el número total de caras en ambos lanzamientos, ¿cuáles son los valores posibles de este número?

b) Encuentra la probabilidad de cada uno de los valores encontrados en a) Recuerda que deben sumar 1.

9.2) Un taladro se usa para hacer agujero de una determinada medida en pretinas de fierro.

Hay 5 brocas disponibles, de las cuales 3 son de la marca A y 2 de la marca B.

Las de la marca A tienen una probabilidad de ¼ de quebrarse mientras está en uso.

Las de la marca B tienen una probabilidad de 1/3 de quebrarse cuando está en uso.

a) Si se usa una broca cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de que se quiebre?

b) Si una broca se quiebra durante el uso ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca A? ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

9.3) Beatriz y Francisco juegan 12 partidas de ajedrez. Beatriz gana 6, Francisco gana 4 y en 2 hacen tablas.

Acuerdan jugar 2 partidas más.

Usando la experiencia de las 12 partidas jugadas para estimar las probabilidades, calcula la probabilidad de que:

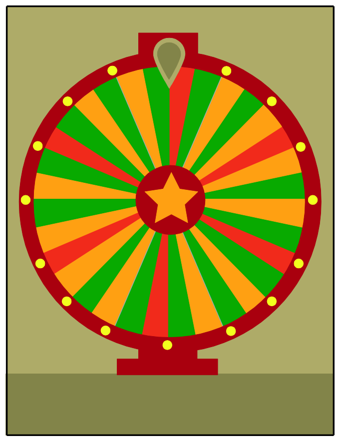
a) Beatriz gane las dos,

b) Beatriz gane la primera, Francisco la segunda,

c) hagan tablas en exactamente una,

d) Francisco gane al menos una partida.

9.4) Una rueda de la fortuna tiene 60 posiciones, 6 de ellas tienen premio. Yo tengo derecho a hacer girar la rueda tres veces.



a) ¿Cuáles son las probabilidades de no sacarme un premio, de sacarme un premio, de sacarme dos premios, de sacarme tres premios?

b) Construye un gráfico de barras de las probabilidades de sacarme 0, 1, 2 y 3 premios.

9.5) Una empresa quiso que sus clientes evaluaran los diseños de sus productos.

En el pasado, 95% de los productos exitosos en el mercado recibieron buenas evaluaciones.

El 60% de los productos de éxito moderado recibieron buenas evaluaciones.

El 10% de los productos de poco éxito recibieron buenas evaluaciones.

También se sabe que el 40% de los productos ha sido exitoso en el mercado, el 35% ha tenido éxito regular y los restantes han tenido poco éxito.

Ayúdate con un diagrama de árbol para responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un producto obtenga una buena evaluación?

b) Si un producto obtiene una buena evaluación, ¿cuál es la probabilidad condicional de que sido exitoso?

c) Si un producto no obtiene una buena evaluación, ¿cuál es la probabilidad condicional de que haya sido exitoso?

9.6) Para una rifa hay 10 números. Se sortearán 3 premios entre los 10 números, sin reposición. O sea, no puede salir premiado el mismo número más de una vez. Yo compré 2 números. ¿Cuál es la probabilidad de sacarme algún premio (1 o 2 premios)?

9.7) Una central eléctrica tiene dos estaciones, A y B.

Estas presentan fallas, que se clasifican en dos tipos: fallas del equipo eléctrico y fallas por sobrecarga.

La tabla siguiente muestra el número de veces que falló cada estación, según el tipo, en los últimos tres años, de un total de 200 fallas consideradas.

Estación	A	B
Fallas del equipo eléctrico	40	64
Fallas por sobrecarga	54	42

Usaremos las frecuencias relativas como probabilidades.

a) Encuentra las probabilidades conjuntas de cada combinación *tipo de falla* y *estación* (son cuatro).

b) Encuentra las probabilidades marginales de falla de cada uno de los *tipos de falla* (son dos).

c) Encuentra las probabilidades marginales de falla en cada una de las *estaciones* (también son dos).

d) Encuentra las probabilidades condicionales de falla de cada tipo, dado que la falla es en cada una de las estaciones (son cuatro).

e) Encuentra las probabilidades condicionales de que la falla es en cada estación, dado que es de cada uno de los tipos (también son cuatro).

9.8) En cierta zona geográfica, y en una determinada época del año, no ha llovido hace varios días. Usando la experiencia de años anteriores, se determinaron las siguientes probabilidades:

La probabilidad **a priori** que llueva cualquier día es 0,45. La expresión **a priori** se refiere a que no se tiene información sobre si llovió o no los días anteriores.

Las siguientes son probabilidades **a posteriori**, pues son probabilidades dada o conocida la información acerca de si llovió o no el día anterior:

La probabilidad de que llueva un día cualquiera, dado que ha llovido el día anterior, sin saber nada sobre los días anteriores, es 0,30.

Si no llueve un día y no se sabe nada sobre el día anterior, la probabilidad de que llueva el siguiente es 0,75.

Las siguientes también son probabilidades **a posteriori**, pues son probabilidades dado el conocimiento acerca de si llovió o no los dos días anteriores:

Si llueve un día y el día anterior no, la probabilidad de que llueva el día siguiente es 0,8.

Si llueve dos días seguidos, la probabilidad de que llueva un tercero es 0,1.

Si no llueve dos días seguidos, la probabilidad de que no llueva el tercero es 0,05.

Si llueve un día y no llueve el siguiente, la probabilidad de que llueva el tercero es 0,85.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de tres días seguidos, llueva exactamente dos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva dos días seguidos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, de tres días seguidos, llueva menos de dos?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que, en tres días seguidos, llueva al menos uno?

9.9) Jorge tiene la mala costumbre de que, cuando debe cambiar una ampolleta quemada, guarda la que está quemada junto con las buenas, en lugar de botarla.

En una caja hay cinco ampolletas, de las cuales dos están quemadas.

Para saber cuáles están buenas, se debe probar una por una, hasta detectar las dos quemadas o las tres no quemadas.

¿Cuáles son las probabilidades que el proceso se detenga

a) en la primera prueba,

b) en la segunda prueba,

c) en la tercera,

d) en la cuarta,

e) en la quinta prueba?

10 - Eventos independientes

¿Me sirve la información que tengo?

Para comprender el tema de **eventos independientes**, es importante comprender bien el concepto de **probabilidad condicional**, visto la sección anterior.

MOTIVACION

Consideremos dos eventos A y B, y tomemos la **probabilidad marginal** de A.

Por otra parte, después nos dicen que se sabe que el evento B **se cumplió**. Ya no es aleatorio.

¿Esa información nos cambia nuestra medida de certeza de que se cumpla A? Es decir, ¿la **probabilidad marginal** de A es igual o no a la **probabilidad condicional** de A dado B?

Si ambas probabilidades son iguales, quiere decir que el conocimiento de que se cumplió B no afecta en nada la probabilidad de A.

Decimos, en tal caso, que estos dos eventos son **independientes**.

Por otro lado, si la **probabilidad marginal** de A es distinta a la **probabilidad condicional** de A **dado** B, decimos que estos dos eventos **no son independientes**. El conocimiento de que se cumplió el evento B nos modifica la probabilidad asignada al evento A.

Daremos la definición formal de eventos independientes.

Dos eventos A y B son independientes, si la probabilidad de A dado B es igual a la probabilidad de A.

En símbolos, A y B son independientes si

$$P(A|B) = P(A)$$

Pero recordemos que la probabilidad condicional de A dado B es

$P(A|B) = P(A \text{ y } B) / P(B)$

Entonces A y B son independientes si

$$P(A \text{ y } B) / P(B) = P(A)$$

que equivale a que

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$$

que también equivale a

$$P(A \text{ y } B)/P(A) = P(B)$$

es decir,

$$P(B|A) = P(A)$$

Resumiendo, A y B son eventos independientes si se cumple **cualquiera** de las siguientes tres condiciones:

1. - $P(A|B) = P(A)$

2. - $P(B|A) = P(B)$

3. - $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$

Generalmente la condición número 3 es la que resulta más fácil de comprobar, por lo que es la más usada para determinar si dos eventos son independientes. Pero las tres condiciones pueden servir, indistintamente.

EJEMPLO 10.1

Resultados en matemáticas de alumnos de segundo medio.

a) Supongamos que Patricio es un alumno de Segundo Medio en Puerto Montt, y está cursando la asignatura de matemáticas. Al mismo tiempo, Claudia, una alumna de segundo medio en Calama también está cursando la asignatura de matemáticas.

Patricio y Claudia no son parientes, no se conocen, ni se han visto nunca. El profesor de matemáticas de Patricio no tiene ninguna relación con el profesor de matemáticas de Claudia.

Consideremos los eventos "*Patricio aprueba matemáticas" y "Claudio aprueba matemáticas".*

Y consideremos la probabilidad del primer evento.

Por otro lado, nos enteramos que Claudio aprobó matemáticas. ¿Nos cambia la probabilidad de que Patricio apruebe matemáticas?

Es muy posible que la respuesta es no, porque el conocimiento de que Claudia aprobó matemáticas en Calama no nos aporta nada que modifique nuestra probabilidad, o grado de certeza, de que Patricio apruebe o no matemáticas en Puerto Montt.

Es decir, la probabilidad **condicional** de que Patricio apruebe matemáticas en Puerto Montt **dado** que Claudia aprobó matemáticas en Calama es igual a la probabilidad **incondicional** (o **marginal**) de que Patricio apruebe matemáticas, sin saber qué ocurrió con Claudia.

Entonces decimos que estos eventos son **independientes**.

b) Ahora consideremos los eventos *"Patricio aprueba matemáticas" y "Pablo aprueba matemáticas".*

¿Quién es Pablo? Es amigo de Patricio, también está es segundo medio en Puerto Montt. El y Patricio estudian juntos.

Comparemos la probabilidad marginal de que Patricio apruebe matemáticas, sin saber cómo le fue a Pablo, con la **probabilidad condicional** de que Patricio apruebe matemáticas, **dado** o **sabiendo** que su amigo Pablo aprobó matemáticas.

Parece razonable pensar que son distintas, en particular, la **probabilidad condicional** de que Patricio apruebe, sabiendo que Pablo aprobó, es mayor que la probabilidad de que Patricio apruebe, sin saber cómo le fue a Pablo.

En ese caso, estos últimos dos eventos **no serían independientes**.

EJEMPLO 10.2

Independencia de eventos en un experimento con resultados no equiprobables.

Un experimento tiene como espacio muestral (el conjunto de todos los resultados posibles) S = {s1, s2, s3, s4, s5, s6}

El espacio no es equiprobable. Las probabilidades de los eventos simples son

P(s1) = 1/6 ; P(s2) = 1/18 ; P(s3) = 1/9 ;

P(s4) = 1/3 ; P(s5) = 1/12; P(s6) = 1/4

Sean los eventos Q = {s1, s3} ; M = {s1, s3, s6} ; T = {s2, s4, s6}

a) ¿Son independientes los eventos Q y M?

b) ¿Son independientes los eventos Q y T?

c) ¿Son independientes los eventos M y T?

d) ¿Son independientes los eventos M y S, en que S es el espacio muestral completo?

Resolución:

a) (Q y M) = {s1, s3}

Debido a que cada par de eventos simples son mutuamente excluyentes, entonces

P(Q y M) = P(s1, s3) = P(s1) + P(s3) = 1/6 + 1/9 =5/18 = 0,2778

Ya tenemos la probabilidad conjunta de (Q y M) . Hay que ver si es igual al producto de las probabilidades marginales correspondientes:

P(Q) = P{s1, s3} = P(s1) + P(s3) = 5/18

P(M) = P{s1, s3, s6} = P(s1) + P(s3) + P(s6) = 1/6 + 1/9 + 1/4 = 19/36

Multiplicando, P(Q) x P(M) = 5/18 x 19/36 = 0,1466

P(Q y M) no es igual a P(Q) x P(M), luego Q y M no son eventos independientes.

Ojo: no confundir eventos **independiente**s con eventos **mutuamente excluyentes**. En este caso Q y M no son independientes y tampoco son mutuamente excluyentes, pero son conceptos distintos.

b) (Q y T} = vacío

P(Q y T) = P(vacío) = 0

Hay que ver si es igual al producto de las probabilidades marginales correspondientes:

P(Q) = 5/18 como vimos antes

P(T) = P{s2, s4, s6} = P(s2) + P(s4) + P(s6) = 1/18 + 1/3 + 1/4 = 23/36

Multiplicando, P(Q) x P(T) = (5/18) x (19/36) = 0,1466 no es 0, luego P(Q y T) no es igual a P(Q) x P(T), y por lo tanto Q y T no son eventos independientes.

Sin embargo, son mutuamente excluyentes, pues su intersección es el vacío.

c) (M y T} = {s6}

P(M y T) = P(s6) = 1/4 = 0,2500

las marginales correspondientes son:

P(M) = P{s1, s3, s6} = 19/36

P(T) = P{s2, s4, s6} = 23/36

Y el producto es P(M) x P(T) = 19/36 x 23/36 = 0,3372

Luego Q y T no son eventos independientes.

d) La respuesta es sí.

La verdad es que cualquier evento es independiente del espacio muestral S.

Sea A un evento cualquiera.

A está incluido en S, luego (A y S) = A

Entonces P(A y S) = P(A)

Por otra parte, P(S) = 1, el evento seguro.

Luego P(A) x P(S) = P(A) x 1 = P(A)

Entonces P(A y S) = P(A), y ambos eventos, A y S, son independientes.

EJEMPLO 10.3

Probabilidad de éxito en un negocio de venta de artículos de pesca.

Un pueblo vecino de un lago recibe una cantidad de turistas en época de pesca.

Isabel, una emprendedora, piensa instalarse con un negocio de venta de artículos de pesca.

Según lo que observó entre los turistas que practican la pesca, calcula que tiene una probabilidad de 0,70 de tener éxito en su futuro negocio.

Sin embargo, se enteró que hace tres años otro emprendedor, Diego, se había instalado con un negocio similar, pero tuvo que cerrar porque no le fue bien, por el hecho que los turistas llegaban al pueblo ya premunidos de los artículos de pesca que requerían.

Con ese conocimiento, su probabilidad de éxito bajó de 0,70 a 0,30.

Debido a este cambio, el evento *Isabel tiene éxito* y el evento *Diego no tuvo éxito* no son **independientes**.

EJEMPLO 10.4

Edificio con dos indicadores de incendio que pueden fallar.

En un edificio hay dos indicadores de incendio, que funcionan en forma **independiente**, con el propósito de detectar posibles situaciones de emergencia por fuego.

Las probabilidades respectivas de que se accionen si se inicia un incendio son 0,95 para uno y 0,90 para el otro.

Si comienza un incendio, encuentra las siguientes probabilidades:

a) que se accione a lo menos un indicador,

b) que no se acciones ninguno,

c) que se accione sólo un indicador.

Resolución:

Siempre que se aborda un problema de probabilidad, al inicio se debe definir los eventos involucrados:
sean A el evento "*se acciona el primer indicador*" y B el evento "*se acciona el segundo indicador*".

Los eventos A y B son **independientes**.

Luego P(A y B) = P(A) x P(B) = 0,95 x 0,90 = 0,855

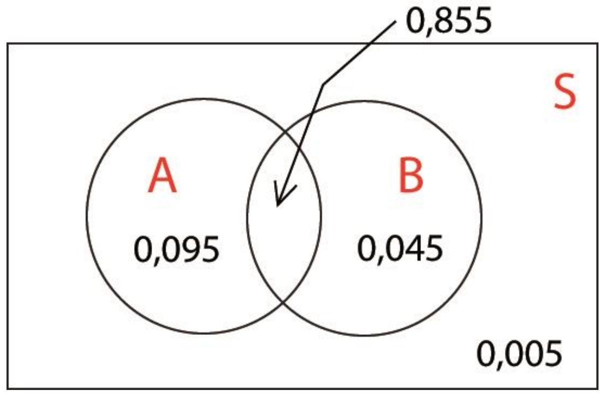
Conociendo

P(A) = 0,95

P(B) = 0,90

P(A y B) = 0,855

podemos construir el siguiente diagrama de Venn:



Puedes verificar que P(A) = 0,95 y P(B) = 0,90, sumando las probabilidades contenidas en A y en B, respectivamente.

a) Se pide que se accione el primero, o el segundo, o ambos, es decir, la probabilidad de la unión P(A o B).

Por la propiedad 3 de la probabilidad,

P(A o B) = P(A) + P(B) – P(A y B) = 0,95 + 0,90 – 0,855 = 0,995

b) Ahora se pide $P((A \text{ o } B)^C)$.

Por complemento, esto es igual a 1 – P(A o B) = 1-0,995 = 0,005

c) Si se acciona sólo uno, puede ser el primero y el segundo no, o puede ser el segundo y el primero no.

Es decir, $(A \text{ y } B^C)$ o bien $(A^C \text{ y } B)$.

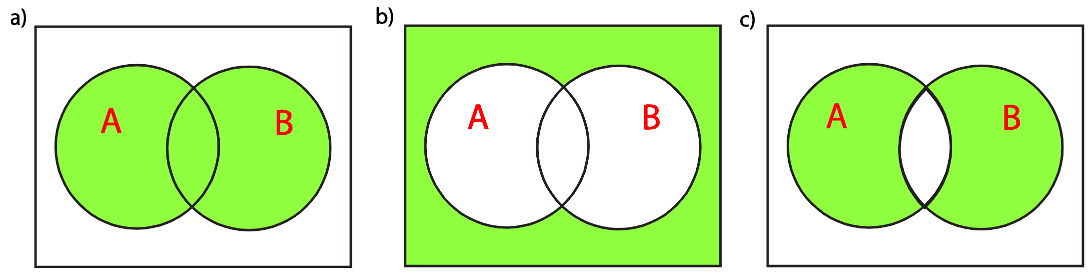
Por lo tanto se pide $P[(A \text{ y } B^C) \text{ o } (A^C \text{ y } B)]$.

Pero $(A \text{ y } B^C)$ y $(A^C \text{ y } B)$ son **mutuamente excluyentes.** ¿Por qué es eso?

Entonces, con ayuda del diagrama de Venn, tenemos

$P[(A \text{ y } B^C) \text{ o } (A^C \text{ y } B)] = P(A \text{ y } B^C) + P(A^C \text{ y } B) = 0{,}095 + 0{,}045 = 0{,}140$

La figura siguiente muestra los tres casos:



EJEMPLO 10.5

Inspección de partidas de circuitos integrados.

Un fabricante de computadores recibe un lote de 100 circuitos integrados. El lote contiene 20 defectuosos.

El encargado del control de calidad elige dos al azar, sin remplazo, y los somete pruebas, para determinar si son o no defectuosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primero seleccionado sea defectuoso?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo sea defectuoso?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo sea defectuoso, dado que el primero resultó ser defectuoso?

d) ¿Son independientes los eventos *"el primero es defectuoso"* y " *el segundo es defectuoso".*

e) Construye un diagrama de árbol que muestre todas las posibilidades y sus respectivas probabilidades. Haz una tabla con las probabilidades de que haya uno, dos o tres defectuosos en la muestra de dos.

f) ¿Cómo cambian las respuestas del punto c) si los circuitos se toman con reemplazo antes de la segunda selección?

Resolución:

a)   Como todos tienen igual probabilidad de ser seleccionado, podemos hacer uso del modelo de Laplace, por lo que la probabilidad es

P(el primero es defectuoso) = 20/100 = 0,2.

b)   No sabemos nada acerca del primer circuito seleccionado, por lo que la probabilidad de que el segundo sea defectuoso es igual que si no hubiésemos extraído el primero. Es decir, es igual a la probabilidad de que el primero sea defectuoso, luego,

P(el segundo es defectuoso) = 0,20.

c)   Ahora sí tenemos información acerca del resultado del primero. Luego se trata de una probabilidad condicional.

Entonces se nos pide P(el segundo es defectuoso | el primero es defectuoso).

Dado que en la primera extracción obtuvimos un defectuoso, si extraemos un segundo circuito, quedan 99 circuitos para elegir.

De éstos, 19 son defectuosos, pues ya el de la primera selección salió defectuoso.

Entonces la probabilidad de defectuoso para el segundo, dado que el primero es defectuoso, es

P(el segundo es defectuoso | el primero es defectuoso) = 19/99 = 0,1919.

d)   Recordemos las propiedades de eventos independientes, tenemos que, si A y B son eventos independientes, entonces

$$P(A|B)=P(A)$$

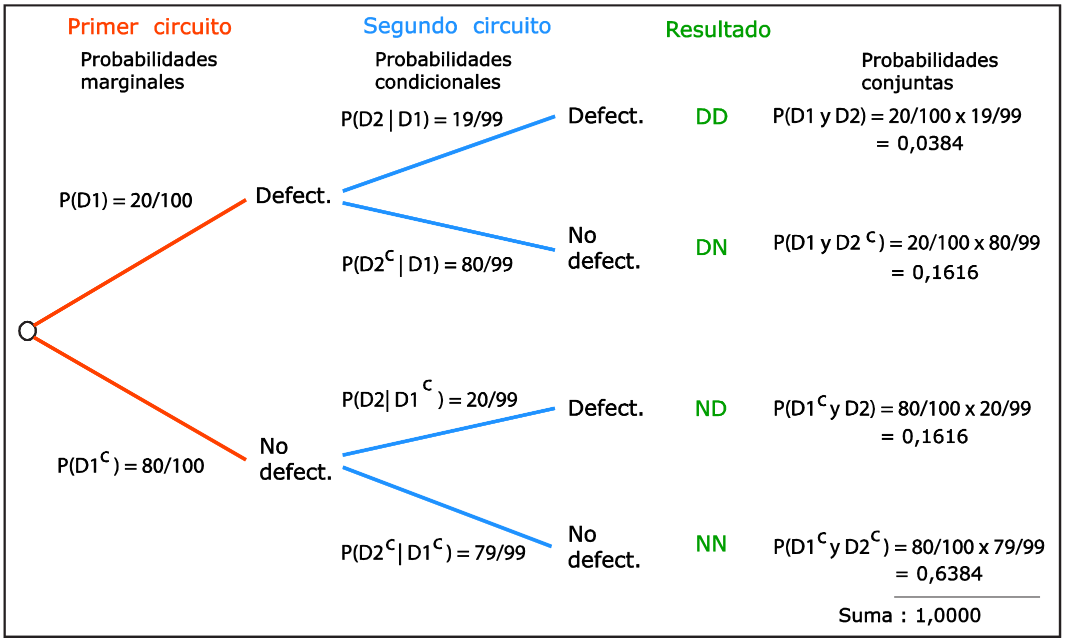
En este caso, según el resultado de c),

P(el segundo es defectuoso | el primero es defectuoso) = 0,1919

Y por el resultado de b), P(el segundo es defectuoso) = 0,20

No son iguales, por lo tanto, no son independientes.

e) Si D1 es el evento *"el primero es defectuoso"* y D2 el evento *"el segundo es defectuoso".* El diagrama de la figura muestra todas las posibilidades con las probabilidades marginales de la primera extracción, las probabilidades condicionales de la segunda, dado el resultado de la primera, y las probabilidades conjuntas de ambos resultados.



La tabla siguiente resume los resultados obtenidos, según número de defectuosos.

Los eventos DN y ND corresponden a un defectuoso. Las probabilidades se suman, por cuanto estos eventos son mutuamente excluyentes.

Número de defectuosos en la muestra	Probabilidad
0	0,6384
1	0,1616+0,1616 = 0,3232
2	0,0384
Suma	1

f) Si es con devolución, la probabilidad de que el segundo es defectuoso es igual a 20/100 = 0,2 dado que el primero es defectuoso. En realidad, es 0,2 sin importar el resultado de la primera extracción, pues es con devolución.

Por lo tanto es igual a la probabilidad P(el segundo es defectuoso) , lo que significa que son independientes.

EJERCICIOS

10.1) ¿Son independientes los eventos

A = "*las llamadas entrantes son más de 4* ",

B= "*las llamadas salientes son menos de 3*",

del Ejemplo 9.3?

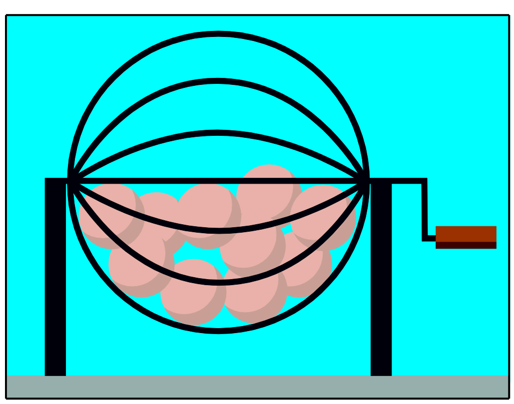
10.2) La probabilidad de que una persona A esté viva dentro de 25 años es 0,7.

La probabilidad de que otra persona, B, esté viva dentro de 25 años es 0,5.

Supongamos que el evento que A esté vivo en 25 años más, y el evento que B esté vivo en 25 años más son independientes.

¿Cuál es la probabilidad de que ambos estén vivos en 25 años más?

10.3) a) Una tómbola tiene 25 bolitas numeradas 1, 2, 3, …, 25.



Se extrae una bolita, al azar, se repone en la tómbola, y luego se extrae una segunda bolita, al azar.

Considera el evento *"sale el 5 en la primera extracción"* y el evento *"sale un 10 en la segunda selección".*

¿Son independientes estos eventos?

b) Se repite el experimento descrito en la parte a), con la diferencia que la bolita extraída la primera vez, no se repone en la tómbola.

¿Ahora son independientes los dos eventos mencionados en la parte a)?

Respuestas de los ejercicios.

Incluyen indicaciones para su resolución.

Respuestas Capítulo 3:

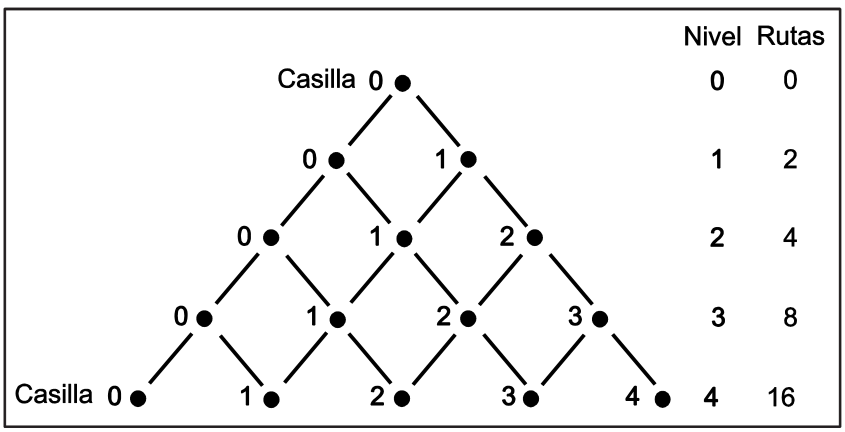
3.1) I indica izquierda, D derecha

a) I, D; 2 caminos

b) II, ID, DI, DD; 4 caminos

c) III, IID, IDI, DII, IDD, DID, DDI, DDD; 8 caminos

d) 16 caminos.



Respuestas Capítulo 4:

4.1) La probabilidad de llegar a un punto final es igual al número de caminos que conducen a él dividido por el número total de caminos (modelo de Laplace).

a) 1/4, 1/2 y 1/4 b) 1/8, 3/8, 3/8 y 1/8

c) 1/16, 1/4, 3/8, 1/4, 1/16.

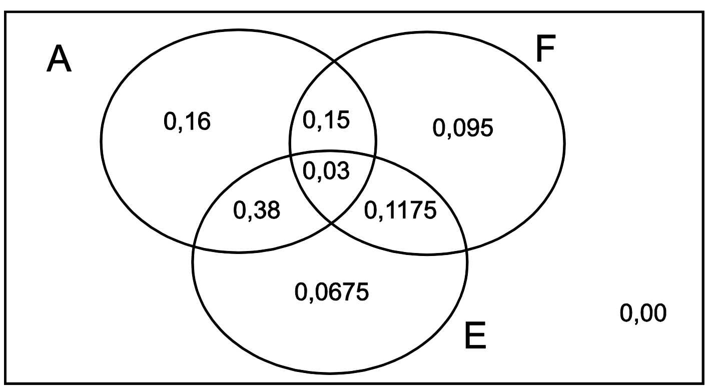
4.2) Se espera que haya 15 caras, pero si efectivamente se lanzan, el número de casos no es necesariamente 15, aunque debería ser un valor cercano.

Respuestas Capítulo 5:

5.1)

a) Eventos	b) Probabilidad
Menor de 21 años	0,30
Edad intermedia	0,52
Mayor de 75 años	0,18
Hombre	0,44
Mujer	0,56
Mujer y menor de 21	0,18
Mujer edad intermedia	0,26
Mujer mayor de 75 años	0,12
Hombre menor de 21 años	0,12
Hombre edad intermedia	0,26
Hombre mayor de 75 años	0,06

5.2)



a) 0,03 b) 0,16 + 0,15 =0,31 c) 0,095 + 0,1175 = 0,2125

c) 0,16 + 0,38 + 0,0675 = 0,6075 e) 0,16

5.3) a) No. Suman más de 1.

b) No. r y s son eventos simples, luego son mutuamente excluyentes, por lo tanto P(r y s) debe ser cero.

c) No. 0,15 + 0,52 + 0,26 < 1

d) P(r o t) = P(r) + P(t) por ser mutuamente excluyentes

0,43 = 0,08 + P(t) de donde P(t) = 0,35

También P(s o t) = P(s) + P(t)

0,17 = P(s) + 0,35

Daría P(s) negativo, por lo tanto, no es permisible.

e) No.
0,7 = P(r o s) = P(r) + P(s) = 0,4 + 0,3 está correcto.

Por otro lado, 0,8 = P(s o t) = P(s) + P(t) = 0,3 + P(t)

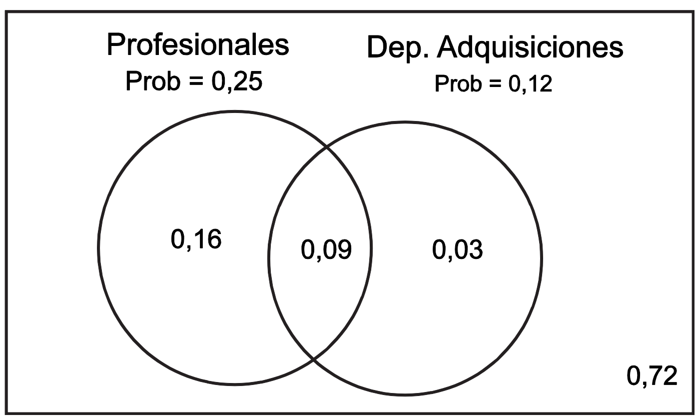
de donde P(t) = 0,5.

Hasta ahí todo bien, pero

P(r) + P(s) + P(t) = 0,4 + 0,3 + 0,5 es mayor que 1.

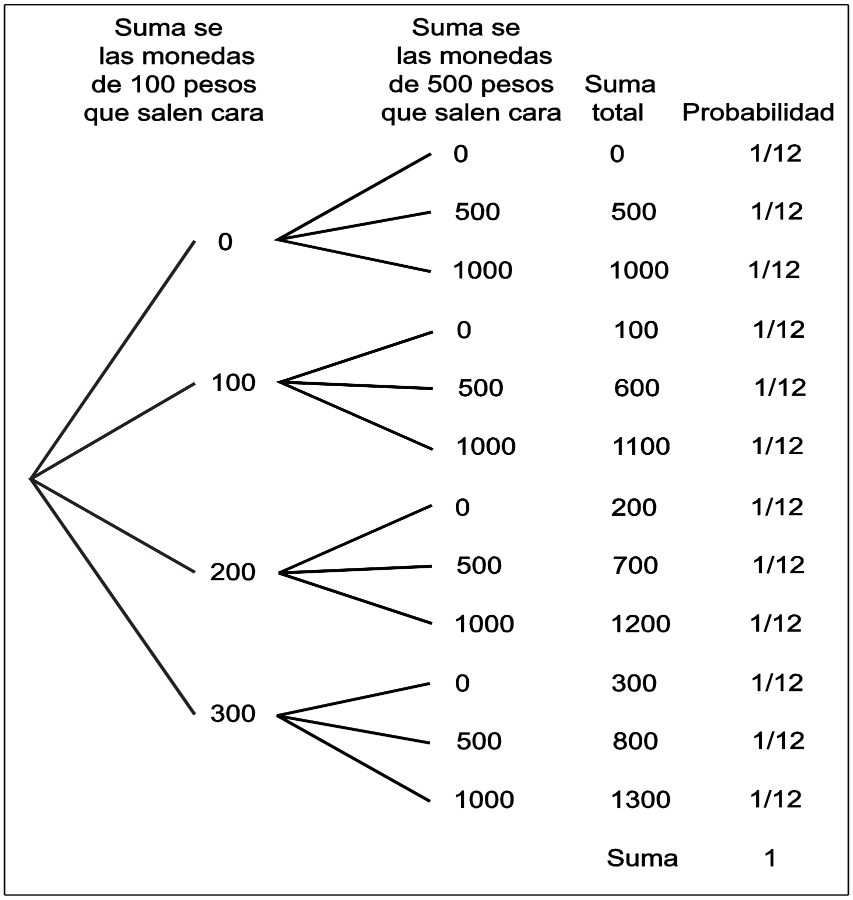
Respuestas Capítulo 6:

6.1)



a) 0,09 b) 0,72 c) 0,16

6.2) El diagrama de árbol siguiente muestra todas las posibilidades.



a) Observando el diagrama, vemos que las sumas posibles, ordenadas de menor a mayor, son:

0, 100, 200, 300, 500, 600, 700, 800, 1000, 1100, 1200, y 1300.

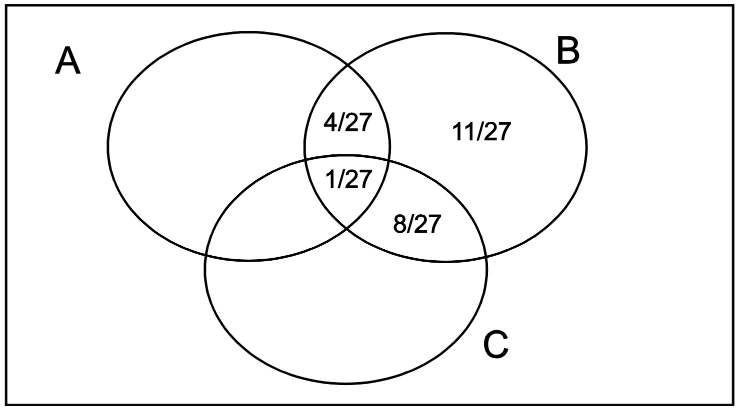
b) Las 12 posibilidades son igualmente probables, luego es aplicable el modelo de Laplace, por lo que la probabilidad de cada una es 1/12.

Las sumas mayores de 1000 son tres: 1100, 1200, 1300.

Luego la probabilidad es 3/12 = 1/4.

c) Las sumas mayores o iguales que 600 y menores que 1300 son 600, 700, 800, 1100, y 1200. Luego la probabilidad es 5/12.

6.3)

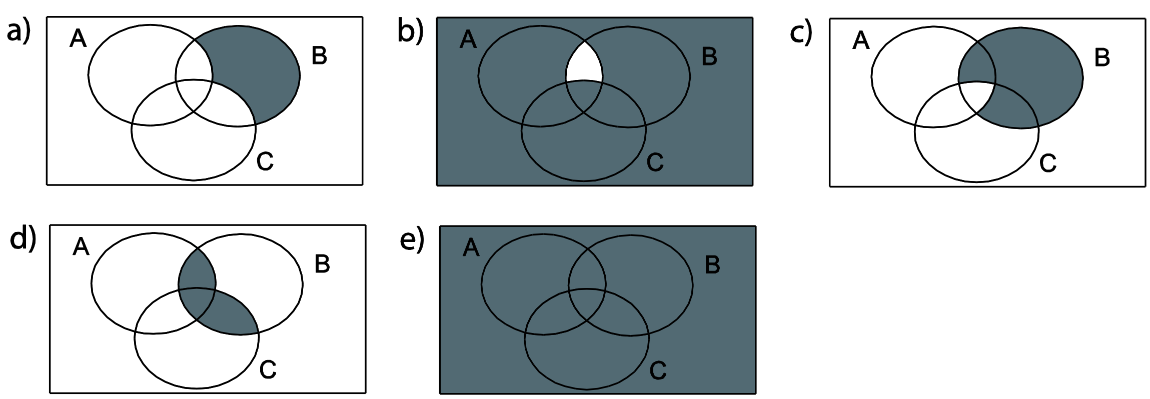


a) 11/27 b) 1-4/27 = 23/27

c) 4/27 + 11/27 + 8/27 = 23/27 d) 4/27 + 8/27 + 1/27 = 13/27

e) 1

Las siguientes figuras muestran cada una de las situaciones:



6.4) a) La ciudad se selecciona al azar. Luego es un espacio equiprobable, por lo tanto, P(Al) = P(Ch) = P(SF) = P(LV) = P(LA) = 1/5

b) P(LV o Al) = P(LV) + P(Al) = 2/5

c) P(SF o LA) = P(SF) + P(LA) = 2/5

d) P(SF^C y LV^C) = P[(SF o LV)^C] por la regla de De Morgan.

Además P[(SF o LV)^C] = 1- P(SF o LV) = 1 – P(SF) – P(LV) = 3/5

e) P(SF o SV o LA) = P(SF) + P(SV + P(LA) = 3/5

f) P(AL o Ch o SF o LV) = 4/5

Respuestas Capítulo 7:

7.1) Posibilidades favorables a ganar un premio = 6

Total de posibilidades = 60

El espacio muestral es equiprobable. Luego por el modelo de Laplace,

P(premio) = 6/60 = 0,1

7.2) a) José tiene igual probabilidad de pertenecer a cualquiera de los dos grupos.

Posibilidades favorables a estar en el grupo que recibió el placebo = 1.

Total de posibilidades = 2 (hay dos grupos).

Luego por el modelo de Laplace,

P(pertenecer al grupo del placebo) = 1/2 = 0,5

b) Posibilidades favorables al grupo del medicamento = 2.

Total de posibilidades = 3.

Probabilidad de que José esté en el grupo que recibe el medicamento, 2/3.

7.3) El espacio de los números en que cae la bolita es equiprobable, numerados del 0 al 36. Luego son 37 posibilidades, en total.

Por el modelo de Laplace, la probabilidad de cada apuesta es igual al número de posibilidades dividido por 37.

La tabla siguiente, que vimos en el enunciado, muestra las apuestas, el número de posibilidades, y el pago de cada apuesta. Le hemos agregado una columna con las probabilidades calculadas de ganar cada apuesta

Apuesta	Posibilidades	Pago	Probabilidad
A - Pleno	1	35	1/37 = 0,027
B - Semi pleno	2	17	2/37 = 0,054
C - Calle	3	11	3/37 = 0,081
D - Cuadro	4	8	4/37 = 0,108
E - Línea	6	5	6/37 = 0,162
F - Columna	12	2	12/37 = 0,324
G - Docena	18	1	18/37 = 0,486
H – Color	18	1	18/37 = 0,486
I - Par/impar	18	1	18/37 = 0,486
J - Mitad	18	1	18/37 = 0,486

Observa que el monto de los premios tiene una relación inversa con la probabilidad de obtenerlo.

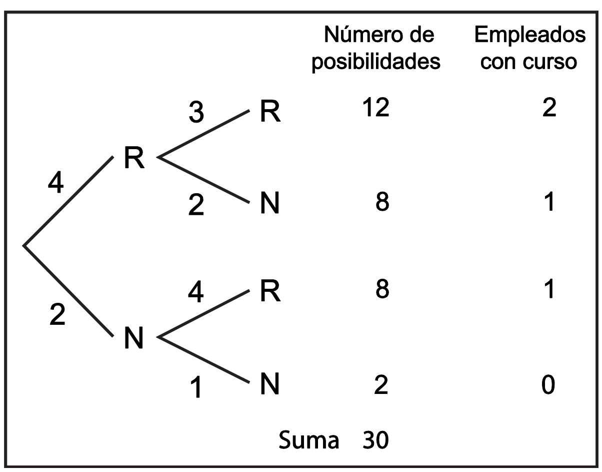
Estas probabilidades no son sumables, pues no son mutuamente excluyentes.

<u>Respuestas Capítulo 8</u>:

8.1) El siguiente gráfico de árbol muestra las posibilidades de selección, el número de posibilidades en cada rama y el número de posibilidades totales por cada ruta.

Para esto, se aplica el principio multiplicativo.

Por ejemplo, la ruta RR tiene 4 x 3 = 12 posibilidades.



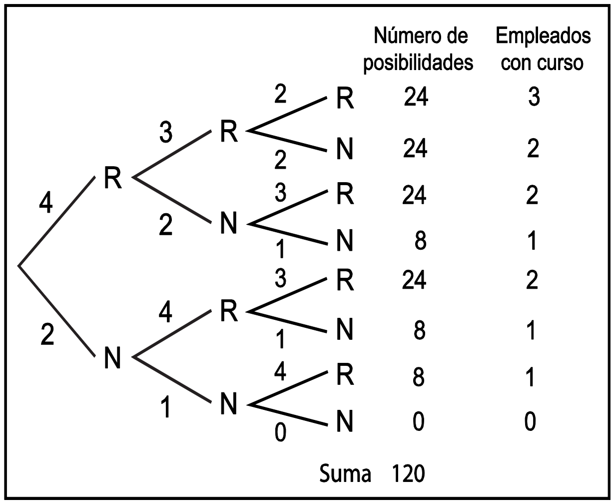
a) Posibilidades favorables = 12

Total de posibilidades = 30

Probabilidad 12/30 = 2/5

b) (8 + 8)/30 = 8/15 por el principio aditivo.

Para responder las partes c) y d) se muestra el gráfico siguiente:



c) Ahora el total de posibilidades es 120.

Probabilidad = 24/120 = 1/5

d) Al menos dos significa 2, 3 o 4.

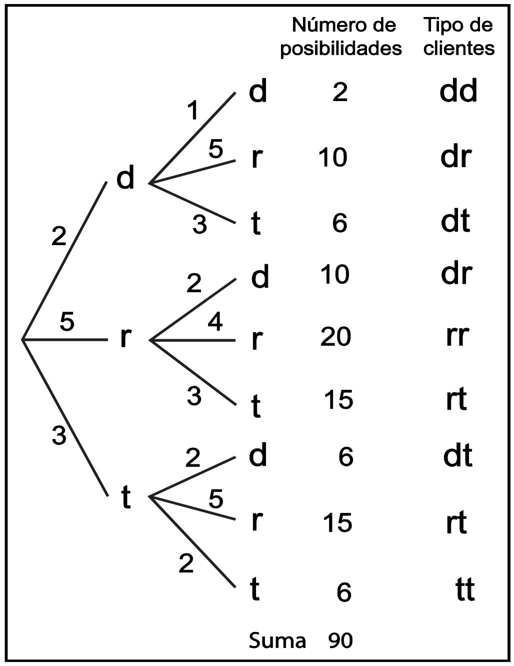
La probabilidad es (24 + 24 + 24 + 24)/120 = 96/120 = 4/5

e) La probabilidad es 0, pues sólo 2 no han tomado el curso.

8.2) a) d significa que hace publicidad en diarios, r en radio y t en televisión

El espacio muestral es {dd, dr, dt, rr, rt, tt}.

b) El siguiente gráfico de árbol muestra las posibilidades de selección, el número de posibilidades en cada rama, el número de posibilidades totales por cada ruta y el tipo de clientes en cada selección.



Se aplicó el principio multiplicativo para obtener el número de posibilidades en cada caso.

La tabla siguiente muestra las posibilidades, con sus respectivas probabilidades.

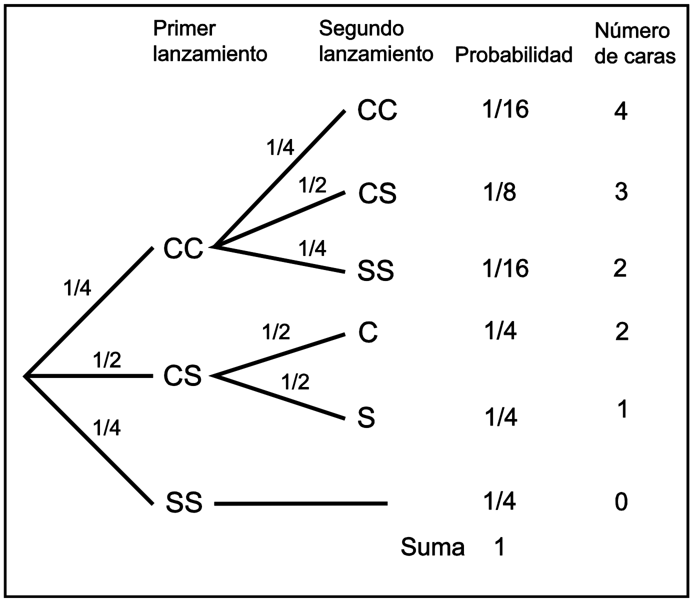
En los casos en que hay más de un caso, se usa el principio aditivo para obtener el número de posibilidades por caso.

Tipo de clientes	Probabilidad
dd	2/90 = 1/45
dr	(10 + 10)/90 = 2/9
dt	(6 + 6)/90 = 4/30
rr	20/90 = 2/9
rt	(15 + 15)/90 = 1/3
tt	6/90 = 1/15
Suma	1

<u>Respuestas Capítulo 9</u>:

9.1) a) 0, 1, 2

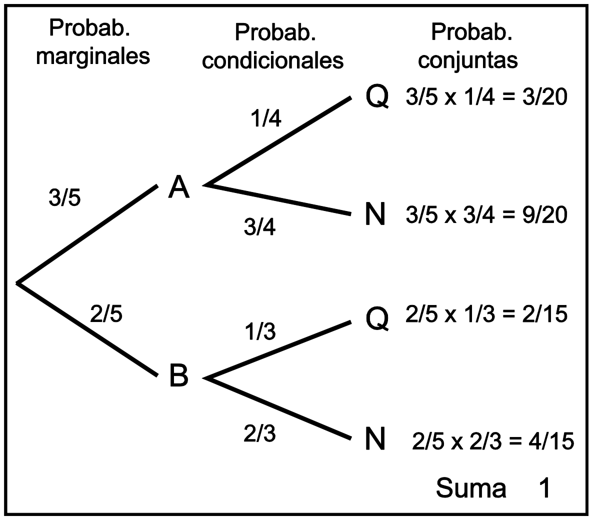
b)



Resumiendo:

Número de caras	Probabilidad
0	1/4
1	1/4
2	5/16
3	1/8
4	1/16
Suma	1

9.2) a) La figura siguiente muestra las posibilidades. Q, se quiebra, N, no se quiebra.



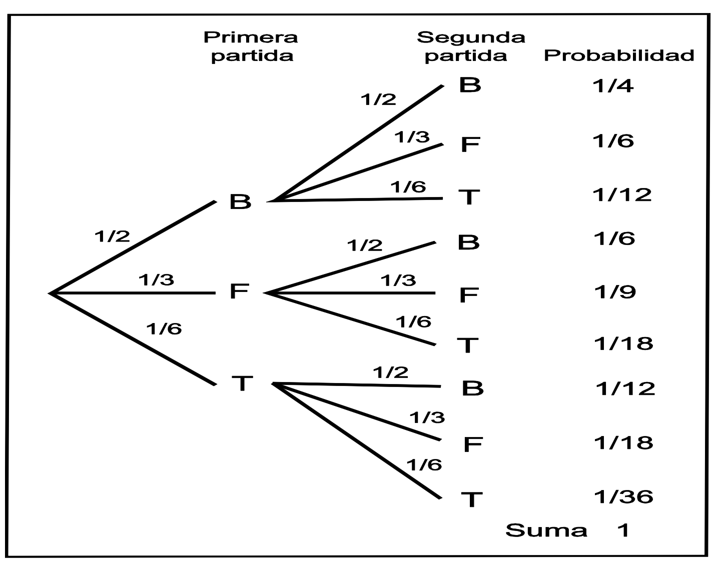
P(Q) = P(A y Q) + P(B y Q) =3/20 +2/15 = 17/60

b) P(A|Q) = P(A y Q)/P(Q) = (3/20)/(17/60) = 9/17

P(B|Q) = P(B y Q)/P(Q) = (2/15)/(17/60) = 8/17

9.3) Usaremos las frecuencias observadas de los resultados obtenidos como estimaciones de las probabilidades de que gane Beatriz, o Francisco, o hagan tablas, 6/12 = 1/2, 4/12 = 1/3 y 2/12 = 1/6, respectivamente.

El siguiente diagrama de árbol muestra los posibles resultados con sus respectivas probabilidades:



a) P(Beatriz los dos juegos) = 1/4

b) P(Beatriz gane la primera, Francisco gane la segunda) = 1/6

c) Aplicando en principio aditivo, se obtienen la siguiente probabilidad:

P(Hagan tablas en exactamente una) =

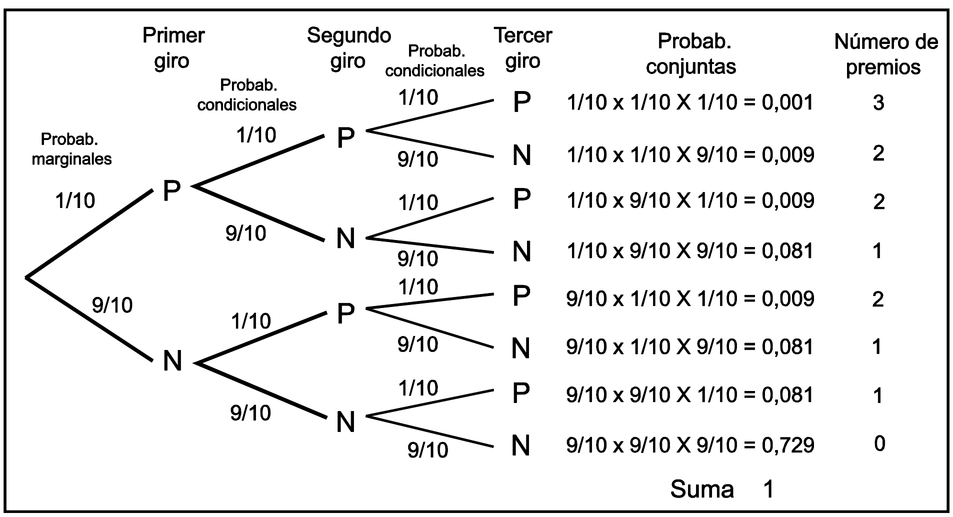
= 1/12 + 1/18 +1/12 + 1/18 = 5/18

d) P(Francisco gane al menos exactamente una) = P(Francisco gana sólo la primera, o gana sólo la segunda o gana ambas) =

= 1/6 + 1/6 + 1/9 + 1/18 + 1/18 = 5/9

9.4) La figura siguiente representa los resultados de los tres giros.

P significa premio, con probabilidad 6/60 = 1/10, N significa que no obtiene premio, con probabilidad 9/10, en cada giro de la rueda.



A la derecha aparecen las probabilidades conjuntas de cada evento y el número de premios obtenidos en los tres giros.

Las probabilidades se obtienen multiplicando las probabilidades de las ramas correspondientes.

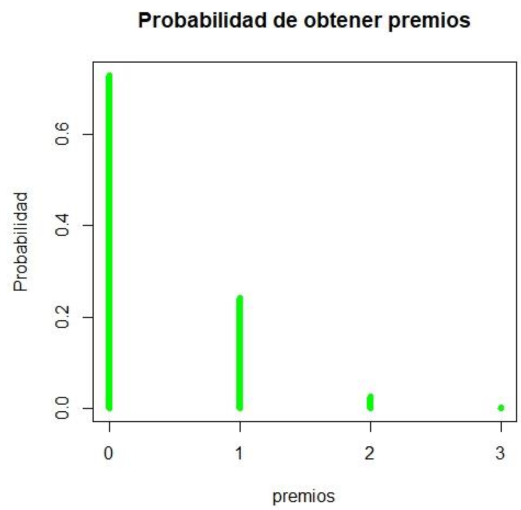
a) La probabilidad de no sacarme ningún premio es 0,729.

La probabilidad de un premio es 0,081 + 0,081 + 0,081 = 0,243. Se suman por ser los tres eventos mutuamente excluyentes.

La probabilidad de sacarme dos premios es 0,009 + 0,009 ´0,009 = 0,027.

La probabilidad de sacarme tres premios es 0,001.

b)



9.5) Sean los eventos

E tener el mayor éxito

R tener un éxito moderado

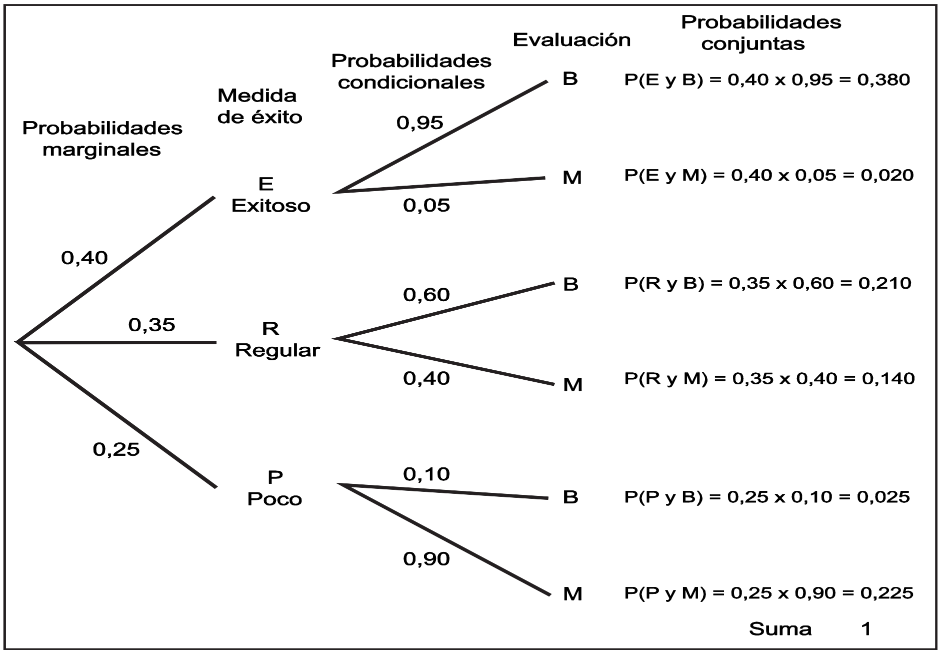
M tener escaso éxito

B el producto obtuvo una buena evaluación.

Se tiene

P(B|E) = 0,95	P(E) = 0,40
P(B|M) = 0,60	P(R) = 0,35
P(B|P) = 0,1	P(P) = 0,25

El siguiente diagrama de árbol ilustra la situación:



a) Por ser E, R y P mutuamente excluyentes,

(B y E), (B y R) y (B y P) también lo son. Y la unión de los tres es B

Luego

P(B) = P(B y E) + P(B y R) + P(B y P) =

= P(B|E) x P(E) + P(B|R) x P(R) + P(B|P) x P(P)

= 0,95 x 0,40 + 0,60 x 0,35 + 0,1 x 0, 25 = 0,615

b) P(E|B) = P(E y B)/P(B) = 0,38/0,615 = 0,6179

P(E|B^C) = P(E y B^C)/P(B^C) = P(B^C|E)P(E)/P(B^C)

Si te fijas bien, hasta aquí hemos aplicado la Regla de Bayes.

Ahora por complementos,

P(E|B^C) =[1-P(B|E)]P(E)/[1-P(B)] = [1-0.95]x0,40/(1-0,615) = 0,0519

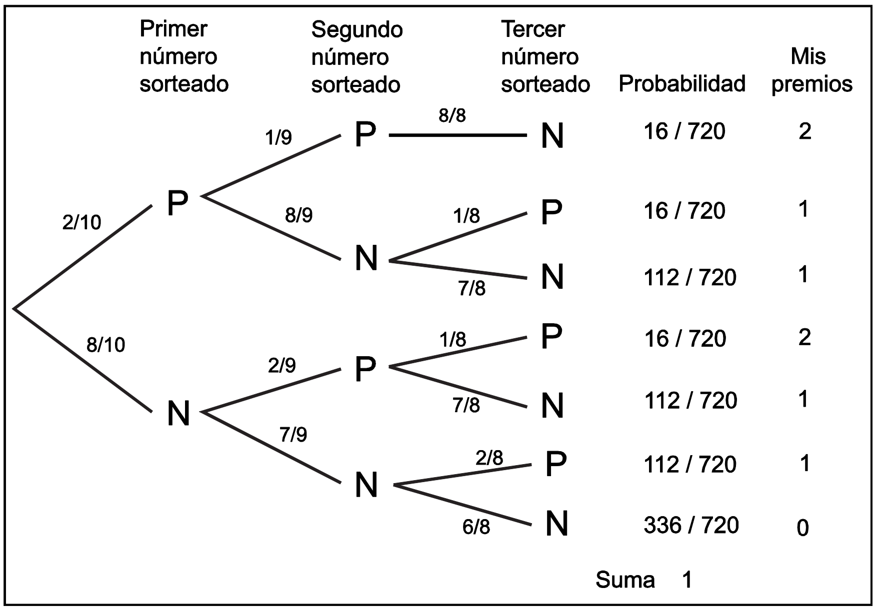
Observamos que si el producto recibió una mala evaluación es muy poco probable que haya sido exitoso.

En cambio, si recibió una buena evaluación, es mucho más probable que haya sido exitoso.

9.6) El diagrama de árbol siguiente muestra los tres números premiados sorteados, con las probabilidades de que yo obtenga o no, con mis dos números.

Por ejemplo, el 2/10 es la probabilidad de obtener un premio con el primer número sorteado.

Hacia la derecha aparece 1/9. Es la probabilidad condicional de obtener un segundo premio, pues me queda un número de un total de 9.



Finalmente aparece 8/8 que es igual a uno. Es la probabilidad condicional de no obtener premio en el tercer sorteo, dado que tuve premios en el primer y en el segundo sorteo, pues si ya saqué dos premios, es imposible obtener un tercero, ya sólo compré dos números.

El producto 2/10 x 1/9 x 8/8 = 16/720 es la probabilidad conjunta de obtener un premio en el primer sorteo, un premio en el segundo sorteo y nada en el tercero.

Entonces, la probabilidad de obtener algún premio es la suma de todas las probabilidades menos la última, ya que las diferentes posibilidades (las ramas del árbol) son mutuamente excluyentes.

Esto es lo mismo que 1 meno la probabilidad de no obtener ningún premio = = 1 – 336/720 = 8/15. Un poco más que 1/2.

9.7) Dividiendo las frecuencias por 200, obtenemos las frecuencias relativas, que serán nuestras probabilidades.

Tipo de falla \ Estación	A	B	Marginal tipo
Equipo eléctrico	0,20	0,32	0,52
Sobrecarga	0,27	0,21	0,48
Marginal estación	0,47	0,53	1

a) Las probabilidades conjuntas están en la parte central de la tabla.

Por ejemplo,

P(falla en el equipo eléctrico y en la estación A) = 40/200 =0,20

b) Las probabilidades marginales del tipo de falla están en el margen derecho de la tabla.

Por ejemplo, P(falla en el equipo eléctrico) = 0,52

c) Las probabilidades marginales de la estación están en el margen inferior de la tabla.

Por ejemplo, P(falla en la estación A) = 0,47

d) Las probabilidades condicionales del tipo de falla dada la estación se obtiene de la siguiente manera:

P(falla en el equipo eléctrico | estación A) =

$$\frac{P(falla\ en\ el\ equipo\ eléctrico\ y\ es\ en\ la\ estación\ A)}{P(falla\ en\ la\ estación\ A)} = \frac{0{,}20}{0{,}47} = 0{,}4255$$

P(falla en el equipo eléctrico | estación B) =$\frac{0{,}32}{0{,}53} = 0{,}6038$

P(falla por sobrecarga | estación A) =$\frac{0{,}27}{0{,}47} = 0{,}5745$

La tabla completa de probabilidades condicionales dad la estación es la siguiente:

Tipo de falla dada la Estación	A	B
Equipo eléctrico	0,4255	0,6038
Sobrecarga	0,5745	0,3962
Suma	1	1

Las sumas horizontales no tienen sentido, pues se trata de estaciones (condiciones dadas) distintas.

e) Las probabilidades condicionales de las estaciones dado el tipo de falla se obtienen de la siguiente forma:

P(falla en la estación A | es en el equipo eléctrico) =

$$\frac{P(falla\ en\ el\ equipo\ eléctrico\ y\ es\ en\ laestación\ A)}{P(falla\ en\ el\ equipo\ eléctrico)} = \frac{0,20}{0,52} = 0,3846$$

La tabla completa aparece a continuación:

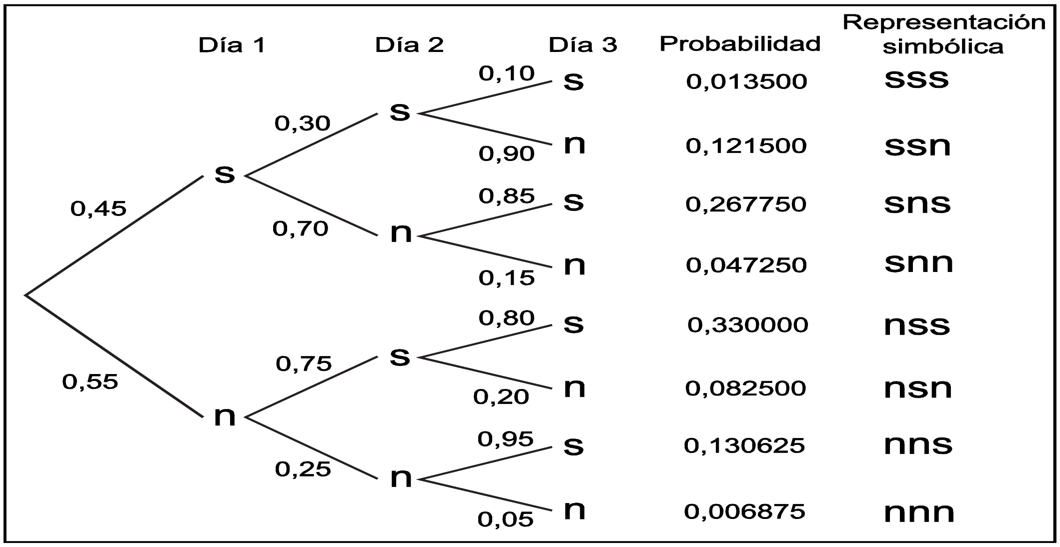
Estación dado el Tipo de falla	A	B	Marginal tipo
Equipo eléctrico	0,3846	0,6154	1
Sobrecarga	0,5625	0,4375	1

Aquí las sumas verticales no tienen sentido, pues se trata de tipos de fallas (condiciones dadas) distintas.

9.8) Usaremos la siguiente notación: s si llueve, n si no llueve.

Entonces P(s) es la probabilidad que llueva un día, P(ns) es la probabilidad que no llueva un día y al siguiente sí, P(sss) es la probabilidad de que llueva tres días seguidos, P(sns) la probabilidad de que llueva, al día siguiente no y al tercer día sí, etc.

El gráfico siguiente muestra las posibilidades, las probabilidades marginales en la primera columna, condicionales en la segunda y tercera, y probabilidades conjuntas en la cuarta columna (sin redondear):



a) P(de tres días seguidos, llueva exactamente dos) =

= P(ssn) + P(sns) + P(nss) = 0,1215 + 0,26775 + 0,33 = 0,71925

b) P(llueva dos días seguidos) = P(sss) + P(ssn) + P(nss) =

= 0,0135 + 0,1215 + 0,33= 0,465

c) P(de tres días seguidos, llueva menos de dos) =

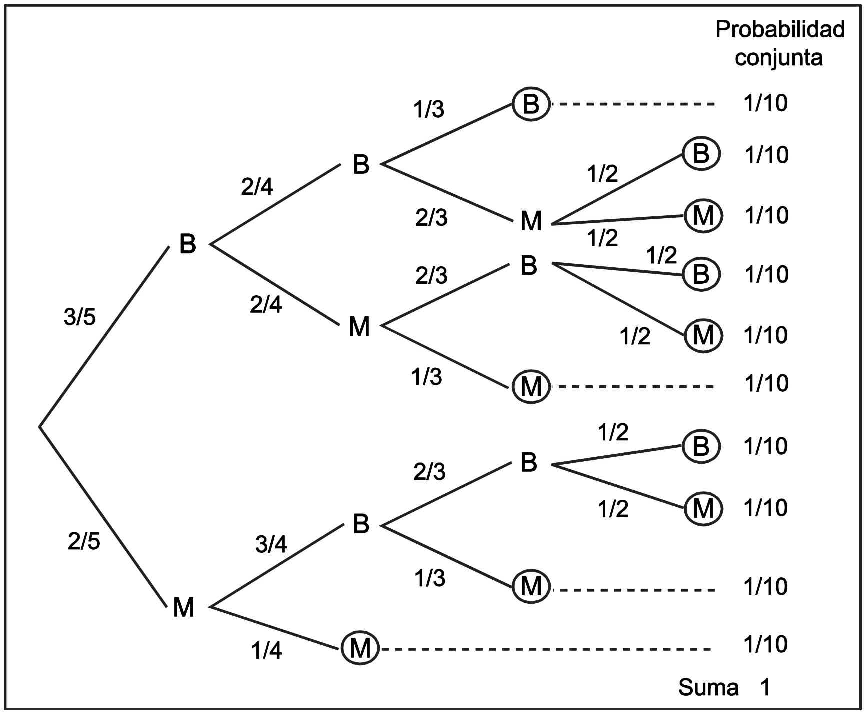
= P(nns) + P(nsn) + P(snn) + P(nnn) =

= 0,130625 + 0,0825 + 0,04725 + 0,006875 = 0,26725

d) P(de tres días seguidos, llueva al menos uno) = 1 - P(nnn) =

= 1- 0,006875 = 0,993125.

9.9) Se detiene el proceso de prueba cuando se encuentran 2 ampolletas malas (M) o 3 buenas (B). En la figura esto se indica con un círculo.



a) 0 b) 2/5 x 1/4 = 1/10 c) 1/10 + 1/10 + 1/10 = 3/10. Se suman las probabilidades por ser eventos mutuamente excluyentes.

d) 1/10 + 1/10 + ... + 1/10 = 6/10 e) 1.

<u>Respuestas Capítulo 10</u>:

10.1) Si las llamadas entrantes son más de 4 y las salientes son menos de 3, la probabilidad conjunta es

P(entrantes > 4 y salientes < 3) = 0,03 + 0,02 + 0,02 + 0,04 = 0,11

Sin embargo, las marginales son

P(entrantes > 4) = 0,09 + 0,09 = 0,18

P(salientes < 3) = 0,17 + 0,32 = 0,49

El producto es P(entrantes > 4) x P(salientes < 3) = 0,18 x 0,49 =

= 0,0882 no es igual a la conjunta, luego estos dos eventos no son independientes.

10.2) Ambos eventos son independientes, luego la probabilidad conjunta es el producto de ambas marginales:

P(A esté viva en 25 años y B esté viva en 25 años) =

P(A esté viva en 25 años) x P(B esté viva en 25 años) = 0,7 x 0,5 = 0,35

10.3) a) Son 25 bolitas y el espacio es equiprobable.

Luego la probabilidad condicional

P(10 en la segunda | 5 en la primera) = 1/25

porque el 5 de la primera extracción se devolvió a la tómbola.

Por otra parte, por la misma razón de que la bolita se devuelve, la probabilidad marginal P(10 en la segunda) = 1/25

Por lo tanto P(10 en la segunda | 5 en la primera) = P(10 en la segunda)

Y los eventos son independientes.

b) Ahora el 5 de la primera extracción no se devuelve, luego quedan sólo 24 bolitas para la segunda, por lo tanto

P(10 en la segunda | 5 en la primera) = 1/24

Por otra parte, si no se sabe nada sobre lo que resultó de la primera extracción, la segunda extracción es como si extrajéramos el 10 de entre las 25 bolitas originales.

Luego P(10 en la segunda) = 1/25

Por lo tanto P(10 en la segunda | 5 en la primera) ≠ P(10 en la segunda)

Y los eventos no son independientes.

EXPLICACIÓN ACERCA LOS ELEMENTOS PRESENTADOS ENTRE FRANJAS DE COLORES.

EJEMPLO

Ejemplos resueltos que ilustran los conceptos presentados.

Los ejemplos aparecen a continuación de los conceptos que se pretendió explicar con anterioridad.

MOTIVACIÓN

Similares a los Ejemplos, pero puestos antes de los conceptos, con el objeto de despertar el interés de los estudiantes hacia lo que se presentará a continuación.

ACTIVIDAD PRÁCTICA

Actividades propuestas que implican la aplicación práctica de los conceptos, a través de alguna acción física.

ACTIVIDAD COMPUTACIONAL

Actividades propuestas que implican la aplicación de los conceptos, a través de acciones realizadas utilizando un programa computacional, como Excel o R.

EJERCICIOS

Ejemplos de aplicación de los conceptos presentados al final de cada sección, para ser resueltos por los estudiantes.

INDICE

EL AUTOR

Jorge Mauricio Galbiati Riesco, Ph.D.

Doctor en Estadística, Universidad de Iowa, U.S.A

Master en Estadística Matemática, Centro Interamericano de Enseñanza de Estadística (CIENES), Universidad de Chile.

Profesor de Matemáticas y Física y Licenciado en Filosofía y Educación, Universidad Católica de Valparaíso.

Académico de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso desde 1971. Ejerce en el Instituto de Estadística desde su fundación, en 1975. Fue su Director entre 2001 y 2006.

Ha ejercido la docencia desde 1971, elaborando gran cantidad de material didáctico.

Ha participado en varios proyectos de investigación, con un número de publicaciones en revistas científicas internacionales, fundamentalmente en el tema de Procesamiento Estadístico de Imágenes Digitales.

Ha tomado parte de numerosos proyectos de asesoría a instituciones y empresas.

Entre 2008 hasta 2011 fue miembro del Consejo Superior de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Fue miembro del Consejo Nacional de Estadísticas, entre 2010 y 2011, en representación del Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas.

www.jorgegalbiati.cl

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDADES

TOMO 2. INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD;

COMPRENDIENDO EL AZAR

En el Tomo 1 vimos varias medidas de resumen y mostramos algunas representaciones gráficas, todo asociado a una muestra.

Ahora nos asomaremos a una parte desconocida de la realidad, la población de donde se tomó la muestra. Como es desconocida, no sabemos cómo se comporta.

Por ejemplo, muchas veces debemos tomar deciciones. Lo normal es que éstas se tomen en un contexto de incertidumbre. Por eso, no sabemos cuáles son las consecuencias de la decisión que tomamos.

A veces, esas consecuencias serán favorables para nosotros, pero en otras oportunidades no lo serán. En ocasiones, las consecuencias de una mala decisión no serán graves, pero en otros casos, podrán ser muy perjudiciales.

En este Tomo 2 nos asomaremos a la Teoría de la Probabilidad, que intenta explicar, de cierta manera, cómo se comporta el azar.

Esta teoría no nos provee una certeza total, pero sí nos dice que existen ciertos patrones que gobiernan el azar, y cuyo conocimiento nos permite disminuir el riesgo de una mala decisión.