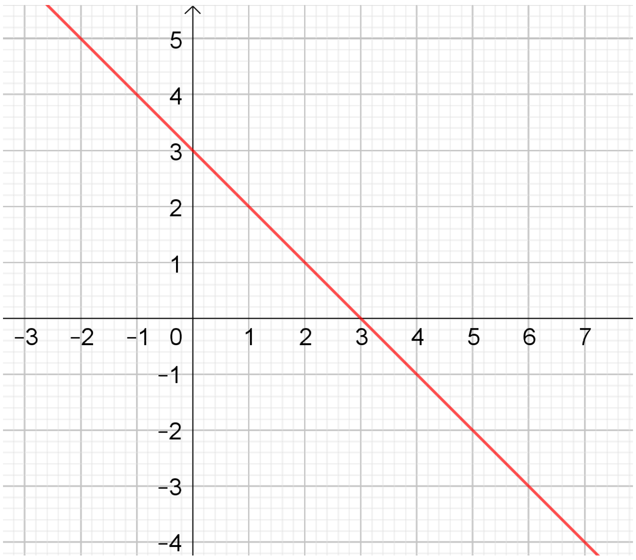
GUÍA DE MATEMÁTICA IV° MEDIO
CLASE 62

El objetivo de esta clase es representar y clasificar los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Recordemos que:

- **Una ecuación de primer grado con dos incógnitas,** es una ecuación de grado 1 que tiene dos variables. Toda ecuación de este tipo con incógnitas x e y se pueden representar de la forma $\boldsymbol{Ax + By = K}$, donde A, B y Kson coeficientes reales.
- Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Las soluciones de esta ecuación se representan como pares ordenados de números reales: (x, y). El conjunto solución de todos los pares ordenados de números reales que satisfacen la ecuación $Ax + By = K$ se denotará:
  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : Ax + By = K\}$
- La gráfica que representa una ecuación de primer grado con dos incógnitas corresponde a una **recta**.

  Ejemplo: las soluciones de la ecuación $x + y = 3$, son todos los pares de números reales que suman 3. Así, los pares $(\sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}), (1, 2), (5, -2). . .$etc. son soluciones de la ecuación.
  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 3\}$.
  Observa la gráfica de la ecuación.



Sistemas de ecuaciones de primer grado

Un sistema de ecuaciones de primer grado es un conjunto de dos o más ecuaciones de primer grado (grado 1), en las cuales aparecen una o varias incógnitas.

Ejemplos

Los siguientes son sistemas de ecuaciones de primer grado:

- $$\left.\begin{aligned} 2x + y - z &= 9 \\ 3x - y &= 12 \end{aligned}\right|$$ → 2 ecuaciones, 3 incógnitas

- $$\left.\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 4 \\ 3x - 7y &= -4 \\ x - 2z &= -1 \end{aligned}\right|$$ → 3 ecuaciones, 3 incógnitas

Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Los sistemas en los que el número de ecuaciones coincide con el de las incógnitas se denominan cuadrados. Un caso interesante de sistema cuadrados es el de dos ecuaciones con dos incógnitas, siendo su representación algebraica la siguiente:

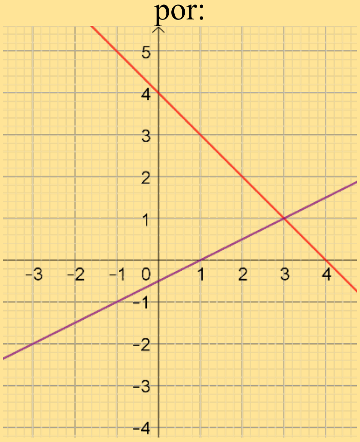
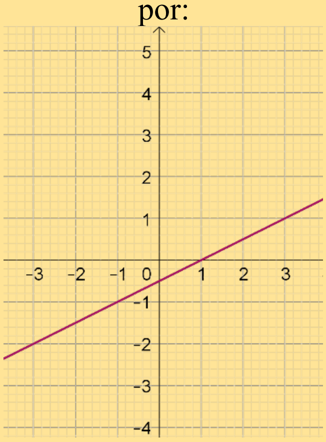
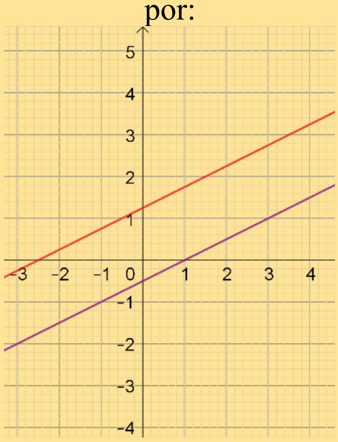
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{ax + by} &= \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{cx + dy} &= \boldsymbol{f} \end{aligned}\right|$$, donde a, b, c, d, e y f son coeficientes reales.

Representación gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Cada ecuación de un sistema se puede representar gráficamente por una recta. Por lo tanto, resolver gráficamente un sistema de primer grado con dos incógnitas consiste en encontrar un punto $P(x, y)$ que representa el interseco entre las rectas, es decir, las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones. Luego, en un sistema se pueden dar los siguientes casos:

- Las rectas se intersecan en un punto, es decir, **las rectas son secantes** y el sistema de ecuaciones que representan las rectas, tiene **una solución**.
- Las rectas se intersecan en infinitos puntos, es decir, **las rectas son coincidentes**, lo que implica que el sistema de ecuaciones que representan a estas rectas, tiene **infinitas soluciones**.
- Las rectas no se intersecan, es decir, **las rectas son paralelas**, lo que indica que el sistema formado por las ecuaciones de estas rectas, **no tiene solución**.

Observa las siguientes representaciones gráficas de sistema de ecuaciones.

Rectas secantes	**Rectas coincidentes**	**Rectas paralelas**
El sistema $\left.\begin{aligned} x+y&=4 \\ x-2y&=1 \end{aligned}\right\rvert$	El sistema $\left.\begin{aligned} 2x-4y&=2 \\ x-2y&=1 \end{aligned}\right\rvert$	El sistema $\left.\begin{aligned} 2x-4y&=-5 \\ x-2y&=1 \end{aligned}\right\rvert$
se representa gráficamente por:	se representa gráficamente por:	se representa gráficamente por:
		
Luego, la solución de este sistema es el punto $(3,1)$.	Como las rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones.	La solución de este sistema es vacía, ya que las rectas son paralelas.
Su conjunto solución se representa por $S=\{(3,1)\}$	Su conjunto solución se representa por: $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-2y=1\}$	Su conjunto solución se representa por: $S=\emptyset$

<u>Número de soluciones de un sistema de ecuaciones 2×2</u>

Según el número de soluciones, un sistema de ecuaciones del tipo $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{ax+by}&=\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{cx+dy}&=\boldsymbol{f} \end{aligned}\right\rvert$

se puede clasificar en:

- **Compatible determinado:** tiene una solución única, es decir se cumple que

$$\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$$

- **Compatible indeterminado**: tiene infinitas soluciones, es decir se cumple que

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{e}{f}$$

- **Incompatible**: no tiene solución, es decir se cumple que

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\neq\frac{e}{f}$$

Actividad

Analiza los siguientes sistemas de ecuaciones y clasifica el tipo de sistema de acuerdo al número de soluciones.

a.

$$\begin{aligned} 2x + \quad 4y &= 2 \\ 5x + 10y &= 5 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ 5x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} 2x + \quad 4y &= 6 \\ 7x + 14y &= 20 \end{aligned}$$

Evaluación

Responde las siguientes preguntas, encerrando en un círculo la letra de la alternativa correcta.

1. ¿Cuál(es) de los siguientes sistemas tiene(n) una solución única?

I)
$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 6 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

II)
$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 1 \\ x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

III)
$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

a) Solo I

b) Solo II

c) Solo III

d) Solo II y III

e) I, II y III

2. ¿Cuál(es) de los siguientes sistemas representa(n) a dos rectas paralelas?

I)
$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 6 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

II)
$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 1 \\ 5x + 10y &= 3 \end{aligned}$$

III)
$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 6 \\ 2x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

a) Solo I

b) Solo II

c) Solo III

d) Solo II y III

e) I, II y III

3. ¿Cuál(es) de los siguientes sistemas tiene(n) infinitas soluciones?

I)
$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 6 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}$$

II)
$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 1 \\ 5x + 12y &= 3 \end{aligned}$$

III)
$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 6 \\ 2x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

a) Solo I

b) Solo II

c) Solo III

d) Solo I y III

e) I, II y III