GUÍA DE MATEMÁTICA IV° MEDIO
CLASE 67

El objetivo de esta clase es resolver una ecuación cuadrática por medio de la fórmula general y analizar el valor de su expresión subradical denominada discriminante, además de definir las propiedades de sus soluciones.

Recordemos que:

Cuando no podemos obtener una factorización para determinar las soluciones, podemos obtener sus soluciones x_1 y x_2 mediante las fórmulas:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad y \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Ejemplo:

Obtengamos las soluciones de la ecuación $\mathbf{3x^2-5x+1=0.}$

Para utilizar la fórmula, primero es necesario identificar los valores de los coeficientes a, b y c. En este caso: $a=3, b=-5$ y $c=1$. Entonces, utilizando la fórmula se obtiene:

$$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} = \frac{5+\sqrt{25-12}}{6} = \frac{5+\sqrt{13}}{6}$$

$$x_2 = \frac{-(-5)-\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot 1}}{2\cdot 3} = \frac{5-\sqrt{25-12}}{6} = \frac{5-\sqrt{13}}{6}$$

Actividad 1

Resuelve la ecuación cuadrática $\mathbf{2x^2-7x+4=0}$

Discriminante de la ecuación cuadrática

Se llama **discriminante** de la ecuación $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ a la expresión $\boldsymbol{b^2-4ac}$ y suele denotarse por la letra griega Δ (delta).

El discriminante permite determinar la cantidad de soluciones reales que tiene la ecuación:

- Si $\Delta = \boldsymbol{b^2-4ac>0}$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.
- Si $\Delta = \boldsymbol{b^2-4ac=0}$, la ecuación tiene dos soluciones reales e iguales.
- Si $\Delta = \boldsymbol{b^2-4ac<0}$, la ecuación no tiene soluciones reales, pero si tiene dos soluciones complejas y distintas (conjugadas).

Ejemplo:

Determinemos la cantidad y naturaleza de las soluciones que tiene la ecuación cuadrática: $\boldsymbol{x^2+x-1=0.}$

- Primeramente, identificamos los valores de los coeficientes a, b y c. En este caso: $a=1, b=1$ y $c=-1$. Luego, evaluamos en la expresión $\Delta = \boldsymbol{b^2-4ac.}$ Es decir:
  $\Delta = \boldsymbol{1^2-4\cdot 1\cdot(-1)=1+4=5>0}$

  Lo cual indica, que la ecuación cuadrática $\boldsymbol{x^2+x-1=0}$, tiene dos soluciones reales y distintas.

Actividad 2

Establece la cantidad y naturaleza de las soluciones, mediante el análisis del discriminante de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a. $3x^2+5x-8=0$

b. $4x^2+4x+1=0$

c. $x^2-2x+2=0$

Propiedades de las soluciones de una ecuación cuadrática

Las soluciones de una ecuación cuadrática $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$, cumplen las siguientes propiedades:

- **Suma de las soluciones**
  La suma de las soluciones x_1 y x_2 es igual a $-\frac{b}{a}$. Es decir,

$$\boxed{\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}}$$

- **Producto de las soluciones**
  El producto de las soluciones x_1y x_2 es igual a $\frac{c}{a}$. Es decir,

$$\boxed{\boldsymbol{x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}}}$$

Ejemplo

Calculemos el valor de $\boldsymbol{t}$ para que la suma de las soluciones de la ecuación $\boldsymbol{-7tx^2+(2-4t)x+8t+5=0}$ sea el doble de su producto.

Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación, se quiere calcular los valores de $\boldsymbol{t}$ para los que se cumpla que $\boldsymbol{x_1+x_2=2x_1\cdot x_2}$.

De la ecuación podemos identificar la expresión que representa a sus coeficientes:

$a=-7t, b=(2-4t)\;\; y\;\; c=(8t+5)$. Entonces se tiene que:

Si $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{(2-4t)}{-7t}=\frac{2-4t}{7t}$ y por su parte

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{8t+5}{-7t}=-\frac{8t+5}{7t}$$

Luego por condición del problema, se tiene que:

$x_1+x_2=2x_1\cdot x_2 \rightarrow \quad \frac{2-4t}{7t}=-\frac{2(8t+5)}{7t}$

$$2-4t=-16t-10$$

$$16t-4t=-10-2$$

$$12t=-12$$

$$t=-1$$

Por lo tanto, para que se cumpla la condición de que la suma de las soluciones sea el doble de su producto, el valor de t debe ser -1.

Evaluación

Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1. ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es **FALSA**?

a) La ecuación cuadrática $x^2 + x + 1 = 0$, tiene coeficientes de igual valor.

b) La ecuación cuadrática $x^2 + x + 1 = 0$, no tiene soluciones reales.

c) La ecuación cuadrática $x^2 + x = 0$, tiene dos soluciones reales distintas.

d) La ecuación cuadrática $x^2 + 2x - 1 = 0$, no tiene soluciones reales.

e) La ecuación cuadrática $x^2 + 2x + 1 = 0$, tiene dos soluciones reales e iguales.

2. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas no tiene soluciones reales?

a) $x^2 - 3 = 0$
b) $x^2 = 5$
c) $x^2 + x = 2$
d) $x^2 + x = 0$
e) $x^2 + x = -3$

3. El valor de $\boldsymbol{t}$ para que la suma de las soluciones de la ecuación $\boldsymbol{x^2 - (t - 2)x + t = 10}$ sea el tercio de su producto es:

a) -2

b) -1

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

e) 2