2º
medio

Aprendo
en línea

Orientaciones para el trabajo
con el texto escolar

Clase 22

Matemática

Ministerio de
Educación

Gobierno de Chile

UNIDAD DE
CURRÍCULUM Y
EVALUACIÓN
UCE

Inicio

En esta clase recordaremos algunos conceptos y algunas propiedades de las raíces.

Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo

Como ya vimos en la clase anterior, las raíces cumplen con todas las propiedades de las potencias.
Analiza el siguiente resumen:

En resumen

- A partir del concepto de las raíces cuadradas y sus propiedades, se extiende la noción a potencias de mayores exponentes. En general, si $y = x^n$, con x e y números reales y n un número natural mayor que 1, se dice que x es la raíz enésima de y:

$$y = x^n \leftrightarrow \sqrt[n]{y} = x$$

En esta expresión, a y se le llama cantidad subradical y a n, el índice de la raíz. En el caso de que n sea par, x existe solo si $y > 0$.
Propiedades:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}, \text{ con } b \neq 0$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}. \text{ Cuando } n \text{ es par, } a, b \in \mathbb{R}^+$$

Ejemplos:

a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$

b) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{4 \cdot 5} = \sqrt[5]{20}$

Según los ejemplos, resuelve:

a) $\sqrt[4]{24} \cdot \sqrt[4]{54} =$

b) $\sqrt[3]{72} \cdot \sqrt[3]{36} =$

No olvidemos que:

- Dada una expresión fraccionaria que contiene una o más raíces enésimas no exactas en su denominador, racionalizar la expresión es transformarla de modo que no posea raíces en el denominador, sin cambiar su valor. Para esto, se amplifica por una expresión tal que se elimine la o las raíces del denominador, por ejemplo:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^x}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-x}}}{\sqrt[n]{b^{n-x}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-x}}}{b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \text{ (si } n \text{ es par, } b \in \mathbb{R}^+) \text{ y } x \in \mathbb{N}$$

Ejemplos:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3\sqrt[3]{10}}{2}$

Con lo que hemos visto hasta ahora, desarrolla en tu cuaderno:

a) $\frac{4}{\sqrt{6}} =$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{12}} =$

Cierre

Evaluación

Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta

1 **Al resolver $\sqrt[4]{1\,024}$, se obtiene:**

a) $2\sqrt{2}$

b) $2\sqrt[4]{2}$

c) $4\sqrt{4}$

d) $4\sqrt[4]{8}$

2 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{250}} = ?$

a) $\dfrac{\sqrt[3]{250}}{50}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{500}}{50}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{10}$

3 **El resultado de** $\dfrac{1}{\sqrt{6}} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{3}}$ **es:**

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

b) $\dfrac{\sqrt{18}}{6}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número _______ fue: ___________________________________.

2º medio

Texto escolar

Matemática

Unidad 1

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

Herramientas tecnológicas

¿Cómo lo resuelve la calculadora?

Para operar con las raíces enésimas en calculadoras y computadores, se usa el llamado algoritmo de Newton - Raphson, que plantea lo siguiente:

Si x es una aproximación de $\sqrt[n]{a}$, $x - \dfrac{x^n - a}{n \cdot x^{n-1}}$ es una aproximación aún mejor.

1. ¿Cómo podrías lograr, de manera rápida, una primera "buena" aproximación para $\sqrt[5]{20}$, por ejemplo?

2. Verifica este algoritmo con una planilla de cálculo, aplicando los siguientes pasos:

PASO 1 En la celda A1, escribe la cantidad subradical de la raíz que se calculará.

PASO 2 En la celda A2, escribe el índice de la raíz que se calculará.

PASO 3 En la celda A3, escribe una aproximación inicial.

PASO 4 En la celda A4, escribe, sin espacios, la fórmula
=A3-(POTENCIA(A3;A$2)-A$1)/(A$2*POTENCIA(A3;A$2-1))

PASO 5 Selecciona y arrastra hacia abajo la celda A4 para copiarla en las celdas bajo ella. Procura que se copie al menos hasta la celda A10.

3. Modifica los valores de las celdas A1, A2 y A3 a tu elección. ¿Se obtienen buenas aproximaciones?, ¿cómo podrías comprobarlas?

Cuaderno página 21

En resumen

- A partir del concepto de las raíces cuadradas y sus propiedades, se extiende la noción a potencias de mayores exponentes. En general, si $y = x^n$, con x e y números reales y n un número natural mayor que 1, se dice que x es la raíz enésima de y:

$$y = x^n \leftrightarrow \sqrt[n]{y} = x$$

  En esta expresión, a y se le llama cantidad subradical y a n, el índice de la raíz. En el caso de que n sea par, x existe solo si $y > 0$.
  Propiedades:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}, \text{ con } b \neq 0$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}. \text{ Cuando } n \text{ es par, } a, b \in \mathbb{R}^+$$

- Dada una expresión fraccionaria que contiene una o más raíces enésimas no exactas en su denominador, racionalizar la expresión es transformarla de modo que no posea raíces en el denominador, sin cambiar su valor. Para esto, se amplifica por una expresión tal que se elimine la o las raíces del denominador, por ejemplo:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b^x}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-x}}}{\sqrt[n]{b^{n-x}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-x}}}{b}, \text{ con } a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 \text{ (si } n \text{ es par, } b \in \mathbb{R}^+) \text{ y } x \in \mathbb{N}$$

Actividades de práctica

1. Relaciona cada raíz enésima con una potencia. Para ello, completa la tabla.

5^3 $(-2)^7$ 4^4 $\sqrt[3]{-27}$ $\sqrt[5]{32}$ $\sqrt[3]{-343}$ $\sqrt[3]{1000}$ $(-8)^3$ $\sqrt[4]{1296}$ $(-1)^9$ $\sqrt[5]{243}$

Raíz		$\sqrt[3]{125}$			$\sqrt[4]{256}$		$\sqrt[3]{-512}$		$\sqrt[9]{-1}$		$\sqrt[7]{-128}$
Potencia	$(-3)^3$		2^5	3^5		$(-7)^3$		10^3		6^4	

2. Calcula el valor de las siguientes raíces enésimas.

a. $\sqrt[3]{64} =$

b. $\sqrt[5]{-32} =$

c. $\sqrt[4]{81} =$

d. $\sqrt[6]{1} =$

e. $\sqrt[5]{1024} =$

f. $\sqrt[4]{625} =$

3. Responde.

a. ¿Por qué no está definida la raíz de índice par de un número negativo?

b. ¿Existe algún número real tal que su raíz enésima sea el mismo número?

c. ¿Cuál es el valor de $\sqrt[10]{1}$ y de $\sqrt[15]{-1}$?, ¿de qué depende el signo del valor obtenido en cada caso?

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a. $\sqrt[3]{216} + \sqrt[5]{-243} + \sqrt[4]{16} =$

b. $\sqrt[5]{-32} - \sqrt[4]{10\,000} + \sqrt[3]{64} =$

c. $3\sqrt[5]{0{,}00001} + \sqrt[3]{\frac{1}{64}} + 2\sqrt{64} =$

5. Una de las operaciones en las que se aplica la raíz enésima es la **media geométrica**, que es similar a la media aritmética o promedio, pero en este caso los números se multiplican y finalmente se calcula la raíz enésima que corresponda, según la cantidad de números.

En general: $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$. Observa:

- Dados los números 3 y 12, para obtener su media geométrica se calcula $\sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36}$.
- Para los números 6, 16 y 8, como son tres números, su media geométrica es $\sqrt[3]{6 \cdot 16 \cdot 18} = \sqrt[3]{1728}$.
- En cambio, la media geométrica entre 2, 4, 9 y 18 es $\sqrt[4]{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 18} = \sqrt[4]{1296}$.

Determina la media geométrica de los siguientes números.

a. 4, 6 y 9.

b. 1, 2, 4, 8 y 16.

c. 2, 6, 9 y 12.

d. 2, 4, 6, 9 y 18.

6. Determina, para cada raíz, una expresión equivalente con la menor cantidad subradical posible.

a. $\sqrt[3]{54}$

b. $\sqrt[4]{80}$

c. $\sqrt[3]{9000}$

d. $\sqrt[4]{a^3 b^9}$, con $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

e. $\sqrt[6]{p^{10} q^8 r^3}$, con $p, q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

f. $\sqrt[3]{60 p^5 q^8}$, con $p, q, \in \mathbb{R}$

Glosario

media geométrica: de una cantidad arbitraria *n* de números es la raíz enésima del producto de todos los números.

Se utiliza para datos de progresión geométrica, para promediar razones y para interés compuesto.

¿La media geométrica de dos o más números es mayor o menor que la media aritmética de los mismos números?, ¿por qué crees que sucede eso?

¿Qué aprendí hoy?

1 Calcula el valor de las siguientes raíces enésimas.

a. $\sqrt[5]{243} =$

b. $\sqrt[6]{2048} =$

2 Determina, para cada raíz, una expresión equivalente con la menor cantidad subradical posible.

a. $\sqrt[3]{24000}$

b. $\sqrt[6]{a^8 b^{12} c^{15}}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Cuaderno página 15

Tema 2: ¿Qué representan las potencias de exponente fraccionario?

¿Qué aprenderé?

A comprender la representación de las raíces enésimas como potencias de exponente fraccionario.

¿Para qué?

Para utilizar un registro o el otro según sea necesario al resolver problemas cotidianos.

Actividad en pareja

Taller

1 Apliquen las propiedades de las potencias para reducir las siguientes expresiones.

a. $(4^3)^2 =$

b. $(a^2)^6 =$

2 ¿Qué propiedad debieron aplicar? Explíquenla con sus palabras.

3 Ahora, utilicen la misma propiedad para reducir las siguientes expresiones.

a. $(3^5)^{\frac{1}{5}} =$

b. $\left(6^{\frac{1}{3}}\right)^3 =$

4 Consideren las expresiones anteriores: ¿cómo podrían interpretar los exponentes $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{3}$?, ¿a qué equivalen? Expliquen.

5 Observen la siguiente demostración y comenten con las propiedades que justifican cada paso.

Considera $a, y \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1$

Sea $y = a^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[\text{Se eleva a } n]{} y^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$

Aplicando propiedades de potencias

$y^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$

$y^n = a \leftrightarrow y = \sqrt[n]{a}$

Por definición de raíz enésima

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Ya que ambas expresiones son iguales a y

6 Analicen la siguiente igualdad:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \text{ con } a \in \mathbb{R}^+$$

a. ¿Es correcta? Si lo es, demuéstrenlo utilizando las propiedades que ya conocen. Si no lo es, den un contraejemplo.

b. ¿Cómo se puede interpretar la expresión $a^{\frac{m}{n}}$? Explíquenlo con palabras y den al menos tres ejemplos.

¿Cómo trabajé el taller?	
Individualmente	○ ○ ○
Grupalmente	○ ○ ○

¿Cómo trabajó mi compañero(a) el taller?	
Individualmente	○ ○ ○
Grupalmente	○ ○ ○

Actividades de proceso

1. Analiza la siguiente demostración.

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} = (2 \cdot 3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{6}$$

   a. Explícala con tus palabras y escribe una fórmula general para ella.

   b. ¿Qué propiedad de potencias se utiliza para demostrarla?

2. Muestra las siguientes igualdades, aplicando las propiedades de potencias.

   a. $\sqrt[5]{16} : \sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2}$

   b. $2\sqrt[7]{3} = \sqrt[7]{2^7 \cdot 3}$

Matemática y computación

Un aspecto fundamental en la programación computacional es la optimización de información inicial que se le debe dar al computador para que pueda realizar las operaciones necesarias. Por lo tanto, si ya existe una operación definida, que ya esté programada, y hay otra que se relaciona con ella, generalmente se busca definir esta última de manera similar a la primera.

¿Qué propiedades de potencias son las que se utilizan?

En resumen

Se puede interpretar una potencia de exponente fraccionario como una raíz enésima y viceversa, de modo que:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ si } n \text{ es par y } m \text{ es impar, } a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Gracias a esto, se pueden realizar operaciones entre raíces enésimas aplicando las propiedades de las potencias para interpretar y simplificar el cálculo de expresiones que las involucran.

Actividades de práctica

1. Expresa en forma de raíces las siguientes potencias.

   a. $6^{\frac{1}{5}} =$

   b. $8^{\frac{1}{3}} =$

   c. $24^{\frac{5}{9}} =$

   d. $x^{\frac{5}{2}} =$

   e. $q^{\frac{7}{4}} =$

   f. $101^{\frac{3}{n}} =$

2. Demuestra la siguiente propiedad de las raíces enésimas.

$$\sqrt[an]{x^{bn}} = \sqrt[a]{x^b}, \text{ con } x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

3. Aplica la propiedad demostrada anteriormente para reducir los índices de las siguientes raíces. Considera $p, q \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

   a. $\sqrt[8]{p^6} =$

   b. $\sqrt[5]{q^{15}} =$

   c. $\sqrt[4]{p^2} =$

   d. $\sqrt[10]{p^8 q^6} =$

   e. $\sqrt[6]{p^3 q^3} =$

Usa calculadora
Para explorar

4. Verifica, considerando valores para a y b positivos, que los pares de expresiones son distintos entre sí.

   a. $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$

   b. $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $a+b$

   c. $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{(a+b)^2}$

¿Existe alguna condición para el valor de a? Justifica.

5. Si $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, explica con tus palabras, da ejemplos y demuestra la siguiente propiedad de las raíces enésimas:

$$\sqrt[y]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}$$

6. Considera las siguientes expresiones, con $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$:

$$\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[7]{a^5} = \sqrt[35]{a^{46}} \qquad \frac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[35]{a^4}$$

   a. ¿Son correctas? Si lo son, demuéstralo. Si no lo son, da un contraejemplo para cada una.

   b. Escribe una fórmula que permita multiplicar o dividir dos raíces enésimas de distinto índice e igual cantidad subradical.

7. Aplica la fórmula deducida anteriormente y las demás propiedades para reducir las siguientes expresiones. Considera $a, b, p, x \in \mathbb{R}^+$.

a. $\sqrt[5]{4^4} \cdot \sqrt[3]{3^2} =$

b. $\sqrt{343} \cdot \sqrt[3]{49} =$

c. $\sqrt[5]{3^2} \cdot \sqrt[6]{9^5} =$

d. $\sqrt[7]{a^3 b^4} \cdot \sqrt[3]{a^{-5} b^2} =$

e. $\sqrt[4]{3p^5} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{4}{p^2}} =$

f. $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[4]{8}} =$

g. $\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} =$

h. $\sqrt{\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[6]{a^3}}} =$

i. $\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt{p^3}}}{\sqrt[4]{p^5}} =$

j. $\dfrac{10\sqrt[3]{x^2} - 15\sqrt[3]{x^4}}{5\sqrt[3]{x}} =$

8. Reduce las siguientes expresiones para obtener una equivalente con la menor cantidad subradical posible. Considera $a, b, p, q \in \mathbb{R}^+$.

a. $\dfrac{\sqrt[3]{120}}{\sqrt[3]{10}} =$

b. $\dfrac{\sqrt[5]{200}}{\sqrt[5]{4}} =$

c. $\dfrac{\sqrt[6]{24}}{\sqrt[6]{16}} =$

d. $\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{8} =$

e. $\sqrt[3]{198} \cdot \sqrt[3]{21} =$

f. $\dfrac{\sqrt[5]{5^7}}{\sqrt[5]{25}} \cdot \sqrt[5]{1000} =$

g. $\dfrac{\sqrt[3]{a^4 b^5}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a b^6}} =$

h. $\dfrac{\sqrt[4]{p^5 q^3}}{\sqrt[4]{p^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{q}}{\sqrt[4]{q^5}} =$

¿Qué aprendí hoy?

1 Expresa en forma de raíces y calcula.

a. $64^{\frac{1}{3}} =$

b. $81^{\frac{3}{4}} =$

2 Explica con tus palabras la relación entre las potencias con exponente fraccionario y las raíces enésimas.

3 ¿En qué casos es conveniente usar la notación de potencias con exponente fraccionario?, ¿por qué?

Cuaderno página 17