1° medio

Aprendo en línea

Orientaciones para el trabajo con el texto escolar

Clase 10

Matemática

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN UCE

Inicio

En esta clase recordaremos el conjunto de los Números Racionales a fin de abordar las **potencias de base racional y exponente natural.**

Para resolver esta guía necesitarás tu libro y tu cuaderno de matemática. Realiza todas las actividades que te proponemos en tu cuaderno, agregando como título el número de la clase que estás desarrollando.

Desarrollo

Para comenzar, utilizaremos el texto del estudiante, página 16, para recordar cómo se compone el conjunto de los números racionales.

Conceptos

- Los **números naturales** ($\mathbb{N}$) se representan por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Los **números enteros** ($\mathbb{Z}$) se representan por $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$.
- Los **números racionales** ($\mathbb{Q}$) se representan por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

- El siguiente diagrama te ayudará a comprender el conjunto de los números racionales.

Números racionales
- Fracciones ▸ $\frac{2}{5}$
- Decimales
  - Finitos ▸ $-3,5$
  - Infinitos
    - Periódicos ▸ $0,5353... = 0,\overline{53}$
    - Semiperiódicos ▸ $-2,34747... = -2,3\overline{47}$

Simbólicamente se tiene que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, es decir, todo número natural es un número entero y todo número entero puede ser representado como un número racional.

Ahora, el cuadro conceptual de la **página 22** del texto del estudiante, nos permite recordar cómo se multiplican números racionales. Léelo detenidamente y luego, en tu cuaderno, calcula los ejercicios de la actividad 1.

Conceptos

Para **multiplicar números racionales** debes tener en cuenta lo siguiente:

- Si son **números decimales**, los multiplicas de manera habitual, considerando que la posición de la coma decimal se desplaza, de derecha a izquierda, tantos lugares como cifras decimales tenga cada número decimal.
- Si están representados como **fracciones**, simbólicamente resuelves.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \text{ donde } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \text{ con } b \neq 0, d \neq 0.$$

Actividad 1

Calcula las siguientes multiplicaciones:

1) $\frac{3}{5} \bullet \frac{2}{7} =$

2) $\frac{9}{10} \bullet \frac{5}{12} \bullet \frac{8}{3} =$

Ahora, el cuadro conceptual de la **página 45**, nos muestra cómo se puede expresar una potencia de base racional y exponente natural. Analiza esta información y luego, en tu cuaderno, resuelve el ítem 2 de la página 48 del texto del estudiante.

Conceptos

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, la **potencia** de base $\frac{a}{b}$ y exponente n, con $n \in \mathbb{N}$, se define como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ - veces}}$$

Como un número racional se puede representar como el cociente de dos números enteros, en el caso de una **potencia de base racional**, se tiene que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Cierre

Evaluación de la clase
Marca con una X la letra de la alternativa correcta.

1 Al desarrollar $\left(\frac{-3}{7}\right)^4$, se obtiene:

A. $\frac{12}{28}$

B. $\frac{81}{2\,401}$

C. $\frac{-81}{2\,401}$

D. $\frac{-2\,401}{81}$

2 Al calcular $0{,}25^2$, se obtiene:

A. $\frac{50}{1\,000}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{16}$

D. $\frac{1}{256}$

3 Una cierta bacteria va perdiendo su masa (M) de manera que cada 5 minutos se desintegra la mitad de ella. Si han transcurrido 50 minutos, ¿qué expresión representa la masa que queda de la bacteria?

A. $M \cdot \frac{1}{2} \cdot 10$

B. $M \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{50}$

C. $M \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

D. $\left(M \cdot \frac{1}{2}\right)^{10}$

Revisa tus respuestas en el solucionario y luego revisa tu nivel de aprendizaje, ubicando la cantidad de respuestas correctas, en la siguiente tabla:

3 respuestas correctas:	Logrado.
2 respuestas correctas:	Medianamente logrado.
1 respuesta correcta:	Por lograr.

Completa el siguiente cuadro, en tu cuaderno:

Mi aprendizaje de la clase número _______ fue: ___________________________________.

1º medio

Texto escolar

Matemática

Unidad 1

A continuación, puedes utilizar las páginas del texto escolar correspondientes a la clase.

- En la actividad anterior pudiste notar que las medidas de los lados de los triángulos se podían escribir como multiplicación iterada. Este resultado motiva el uso de **potencias con base racional** (que puede ser fraccionaria o decimal).

Conceptos

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, la **potencia** de base $\frac{a}{b}$ y exponente n, con $n \in \mathbb{N}$, se define como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n\text{ - veces}}$$

Como un número racional se puede representar como el cociente de dos números enteros, en el caso de una **potencia de base racional**, se tiene que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo 1

Calcula el valor de las potencias $0{,}5^3$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^4$.

- $0{,}5^3 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$ → Desarrollas la potencia.
  $= 0{,}25 \cdot 0{,}5$ → Multiplicas sucesivamente los números decimales.
  $= 0{,}125$

  Otra manera de calcular el valor de la potencia es expresando los números decimales en su forma fraccionaria:

$$0{,}5^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{-4}{3} \cdot \frac{-4}{3} \cdot \frac{-4}{3}$ → Desarrollas la potencia.
  $= \frac{16}{9} \cdot \frac{-4}{3}$ → Aplicas la propiedad del producto de fracciones respetando la regla de los signos.
  $= \frac{-64}{27}$

- $\left(-\frac{5}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right)$ → Desarrollas la potencia.
  $= \frac{25}{4} \cdot \frac{25}{4}$ → Aplicas la propiedad del producto de fracciones respetando la regla de los signos.
  $= \frac{625}{16}$

¿Qué propiedad de las potencias de base entera negativa se podría haber aplicado en las últimas dos potencias del ejemplo 1?

En el **triángulo de Sierpinski**, ¿qué medidas se podrían escribir como potencias de base fraccionaria y exponente natural? Comenta con un compañero o una compañera.

Waclaw Sierpinski

1882 -1969

Fue un matemático polaco que, entre sus aportes, estudió la teoría de la curva que describe un camino cerrado que contiene todos los puntos interiores de un cuadrado.

Atención

Recuerda que:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

con a, b números enteros distintos de cero.

Conceptos

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

Ejemplo 2

¿Cuál es el valor de $0,\overline{3}^{-3}$? Justifica tu respuesta aplicando propiedades de potencias de base entera y exponente entero.

Usando directamente la propiedad, se tiene: $0,\overline{3}^{-3} = \left(\frac{3}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{3}\right)^{3} = 3^3 = 27$.

Aplicando las propiedades de las potencias de base entera:

$0,\overline{3}^{-3} = \left(\frac{3}{9}\right)^{-3}$ → Expresas el número decimal periódico en fracción.

$= \frac{3^{-3}}{9^{-3}}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= 3^{-3} : 9^{-3}$ → Escribes como una división.

$= \frac{1}{3^3} : \frac{1}{9^3}$ → Aplicas la propiedad de la potencia con exponente negativo y base entera.

$= \frac{9^3}{3^3}$ → Calculas la división de fracciones.

$= \left(\frac{9}{3}\right)^{3}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= 3^3 = 27$

Respuesta: El valor de $0,\overline{3}^{-3}$ es 27.

Atención

Recuerda que para expresar un número decimal periódico en su forma fraccionaria, en el denominador se deben poner tantos nueves como cifras tenga el período, y en el numerador, el número con el período, sin considerar la coma decimal, menos el número formado por la parte entera. Luego, si es el caso, simplificas.

Por ejemplo:

$$0,\overline{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$1,\overline{21} = \frac{121-1}{99} = \frac{120}{99} = \frac{40}{33}$$

Para representar números decimales como una fracción, ¿qué otro procedimiento utilizarías?

Conceptos

Una **potencia de base un número racional distinto de cero con exponente 0** es igual a 1.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$.

Ejemplo 3

¿Cuál es el valor de $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0}$? Justifica tu respuesta aplicando propiedades de potencias que tienen como base entera y exponente un número entero.

Usando directamente la propiedad, se tiene que: $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = 1$.

Otra manera es usar las propiedades de las potencias de base entera:

$\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = \frac{(-2)^0}{7^0}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \frac{1}{1} = 1$ → Aplicas la propiedad de la potencia de exponente 0 y base entera.

Respuesta: El valor de $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0}$ es 1.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Escribe cada potencia con exponente positivo.

a. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ **b.** $\left(-0{,}4\overline{3}\right)^{-8}$ **c.** $\left(-\frac{10}{9}\right)^{-1}$

2. Calcula el valor de cada potencia.

a. $\left(\frac{2}{5}\right)^{0}$ **c.** $\left(-\frac{3}{8}\right)^{4}$ **e.** $0{,}03^{2}$

b. $\left(\frac{-1}{6}\right)^{3}$ **d.** $0{,}4^{2}$ **f.** $(-0{,}2)^{2}$

3. Remplaza en cada expresión $a = 3$, $b = 2$, $c = -2$, calcula y simplifica cada vez que sea necesario.

a. $\left(\frac{a}{b}\right)^{3} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{c}$ **b.** $\frac{1}{b} + \left[\left(\frac{14}{a}\right)^{-c}\right]^{-1}$ **c.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{b} - \left(\frac{3}{7}\right)^{c} + \frac{1}{a}$

4. Completa para que se cumpla cada igualdad.

a. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\square} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{5}$ **b.** $\left[(0{,}125)^{2}\right]^{\square} = 8^{8}$ **c.** $\left(-\frac{7}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{7}\right)^{\square}$

5. Observa el siguiente desarrollo de propiedades de las potencias presentado por dos alumnos de 1º medio.

Alejandro

Presenta el siguiente desarrollo: $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

Beatriz

Presenta el siguiente desarrollo: $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

¿Quién tiene la razón? Justifica tu respuesta.

6. Comprueba que se cumplen las siguientes igualdades.

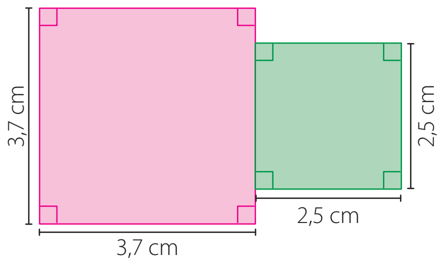
a. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\right]^{3} = 1$ **b.** $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{3} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\right]^{2}$

7. Opera de forma separada en ambos lados de la desigualdad para demostrar que la potenciación no es distributiva respecto de la adición y la sustracción.

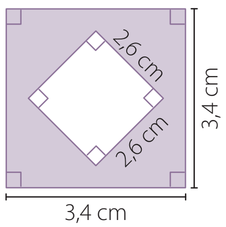
a. $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)^{2} \neq \left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{2}$ **b.** $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)^{2} \neq \left(\frac{3}{4}\right)^{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$

8. Geometría Calcula el área de la región sombreada en cada caso.

a.



b.



9. **Resuelve el siguiente problema.**

La profesora copió la siguiente información en la pizarra: El virus del sida mide aproximadamente $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm y el de la influenza, $1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5$ cm aproximadamente. Ella pidió a sus estudiantes que determinen cuál de los dos virus tiene mayor tamaño. Si todos la resolvieron correctamente, ¿cuál fue la respuesta?

10. **Junto con un compañero o una compañera realicen la siguiente actividad. Consideren el triángulo equilátero de Sierpinski de la página 44.**

a. Si el perímetro de la figura inicial es a, ¿cuánto mide el perímetro de cada uno de los triángulos blancos de las figuras 0, 1 y 2?

b. ¿Cuánto mide el perímetro de cada uno de los triángulos blancos de la figura n?

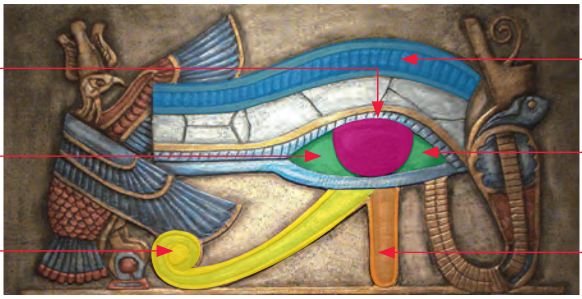
11. Ciencias Sociales **Analiza la siguiente información y luego responde.**

Cuenta la historia que en una batalla egipcia el ojo de Horus fue seccionado en distintas partes, las cuales fueron denominadas "fracciones del ojo de Horus", como se muestra a continuación:

Pupila $\frac{1}{4}$

Parte derecha de la pupila

Parte inferior diagonal bajo el ojo $\left(\frac{1}{2}\right)^5$



Cejas

Parte izquierda de la pupila $\frac{1}{2}$

Parte inferior vertical del ojo 2^{-6}

a. La fracción de la parte derecha de la pupila se relaciona con elevar a la cuarta la fracción de la parte izquierda de la pupila, ¿cuál es dicha fracción?

b. Si la ceja corresponde al valor de la potencia 2^{-3}, ¿a cuánto corresponde dicho valor?

c. ¿Cuál es la fracción de la parte inferior vertical bajo el ojo?

d. ¿Cuál de todas las fracciones es la menor? ¿A qué parte del ojo de Horus corresponde?

e. Si todas las fracciones del ojo de Horus se relacionan con la expresión $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$, ¿qué valores podría tener n? Explica.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios Página 17

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica con tus palabras lo que entiendes por potencia con base racional y exponente entero.

____

- ¿Cómo mejorarías el trabajo grupal con tus compañeros?

____