Actividad de aprendizaje 5: Aproximación de una distribución binomial a través de una distribución normal en contextos de la vida cotidiana

OA 2: Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

PREGUNTAS ESENCIALES

- ¿Qué tipo de situación o fenómeno se puede modelar, respectivamente, mediante variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas?

- ¿Cómo puede ayudar la distribución normal en situaciones modelables por la distribución Binominal?

PROPÓSITO

Esta actividad permite a los estudiantes aprender a resolver problemas de situaciones de incerteza que tienen un grado adecuado de relación con el ámbito **Científico Humanista**, donde deben tomar decisiones basadas en cálculos provenientes del modelo probabilístico binomial o del modelo probabilístico normal, considerando a este último como una aproximación razonablemente buena al modelo binomial, cuando la envergadura de los cálculos de este último dificulte su uso.

DURACIÓN	CONEXIÓN
Actividad individual: 1 hora pedagógica Actividad colaborativa: 1 hora pedagógica	En diversos ámbitos de la vida cotidiana.

CONTEXTO

Se han escogido contextos variados, tratando de abarcar diversos ámbitos de la realidad que permitan reforzar el alcance y la utilidad de las distribuciones binomial y normal. Además, se han escogido contextos que ayuden a visualizar la economía de cálculos que se produce al aproximar a la distribución binomial por la distribución normal en los casos donde esto es matemáticamente viable.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

A. ACTIVIDAD INDIVIDUAL

1. La encuesta[3] "Quiénes y cómo son los fumadores chilenos" reporta que 64% de los chilenos no fuma. Si se escogen al azar a 5 chilenos en una reunión en un centro de eventos:

   a. Verifica que esta situación se puede modelar por una distribución binomial.

   b. Con base en la información proveniente del enunciado, determina la variable aleatoria X que se deduce de este contexto. (Considera el atributo "no fumador" de las personas escogidas).

   c. ¿Cuál es la probabilidad de que haya una sola persona no fumadora entre las 5 escogidas? (usando la variable aleatoria X, la probabilidad pedida es $P(X = 1)$).

   d. El encargado del evento quiere que la mayoría de las personas escogidas no sean fumadoras. ¿cuál es la probabilidad de que haya tres o más personas fumadoras entre las escogidas? (observa que es la suma tres probabilidades).

   e. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de tres personas no fumadoras? (observa que, a diferencia de la pregunta anterior, en este caso no se considera una pieza en el cálculo).

   f. Si tú fueras el encargado del evento, y sabiendo que cabe la posibilidad de que al hacer la elección aleatoria de las 5 personas, es posible que sean todas fumadoras. ¿Cuál es la probabilidad de que escojas a sólo fumadores?, ¿y que todos sean no fumadores? Justifica tus respuestas.

   g. Un criterio razonable para considerar buena la elección, es que haya a lo más una persona fumadora. ¿Cuál es la probabilidad de que hayas hecho una buena elección? Justifica tu respuesta.

Si X es una variable aleatoria que distribuye $B(n;p)$, entonces la probabilidad $P(X = k)$ se obtiene calculando:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

El factorial de un número entero y positivo n, se define como:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

El número combinatorio $\binom{n}{k}$para números enteros y positivos n y k se define como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

siempre que $n \geq k$.

Una aproximación de la distribución binomial, de tamaño n y probabilidad de éxito p, por una distribución normal, se considera razonablemente buena si $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$.

Recordar que la desviación estándar σ es igual a la raíz cuadrada de la varianza σ^2.
En este caso se tiene que
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

2. A continuación, usaremos el mismo contexto de la pregunta anterior, se mantiene el 64% de personas que no fuma, pero ahora se escogen 30 personas al azar.

   a. Escribe la suma de términos que se requiere (sin calcularlos) para determinar la probabilidad de que se tengan 14 o menos personas no fumadoras defectuosas (o sea, escribe la expansión de $P(X \leq 22)$).

[3]La encuesta "Microestudio CHILE3D: Quiénes y cómo son los fumadores chilenos" fue hecha por GfK Adimark en2016.

b. Debido a lo laborioso del cálculo anterior, aproximaremos la distribución binomial a la normal. Para ello, verifica que se cumplen las condiciones necesarias para que la distribución binomial que modela esta situación se pueda aproximar por una distribución normal.

c. Para determinar la probabilidad $P(X \leq 22)$ por medio de una distribución normal, necesitaremos calcular los parámetros μ y σ siguientes:

Esperanza de la binomial: $\mu = n \cdot p =$ ______ $\cdot$ ______ $=$ ______

Varianza de la binomial: $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) =$ ____ $\cdot$ ____ $\cdot$ ____ $=$ ____

Desviación estándar de la binomial

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_} = \_\_\_\_\_\_$$

Para estandarizar la variable aleatoria X se utiliza la variable aleatoria estándar $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ que tiene distribución $N(0;1)$.

d. Entonces, la distribución binomial$B(30; 0{,}64)$ se puede aproximar por la distribución normal$N(\mu;\sigma) = N($____;____$)$.

e. Estandariza la probabilidad buscada (o sea, transforma $P(X \leq 22)$ a $P\left(Z \leq \frac{22-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$ para los respectivos valores de n y de p y encuentra la probabilidad buscada usando la tabla de valores siguiente:

La tabla permite calcular $P(Z < x)$, donde Z es la variable aleatoria estandarizada de la variable aleatoria continua X de media μ, desviación estándar σ a través de la transformación $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, que distribuye normal de media 0 y desviación estándar 1, es decir,$N(0,1)$.

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,5279	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,5438	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,6293	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,6591	0,66276	0,6664	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,7054	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,7224

(Nota: Diseñar tabla)

f. Compara el resultado aproximado que obtuviste para $P(X \leq 22)$ usando la distribución normal con el que entrega la distribución binomial$P(X \leq 22) = 0.89774$. Encuentra el porcentaje de error cometido en la aproximación e interprétalo.

g. Conjetura por qué es razonable aproximar una distribución $B(n;p)$ por una distribución $N\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$.

B. ACTIVIDAD COLABORATIVA

1. Sabiendo que los números de la ruleta son rojos o negros solamente, un grupo de turistas, en una visita a un Casino, decidió jugar a la ruleta apostando 200 veces al color negro (en lugar del rojo); cada apuesta será de $1000.

   a. Expliquen por qué esta situación es modelable con una distribución binomial y determinen la cantidad de ensayos (n), la probabilidad de "éxito" (p) y la variable aleatoria X asociada a este contexto.

   b. Calcular de forma manuscrita la probabilidad de que ganen exactamente 90 veces (se pide calcular $P(X = 90)$ usando la distribución binomial).

   c. ¿Cuál es la dificultad al querer calcular de forma manuscrita la probabilidad de que ganen a lo más 90 veces? (se pide calcular $P(X \leq 90)$). Usen la distribución binomial en el applet de GeoGebra para determinar $P(X \leq 90)$.

Usaremos datos ficticios para explicar el uso del applet en la pregunta c.:

1. Escoger la distribución binomial
2. Ingresar la cantidad de experimentos aleatorios ($n = 150$).
3. Ingresar la probabilidad de éxito ($p = 0{,}4$).
4. Escoger el tipo de pregunta:
   para $P(X \leq 65)$
   para $P(43 \leq X \leq 65)$
   para $P(X \geq 72)$
5. Ingresar la probabilidad buscada ($X \leq 65$).
6. Observar el resultado (0,8206).

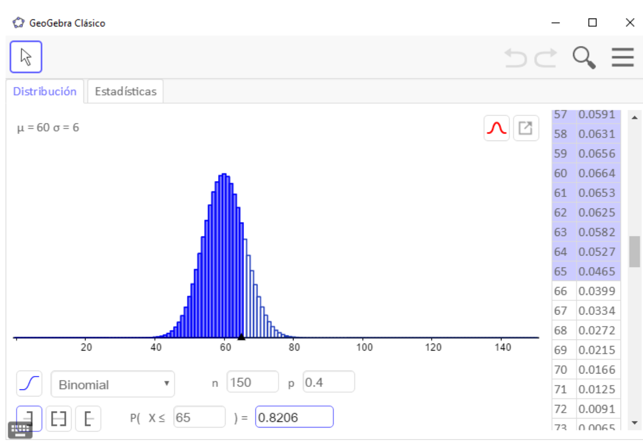


Fig. 1: Recurso GeoGebra para trabajar con la distribución binomial

   d. Si se quisiera calcular de forma manuscrita la probabilidad pedida en la pregunta anterior, describan la cantidad de cálculos que se requieren para obtenerla. Relacionen este hecho con la idea de aproximar el cálculo de $P(X \leq 90)$ a través de una distribución normal.

   e. Verifiquen que se cumplen las condiciones necesarias para que la distribución binomial que modela esta situación se pueda aproximar por una distribución normal.

   f. Para determinar la probabilidad $P(X \leq 90)$ a través de una distribución normal que aproxima a la binomial, calculen:
   - la Esperanza de la binomial($\mu = n \cdot p$),
   - la Varianza de la binomial$\left(\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)\right)$,
   - la Desviación estándar de la binomial (σ) y
   - la distribución normal$N($____; ____$)$ que aproxima a la distribución binomial$B(n; p)$.

g. Usen la Distribución normal en el applet de GeoGebra para determinar $P(X \leq 90)$.

Para explicar el uso del applet en la pregunta g. usaremos algunos datos ficticios que estarán sombreados para señalarlos:

1. Escoger la distribución **normal**
2. Escoger la media $\mu = 0$.
3. Escoger la desviación estándar $\sigma = 1$.
4. Escoger el tipo de pregunta:
   - para $P(Z \leq -0.5)$
   - para $P(-0.2 \leq Z \leq 1.1)$
   - para $P(Z \geq 1.5)$
5. Ingresar la probabilidad buscada ($Z \leq -1.7$).
6. Observar el resultado ($0{,}0446$).

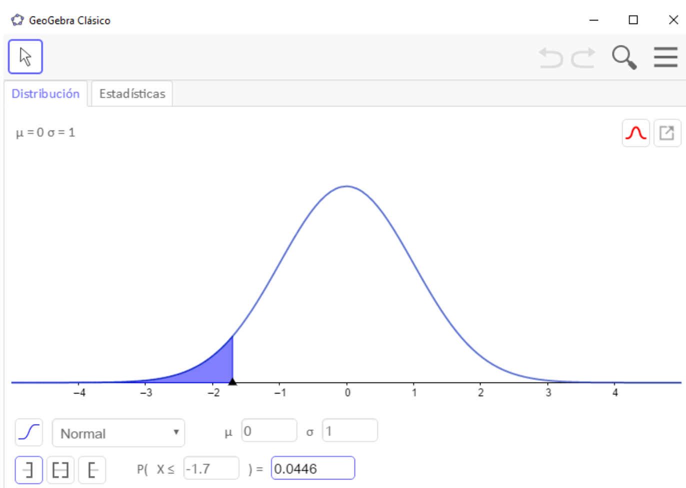


Fig. 2: Recurso GeoGebra para trabajar con la distribución normal

h. Comparen el resultado obtenido en g. con el obtenido en el ejercicio c. ¿Cuál es el porcentaje de error cometido por al obtener la probabilidad con la distribución normal? Interprétenlo.

i. Comparen la cantidad de cálculos necesarios para calcular $P(X \leq 55)$ de forma manuscrita usando la distribución binomial versus la cantidad de cálculos manuscritos involucrados en el cálculo con la distribución normal y usen sus hallazgos para fundamentar la utilidad de usar la aproximación con la distribución normal.

j. Un jugador habitual del casino ha dicho a los turistas que si ganan a lo más 23 de las próximas 100 veces que jueguen, deberían considerarse afortunados. ¿Cuál es la probabilidad de que tengan una sesión de juego afortunada?

ORIENTACIONES PARA LA ACTIVIDAD DE AULA

1. Los estudiantes deben saber que si una variable aleatoria discreta X tiene probabilidad de éxito p (de fracaso $1-p$) y se si realizan $n = 1, 2, 3, \ldots$ (fijo) experimentos aleatorios, entonces X tendrá una distribución binominal $B(n; p)$ con función de probabilidad: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Para probabilidades acumuladas, se usan las siguientes relaciones:

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{o bien} \quad P(X < k) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. La actividad 1 se enfoca en activar el aprendizaje anterior del modelo binomial, propiciando hacer los cálculos de forma manuscrita (sin apoyo de la tecnología) para activar y afianzar lo que elestudiante debiera saber de esta distribución o para aprenderlo en caso contrario. Se sugiere que el docente, en el inicio de este estudio, enfatice los cinco pasos para reconocer una situación modelable por una distribución binomial:

   a. El número n de experimentos aleatorios es fijo antes de empezar el experimento

   b. Cada experimento aleatorio puede tener solo dos resultados mutuamente excluyentes (éxito/fracaso, verdadero/falso, funciona/no funciona, etc.)

   c. Cada experimento aleatorio es independiente, es decir, el resultado de un ensayo no afecta al siguiente.

   d. La probabilidad de éxito en un experimento aleatorio es igual a algún valor p y es el mismo en cada experimento aleatorio. La probabilidad de fracaso es igual a $q = 1 - p$.

   e. La variable aleatoria de interés corresponde al número de éxitos observado durante los n experimentos aleatorios.

   Se sugiere destinar no más de diez minutos a esta actividad. Si el docente considera que sus estudiantes saben usar de forma solvente esta distribución, puede comenzar su clase desde la actividad 2 directamente.

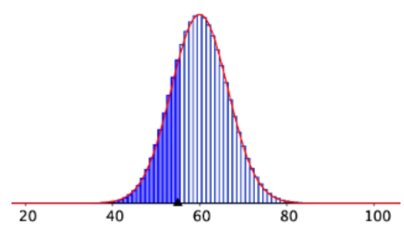
3. Para abordar la actividad 2, se requiere que los estudiantes hayan estudiado con anterioridad la distribución normal, sabiéndola estandarizar dadas su media aritmética y su desviación estándar (o sea, pasar de $N(\mu; \sigma)$ a $N(0; 1)$), también sabiendo estandarizar el dato al que se le desea calcular la probabilidad (usando $Z = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ en este caso) y hallando la respectiva probabilidad de este Z en una tabla de valores de probabilidad de la distribución normal (pudiendo usar la propiedad de simetría necesaria para obtener algunas probabilidades). Puede ser útil mencionar a los estudiantes que la Esperanza es simplemente un promedio, pero al obtenerse a partir de probabilidades, es un promedio "esperado" y no uno concreto como el que se calcula a partir de datos observados. De allí su nombre de "Esperanza".

4. La actividad 2 se centra en la aproximación de la distribución binomial por una distribución normal adecuada en casos donde son voluminosos los cálculos en la distribución binomial. En el inicio de esta actividad, se sugiere que el docente repase los cinco pasos para reconocer una

situación modelable por una distribución binomial que los estudiantes debiesen saber cómo conocimiento previo en la resolución de este tipo de problemas y que sepan resolver problemas asociados a esta distribución.

5. El foco de la actividad 2 es enseñar el procedimiento necesario para normalizar la distribución binomial (pasar de $B(n;p)$ a $N\left(np;\sqrt{np(1-p)}\right)$) y la manera de obtener la probabilidad buscada desde esta distribución normal estandarizándola (llevándola a $N(0;1)$). Lo anterior es una mecanización que no debe esconder al estudiante el que esta última es una aproximación, razonablemente buena, de la distribución binomial de donde se debe obtener la probabilidad buscada en la situación problemática. El procedimiento completo de aproximación de la distribución normal a la binomial no es difícil de entender si se sigue el orden que se propone en esta actividad. Este trabajo se debiera reforzar plenariamente con todos los estudiantes durante la clase, para evitar las dificultades habituales en este caso. El tiempo sugerido es de 45 minutos.

6. En la figura adjunta, se muestra gráficamente una curva roja que es la distribución normal que aproxima a la distribución binomial en azul. Se puede visualizar el error cometido en esta aproximación.



7. Se sugiere que el docente monitoree esta actividad 2 proporcionando apoyos en el proceso de normalización de la distribución normal, en la estandarización que se pide en la actividad 2.d y en el hallar la probabilidad utilizando la tabla que se adjunta a esta pregunta. Este proceso, una vez hecho rutina, es simple y directo, pero requiere que el estudiante comprenda cada paso por separado y la secuencia que todos estos pasos arman, para llegar a obtener la probabilidad buscada.

8. La actividad grupal tiene un diseño similar a la actividad 2, pero se amplía el ámbito numérico para evidenciar más aún la economía de cálculos que se produce al calcular probabilidades aproximando la distribución binomial por la normal. En esta actividadse hace énfasis tanto en la metodología necesaria para realizar la aproximación mencionada como en las posibilidades que ofrece el recurso digital que acompaña a la actividad, pueseste último permite centrarse en la resolución de la situación problemática evitando los cálculos manuscritos que demoran el avance. La siguiente imagen ilustra un ejemplo de uso del recurso. En la parte inferior se debe escoger la distribución a utilizar (se ve la binomial$B(30;0.4)$en este ejemplo) y las casillas donde ingresar los parámetros necesarios para los configurar la distribución elegida. En el caso de la binomial, el recurso digital también entrega los valores de la media aritmética y de la desviación estándar que aproximan a esta binomial, por lo que dicha información puede ser útil para que los estudiantes puedan verificar sus cálculos.

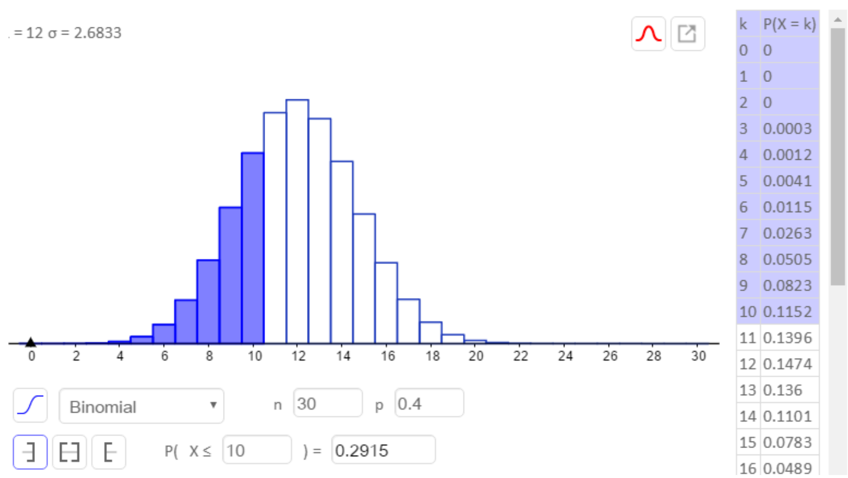


Fig. 3: Recurso GeoGebra para trabajar con la distribución binomial

9. Es conveniente que, tras plantear un problema, deje un lapso para que los estudiantes entiendan la tarea o problema. Luego, permítales que hagan ensayo-y-error: que experimenten, que conjeturen, que pongan a prueba sus estrategias. Ello les ayudará a entender, preguntarse, cuestionarse si algo no resulta. Para evitar que el ensayo y error se trivialice en "achunte", pídales que, si se equivocan, piensen en qué se equivocaron, cuál es la razón de que la estrategia no resulte, que hagan un seguimiento o ruteo de ella hasta encontrar la dificultad.

10. Observe a los jóvenes trabajando. Acérquese si hay preguntas, o si observa a alguno detenido, especialmente si percibe signos de frustración o de no saber cómo actuar, y también a quienes que avanzan y muestran progreso. Ante un estancamiento, evite expresiones generales tales como "tú puedes hacerlo" (el estudiante cree o siente que no puede, y podría permanecer en una situación que no progresa), y prefiera hacer preguntas-sugerencias específicas, relacionadas con la dificultad que el estudiante enfrenta. Aliente y reconozca los logros (de manera pública, más bien hacia el final).

11. Es conveniente preguntarse:
    - Los estudiantes, ¿pudieron enfrentar el problema, tanto en su actividad individual como grupal, primero entendiendo el problema, analizándolo y pensando soluciones, compartiendo en grupo, y desarrollando el modelo (o el problema)?
    - Los estudiantes, ¿exploraron?, ¿persistieron en la búsqueda de la solución?, ¿pudieron encontrar e implementar la solución al problema?; ¿se comunicaron al interior del grupo y entre grupos diferentes?; ¿manejaron bien la frustración?

12. La actividad colaborativa tiene suma importancia para que los estudiantes Representen, Argumenten y comuniquen, Resuelvan problemas y Modelen. Es una muy buena oportunidad para que ellos expresen su propia imaginación y creatividad, arriesguen estrategias, desarrollen su pensamiento matemático.
    Observe el trabajo individual y grupal; evite dar las respuestas, y haga –eventualmente, en su lugar– preguntas que los orienten en su discusión y resolución. Al final será la ocasión para una puesta en común en que usted señale los puntos más importantes al curso.

La actividad colaborativa es también una oportunidad para que los estudiantes reparen en sus propias habilidades, dificultades que encuentran, y, más en general, su relación con la Matemática. Para potenciar esa reflexión y experiencia, es conveniente que, al cierre de esa actividad, les haga usted algunas preguntas, al tenor de:

- ¿cuáles puntos de la actividad les parecieron más difíciles?;
- ¿cómo se aproximaron al problema?, ¿les sirvió pensar en cómo resolvían un problema puntual, como hicieron en la actividad individual?;
- ¿les ayudaron las sugerencias de la actividad?, ¿habrían hecho alguna otra sugerencia?;
- ¿pueden imaginar un problema o situación similar?, ¿pueden generalizar?;
- ¿pueden transferir la situación estudiada a problemas cotidianos?;
- ¿qué les pareció la actividad?;
- ¿dirían que ahora valoran más algún aspecto de la matemática?

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para profesores

- Visualización de la aproximación normal a la binomial:
  http://www.matematicasvisuales.com/html/probabilidad/varaleat/binomialnormal.html

- Teorema de De Moivre-Laplace: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_De_Moivre-Laplace

- Teorema Central del límite: https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_l%C3%ADmite_central

Sitios web sugeridos para estudiantes

- Video explicativo de la aproximación normal a la binomial:
  https://es.khanacademy.org/math/statistics-probability/random-variables-stats-library/binomial-random-variables/v/visualizing-a-binomial-distribution

- Visualización de la aproximación normal a la binomial:
  https://www.geogebra.org/m/bNbGb9am

- Visualización de la aproximación normal a la binomial:
  https://www.geogebra.org/m/ByYhZPPb

ORIENTACIONES DE EVALUACIÓN FORMATIVA

Luego de la actividad individual

- ¿Qué observar?

Indicadores de evaluación:
- Evalúan los alcances y límites de un argumento estadístico o probabilístico antes de tomar una decisión relacionada con el modelo binomial y normal.
- Evalúan la pertinencia y ajustan modelos binomial y normal para interpretar situaciones de incerteza.

Actitudes
- Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

Consideraciones en la evaluación formativa
- Antes de comenzar, los estudiantes deberían evidenciar que sus creencias y concepciones respecto del azar no entran en contradicción con el razonamiento probabilístico y que pueden razonar en este ámbito reconociendo situaciones de azar que son modelables por la distribución binomial.
- A partir de las actividades que se proponen, los estudiantes debiesen mostrar que son capaces de reconocer que, cuando se modela de forma binomial una situación problemática que involucra una gran cantidad de operaciones, haciéndola muy laborioso o inabordable sus cálculos de forma manuscrita, se justifica optar por el que ésta se aproxime por una distribución normal pertinente y con bajo error en la probabilidad buscada, bajo ciertas condiciones.
- Las actividades se basan en un OA de modelamiento y en la toma de decisiones, por lo que la evaluación formativa debiese orientarse a que los estudiantes evidencien la utilidad de la distribución binomial como base de las decisiones que tomen en situaciones de incerteza de este tipo.
- En las actividades individuales 1 y 2, las preguntas c, d, e y f apuntan al modelamiento por una distribución binomial en la 1 y al apoyo de la distribución normal al modelamiento binomial en la 2. Ambas son esenciales en el aprendizaje de la resolución de este tipo de problemas, por lo que es necesario que todos los estudiantes las aborden.

- Posibles adecuaciones de la actividad:

-**A. Reforzar conceptos o procedimientos.** Cuando no se ha tenido el éxito esperado con la actividad propuesta, es necesario considerar actividades tales como el **Ejemplo de Actividad de refuerzo**, en las que se pueda volver a revisar los aspectos claves que permiten llegar a la construcción del modelo.

-**B. Continuar con la actividad tal como está diseñada.** Se sugiere desarrollar la **actividad colaborativa** para profundizar en el OA propuesto a partir de lo trabajado individualmente.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE REFUERZO

Se sugiere al docente proponer actividades como las siguientes:

1. En un cine, se ha estimado que la probabilidad de que una persona compre una entrada para ver la película que se estrena ese día es de un 60%. Se ha realizado una encuesta aleatoria a 100 personas que recién han comprado una entrada.

   a. Determinar el número esperado de personas que no entrarán a ver el estreno.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo más, 3 personas vean el estreno?
   c. ¿Cuál es la probabilidad de que vean el estreno, a lo más, 20 persona?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que no vean el estreno, a lo menos, 80 personas?

2. La editora jefa de una editorial de textos calcula que se requieren en promedio 13 meses para completar el proceso de publicación de un libro, con una desviación estándar de $2{,}4$ meses. Ella piensa que la distribución normal describe bien la distribución de los tiempos de publicación.

   a. ¿Cuál es la probabilidad que la publicación de un libro se complete en 10 meses?
   b. ¿Cuál es la probabilidad que la publicación de un libro se complete en 15 meses?

Luego de la actividad colaborativa

- ¿Qué observar?

Indicadores de evaluación:
- Evalúan los alcances y límites de un argumento estadístico o probabilístico antes de tomar una decisión relacionada con el modelo binomial y normal.
- Resuelven problemas que involucran el análisis crítico de datos estadísticos o modelos binomial y normal.
- Evalúan la pertinencia y ajustan modelos binomial y normal para interpretar situaciones de incerteza.

Actitudes
- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales

Consideraciones en la evaluación formativa

- Antes de entrar a estas actividades, los estudiantes deberían evidenciar que sus creencias y concepciones respecto del azar no entran en contradicción con el razonamiento probabilístico y que pueden razonar en este ámbito reconociendo situaciones de azar que son modelables por la distribución binomial.
- A partir de las actividades que se proponen, los estudiantes debiesen mostrar que son capaces de reconocer que, cuando se modela de forma binomial una situación problemática involucra una gran cantidad de operaciones, haciéndola muy laboriosos o inabordable sus cálculos de forma manuscrita, se justifica optar por el que ésta se aproxime por una distribución normal pertinente y con bajo error en la probabilidad buscada, bajo ciertas condiciones.
- Las actividades se basan en un OA de modelamiento y en la toma de decisiones, por lo que la evaluación formativa debiese orientarse a que los estudiantes evidencien la utilidad de la distribución binomial como base de las decisiones que tomen en situaciones de incerteza.
- En las actividades individuales 1 y 2, las preguntas c, d, e y f apuntan al modelamiento por una distribución Binominal en la 1 y al apoyo de la distribución normal al modelamiento binomial en la 2. Ambas son esenciales en el aprendizaje de la resolución de este tipo de problemas, por lo que es necesario que todos los estudiantes las aborden. Se sugiere utilizar el **Ejemplo de pregunta para constatar el logro de habilidades.**

- Posibles adecuaciones de la actividad

-**A. Mayor desafío.** Cuando las actividades individual y colaborativa han sido desarrollas con éxito y fluidez, sería pertinente plantear un desafío que amplíe ligeramente los límites del OA. Para ello se pueden considerar actividades tales como el **Ejemplo de Actividad de desafío** que se muestra a continuación.

- Preguntas esenciales

Al final de cada una de las actividades invite a los estudiantes a responder una o más de las preguntas esenciales.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD O PREGUNTA PARA CONSTATAR EL LOGRO DE HABILIDADES

Tanto la actividad individual como la colaborativa tienen como principal propósito que los estudiantes reflexionen respecto de las implicancias de tomar decisiones basadas en evidencia estadística. Para ello se propone profundizar en las siguientes orientaciones y actividades. Ejercitar el modelo binomial y su aproximación por la distribución normal a través de ejemplos como el siguiente.

Supongamos que la probabilidad de que en una empresa exportadora se reciba un pago por sus productos con un cheque sin fondos es de $0{,}01$.

a. Si en una hora reciben 20 cheques, ¿cuál es la probabilidad de que alguno no tenga fondos?

b. Si la empresa tiene 10 sucursales, ¿cuál es la probabilidad de que al menos cuatro sucursales reciban algún cheque sin fondos?

c. Como medida de precaución, se revisarán los primeros 500 cheques de cada mes. ¿Cuál es la probabilidad de recibir entre 3 y 6 (inclusive) cheques sin fondos?

EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE DESAFÍO

Para profundizar en el aprendizaje se sugiere al docente proponer actividades tales como:

Ejercitar el modelo binomial, el modelo normal y la aproximación entre ellos a través de ejemplos como las siguientes:

1. Un sistema está formado por 150 componentes y se sabe que cada una de ellas tiene una confiabilidad[4] igual a $0{,}95$. Si el sistema completo funciona correctamente cuando funcionan al menos 135 componentes:
   a. ¿Cuál es la confiabilidad del sistema?

   b. ¿Cuántos componentes debiesen funcionar correctamente para que la fiabilidad del sistema sea de un 78%?

2. Cierto tipo de batería de almacenamiento de energía eléctrica dura, en promedio, 3 años, con una desviación estándar de $0{,}5$ años. Suponiendo que la duración de las baterías se distribuye normalmente:
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que una batería de este tipo exceda los $4{,}1$ años?

   b. ¿Por debajo de qué duración está el $16\ \%$ de las baterías?

3. En un colegio, se ha detectado que, después de la primera lluvia de invierno, uno de cada cinco niños presenta una enfermedad respiratoria. Si se examinan, uno a uno, 30 niños seleccionados al azar:

   a. ¿Cuál es la probabilidad de hallar entre 5 y 10 niños con una enfermedad respiratoria?

[4]Corresponde a la probabilidad de que la componente funcione correctamente.

4. Para iniciar una campaña de prevención de enfermedades respiratorias, se seleccionan al azar 100 niños para enseñarles a cuidarse. Si se desea evitar contagios masivos durante la campaña, se acepta que a lo más 5 de los 100 niños presenten una enfermedad respiratoria.

   a. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra un contagio masivo?

5. Determinar la probabilidad de realizar determinado experimento con éxito, si se repite 24 veces y es igual de probable obtener 4 éxitos que obtener 5.