

## Actividad 1: De la geometría plana a la geometría espacial

### PROPÓSITO

Los estudiantes amplían sus conocimientos y habilidades desde la “geometría plana” hacia la “geometría espacial”, y reconocen que se mantienen los conceptos geométricos como ejes, coordenadas y vectores. Además, se espera que utilicen las herramientas disponibles para aumentar su imaginación espacial, resolver problemas y abstraer situaciones espaciales mediante coordenadas en tres dimensiones. Pueden emplear las herramientas y conocimientos disponibles para resolver problemas en el espacio, con énfasis en problemas técnicos que requieren de la posición vectorial, como la posición de objetos en el aire, la tierra o bajo el mar.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Resolver problemas que involucren puntos, rectas y planos en el espacio 3D, haciendo uso de vectores e incluyendo representaciones digitales.

**OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

**OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

### Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

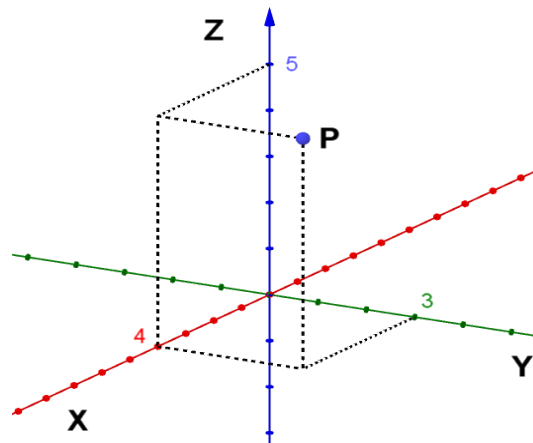
**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

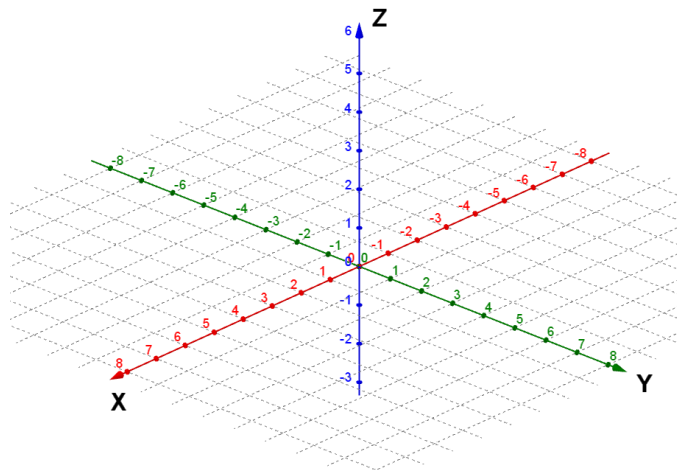
### REPRESENTAR PUNTOS Y VECTORES EN EL SISTEMA CARTESIANO 3D

Para las siguientes actividades, puedes emplear el software GeoGebra 3D; recuerda guardar y compartir todos los trabajos o proyectos realizados en una carpeta o “portafolio digital”.

1. ¿Cómo se representa los puntos en un sistema cartesiano 3D de coordenadas?
  - a. Señala cuáles son las coordenadas del punto  $P$  en el gráfico. Explica cómo lo hiciste y comprueba con GeoGebra 3D la ubicación en el formato " $P = (x; y; z)$ ".

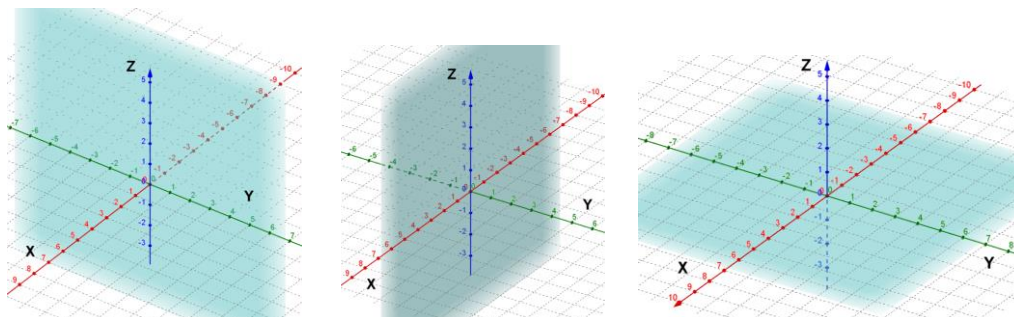


- b. A continuación, ubica los puntos  $A(-4; 3; -5)$ ,  $B(2; -7; 8)$ ,  $C(8; 0; 2)$  y  $D(-8; 2; -1)$ . Explica cómo lo hiciste y comprueba con GeoGebra 3D la ubicación de cada punto, según el formato " $P = (x; y; z)$ ".



## 2. ¿Cómo se identifican los planos en un sistema cartesiano 3D de coordenadas?

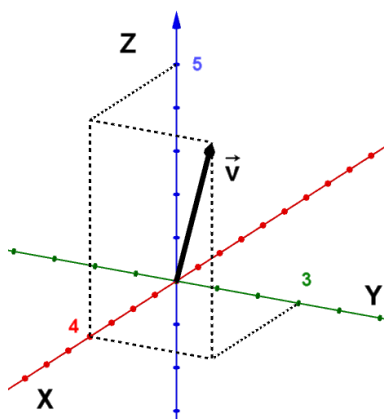
- a. Rotula en el sistema cartesiano de coordenadas 3D en las figuras de abajo: ¿cuáles son el “plano  $xy$ ”, el “plano  $xz$ ” y el “plano  $yz$ ”? Verifica tus elecciones, usando GeoGebra 3D y la herramienta “Plano” para seleccionar dos rectas (en este caso, los pares de ejes involucrados).



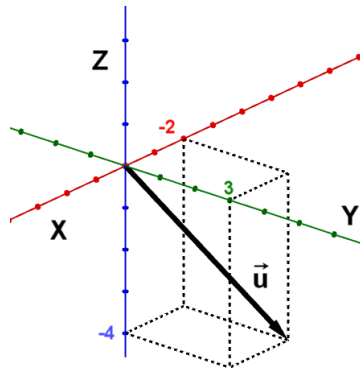
- b. Según las gráficas anteriores, ¿cuál debería ser la ubicación en el sistema cartesiano 3D, de puntos de la forma  $P(0; 0; a)$ ,  $Q(b; 0; 0)$  y  $R(0; c; 0)$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales? Explica la manera en que lo pensaste. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación con casos concretos de este tipo de puntos; por ejemplo: “ $P = (0; 0; -2)$ ”.
- c. Según las gráficas anteriores, ¿cuál debería ser la ubicación en el sistema cartesiano 3D, de puntos de la forma  $M(a; 0; a)$ ,  $N(b; b; 0)$  y  $O(0; c; c)$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales? Explica la manera en que lo pensaste. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación con casos concretos de este tipo de puntos; por ejemplo: “ $M = (1; 0; 1)$ ”.

## 3. ¿Cómo se representan los vectores en un sistema cartesiano 3D de coordenadas?

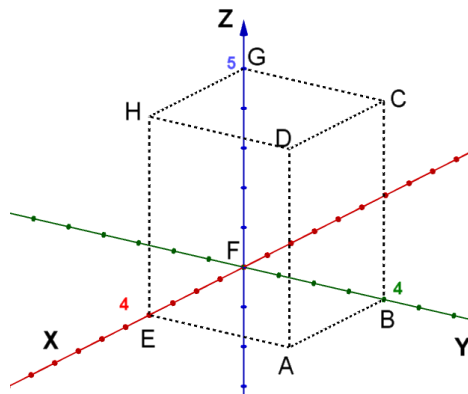
- a. Usando la forma  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , representa el vector  $\vec{v}$  según lo que se muestra en la figura. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación del vector en el sistema cartesiano 3D.



- b. Representa el vector  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  en forma de una columna de coordenadas. Comprueba con GeoGebra 3D la ubicación del vector en el sistema cartesiano 3D.



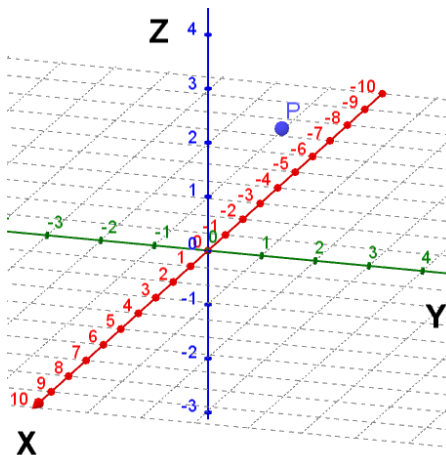
4. En la siguiente figura, el paralelepípedo recto rectangular tiene los vértices A, B, C, D (cara frontal delante) y E, F, G, H (cara frontal detrás).



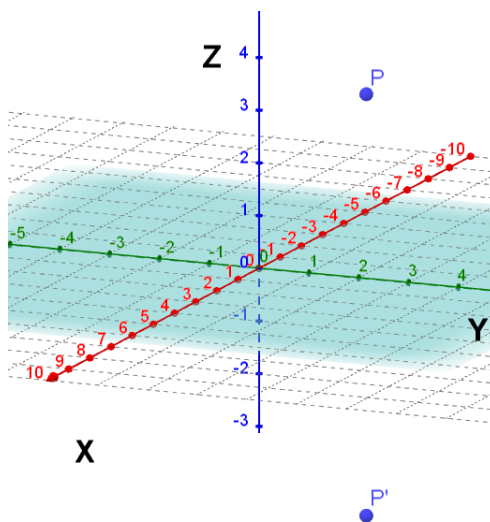
- Identifica los vectores posicionales de los vértices y preséntalos acorde al formato  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ . Comprueba tus resultados con GeoGebra 3D.
- Determina los vectores que se puede asociar a las diagonales de las caras del paralelepípedo. Comprueba tus resultados con GeoGebra 3D. ¿Coinciden algunos de estos vectores con los establecidos en a.? ¿Por qué?
- Determina aquellos vectores en el paralelepípedo que se puede asociar a diagonales que no pertenezcan a las caras. Comprueba tus resultados con GeoGebra 3D.

## TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS POR MEDIO DE UN SISTEMA 3D DE COORDENADAS

1. ¿Cómo reflejar puntos por medio de planos en el sistema de coordenadas 3D?
  - a. Define las coordenadas de un punto  $P$ ; por ejemplo:  $P = (2; 3; 4)$ . Utiliza GeoGebra 3D para hacerlo.

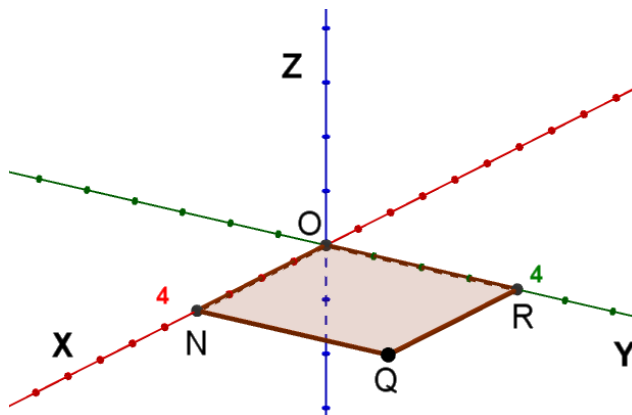


- b. Ahora refleja el punto  $P$  respecto del plano  $xy$ . Usa primero la herramienta “Plano por dos rectas” para definir el plano  $xy$ , marcando el eje  $X$  y el eje  $Y$ . A continuación, utiliza la herramienta “Simetría especular”. Marca el punto  $P$  y luego el plano  $xy$  definido para obtener el punto reflejado  $P'$ . ¿Cuáles son las coordenadas del punto  $P'$  imagen o reflejado? ¿Qué ha cambiado en las coordenadas respecto de  $P$ ?



- c. Repite el procedimiento en GeoGebra 3D, reflejando ahora el punto  $P$  en el plano  $yz$ . ¿Cuáles son las coordenadas del punto  $P'$  imagen o reflejado? ¿Qué ha cambiado en las coordenadas?
      - d. Repite el procedimiento en GeoGebra 3D, reflejando ahora el punto  $P$  en el plano  $z$ . ¿Cuáles son las coordenadas del punto  $P'$  imagen o reflejado? ¿Qué ha cambiado en las coordenadas?

2. ¿Cómo realizar transformaciones isométricas en el sistema de coordenadas 3D? Considera el siguiente rectángulo  $ONQR$ .



- Traslada el rectángulo  $ONQR$  por medio del vector  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ . ¿Cuáles son las coordenadas del rectángulo trasladado o imagen  $O'N'Q'R'$ ? Comprueba tu resultado con GeoGebra 3D, usando la herramienta “traslación”.
- Rota el rectángulo  $ONQR$   $90^\circ$  en sentido “antihorario” en torno al segmento  $NO$ . ¿Cuáles son las coordenadas de la imagen  $O'N'Q'R'$ ? Comprueba tu resultado con GeoGebra 3D, usando la herramienta “rotación axial”.

### SITUACIONES DE LA VIDA DIARIA Y EL SISTEMA 3D DE COORDENADAS

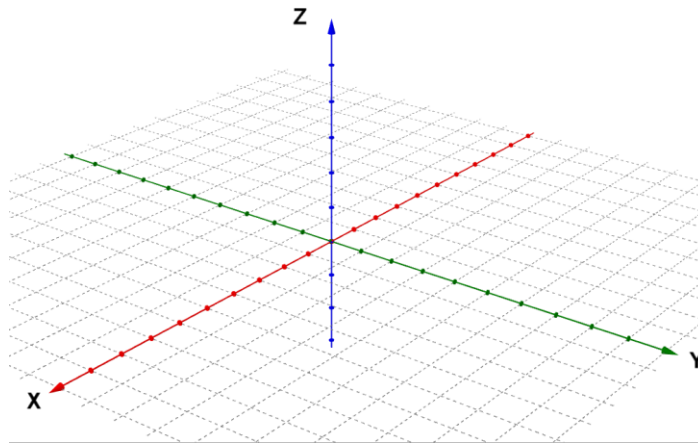
- La torre de control de vigilancia aérea, ubicada en un cerro de la ciudad y operada por drones, tiene en su interior el origen de un sistema de coordenadas espaciales 3D, donde la dirección al norte representa el eje de coordenadas Y. El eje X representa la dirección de oeste al este, y el eje Z representa la dirección vertical hacia arriba. Las coordenadas corresponden a la unidad de metros.



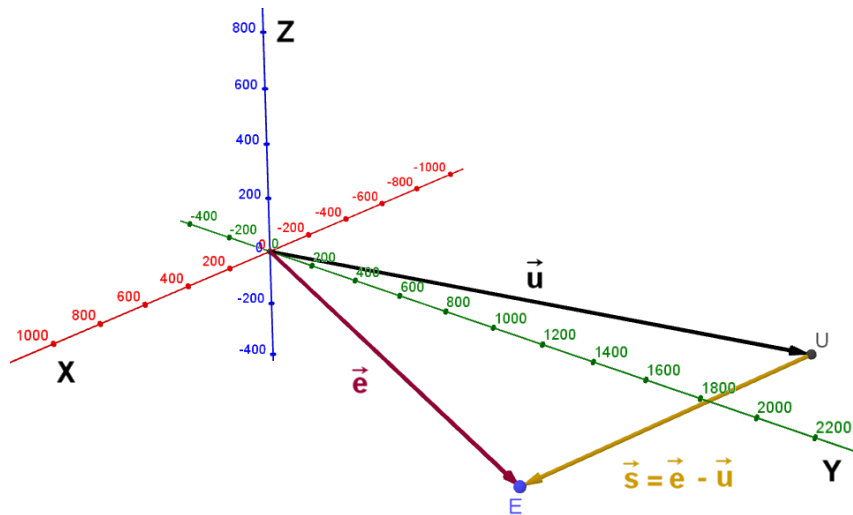
- En una situación de emergencia, el dron estaba en la ubicación  $U(-300; 2\ 000; 100)$  y el lugar E de la emergencia tiene las coordenadas  $E(500; 1\ 500; -200)$ .

Conexión  
interdisciplinaria:  
Ciencias para la  
Ciudadanía  
OA c, 3° y 4° medio

- a. Representa la situación en un sistema de coordenadas 3D, de modo que te permita modelar de manera más sencilla. Utiliza una escala conveniente según los datos del problema y señala claramente los puntos cardinales.



- b. Representa las ubicaciones de U y E mediante sus vectores posicionales.  
 c. Determina el vector  $\overrightarrow{UE}$  asignado al traslado directo del dron al lugar de emergencia.



3. Representa la dirección del vector  $\overrightarrow{UE}$  mediante un vector  $\vec{s}$  en forma simplificada, con coordenadas de un dígito.  
 4. En otra situación, imagina que el dron se dirige desde su posición actual del lugar de emergencia (E) a una nueva dirección (A), representada por el vector  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Determina el vector  $\overrightarrow{EA}$  de traslado.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere recordar a los estudiantes que los vectores son un conjunto de puntos y muestran la traslación desde un punto del espacio hasta otro. Por esta razón, las coordenadas de un vector se representan en forma de una columna, en la cual la coordenada superior muestra las unidades de la traslación en dirección X, la coordenada central representa las unidades de traslación en dirección Y, mientras la coordenada inferior considera la traslación en dirección Z.
2. Para acostumbrarse a reconocer objetos según una ubicación tridimensional, se recomienda dibujar puntos y sus vectores posicionales, utilizando líneas punteadas paralelas a los ejes de coordenadas.
3. Se sugiere trabajar con los jóvenes en cómo identificar puntos particulares con dos coordenadas o una de ellas de valor "0", para fomentar aún más la comprensión espacial.
4. A partir de las actividades, se transfiere el concepto de traslaciones o de reflexiones, que ya conocen en la geometría del plano, lo que ayuda a aumentar el manejo de movimientos en el espacio. En general, se transfiere conceptos de la geometría 2D a la geometría 3D para aumentar la imaginación espacial.
5. Conviene usar contextos aplicados como el desplazamiento de drones, pues implica describir en detalle movimientos según coordenadas y vectores, incluyendo posiciones de reposo en el aire, con lo cual se puede modelar situaciones de vigilancia aérea.
6. Cabe precisar que, para las situaciones en contextos de ubicación, se elige el eje X en correspondencia al sentido de la rotación propia de la Tierra (del oeste al este) y la dirección Y correspondiente a la dirección y orientación (al norte) de mapas geográficos. Para la orientación del eje Z, se considera natural elegir la perpendicular hacia arriba.
7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Representan puntos del espacio en el sistema de coordenadas 3D.
  - Generalizan la noción de vector y de operatoria vectorial desde el plano 2D hacia el espacio 3D.
  - Resuelven problemas que involucran la reflexión de puntos respecto de planos.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Coordenadas cartesianas  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.disfrutalasmaticas.com/graficos/coordenadas-cartesianas.html>
- Sistema de coordenadas en el espacio  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://navarrof.orgfree.com/Docencia/MatematicasIV/UT1/sistemas\\_de\\_coordenadas.htm](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://navarrof.orgfree.com/Docencia/MatematicasIV/UT1/sistemas_de_coordenadas.htm)