4º medio

Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo con el texto escolar

Clase 44

Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

Unidad de Currículum y Evaluación UCE

Inicio

En esta clase aplicaremos el modelo binomial para predecir resultados de experimentos aleatorios.

OA 3

Para resolver esta guía necesitarás el texto del estudiante y tu cuaderno de Matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo

Para iniciar esta clase, utilizaremos nuestro Texto del Estudiante y nos situaremos en la **página 169** y realizaremos algunas de las actividades que allí aparecen propuestas.

Para el desarrollo, se propondrán actividades complementarias que guíen tus procedimientos.

Actividad

Desarrollemos la actividad propuesta en el **ítem 3** de la **página 169** de nuestro Texto del Estudiante.

3. Analiza el siguiente experimento y responde:

Se lanza doce veces un dado de seis caras y se define la variable aleatoria *X*: número de caras obtenidas que son múltiplos de 3.

a. Determina el valor de los parámetros *p,q y n.*

- **Recordemos que:**

n: número de repeticiones del experimento.
p: probabilidad del éxito.
q: probabilidad del fracaso.

Por consiguiente, de acuerdo a la variable aleatoria *X*, el espacio muestral o dominio de *X* es el conjunto {1,2,3,4,5,6} y el recorrido de la variable *X* o los casos favorables esta dado por el conjunto {3,6}, por lo tanto, la probabilidad del éxito está dado por $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, entonces la probabilidad del fracaso $q = \frac{2}{3}$, y como el experimento se repite doce veces, entonces el valor de $n = 12$.

b. ¿Reúne las condiciones para ser modelado mediante la distribución binomial? Justifica tu respuesta.

Para que un experimento se pueda modelar mediante una distribución binomial, debe haber solo dos eventos posibles asociadas al experimento.

- Que ocurra un evento y se considera como éxito *(p)*.
- Que no ocurra un evento y se considera como fracaso *(q)*.

Además, al lanzar varias veces el dado, estos eventos son independientes, así que se cumplen las condiciones para que este experimento sea modelado mediante una distribución binomial.

En esta situación:
Si al lanzar el dado y que salga un número múltiplo de 6 es el evento considerado éxito *(p)*, y si no se obtiene un múltiplo de 6 es considerado un fracaso *(q)*.

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo más 4 éxitos?

Este experimento se repite doce veces, es decir $n = 12$, ya sabemos que la probabilidad del éxito es $p = \frac{1}{3}$ y la del fracaso es $q = \frac{2}{3}$.

Recordemos que:

$$P(X = x) = \binom{n}{x}\ p^{x} \bullet q^{n-x}$$

Donde:
x es el número de éxitos que se desean.
n: números de veces que repite el experimento.
p: probabilidad del éxito.
q: probabilidad del fracaso.

Recuerda el cálculo de una combinación.

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)! \bullet x}$$

Nos piden determinar la probabilidad de obtener a los mas 4 éxitos, es decir que pueden ocurrir ningún éxito o uno, dos, tres o cuatro éxitos. La expresión que nos permitirá calcular esta probabilidad es:

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

Entonces debemos calcular la expresión:

$$P(X \leq 4) = \binom{12}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} + \binom{12}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^{1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{11} + \binom{12}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \binom{12}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{9} + \binom{12}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{8}$$

Al realizar los cálculos correspondientes podemos concluir que $P(X \leq 4) \approx 0{,}632$

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 5 éxitos? ¿Cómo se relaciona con la probabilidad de obtener a lo más 4 éxitos?

Si nos solicitan la probabilidad de tener al menos 5 éxitos, quiere decir que, como mínimo se requieren 5 éxitos, es decir, se debe calcular la probabilidad de obtener 5,6,7,8,9,10,11 y 12 éxitos. En términos matemáticos se requiere calcular la probabilidad dada por la expresión $P(X \geq 5)$, que resulta ser el evento complementario de $P(X \leq 4)$.
Por consiguiente, estos dos eventos cumplen que:

$$P(X \leq 4) + P(X \geq 5) = 1$$
$$0{,}632 + P(X \geq 5) = 1$$
$$P(X \geq 5) = 1 - 0{,}632$$
$$P(X \geq 5) = 0{,}368$$

e. ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del número de éxitos?

Para responder a esta interrogante, debemos recordar que un experimento que se puede distribuir de forma binomial, el valor esperado o también conocido como media(μ), lo podemos calcular mediante la expresión:

$$\boldsymbol{\mu = n \bullet p}$$

En este caso, el dado se lanza 12 veces ($n = 12$) y la probabilidad del éxito es $p = \frac{1}{3}$.
Entonces resulta: $\mu = 12 \bullet \frac{1}{3} = 4.$

Luego la varianza (σ^2) se calcular mediante la expresión: $\sigma^2 = n \bullet p \bullet q$
Si la probabilidad del éxito es $p = \frac{1}{3}$, entonces la probabilidad del fracaso $q = \frac{2}{3}$.

Entonces nos queda:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{9} = 2{,}\overline{6}}$$

Cierre

Evaluación de la clase

Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1 **Se lanza 5 veces un dado no cargado de 10 caras, las que están numeradas del 1 al 10, registrándose el número obtenido. Se define la variable aleatoria X como el número de la cara obtenido sea un número primo. Entonces, si este experimento es modelado en forma binomial, ¿Cuál de los siguientes valores de los parámetros *n, p* y *q*, es correcto?**

I. $n = 10$
II. $p = 4$
III. $q = 0{,}6$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y II
e) I, II y III

2 **En una caja hay 12 bolitas blancas y 8 bolitas negras, todas del mismo peso y tamaño. Si se extraen 5 bolitas al azar de la caja, una tras otra y con reposición, entonces para calcular la probabilidad de que exactamente en 3 de las extracciones haya salido una bolita negra, debemos identificar los valores de los parámetros *n, p* y *q*. ¿Cuáles serán estos valores respectivamente?**

a) $n = 5 \quad ; \quad p = 0{,}4 \quad ; \quad q = 0{,}6$
b) $n = 20 \quad ; \quad p = 0{,}4 \quad ; \quad q = 0{,}6$
c) $n = 20 \quad ; \quad p = 0{,}8 \quad ; \quad q = 0{,}2$
d) $n = 5 \quad ; \quad p = 0{,}3 \quad ; \quad q = 0{,}7$
e) $n = 5 \quad ; \quad p = 0{,}3 \quad ; \quad q = 0{,}2$

3 **La probabilidad de que un estudiante cualquiera de un preuniversitario quede en la universidad es de 88%. Si se escoge al azar un grupo de 8 estudiantes, ¿Qué expresión numérica nos permitirá calcular la probabilidad de que solo dos de ellos entren a la universidad?**

a) $14 \bullet (0{,}88)^2 \bullet (0{,}12)^2$
b) $28 \bullet (0{,}88)^2 \bullet (0{,}12)^6$
c) $28 \bullet (0{,}88)^6 \bullet (0{,}12)^2$
d) $56 \bullet (0{,}88)^2 \bullet (0{,}12)^6$
d) $56 \bullet (0{,}88)^6 \bullet (0{,}12)^2$

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número _______ fue: ___________________________________.

4º medio

Texto escolar

Matemática

Unidad 2

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

3. Analiza el siguiente experimento y responde:

Se lanza doce veces un dado de seis caras y se define la variable aleatoria X: número de caras obtenidas que son múltiplos de 3.

a. Determina el valor de los parámetros p, q y n.
b. ¿Reúne las condiciones para ser modelado mediante la distribución binomial? Justifica tu respuesta.
c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener a lo más 4 éxitos?
d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 5 éxitos? ¿Cómo se relaciona con la probabilidad de obtener a lo más 4 éxitos?
e. ¿Cuál es el valor esperado y la varianza del número de éxitos? Interprétalos.

4. Analiza la siguiente situación y responde:

En un supermercado, se tienen las siguientes filas:

En la caja rápida, la probabilidad de esperar 5 o más minutos en la fila es de 0,15.

En la caja normal, la probabilidad de esperar 5 o más minutos en la fila es de 0,35.

Se define la variable aleatoria X: cantidad de personas de que durante un día cualquiera tenga que esperar 5 o más minutos en la fila. Responde:

a. Determina el valor de q y el parámetro p para cada caso.
b. Si 4 personas deciden ir a las cajas normales del supermercado, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellas tengan que esperar 5 o más minutos para ser atendidas?
c. Si 4 personas deciden ir a la caja rápida del supermercado, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellas tengan que esperar 5 o más minutos para ser atendidas?
d. ¿Cuál es el valor de la esperanza para cada caso con 4 personas? ¿Qué significado tiene la esperanza en este experimento?
e. Si ingresan a la caja normal 4 personas un día, ¿cuántas personas deben ingresar aproximadamente en la caja rápida para que ambas cajas tengan el mismo valor esperado de esperar 5 o más minutos?