3º medio

Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo con el texto escolar

Clase 27

Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN UCE

Inicio

En esta clase veremos cómo se forma la **función exponencial** a través del análisis de situaciones en distintas áreas.

Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo

De la página 35 del texto del estudiante, sigue atentamente la situación dada del comportamiento de dos cultivos de bacterias.

1. Observa la siguiente situación. Luego, realiza lo pedido.

Francisca estudia el comportamiento de dos cultivos de bacterias, 1 y 2. Ambos comenzaron inicialmente con una cantidad de 1000 bacterias.

a. ¿Qué función permite modelar la cantidad de bacterias en el cultivo 1? Analiza el procedimiento que usó Francisca.

- Para hacer el estudio, construye una tabla de valores y escribe lo que se muestra a continuación.

Tiempo (horas)	Cantidad de bacterias		
0	1000	$\rightarrow 1000$	$\Leftrightarrow 1000 \cdot 3^0$
1	3000	$\rightarrow 1000 \cdot 3$	$\Leftrightarrow 1000 \cdot 3^1$
2	9000	$\rightarrow 1000 \cdot 3 \cdot 3$	$\Leftrightarrow 1000 \cdot 3^2$
3	27 000	$\rightarrow 1000 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$\Leftrightarrow 1000 \cdot 3^3$
4	81 000	$\rightarrow 1000 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$\Leftrightarrow 1000 \cdot 3^4$

- En este caso, la función que permite modelar la situación está dada por $f(t) = 1000 \cdot 3^t$, con $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $f(t)$ es la cantidad de bacterias y t es el tiempo expresado en horas.

Actividad 1

A. Confecciona una tabla con el comportamiento del cultivo 2.

Tiempo (horas)	Cantidad de bacterias
0	1 000
1	
2	
3	
4	

B. Escribe como potencia cada valor de la cantidad de bacterias del cultivo 2

Tiempo (horas)	Cantidad de bacterias	Escritura como potencia
0	1 000	
1		
2		
3		
4		

C. ¿Qué función modela la cantidad de bacterias en el cultivo 2?

D. ¿Cuántas bacterias habrá en el cultivo 2 al cabo de 8 horas?

Función Exponencial

Lee el cuadro explicativo que aparece en la página 36 del texto del estudiante.

Se define como **función exponencial** a la función de la forma
$$f(x) = ab^x, \text{ donde } a, b \in \mathbb{R}, \text{ con } b > 0 \text{ y } b \neq 1.$$

Consideremos que si a = 0 , entonces no hay función exponencial.

Actividad 2

I. Realiza la actividad 8 del texto del estudiante en la página 38.

II. Realiza la actividad 1 de la página 14 del cuaderno de actividades (tomo 1).

III. Realiza la actividad a y b del ítem 6 de la página 16 del cuaderno de actividades (tomo 1).

Cierre

Evaluación
Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1 **¿Cuál de las siguientes alternativas muestra una función exponencial?**

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = 5^x$
c) $f(x) = \frac{2x + 3}{7}$
d) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$
e) $f(x) = (5x - 2)^2$

2 **Una planta que inicialmente tiene un tamaño de 0,34 mm. crece cada día el doble de su tamaño del día anterior. ¿Cuál de las siguientes alternativas muestra la función exponencial de la situación?**

a) $f(d) = 0{,}34^{2d}$
b) $f(d) = 2 \bullet 0{,}34^d$
c) $f(d) = 0{,}34 \bullet 2^d$
d) $f(d) = 0{,}34 \bullet d^2$
e) $f(d) = 0{,}34 \bullet 2^{d-1}$

3 **De la situación planteada en la pregunta anterior, ¿qué tamaño tendrá la planta al cabo de 7 días?**

a) 1,05 *mm*
b) 2,70 *mm*
c) 16,66 *mm*
d) 21,76 *mm*
e) 43,52 *mm*

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número ______ fue: ________________________________.

3º medio

Texto escolar

Matemática

Unidad 2

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

Lección 3

Modelamiento de fenómenos con la función exponencial

Función exponencial

Objetivo: Describir modelos y representar gráficamente las funciones exponenciales.

¿Qué funciones estudiaste en cursos anteriores? Descríbelas.

¿Qué estrategia utilizas para representar gráficamente una función?

1. Observa la siguiente situación. Luego, realiza lo pedido.

Francisca estudia el comportamiento de dos cultivos de bacterias, 1 y 2. Ambos comenzaron inicialmente con una cantidad de 1000 bacterias.

a. ¿Qué función permite modelar la cantidad de bacterias en el cultivo 1? Analiza el procedimiento que usó Francisca.

- Para hacer el estudio, construye una tabla de valores y escribe lo que se muestra a continuación.

Tiempo (horas)	Cantidad de bacterias		
0	1000	$\longrightarrow$ *1000*	$\Leftrightarrow 1000 \cdot 3^0$
1	3000	$\longrightarrow$ *1000 · 3*	$\Leftrightarrow 1000 \cdot 3^1$
2	9000	$\longrightarrow$ *1000 · 3 · 3*	$\Leftrightarrow 1000 \cdot 3^2$
3	27 000	$\longrightarrow$ *1000 · 3 · 3 · 3*	$\Leftrightarrow 1000 \cdot 3^3$
4	81 000	$\longrightarrow$ *1000 · 3 · 3 · 3 · 3*	$\Leftrightarrow 1000 \cdot 3^4$

- En este caso, la función que permite modelar la situación está dada por $f(t) = 1000 \cdot 3^t$, con $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, donde $f(t)$ es la cantidad de bacterias y t es el tiempo expresado en horas.

b. ¿Por qué la relación $f(t) = 1000 \cdot 3^t$ es función? Explica.

c. Transcurrido un tiempo, ¿la cantidad de bacterias describe un modelo lineal? Argumenta tu respuesta.

d. ¿Qué función modela la cantidad de bacterias en el cultivo 2? Nómbrala como $g(t)$.

e. ¿Cuántas bacterias habrá en cada cultivo al cabo de 8 horas? Usa una calculadora y aproxima a la décima el resultado.

*El tipo de función en que la variable independiente se encuentra en un exponente recibe el nombre de **función exponencial**.*

Se define como **función exponencial** a la función de la forma

$f(x) = ab^x$, donde a, $b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$ y $b \neq 1$.

¿Cuál sería el dominio de las funciones de la situación anterior?

2. En parejas, utilicen la version online de GeoGebra y sigan los pasos.

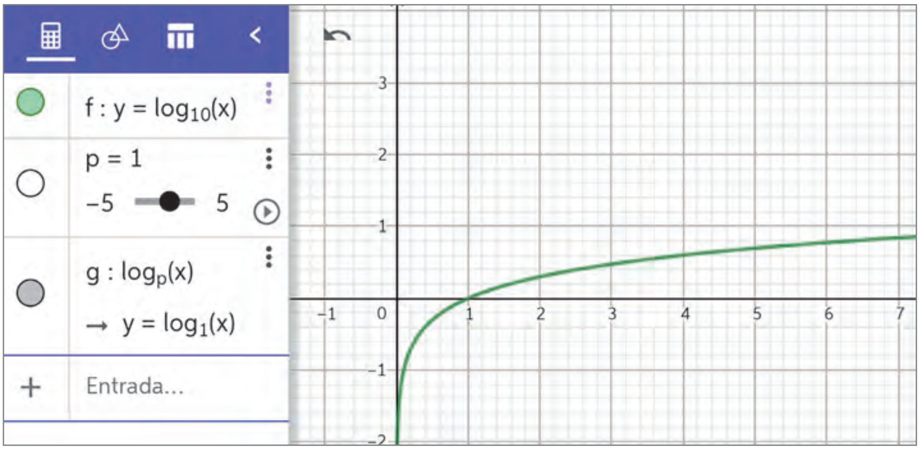
Paso 1: Ingresen a www.geogebra.org. Luego, inserten 2 deslizadores, a y b. Los valores mínimo y máximo para a serán –10 y 10, y para b, 0 y 10.

Paso 2: Escriban en la celda Entrada $f(x) = ab^x$ y presionen Enter. Repitan el procedimiento para $g(x) = 2^x$. Obtendrán la siguiente gráfica:

*Para escribir $f(x) = ab^x$ debes digitar a*b^x.*

a. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de g?

b. ¿Cuál es la intersección con el eje Y? ¿Qué sucede con la gráfica respecto del eje X?



Paso 3: Fijen el valor en $a = 1$ y muevan el deslizador. Luego, analicen lo que ocurre con la gráfica de la función en los siguientes casos:

$b > 2$	$2 > b > 1$	$0 < b < 1$

c. ¿Qué ocurre con el dominio y el recorrido en cada caso?

d. ¿Qué ocurre con las intersecciones con los ejes en cada caso?

e. Expliquen con sus palabras lo que ocurre con la gráfica de la función cuando b toma distintos valores.

Paso 4: Fijen el valor $b = 2$ y muevan el deslizador a. Luego, analicen lo que ocurre con la gráfica de la función en los siguientes casos:

$a > 1$	$0 < a < 1$	$-1 < a < 0$	$a < -1$

f. ¿Qué ocurre con el dominio y el recorrido en cada caso?

g. ¿Qué ocurre con las intersecciones con los ejes en cada caso?

h. Expliquen con sus palabras lo que ocurre con la gráfica de la función cuando a toma distintos valores.

5. Representa en un mismo plano cartesiano las siguientes funciones.

$f(x) = 3^x$	$g(x) = 5^x$	$p(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$	$q(x) = (2{,}5)^{-x}$

A partir de las gráficas, responde:

a. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de las funciones?
b. ¿Qué punto en común tienen las gráficas?
c. ¿Intersecan las gráficas el eje X?
d. ¿Qué sucede con la gráfica respecto del eje X? Explica.
e. ¿Qué ocurre con la gráfica de ***f*** y ***g*** a medida que x aumenta?, ¿y con la gráfica de ***p*** y ***q***?

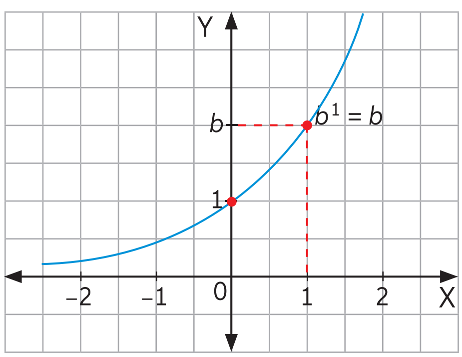
*Para **graficar** una **función exponencial** puedes:*

- *Dar valores para x y determinar su correspondiente en $f(x)$.*
- *Ubicar los puntos en el plano cartesiano.*
- *Trazar la gráfica uniendo los puntos.*

En una **función exponencial** de la forma $f(x) = ab^x$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, con $b > 0$ y $b \neq 1$, podemos observar lo siguiente:

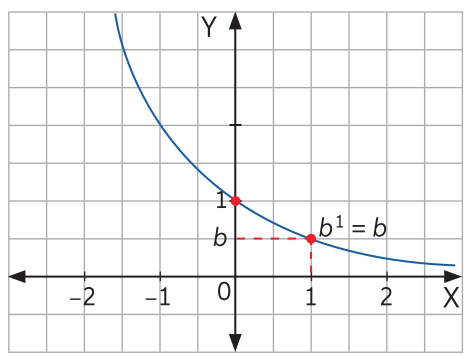
- Su **dominio** es el conjunto de todos **los números reales** ($\mathbb{R}$).
- Su **recorrido** es el conjunto de todos los **números reales positivos** ($\mathbb{R}^+$).
- La gráfica **interseca el eje Y** en el punto **(0, *a*)** y no interseca el eje X, que actúa como asíntota de la gráfica.
- La gráfica de una función exponencial de la forma $f(x) = b^x$ depende del valor de b. Así:

Si $b > 1$



La función es **creciente**.

Si $0 < b < 1$



La función es **decreciente**.

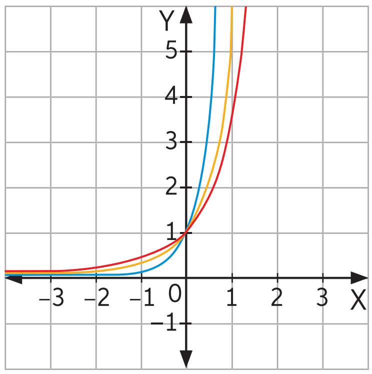
Si $|a| < 1$, la gráfica de $y = ab^x$ es una **dilatación** de $y = b^x$, mientras que $|a| > 1$ es una **contracción**.

Además, mientras mayor es el valor de b, la función tiene un mayor crecimiento.

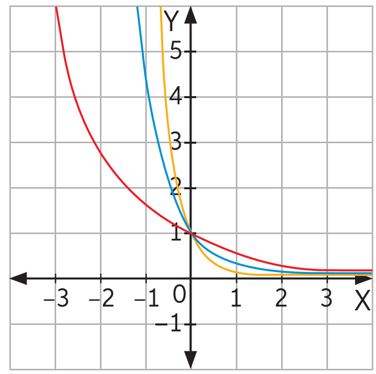
- ¿Por qué, en la situación de las bacterias (actividad 1), el dominio de la función no son todos los números reales? Explica.
- Considera una función exponencial de base mayor que 1. ¿Cómo es su comportamiento para valores negativos de x?
- ¿Cómo crees que sería la gráfica de $f(x) = 2^x + 3$?

6. Identifica en cada caso a qué curva corresponden las funciones dadas.

a. $f(x) = 3^x$, $g(x) = 4^x$, $h(x) = 10^x$



b. $f(x) = 0{,}3^x$, $g(x) = 0{,}6^x$, $h(x) = 0{,}1^x$



7. Representa en el *software* GeoGebra las funciones de los casos 1 y 2. Luego, responde.

Caso 1

$f(x) = 2^x$	$g(x) = 2^{x+3}$	$h(x) = 2^{x-1}$

Caso 2

$p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$q(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$	$r(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3$

a. ¿Qué ocurre con la gráfica de las funciones en el caso 1?, ¿y en el 2?

b. Escribe las conclusiones que puedes obtener con respecto a la traslación de las funciones.

c. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de las funciones?

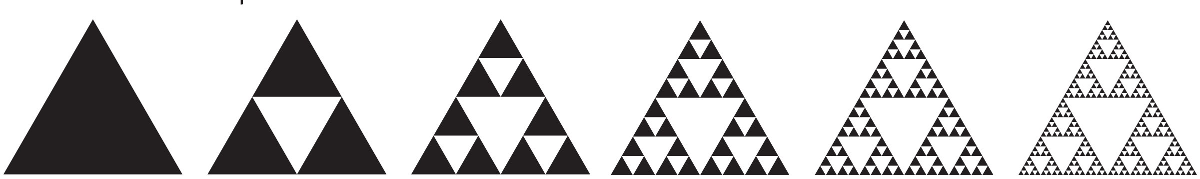
La gráfica de $y = ab^{x-c}$ es una **traslación horizontal** de **c** unidades respecto de $y = ab^x$, hacia la **derecha** si **$c > 0$** y hacia la **izquierda** si **$c < 0$**.

La gráfica de $y = ab^x + h$ es una **traslación vertical** de **h** unidades respecto de $y = ab^x$, hacia **arriba** si **$h > 0$** y hacia **abajo** si **$h < 0$**.

¿Cómo graficarías la función $f(x) = 2^{x+1} - 2$?, ¿qué estrategia usarías? Explica.

Geometría

8. El **triángulo de Sierpinski** es una figura que se construye a partir de un triángulo equilátero (etapa 0), sobre el cual se trazan las medianas y se retira el triángulo central (etapa 1). Para las siguientes etapas, esto se repite en cada uno de los triángulos restantes. En rigor, el triángulo de Sierpinski es la figura obtenida después de infinitas etapas.



Etapa 0 Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3 Etapa 4 Etapa 5

a. ¿Cuántos triángulos negros hay en cada etapa? Escríbelo como potencia.

b. ¿Qué función permite modelar la cantidad de triángulos negros $C(n)$ que habrá en la etapa n?

Lección 3 Modelamiento de fenómenos con la función exponencial

Función exponencial

1. Identifica las funciones que son exponenciales. Para ello, escribe Sí o No según corresponda.

a. ☐ $f(x) = 4x$

b. ☐ $g(x) = 6^{-x}$

c. ☐ $h(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{x}$

d. ☐ $i(x) = x^{-5}$

e. ☐ $j(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{2}$

f. ☐ $k(x) = 3^{2-x}$

2. Verifica si las siguientes proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.

a. ______ Una función exponencial con base mayor que cero y menor que uno es siempre una función decreciente.

____

b. ______ Una función exponencial con base fraccionaria siempre es una función decreciente.

____

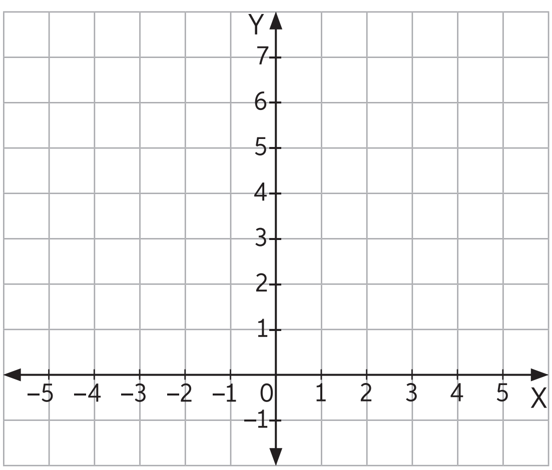
c. ______ La gráfica de la función $h(x) = a^{x}$ con $a > 1$, se traslada 5 unidades horizontalmente hacia los positivos si se grafica $h(x - 5)$.

____

3. Representa cada función en el plano cartesiano. Luego, indica si es una función creciente o decreciente.

a. $f(x) = 4^{x}$

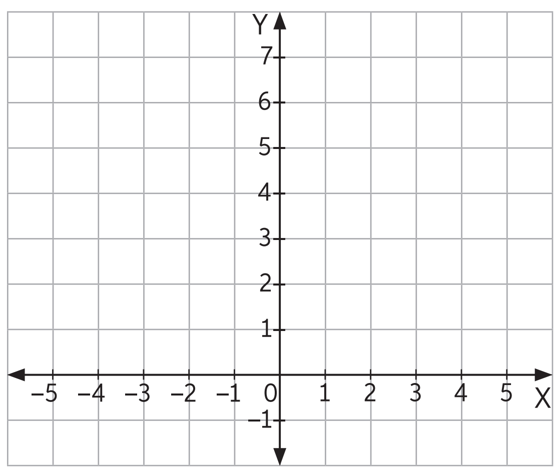
x	−3	−2	−1	0	0,5	1	1,6
$f(x)$							



Función: ______________________

b. $g(x) = e^{-x}$

x	−3	−2	−1	0	0,5	1	1,6
$g(x)$							



Función: ______________________

6. El área cubierta por un nenúfar en un lago se duplica cada día, creciendo gradualmente durante todo el día. Si al momento de empezar un estudio el nenúfar abarca una extensión de 1,2 m^2, ¿qué área ocupará dentro de 8 días?

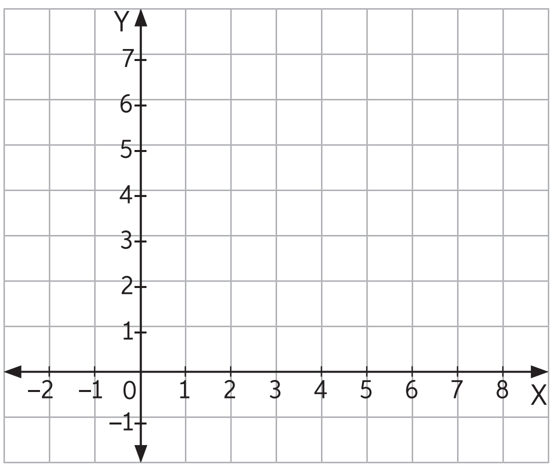
a. Completa la tabla.

Tiempo (días)	1	2	3	4	5	6	7	8
Área (m^2)	1,2							

Los **nenúfares** son plantas acuáticas con flores que crecen en lagos, lagunas, charcas o pantanos y que están usualmente enraizadas en el fondo.

b. ¿Qué función relaciona ambas variables? Llámala $A(t)$.

c. Representa la función en el plano cartesiano.



d. ¿Cuáles son el dominio y el recorrido de la función?

7. Se sabe que la concentración de anestesia en la sangre humana disminuye exponencialmente según la función $f(x) = k \cdot 0{,}95^x$, donde k es la cantidad inicial de anestesia en miligramos y x el tiempo en minutos desde su administración. ¿Cuántos miligramos de anestesia quedan en la sangre del paciente después de hora y media?

Se administraron 60 mg de anestesia a este paciente.