Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

LICEOS ★ BICENTENARIO

IV medio

Matemática

Estimado estudiante:

Con la siguiente guía aprenderás a resolver problemas que involucran crecimiento exponencial y donde deben ser utilizadas las potencias de base racional y exponente entero para dar respuesta a los problemas.

Al finalizar habrás aprendido que las potencias se encuentran relacionadas con varios contextos; comprender sus propiedades te ayudará a simplificar el problema.

Objetivo de la guía: Resolver problemas de crecimiento exponencial utilizando potencias de base racional y exponente entero.

Semana 2

Actividad N°1

1. Las sustancias radioactivas se descomponen potencialmente con el tiempo. Por ejemplo, el isótopo de yodo se descompone cada ocho días a la mitad de su valor. Si el valor inicial es x, determina la parte del valor inicial que queda después de 40 días.

   Es importante, organizar la información que se desprende de la situación planteada. Para ello, se construiremos una tabla.

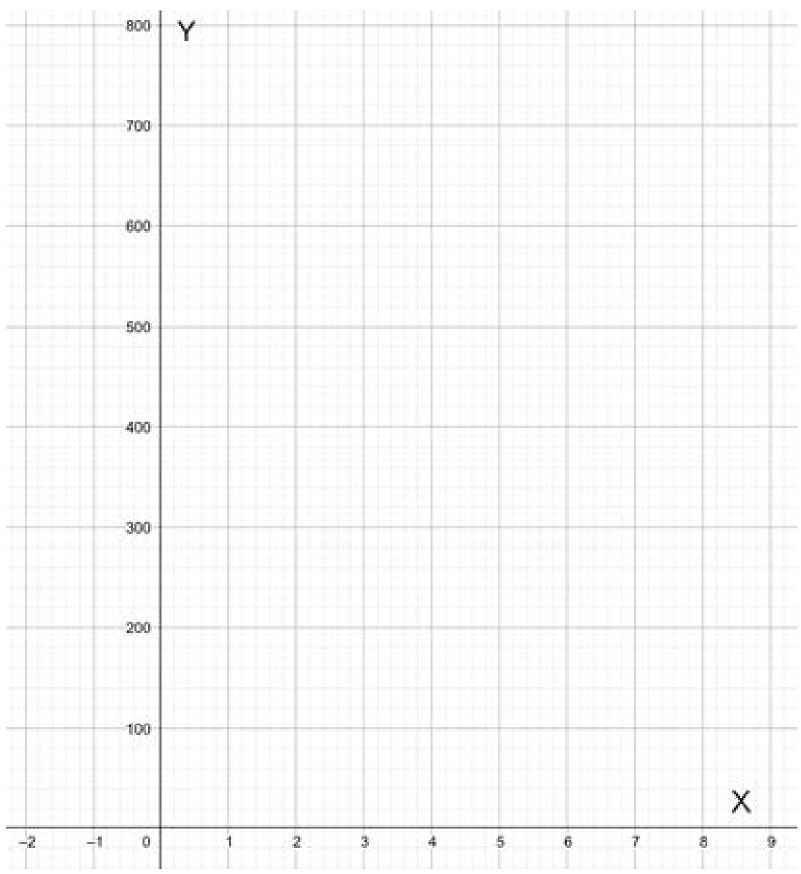
% isótopo yodo	100%		25%				
Tiempo (días)	0	8		24			

   Después de 40 días solo queda _________% de la sustancia radioactiva.

2. El crecimiento de una bacteria se puede determinar a partir de la siguiente tabla:

Población	3	6	12	24	48	96	192	384	768
Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

   a. Ubica los puntos de la tabla en el siguiente plano cartesiano.



   b. ¿Cuál es la expresión que relaciona la población y el tiempo en el crecimiento de la bacteria?

3. Dado un contexto similar en relación con el crecimiento de una bacteria, la función exponencial que define el crecimiento viene dada por: $f(t) = 5 \cdot (3)^t$. ¿Qué representan los valores de la expresión?

Recuerda: Cuando se trabaja con crecimiento exponencial y se debe resolver un problema, es necesario trabajar con las propiedades de las potencia.

Actividad N° 2: Práctica guiada

Potencia de base racional y exponente entero.

La expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ se denomina potencia, donde $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ es la base y $n \in \mathbb{Z}$ es el exponente.

1. Resuelve las siguientes potencias

   a. $\left(\frac{-9}{14}\right)^0 =$

   b. $\left(\frac{-3}{5}\right)^2 =$

   c. $\left(\frac{-3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^{-3} =$

   d. $\left(\frac{15}{7}\right)^3 : \left(\frac{15}{7}\right)^2 =$

   e. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^2 =$

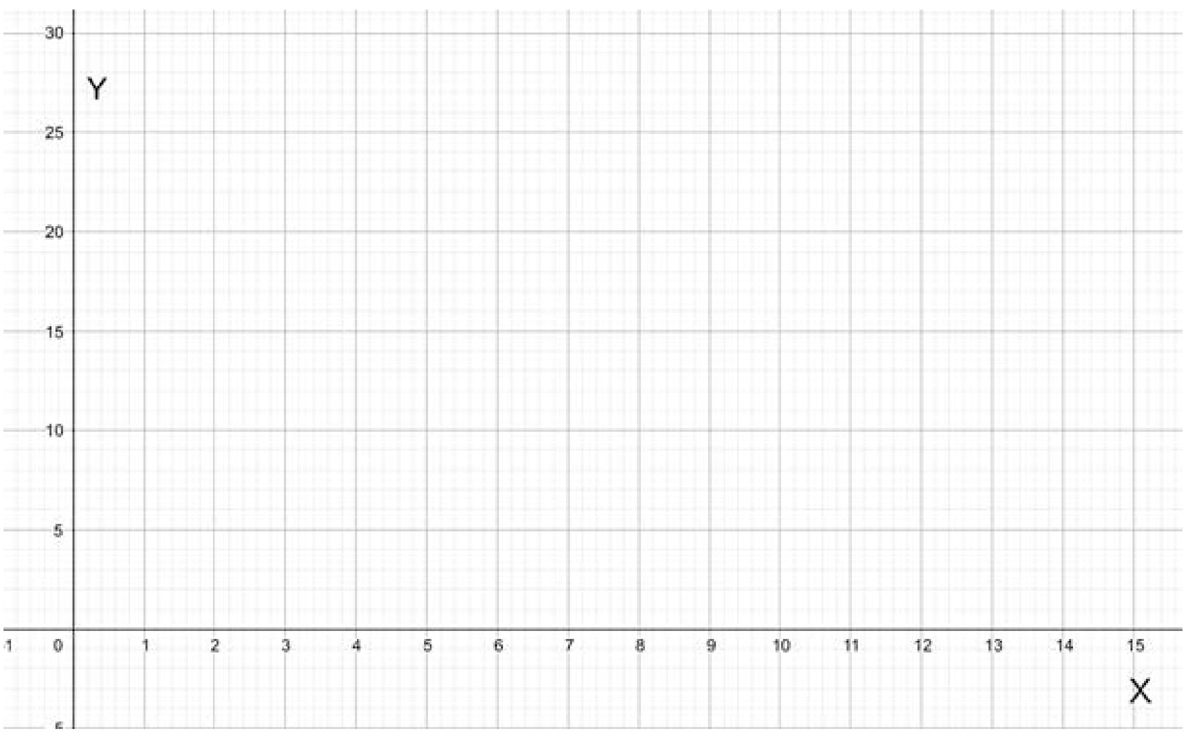
   f. $[(0{,}5)^2]^{-1} =$

2. El valor de un automóvil (y) (en millones) se puede aproximar mediante el modelo $y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^t$, donde t es el número de años que han pasado desde que el automóvil era nuevo (usar calculadora).

   a. Completa la siguiente tabla.

Número de años	**Valor del auto**
0	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^0 = 25 \cdot 1 = 25$
1	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^1 =$
2	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^2 =$
3	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^3 =$
4	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^4 =$
5	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^5 =$
6	
7	

   b. Ubica los puntos y traza la gráfica en el siguiente plano cartesiano.



   c. ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica?

Chequeo de la comprensión

¿Cuál es el resultado de la expresión $\left(1\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(1\frac{1}{14}\right)^{-2}$?

Actividad N° 3: Práctica independiente

1. Resuelve las siguientes potencias:

   a. $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^{-2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-5} =$

   b. $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} =$

   c. $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-3} =$

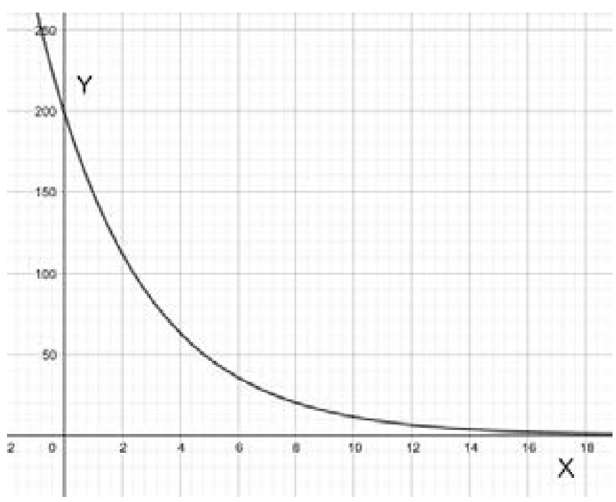
   d. $\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4}{\left(\frac{3}{20}\right)^{-3} \cdot \frac{3}{20}} =$

2. El valor de una bicicleta de montaña y se puede aproximar mediante el modelo $y = 200 \cdot (0{,}75)^t$, donde t es el número de años desde que la bicicleta era nueva y la función entrega el valor en miles de pesos.
   a. Completa la siguiente tabla.

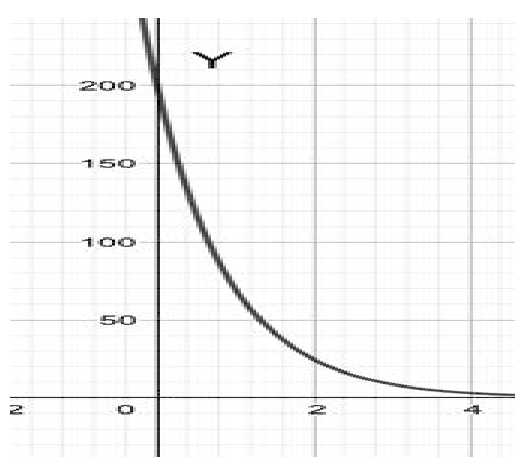
El número de años t	El valor de una bicicleta y en miles de pesos
1	$y = 200 \cdot (0{,}75)^1 =$
2	$y = 200 \cdot (0{,}75)^2 =$
3	
4	
5	

   b. ¿Cuál de las siguientes gráficas es la que corresponde a la situación planteada? Marca con una X.

Gráfica 1



Gráfica 2



c. ¿Cuál es el valor de la bicicleta de montaña a los 4 años?

Actividad de síntesis

Responde verdadero (V) o falso (F), según corresponda y justifica las falsas.

a. ______ $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^{-1}\right]^{3} = \frac{27}{8}$

b. ______ $\left(\frac{1}{4}\right)^{4} : \left(\frac{1}{4}\right)^{3} = \frac{1}{4}$

c. ______ $\left(\frac{2}{5}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{125}{4}$

d. ______ Si una situación se puede aproximar mediante el modelo $f(x) = 300 \cdot (1{,}75)^{x}$, el valor de 300 que aparece en el modelo corresponde a la cantidad inicial del problema.

Solucionario

Actividad N°1

1. Las sustancias radioactivas se descomponen potencialmente con el tiempo. Por ejemplo, el isótopo de yodo se descompone cada ocho días a la mitad de su valor. Si el valor inicial es x, determina la parte del valor inicial que queda después de 40 días.

% isótopo yodo	100%	50%	25%	12,5%	6,25%	3,125%	1,5625%
Tiempo (días)	0	8	16	24	32	40	48

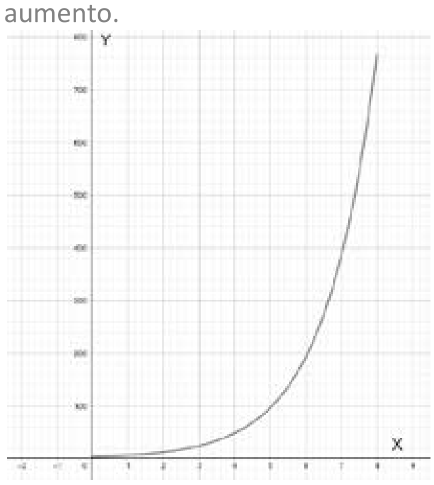
Después de 40 días solo queda 3,125% de la sustancia radioactiva.

2. El crecimiento de una bacteria se puede determinar a partir de la siguiente tabla:

Población	3	6	12	24	48	96	192	384	768
Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

a. Ubica los puntos de la tabla en el siguiente plano cartesiano.

Respuesta correcta: A partir del gráfico se puede interpretar que a medida que transcurre el tiempo la población de bacterias va en aumento.



b. ¿Cuál es la expresión que relaciona la población y el tiempo en el crecimiento de la bacteria?

Respuesta correcta: La expresión correspondiente es una función exponencial:

$$f(t) = 3 \cdot 2^t$$

3. Dado un contexto similar en relación con el crecimiento de una bacteria. La función exponencial que define el crecimiento viene dada por: $f(t) = 5 \cdot (3)^t$. ¿Qué representan los valores de la expresión?

Respuesta correcta: El coeficiente que posee el valor de 5 corresponde a la cantidad de bacterias iniciales, el 3 indica que la cantidad de bacterias se triplica y finalmente t corresponde al tiempo transcurrido.

Actividad N° 2: Práctica guiada

Potencia de base racional y exponente entero.

La expresión $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ se denomina potencia, donde $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ es la base y $n \in \mathbb{Z}$ es el exponente.

1. Resuelve las siguientes potencias

a. $\left(\frac{-9}{14}\right)^0 = 1$

b. $\left(\frac{-3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

c. $\left(\frac{-3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^{-3} = -\frac{4}{3}$

d. $\left(\frac{15}{7}\right)^3 : \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{15}{7}$

e. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{25}{64}$

f. $[(0{,}5)^2]^{-1} = 4$

2. El valor de un automóvil (y) (en millones) se puede aproximar mediante el modelo $y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^t$, onde t es el número de años que han pasado desde que el automóvil era nuevo (usar calculadora).

a. Completa la siguiente tabla.

Número de años	**Valor del auto**
0	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^0 = 25 \cdot 1 = 25$
1	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^1 = 25 \cdot \frac{17}{20} = 21{,}25$
2	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^2 = 25 \cdot \frac{289}{400} = 18{,}0625$
3	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^3 = 25 \cdot \frac{4913}{8000} = 15{,}353125$
4	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^4 = 13{,}05015625$
5	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^5 = 11{,}09263281$
6	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^6 = 9{,}428737891$
7	$y = 25 \cdot \left(\frac{17}{20}\right)^7 = 8{,}014427207$

b. Ubica los puntos y traza la gráfica en el siguiente plano cartesiano.

Respuesta correcta:

c. ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica?

Respuesta correcta: El modelo representa un decrecimiento exponencial.

Chequeo de la comprensión

¿Cuál es el resultado de la expresión $\left(1\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(1\frac{1}{14}\right)^{-2}$?

Respuesta correcta: La expresión es $\frac{36}{25}$

Actividad N° 3: Práctica independiente

1. Resuelve las siguientes potencias:

   a. $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^{-2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{-5} = 5$

   b. $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \frac{4}{9}$

   c. $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{-3} = \frac{64}{3375}$

   d. $\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4}{\left(\frac{3}{20}\right)^{-3} \cdot \frac{3}{20}} = \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \frac{729}{15625}$

2. El valor de una bicicleta de montaña y se puede aproximar mediante el modelo $y = 200 \cdot (0{,}75)^t$, donde t es el número de años desde que la bicicleta era nueva y la función entrega el valor en miles de pesos.

   a. Completa la siguiente tabla.

El número de años t	El valor de una bicicleta y en miles de pesos
1	$y = 200 \cdot (0{,}75)^1 = 150$
2	$y = 200 \cdot (0{,}75)^2 = 112{,}5$
3	$y = 200 \cdot (0{,}75)^3 = 84{,}375$
4	$y = 200 \cdot (0{,}75)^4 = 63{,}28125$
5	$y = 200 \cdot (0{,}75)^5 = 47{,}4609375$

   b. ¿Cuál de las siguientes gráficas es la que corresponde a la situación planteada? Marca con
   Respuesta correcta: La situación planteada corresponde: Gráfica 1

   c. ¿Cuál es el valor de la bicicleta de montaña a los 4 años?
   Respuesta correcta: Aproximadamente $63 281 pesos.

Actividad de síntesis

Responde verdadero (V) o falso (F), según corresponda y justifica las falsas.

a. **F** $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^{-1}\right]^3 = \frac{27}{8}$ *corresponde a* $-\frac{27}{8}$

b. **V** $\left(\frac{1}{4}\right)^4 : \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{4}$

c. **F** $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{125}{4}$ *el resultado es* $\frac{32}{3125}$

d. **V** Si una situación se puede aproximar mediante el modelo $f(x) = 300 \cdot (1{,}75)^x$, el valor de 300 que aparece en el modelo corresponde a la cantidad inicial del problema.

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

IV medio

Matemática

Semana 2