Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

LICEOS ★ BICENTENARIO

IV medio

Matemática

Estimado estudiante:

Con la siguiente guía aprenderás a determinar cálculos y estimaciones que involucran operaciones con números reales, utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces en diversos contextos.

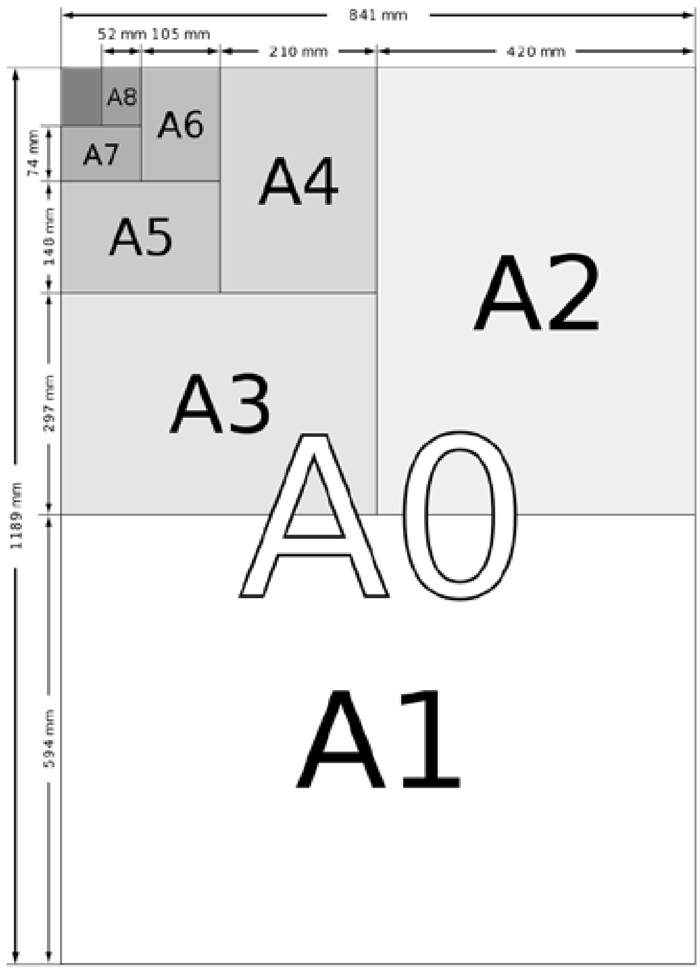
Al finalizar, habrás descubierto estrategias para resolver operaciones con números reales.

Objetivo de la guía: Resolver operaciones que involucran números reales aplicando propiedades de las raíces en contextos cotidianos y matemáticos.

Semana 3

Actividad N°1

Existe un sistema internacionalmente aceptado de dimensiones de hojas de papel estándar que usamos para impresión. Por ejemplo, formatos de hojas de papel DIN A, llamados A0, A1, A2, A3, A4, entre otros, tal como se muestran en la siguiente figura:



¿Cómo se determinan estos tamaños de hojas?

- La hoja A0 es la más grande y A1 se obtiene cortando por la mitad la hoja A0.
- La hoja A2 se obtiene cortando por la mitad la hoja A1 y así sucesivamente.

1. Considerando la manera en que se determinan las longitudes de las distintas hojas DIN A contesta las siguientes preguntas:

a) Explica: ¿Cómo crees que son las medidas de sus áreas entre sí? ¿Existirá alguna relación entre ellas?

b) Las hojas DIN, ¿crees que sean proporcionales? ¿Por qué?

c) Considerando las dimensiones de cada hoja completa la siguiente tabla con:
- Longitudes de los lados
- Razón entre sus lados,
- Área en cm^2
- Diagonal de las distintas hojas DIN.

(Realiza los cálculos con la calculadora y escribe el número con todas las cifras decimales de la calculadora)

Hoja	**Largo en cm**	**Ancho en cm**	**Razón entre el ancho y el largo**	**Razón entre el largo y el ancho**	**Área en cm^2**	**Diagonal en cm (usando Teorema de Pitágoras)**
0	118,9	84,1	0,707317073	1,413793103	9999,49	145,6366025
1	84,1	59,4				
2	59,4	42,0				
3						
4						
5						

2. Según las medidas que determinaste al completar la tabla, contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo son las razones entre sí? Explica

b) ¿Coincide con la conjetura que elaboraste en la pregunta b, anterior?

c) ¿Cómo son las medidas de sus áreas entre sí?

d) ¿Cuál es el valor de la razón entre el ancho y el largo en cada hoja?

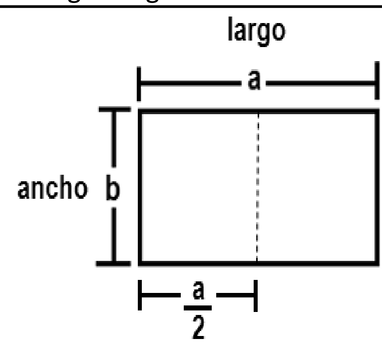
e) ¿Cómo son las diagonales entre sí?

Actividad N° 2: Práctica guiada

1. Si la hoja A0 mide 1 m^2 de área determina matemáticamente el valor de la razón entre las longitudes de los lados de la hoja considerando que son rectángulos semejantes, es decir, la razón entre sus lados largo y ancho es la misma en cada una de las hojas. ¿Cuál es el valor de $\frac{a}{b}$? Para ello considera la siguiente proporción y los datos dados en la figura siguiente:

$$\frac{largo\ A0}{ancho\ A0} = \frac{largo\ A1}{ancho\ A1}$$

$$\frac{a}{b} =$$



Luego $\frac{a}{b} =$

Es decir, la razón entre el largo y el ancho de una hoja DIN A0 es _______ $\approx 1{,}4142$ ...

2. De lo anterior podemos decir que las medidas de los lados de la hoja A0 en función de la variable "*a*" son:

Largo = _ _ _ _ _ _ Ancho b = _ _ _ _ _

3. Determina las medidas de la hoja A0 considerando que la razón entre sus lados largo y ancho es $\sqrt{2}$ y su área es igual a 1 m^2

Es decir $a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = 1$

¿Qué tipo de número es $\sqrt{2}$?

Para operar con este tipo de números existen estrategias como la descomposición de raíces para escribirlas con una cantidad subradical distinta, por ejemplo:

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

Recuerda que para sumar o restar números irracionales es conveniente que tengan la misma cantidad subradical y el mismo índice. Observa:

$$\sqrt[3]{5} + 9\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3} + 3\sqrt{5} - 12\sqrt[3]{3} - 2\sqrt{5} = (1+9)\sqrt[3]{5} - (1+12)\sqrt[3]{3} + (3-2)\sqrt{5}$$
$$= 10\sqrt[3]{5} - 13\sqrt[3]{3} + \sqrt{5}$$

Chequeo de la comprensión

a) Completa las propiedades de las raíces:

- ✓ Multiplicación de raíces de igual índice $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} =$ _____
- ✓ División de raíces de igual índice $\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c}} =$ _____
- ✓ Raíz de una raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} =$ _____
- ✓ Raíz de una potencia cuyo exponente es igual al índice $\sqrt[n]{b^n} =$ _____
- ✓ Propiedad de amplificación $\sqrt[n]{b^x} =$ _____
- ✓ Ingreso de un factor dentro de una raíz $a\sqrt[n]{b} =$ _____

Actividad N° 3: Práctica independiente

1. Determina si existe alguna relación entre los perímetros de las hojas DIN.

2. Aplicando las propiedades de las raíces resuelve las siguientes operaciones:

   a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} =$

   b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} =$

   c) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4} =$

   d) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8 =$

   e) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{10}}} =$

   f) $\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}} =$

   g) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} =$

   h) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} =$

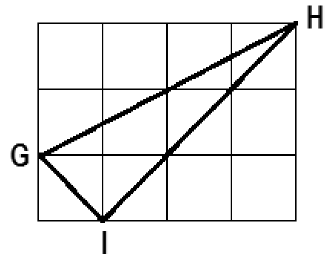
   i) $3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 9\sqrt{3} =$

   j) $5\sqrt{8} - \sqrt{27} - \sqrt{32} + 3\sqrt{3} + \sqrt{2} =$

Actividad de síntesis

En la siguiente cuadrícula cada cuadrado mide 1 cm de lado. ¿Cuántos centímetros mide el perímetro del triángulo GHI?

a) $6\sqrt{7}$
b) $6\sqrt{10}$
c) $4\sqrt{2}+2\sqrt{5}$
d) $8+2\sqrt{5}$



Solucionario

Actividad N°1

¿Cómo se determinan estos tamaños de hojas?

La hoja A0 es la más mayor dimensión y A1 se obtiene cortando por la mitad la hoja A0; la hoja A2 se obtiene cortando por la mitad la hoja A1 y así sucesivamente.

1. Considerando la manera en que se determinan las longitudes de las distintas hojas DIN A contesta las siguientes preguntas:

a) Explica. ¿Cómo crees que son las medidas de sus áreas entre sí? ¿Existirá alguna relación entre ellas? Sus áreas son diferentes, A0 es el doble A1 y así sucesivamente o bien A1 es la mitad de A0, por ejemplo.

b) Las hojas DIN, ¿crees que sean proporcionales? ¿Por qué? Si, porque siempre la hoja inmediatamente más pequeña que la anterior es la mitad, luego la razón entre las áreas es un medio

c) Considerando las dimensiones de cada hoja completa la siguiente tabla con las longitudes de los lados, razón entre sus lados, el área y la diagonal de las distintas hojas DIN. *(Realiza los cálculos con la calculadora y escribe el número con todas las cifras decimales de la calculadora)*

Hoja	Largo en cm	Ancho en cm	Razón entre el ancho y el largo	Razón entre el largo y el ancho	Área en cm^2	Diagonal en cm (usando Teorema de Pitágoras)
0	118,9	84,1	0,707317073	1,413793103	9999,49	145,6366025
1	84,1	59,4	0,706302021	1,415824916	4995,54	102,9619833
2	59,4	42,0	0,707070707	1,414285714	2494,8	72,7486023
3	42,0	29,7	0,707142857	1,414141414	1247,4	51,44015941
4	29,7	21	0,707070707	1,414285714	623,7	36,37430412
5	21	14,85	0,707142857	1,414141414	311,85	25,7200797

2. Según las medidas que determinaste al completar la tabla contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo son las razones entre sí? Explica Las razones entre el largo y ancho en cada hoja es la misma, lo mismo ocurre con las razones entre el ancho y largo

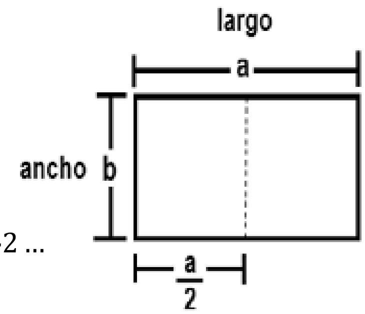
b) ¿Coincide con la conjetura que elaboraste en la pregunta **b**, anterior? Justifica tu respuesta.

c) ¿Cómo son las medidas de sus áreas entre sí? Si se comparan en forma creciente de manera consecutiva aumenta al doble, y si es de forma decreciente es la mitad.

d) ¿Cuál es el valor de la razón entre el ancho y el largo en cada hoja? Prácticamente tienen el mismo valor 0,707… Se diferencian en la cifra de los milésimos.

e) ¿Cómo son las diagonales entre sí? Proporcionales

Actividad N° 2: Práctica guiada (35 minutos aproximados)



1. $\frac{largo\ A0}{ancho\ A0} = \frac{largo\ A1}{ancho\ A1}$

   $\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}}$

   $\frac{a}{b} = \frac{2b}{a}$

   $\frac{a^2}{b^2} = 2$ como a, b son positivos

   Luego $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$

   Es decir, la razón entre el largo y el ancho de una hoja DIN A0 es $\sqrt{2} \approx 1{,}4142 \ldots$

2. De lo anterior podemos decir que las medidas de los lados de la hoja A0 en función de la variable "a" son:

   Largo = a　　　　　　Ancho b = $\frac{a}{\sqrt{2}}$

3. Determina las medidas de la hoja A0 considerando que la razón entre sus lados largo y ancho es $\sqrt{2}$ y su área es igual a 1 m^2

   Es decir $a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = 1$

   $\frac{a^2}{\sqrt{2}} = 1$

   $a^2 = \sqrt{2}$ como a es positivo, entonces

   $a = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}189 \ldots$ luego, el largo de A0 es 1189 mm

   ¿Qué tipo de número es $\sqrt{2}$? Número irracional, decimal con infinitas cifras decimales sin periodo.

Chequeo de la comprensión

a) Completa las propiedades de las raíces:

- ✓ Multiplicación de raíces de igual índice $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{ab}$
- ✓ División de raíces de igual índice $\frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{c}} = \sqrt[n]{\frac{b}{c}}$
- ✓ Raíz de una raíz $\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n\cdot m]{b} = \sqrt[nm]{b}$
- ✓ Raíz de una potencia cuyo exponente es igual al índice $\sqrt[n]{b^n} = |b|$
- ✓ Propiedad de amplificación $\sqrt[n]{b^x} = \sqrt[n\cdot m]{b^{x\cdot m}} = \sqrt[nm]{b^{xm}}$
- ✓ Ingreso de un factor dentro de una raíz $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{b \cdot a^n}$

Actividad N° 3: Práctica independiente (20 minutos aproximados)

1. Determina si existe alguna relación entre los perímetros de las hojas DIN.

   Puede contestar, por ejemplo:
   Perímetro de la hoja DIN A0 = 2 (1189 + 841) = 4060 mm
   Perímetro de la hoja DIN A1 = 2 (594 + 841) = 2870 mm
   Perímetro de la hoja DIN A2 = 2 (594 + 420) = 2028 mm
   La razón entre p(DIN A0) : p(DIN A1) = 1,41463414634
   La razón entre p(DIN A1) : p(DIN A2) = 1,41518737673
   Luego son proporcionales tienen la misma razón entre sus perímetros.

2. Aplicando las propiedades de las raíces resuelve las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2} = \sqrt[15]{2^5}\cdot\sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^5\cdot 2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^4}\cdot\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

c) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{4} = \sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[12]{2^9}\cdot\sqrt[12]{2^8} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

d) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8 = \sqrt[8]{2^8} = 2$

e) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{10}}} = \sqrt[15]{3^{10}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^4}}{\sqrt[6]{3^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^4}{3^3}} = \sqrt[6]{3}$

g) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt[10]{2^8}}{\sqrt[10]{2^5}} = \sqrt[10]{\dfrac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$

h) $\dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{\sqrt{3^2}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{\sqrt[6]{3^6}}{\sqrt[6]{3^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4}$

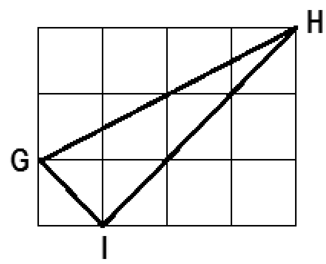
i) $3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = \sqrt{3}$

j) $5\sqrt{8} - \sqrt{27} - \sqrt{32} + 3\sqrt{3} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

Actividad de síntesis

En la siguiente cuadrícula cada cuadrado mide 1 cm de lado. ¿Cuántos centímetros mide el perímetro del triángulo GHI?

$c)\ 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$



Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

IV medio

Matemática

Semana 3