GUÍA DE MATEMÁTICA IV° MEDIO
CLASE 64

El objetivo de esta clase es resolver algebraicamente sistemas de ecuaciones 2×2.

Recordemos que:

Resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, consiste en determinar los pares ordenados (x, y) que satisfacen cada una de las ecuaciones del sistema. A continuación, se revisarán los principales procedimientos para resolver este tipo de sistemas.

<u>Método de sustitución</u>

1. Despejar una de las incógnitas en función de la otra, en una de las ecuaciones del sistema.
2. la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación, obteniendo una ecuación de grado 1 con una incógnita.
3. Resolver la ecuación con una incógnita.
4. Calcular el valor de la otra incógnita, reemplazando en las ecuaciones originales o en alguna de las ecuaciones equivalentes a estas que se hayan obtenido en el proceso.

Ejemplo:
Resolvamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{3x+4y=13} \\ \mathbf{x-2y=1} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \textbf{(1)} \\ \textbf{(2)} \end{array}$$

1. Despejamos la incógnita x de la ecuación **(2).**
   se obtiene la ecuación **(3)** $x = 1 + 2y$.

2. la ecuación **(3)** obtenida se reemplaza en la ecuación **(1)**, obteniendo la ecuación: $3(1+2y) + 4y = 13$.

3. Se resuelve la ecuación: $3(1+2y)+4y = 13$
$$3 + 6y + 4y = 13$$
$$10y + 3 = 13$$
$$10y = 10$$
$$y = 1$$

4. Calculamos el valor de la otra incógnita, reemplazando en la ecuación **(3)** $x = 1 + 2y$, es decir $x = 1 + 2 \cdot 1 = 3$

   Luego, la solución del sistema es el par ordenado $(3, 1)$.

Método de igualación

1. Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones.
2. Igualar las dos expresiones obtenidas en 1, generando una ecuación de grado 1 con una incógnita.
3. Resolver la ecuación resultante.
4. Calcular el valor de la otra incógnita reemplazando en las ecuaciones originales o en alguna de las ecuaciones equivalentes a estas que se hayan obtenido en el proceso.

Ejemplo:

Resolvamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{3x+4y=13} \\ \mathbf{x-2y=1} \end{array}\right| \begin{array}{l} \textbf{(1)} \\ \textbf{(2)} \end{array}$$

1. Despejamos x en ambas ecuaciones. Entonces en **(1)** se tiene que $\boldsymbol{x=\frac{13-4y}{3}}$ y en **(2)** se tiene que $x=1+2y$.

2. Se igualan las expresiones obtenidas:
$$\boldsymbol{\frac{13-4y}{3}=1+2y}$$

3. Se resuelve la ecuación:
$$\begin{aligned} 13-4y&=3+6y \\ 13-3&=6y+4y \\ 10&=10y \\ 1&=y \end{aligned}$$

4. Luego se sustituye el valor de $y=1$, en cualquiera de las expresiones que representan a x obtenidas en el paso 1, es decir $x=1+2y=1+2\cdot 1=3$

Luego, la solución del sistema es el par ordenado $(3,1)$.

Actividad 1

Resuelve con el método de sustitución o igualación el sistema dado por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \mathbf{5x-4y=6} \\ \mathbf{x-\ \ y=1} \end{array}\right|$$

<u>Método de reducción</u>

1. Amplificar o simplificar cada ecuación para obtener, en una de las incógnitas, coeficientes iguales que solo difieren en el signo.
2. Restar o sumar las ecuaciones de manera de eliminar una de las incógnitas.
3. Resolver la ecuación de la incógnita resultante.
4. Calcular el valor de la otra incógnita reemplazando en las ecuaciones equivalentes a estas que se hayan obtenido en el proceso.

Ejemplo:

Resolvamos el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 13 \\ x - 2y = 1 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

1. Amplifiquemos la ecuación **(2)** por 2.

$$\begin{array}{rll} 3x + 4y = 13 & (1) & \qquad 3x + 4y = 13 \\ x - 2y = 1 & (2)\ /\cdot 2 & \qquad 2x - 4y = 2 \end{array}$$

2. Se procede a sumar las ecuaciones

$$\begin{array}{r} 3x + 4y = 13 \\ 2x - 4y = 2 \\ \hline 5x = 15 \end{array}$$

3. Resolver la ecuación de la incógnita resultante: $\quad 5x = 15$

$$x = 3$$

4. Calculamos el valor de y reemplazando el valor $x = 3$ **en (1) o (2).**

Reemplazamos en (2)

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 3 - 2y &= 1 \\ 3 - 1 &= 2y \\ 2 &= 2y \\ 1 &= y \end{aligned}$$

Luego, la solución del sistema es el par ordenado $(3, 1)$.

Actividad 2

Resuelve con el método de sustitución o igualación el sistema dado por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 8 \\ x - \ \ y = 1 \end{array}\right|$$

Método de Cramer

La regla de Cramer utiliza determinantes para resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con igual número de ecuaciones y de incógnitas. En un sistema de ecuaciones de 2×2 de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{ax + by = c} \\ \boldsymbol{dx + ey = f} \end{array}\right|$$

- Para calcular el determinante principal (Δ)**,** se usa la siguiente expresión:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} \end{vmatrix} = \boldsymbol{ae - bd}$$

- El determinante de las incógnitas está dado por las expresiones:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{f} & \boldsymbol{e} \end{vmatrix} = \boldsymbol{ce - bf} \quad ; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{f} \end{vmatrix} = \boldsymbol{af - cd}$$

- si $\Delta \neq \boldsymbol{0}$, el sistema tiene única solución y los valores de las incógnitas están dados por las expresiones:

$$\boldsymbol{x} = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{y} = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

- si $\Delta = \boldsymbol{0}$, se tienen dos posibilidades:
  - ✓ $\Delta_x = \Delta_y = \boldsymbol{0}$**,** el sistema tiene infinitas soluciones. (Rectas coincidentes).
  - ✓ $\Delta_x \neq \boldsymbol{0}$ **y** $\Delta_y \neq \boldsymbol{0}$ **,** el sistema no tiene solución. (rectas paralelas)

Ejemplo:

Resolvamos el sistema de ecuaciones mediante el método de Cramer:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{3x - 2y = 8} \\ \boldsymbol{x - \ \ y = 1} \end{array}\right|$$

- Determinamos los tres determinantes asociados:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-1} \quad ; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} \boldsymbol{8} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-6} \quad ; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{8} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-5}$$

- Como $\Delta \neq \boldsymbol{0}$**, el sistema tiene una solución:**

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-6}}{\boldsymbol{-1}} = \boldsymbol{6} \quad ; \quad \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{-5}}{\boldsymbol{-1}} = \boldsymbol{5}$$

- **Luego, la solución del sistema es el par ordenado** $(\boldsymbol{6}, \boldsymbol{5})$**.**

Evaluación

Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1. El sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} \mathbf{2x - 3y = 1} \\ \mathbf{4x - 6y = 2} \end{array}\right\rfloor$ tiene como solución a:

I) $(-1, -1)$ II) $(5,\ 3)$ III) $(1,\ 1)$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y II
e) I, II y III

2. El sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} \mathbf{9x - 6y = 3} \\ \mathbf{6x - 4y = 2} \end{array}\right\rfloor$ tiene como solución a:

I) $(-1, -2)$ II) $(3,\ 4)$ III) $(1,\ 1)$

a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) Solo I y III
e) I, II y III

3. El sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} \mathbf{9x - 6y = 9} \\ \mathbf{2x + 3y = 2} \end{array}\right\rfloor$ tiene como solución el punto A dado por:

a) $(1, 0)$
b) $(3, 3)$
c) $(2, 1)$
d) $(0, \frac{2}{3})$
e) $(0, 1)$