Programa de Estudio
3º o 4º Medio
Formación Diferenciada
Matemática

Límites, Derivadas e Integrales

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE CHILE

3°
4°

versión - web

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN UCE

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN. ESTAS ACTIVIDADES ESTÁN ORGANIZADAS EN 4 UNIDADES, CADA UNIDAD TIENE CUATRO ACTIVIDADES DE APRENDIZAJES Y UNA ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN.

Querida comunidad educativa:

Me es grato saludarles y dirigirme a ustedes para poner en sus manos los Programas de Estudio de las 46 asignaturas del currículum ajustado a las nuevas Bases Curriculares de 3° y 4° año de enseñanza media (Decreto Supremo N°193 de 2019), que inició su vigencia el presente año para 3° medio y el año 2021 para 4° medio, o simultáneamente en ambos niveles si el colegio así lo decidió.

El presente año ha sido particularmente difícil por la situación mundial de pandemia por Coronavirus y el Ministerio de Educación no ha descansado en su afán de entregar herramientas de apoyo para que los estudiantes de Chile se conviertan en ciudadanos que desarrollen la empatía y el respeto, la autonomía y la proactividad, la capacidad para perseverar en torno a metas y, especialmente, la responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

Estos Programas de Estudio han sido elaborados por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación y presentan una propuesta pedagógica y didáctica que apoya el proceso de gestión de los establecimientos educacionales, además de ser una invitación a las comunidades educativas para enfrentar el desafío de preparación, estudio y compromiso con la vocación formadora y con las expectativas de aprendizaje que pueden lograr nuestros estudiantes.

Nos sentimos orgullosos de poner a disposición de los jóvenes de Chile un currículum acorde a los tiempos actuales y que permitirá formar personas integrales y ciudadanos autónomos, críticos y responsables, que desarrollen las habilidades necesarias para seguir aprendiendo a lo largo de sus vidas y que estarán preparados para ser un aporte a la sociedad.

Les saluda cordialmente,

Raúl Figueroa S.
Ministro de Educación

Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales 3° y 4° medio

Aprobado por Decreto Exento N°496 del 15 de junio de 2020.

Equipo de Desarrollo Curricular
Unidad de Currículum y Evaluación
Ministerio de Educación 2021

IMPORTANTE

En el presente documento, se utilizan de manera inclusiva términos como "el docente", "el estudiante", "el profesor", "el niño", "el compañero" y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo) para referirse a hombres y mujeres.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo aludir conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando "o/a", "los/las" y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

ÍNDICE

Presentación

Las Bases Curriculares establecen Objetivos de Aprendizaje (OA) que definen los desempeños que se espera que todos los estudiantes logren en cada asignatura, módulo y nivel de enseñanza. Estos objetivos integran habilidades, conocimientos y actitudes que se consideran relevantes para que los jóvenes alcancen un desarrollo armónico e integral que les permita enfrentar su futuro con las herramientas necesarias y participar de manera activa y responsable en la sociedad.

Las Bases Curriculares son flexibles para adaptarse a las diversas realidades educativas que se derivan de los distintos contextos sociales, económicos, territoriales y religiosos de nuestro país. Estas múltiples realidades dan origen a diferentes aproximaciones curriculares, didácticas, metodológicas y organizacionales, que se expresan en el desarrollo de distintos proyectos educativos, todos válidos mientras permitan el logro de los Objetivos de Aprendizaje. En este contexto, las Bases Curriculares constituyen el referente base para los establecimientos que deseen elaborar programas propios, y por lo tanto, no corresponde que estas prescriban didácticas específicas que limiten la diversidad de enfoques educacionales que pueden expresarse en los establecimientos de nuestro país.

Para aquellos establecimientos que no han optado por programas propios, el Ministerio de Educación suministra estos Programas de Estudio con el fin de facilitar una óptima implementación de las Bases Curriculares. Estos programas constituyen un complemento totalmente coherente y alineado con las Bases Curriculares y una herramienta para apoyar a los docentes en el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de Estudio proponen al profesor una organización de los Objetivos de Aprendizaje con relación al tiempo disponible dentro del año escolar, y constituyen una orientación acerca de cómo secuenciar los objetivos y cómo combinarlos para darles una comprensión profunda y transversal. Se trata de una estimación aproximada y de carácter indicativo que puede ser adaptada por los docentes, de acuerdo a la realidad de sus estudiantes y de su establecimiento.

Asimismo, para facilitar al profesor su quehacer en el aula, se sugiere un conjunto de indicadores de evaluación que dan cuenta de los diversos desempeños de comprensión que demuestran que un alumno ha aprendido en profundidad, transitando desde lo más elemental hasta lo más complejo, y que aluden a los procesos cognitivos de orden superior, las comprensiones profundas o las habilidades que se busca desarrollar transversalmente.

Junto con ello, se proporcionan orientaciones didácticas para cada disciplina y una gama amplia y flexible de actividades de aprendizaje y de evaluación que pueden utilizarse como base para nuevas actividades acordes con las diversas realidades de los establecimientos educacionales. Estas actividades se enmarcan en un modelo pedagógico cuyo enfoque es el de la comprensión profunda y significativa, lo que implica establecer posibles conexiones al interior de cada disciplina y también con otras áreas del conocimiento, con el propósito de facilitar el aprendizaje.

Estas actividades de aprendizaje y de evaluación se enriquecen con sugerencias al docente, recomendaciones de recursos didácticos complementarios y bibliografía para profesores y estudiantes.

En síntesis, se entregan estos Programas de Estudio a los establecimientos educacionales como un apoyo para llevar a cabo su labor de enseñanza.

Nociones básicas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE COMO INTEGRACIÓN DE CONOCIMIENTOS, HABILIDADES Y ACTITUDES

Los Objetivos de Aprendizaje definen para cada asignatura o módulo los aprendizajes terminales esperables para cada semestre o año escolar. Se refieren a habilidades, actitudes y conocimientos que han sido seleccionados considerando que entreguen a los estudiantes las herramientas necesarias para su desarrollo integral, que les faciliten una comprensión profunda del mundo que habitan, y que despierten en ellos el interés por continuar estudios superiores y desarrollar sus planes de vida y proyectos personales.

En la formulación de los Objetivos de Aprendizaje se relacionan habilidades, conocimientos y actitudes y, por medio de ellos, se pretende plasmar de manera clara y precisa cuáles son los aprendizajes esenciales que el alumno debe lograr. Se conforma así un currículum centrado en el aprendizaje, que declara explícitamente cuál es el foco del quehacer educativo. Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto de la sala de clases como en la vida cotidiana.

CONOCIMIENTOS

Los conocimientos de las asignaturas y módulos corresponden a conceptos, redes de conceptos e información sobre hechos, procesos, procedimientos y operaciones que enriquecen la comprensión de los alumnos sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan el saber que han generado por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Se busca que sean esenciales, fundamentales para que los estudiantes construyan nuevos aprendizajes y de alto interés para ellos. Se deben desarrollar de manera integrada con las habilidades, porque son una condición para el progreso de estas y para lograr la comprensión profunda.

HABILIDADES Y ACTITUDES PARA EL SIGLO XXI

La existencia y el uso de la tecnología en el mundo global, multicultural y en constante cambio, ha determinado nuevos modos de acceso al conocimiento, de aplicación de los aprendizajes y de participación en la sociedad. Estas necesidades exigen competencias particulares, identificadas internacionalmente como Habilidades para el siglo XXI.[1]

Las habilidades para el siglo XXI presentan como foco formativo central la formación integral de los estudiantes dando continuidad a los objetivos de aprendizaje transversales de 1° básico a 2° medio. Como estos, son transversales a todas las asignaturas, y al ser transferibles a otros contextos, se convierten en un aprendizaje para la vida. Se presentan organizadas en torno a cuatro ámbitos: maneras de pensar, maneras de trabajar, herramientas para trabajar y herramientas para vivir en el mundo.

[1] El conjunto de habilidades seleccionadas para integrar el currículum de 3° y 4° medio corresponden a una adaptación de distintos modelos (Binkley et al., 2012; Fadel et al., 2016).

MANERAS DE PENSAR

Desarrollo de la creatividad y la innovación

Las personas que aprenden a ser creativas poseen habilidades de pensamiento divergente, producción de ideas, fluidez, flexibilidad y originalidad. El pensamiento creativo implica abrirse a diferentes ideas, perspectivas y puntos de vista, ya sea en la exploración personal o en el trabajo en equipo. La enseñanza para la creatividad implica asumir que el pensamiento creativo puede desarrollarse en todas las instancias de aprendizaje y en varios niveles: imitación, variación, combinación, transformación y creación original. Por ello, es importante que los docentes consideren que, para lograr la creación original, es necesario haber desarrollado varias habilidades y que la creatividad también puede enseñarse mediante actividades más acotadas según los diferentes niveles (Fadel et al, 2016).

Desarrollo del pensamiento crítico

Cuando aprendemos a pensar críticamente, podemos discriminar entre informaciones, declaraciones o argumentos, evaluando su contenido, pertinencia, validez y verosimilitud. El pensamiento crítico permite cuestionar la información, tomar decisiones y emitir juicios, como asimismo reflexionar críticamente acerca de diferentes puntos de vista, tanto de los propios como de los demás, ya sea para defenderlos o contradecirlos sobre la base de evidencias. Contribuye así, además, a la autorreflexión y corrección de errores, y favorece la capacidad de estar abierto a los cambios y de tomar decisiones razonadas. El principal desafío en la enseñanza del pensamiento crítico es la aplicación exitosa de estas habilidades en contextos diferentes de aquellos en que fueron aprendidas (Fadel et al, 2016).

Desarrollo de la metacognición

El pensamiento metacognitivo se relaciona al concepto de “aprender a aprender”. Se refiere a ser consciente del propio aprendizaje y de los procesos para lograrlo, lo que permite autogestionarlo con autonomía, adaptabilidad y flexibilidad. El proceso de pensar acerca del pensar involucra la reflexión propia sobre la posición actual, fijar los objetivos a futuro, diseñar acciones y estrategias potenciales, monitorear el proceso de aprendizaje y evaluar los resultados. Incluye tanto el conocimiento que se tiene sobre uno mismo como estudiante o pensador, como los factores que influyen en el rendimiento. La reflexión acerca del propio aprendizaje favorece su comunicación, por una parte, y la toma de conciencia de las propias capacidades y debilidades, por otra. Desde esta perspectiva, desarrolla la autoestima, la disciplina, la capacidad de perseverar y la tolerancia a la frustración.

Desarrollo de Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.
- Pensar con apertura a distintas perspectivas y contextos, asumiendo riesgos y responsabilidades.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Pensar con reflexión propia y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.
- Pensar con conciencia de que los aprendizajes se desarrollan a lo largo de la vida y enriquecen la experiencia.
- Pensar con apertura hacia otros para valorar la comunicación como una forma de relacionarse con diversas personas y culturas, compartiendo ideas que favorezcan el desarrollo de la vida en sociedad.

MANERAS DE TRABAJAR

Desarrollo de la comunicación

Aprender a comunicarse ya sea de manera escrita, oral o multimodal, requiere generar estrategias y herramientas que se adecuen a diversas situaciones, propósitos y contextos socioculturales, con el fin de transmitir lo que se desea de manera clara y efectiva. La comunicación permite desarrollar la empatía, la autoconfianza, la valoración de la interculturalidad, así como la adaptabilidad, la creatividad y el rechazo a la discriminación.

Desarrollo de la colaboración

La colaboración entre personas con diferentes habilidades y perspectivas faculta al grupo para tomar mejores decisiones que las que se tomarían individualmente, permite analizar la realidad desde más ángulos y producir obras más complejas y más completas. Además, el trabajo colaborativo entre pares determina nuevas formas de aprender y de evaluarse a sí mismo y a los demás, lo que permite visibilizar los modos en que se aprende; esto conlleva nuevas maneras de relacionarse en torno al aprendizaje.

La colaboración implica, a su vez, actitudes clave para el aprendizaje en el siglo XXI, como la responsabilidad, la perseverancia, la apertura de mente hacia lo distinto, la aceptación y valoración de las diferencias, la autoestima, la tolerancia a la frustración, el liderazgo y la empatía.

Desarrollo de Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Trabajar con empatía y respeto en el contexto de la diversidad, eliminando toda expresión de prejuicio y discriminación.
- Trabajar con autonomía y proactividad en trabajos colaborativos e individuales para llevar a cabo eficazmente proyectos de diversa índole.

HERRAMIENTAS PARA TRABAJAR

Desarrollo de la alfabetización digital

Aprender a utilizar la tecnología como herramienta de trabajo implica dominar las posibilidades que ofrece y darle un uso creativo e innovador. La alfabetización digital apunta a la resolución de problemas en el marco de la cultura digital que caracteriza al siglo XXI, aprovechando las herramientas que nos dan la programación, el pensamiento computacional, la robótica e internet, entre otros, para crear contenidos digitales, informarnos y vincularnos con los demás. Promueve la autonomía y el trabajo en equipo, la creatividad, la participación en redes de diversa índole, la motivación por ampliar los propios intereses y horizontes culturales, e implica el uso responsable de la tecnología considerando la ciberseguridad y el autocuidado.

Desarrollo del uso de la información

Usar bien la información se refiere a la eficacia y eficiencia en la búsqueda, el acceso, el procesamiento, la evaluación crítica, el uso creativo y ético, así como la comunicación de la información por medio de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC). Implica formular preguntas, indagar y generar estrategias para seleccionar, organizar y comunicar la información. Tiene siempre en cuenta, además, tanto los aspectos éticos y legales que la regulan como el respeto a los demás y a su privacidad.

Desarrollo de Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- Valorar las TIC como una oportunidad para informarse, investigar, socializar, comunicarse y participar como ciudadano.
- Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.
- Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

MANERAS DE VIVIR EN EL MUNDO

Desarrollo de la ciudadanía local y global

La ciudadanía se refiere a la participación activa del individuo en su contexto, desde una perspectiva política, social, territorial, global, cultural, económica y medioambiental, entre otras dimensiones. La conciencia de ser ciudadano promueve el sentido de pertenencia y la valoración y el ejercicio de los principios democráticos, y también supone asumir sus responsabilidades como ciudadano local y global. En este sentido, ejercitar el respeto a los demás, a su privacidad y a las diferencias valóricas, religiosas y étnicas cobra gran relevancia; se relaciona directamente con una actitud empática, de mentalidad abierta y de adaptabilidad.

Desarrollo de proyecto de vida y carrera

La construcción y consolidación de un proyecto de vida y de una carrera, oficio u ocupación, requiere conocerse a sí mismo, establecer metas, crear estrategias para conseguirlas, desarrollar la autogestión, actuar con iniciativa y compromiso, ser autónomo para ampliar los aprendizajes, reflexionar críticamente y estar dispuesto a integrar las retroalimentaciones recibidas. Por otra parte, para alcanzar esas metas, se requiere interactuar con los demás de manera flexible, con capacidad para trabajar en equipo, negociar en busca de soluciones y adaptarse a los cambios para poder desenvolverse en distintos roles y contextos. Esto permite el desarrollo de liderazgo, responsabilidad, ejercicio ético del poder y respeto a las diferencias en ideas y valores.

Desarrollo de la responsabilidad personal y social

La responsabilidad personal consiste en ser conscientes de nuestras acciones y sus consecuencias, cuidar de nosotros mismos de modo integral y respetar los compromisos que adquirimos con los demás, generando confianza en los otros, comunicándonos de una manera asertiva y empática, que acepte los distintos puntos de vista. Asumir la responsabilidad por el bien común participando activamente en el cumplimiento de las necesidades sociales en distintos ámbitos: cultural, político, medioambiental, entre otros.

Desarrollo de Actitudes

- Perseverar en torno a metas con miras a la construcción de proyectos de vida y al aporte a la sociedad y al país con autodeterminación, autoconfianza y respeto por sí mismo y por los demás.
- Participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político y medioambiental, entre otros.
- Tomar decisiones democráticas, respetando los derechos humanos, la diversidad y la multiculturalidad.
- Asumir responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que ellas tienen sobre sí mismo y los otros.

Consideraciones generales

Las consideraciones que se presentan a continuación son relevantes para una óptima implementación de los Programas de Estudio, se vinculan estrechamente con los enfoques curriculares, y permiten abordar de mejor manera los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares.

EL ESTUDIANTE DE 3º y 4º MEDIO

La formación en los niveles de 3° y 4° Medio cumple un rol esencial en su carácter de etapa final del ciclo escolar. Habilita al alumno para conducir su propia vida en forma autónoma, plena, libre y responsable, de modo que pueda desarrollar planes de vida y proyectos personales, continuar su proceso educativo formal mediante la educación superior, o incorporarse a la vida laboral.

El perfil de egreso que establece la ley en sus objetivos generales apunta a formar ciudadanos críticos, creativos y reflexivos, activamente participativos, solidarios y responsables, con conciencia de sus deberes y derechos, y respeto por la diversidad de ideas, formas de vida e intereses. También propicia que estén conscientes de sus fortalezas y debilidades, que sean capaces de evaluar los méritos relativos de distintos puntos de vista al enfrentarse a nuevos escenarios, y de fundamentar adecuadamente sus decisiones y convicciones, basados en la ética y la integridad. Asimismo, aspira a que sean personas con gran capacidad para trabajar en equipo e interactuar en contextos socioculturalmente heterogéneos, relacionándose positivamente con otros, cooperando y resolviendo adecuadamente los conflictos.

De esta forma, tomarán buenas decisiones y establecerán compromisos en forma responsable y solidaria, tanto de modo individual como colaborativo, integrando nuevas ideas y reconociendo que las diferencias ayudan a concretar grandes proyectos.

Para lograr este desarrollo en los estudiantes, es necesario que los docentes conozcan los diversos talentos, necesidades, intereses y preferencias de sus estudiantes y promuevan intencionadamente la autonomía de los alumnos y la autorregulación necesaria para que las actividades de este Programa sean instancias significativas para sus desafíos, intereses y proyectos personales.

APRENDIZAJE PARA LA COMPRENSIÓN

La propuesta metodológica de los Programas de Estudio tiene como propósito el aprendizaje para la comprensión. Entendemos la comprensión como la capacidad de usar el conocimiento de manera flexible, lo que permite a los estudiantes pensar y actuar a partir de lo que saben en distintas situaciones y contextos. La comprensión se puede desarrollar generando oportunidades que permitan al alumno ejercitar habilidades como analizar, explicar, resolver problemas, construir argumentos, justificar, extrapolar, entre otras. La aplicación de estas habilidades y del conocimiento a lo largo del proceso de aprendizaje faculta a los estudiantes a profundizar en el conocimiento, que se torna en evidencia de la comprensión.

La elaboración de los Programas de Estudio se ha realizado en el contexto del paradigma constructivista y bajo el fundamento de dos principios esenciales que regulan y miden la efectividad del aprendizaje: el aprendizaje significativo y el aprendizaje profundo.

¿Qué entendemos por aprendizaje significativo y profundo?

Un aprendizaje se dice significativo cuando los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del estudiante. Esto se logra gracias a un esfuerzo deliberado del alumno por relacionar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos y es producto de una implicación afectiva del estudiante; es decir, él quiere aprender aquello que se le presenta, porque lo considera valioso. Para la construcción de este tipo de aprendizaje, se requiere efectuar acciones de mediación en el aula que permitan activar los conocimientos previos y, a su vez, facilitar que dicho aprendizaje adquiera sentido precisamente en la medida en que se integra con otros previamente adquiridos o se relaciona con alguna cuestión o problema que interesa al estudiante.

Un aprendizaje se dice profundo solo si, por un lado, el aprendiz logra dominar, transformar y utilizar los conocimientos adquiridos en la solución de problemas reales y, por otro lado, permanece en el tiempo y se puede transferir a distintos contextos de uso. Para mediar el desarrollo de un aprendizaje de este tipo, es necesario generar escenarios flexibles y graduales que permitan al estudiante usar los conocimientos aplicándolos en situaciones diversas.

¿Cómo debe guiar el profesor a sus alumnos para que usen el conocimiento?

El docente debe diseñar actividades de clase desafiantes que induzcan a los estudiantes a aplicar habilidades cognitivas mediante las cuales profundicen en la comprensión de un nuevo conocimiento. Este diseño debe permitir mediar simultáneamente ambos aspectos del aprendizaje, el significativo y el profundo, y asignar al alumno un rol activo dentro del proceso de aprendizaje.

El principio pedagógico constructivista del estudiante activo permite que él desarrolle la capacidad de aprender a aprender. Los alumnos deben llegar a adquirir la autonomía que les permita dirigir sus propios procesos de aprendizaje y convertirse en sus propios mediadores. El concepto clave que surge como herramienta y, a la vez, como propósito de todo proceso de enseñanza-aprendizaje corresponde al pensamiento metacognitivo, entendido como un conjunto de disposiciones mentales de autorregulación que permiten al aprendiz monitorear, planificar y evaluar su propio proceso de aprendizaje.

En esta línea, la formulación de buenas preguntas es una de las herramientas esenciales de mediación para construir un pensamiento profundo.

Cada pregunta hace posible una búsqueda que permite integrar conocimiento y pensamiento; el pensamiento se despliega en sus distintos actos que posibilitan dominar, elaborar y transformar un conocimiento.

ENFOQUE INTERDISCIPLINARIO Y APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

La integración disciplinaria permite fortalecer conocimientos y habilidades de pensamiento complejo que faculten la comprensión profunda de ellos. Para lograr esto, es necesario que los docentes incorporen en su planificación instancias destinadas a trabajar en conjunto con otras disciplinas. Las Bases Curriculares plantean el Aprendizaje Basado en Proyectos como metodología para favorecer el trabajo colaborativo y el aprendizaje de resolución de problemas.

Un problema real es interdisciplinario. Por este motivo, en los Programas de Estudio de cada asignatura se integra orientaciones concretas y modelos de proyectos, que facilitarán esta tarea a los docentes y que fomentarán el trabajo y la planificación conjunta de algunas actividades entre profesores de diferentes asignaturas.

Se espera que, en las asignaturas electivas de profundización, el docente destine un tiempo para el trabajo en proyectos interdisciplinarios. Para ello, se incluye un modelo de proyecto interdisciplinario por asignatura de profundización.

Existe una serie de elementos esenciales que son requisitos para que el diseño de un proyecto[2] permita maximizar el aprendizaje y la participación de los estudiantes, de manera que aprendan cómo aplicar el conocimiento al mundo real, cómo utilizarlo para resolver problemas, responder preguntas complejas y crear productos de alta calidad. Dichos elementos son:

- **Conocimiento clave, comprensión y habilidades**
  El proyecto se enfoca en profundizar en la comprensión del conocimiento interdisciplinar, ya que permite desarrollar a la vez los Objetivos de Aprendizaje y las habilidades del Siglo XXI que se requieren para realizar el proyecto.

- **Desafío, problema o pregunta**
  El proyecto se basa en un problema significativo para resolver o una pregunta para responder, en el nivel adecuado de desafío para los alumnos, que se implementa mediante una pregunta de conducción abierta y atractiva.

- **Indagación sostenida**
  El proyecto implica un proceso activo y profundo a lo largo del tiempo, en el que los estudiantes generan preguntas, encuentran y utilizan recursos, hacen preguntas adicionales y desarrollan sus propias respuestas.

- **Autenticidad**
  El proyecto tiene un contexto del mundo real, utiliza procesos, herramientas y estándares de calidad del mundo real, tiene un impacto real, ya que creará algo que será utilizado o experimentado por otros, y/o está conectado a las propias preocupaciones, intereses e identidades de los alumnos.

- **Voz y elección del estudiante**
  El proyecto permite a los estudiantes tomar algunas decisiones sobre los productos que crean, cómo funcionan y cómo usan su tiempo, guiados por el docente y dependiendo de su edad y experiencia de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

- **Reflexión**
  El proyecto brinda oportunidades para que los alumnos reflexionen sobre qué y cómo están aprendiendo, y sobre el diseño y la implementación del proyecto.

- **Crítica y revisión**
  El proyecto incluye procesos de retroalimentación para que los estudiantes den y reciban comentarios sobre su trabajo, con el fin de revisar sus ideas y productos o realizar una investigación adicional.

- **Producto público**
  El proyecto requiere que los alumnos demuestren lo que aprenden, creando un producto que se presenta u ofrece a personas que se encuentran más allá del aula.

---

2 Adaptado de John Larmer, John Mergendoller, Suzie Boss. *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*, (ASCD 2015).

CIUDADANÍA DIGITAL

Los avances de la automatización, así como el uso extensivo de las herramientas digitales y de la inteligencia artificial, traerán como consecuencia grandes transformaciones y desafíos en el mundo del trabajo, por lo cual los estudiantes deben contar con herramientas necesarias para enfrentarlos. Los Programas de Estudio promueven que los alumnos empleen tecnologías de información para comunicarse y desarrollar un pensamiento computacional, dando cuenta de sus aprendizajes o de sus creaciones y proyectos, y brindan oportunidades para hacer un uso extensivo de ellas y desarrollar capacidades digitales para que aprendan a desenvolverse de manera responsable, informada, segura, ética, libre y participativa, comprendiendo el impacto de las TIC en la vida personal y el entorno.

CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR

La contextualización curricular es el proceso de apropiación y desarrollo del currículum en una realidad educativa concreta. Este se lleva a cabo considerando las características particulares del contexto escolar (por ejemplo, el medio en que se sitúa el establecimiento educativo, la cultura, el proyecto educativo institucional de las escuelas y la comunidad escolar, el tipo de formación diferenciada que se imparte –Artística, Humanístico-Científica, Técnico Profesional–, entre otros), lo que posibilita que el proceso educativo adquiera significado para los estudiantes desde sus propias realidades y facilita, así, el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de Estudio consideran una propuesta de diseño de clases, de actividades y de evaluaciones que pueden modificarse, ajustarse y transferirse a diferentes realidades y contextos.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y A LA INCLUSIÓN

En el trabajo pedagógico, es importante que los docentes tomen en cuenta la diversidad entre estudiantes en términos culturales, sociales, étnicos, religiosos, de género, de estilos de aprendizaje y de niveles de conocimiento. Esta diversidad enriquece los escenarios de aprendizaje y está asociada a los siguientes desafíos para los profesores:

- Procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación con el contexto y la realidad de los alumnos.
- Trabajar para que todos alcancen los Objetivos de Aprendizaje señalados en el currículum, acogiendo la diversidad y la inclusión como una oportunidad para desarrollar más y mejores aprendizajes.
- Favorecer y potenciar la diversidad y la inclusión, utilizando el aprendizaje basado en proyectos.
- En el caso de alumnos con necesidades educativas especiales, tanto el conocimiento de los profesores como el apoyo y las recomendaciones de los especialistas que evalúan a dichos estudiantes contribuirán a que todos desarrollen al máximo sus capacidades.
- Generar ambientes de aprendizaje inclusivos, lo que implica que cada estudiante debe sentir seguridad para participar, experimentar y contribuir de forma significativa a la clase. Se recomienda destacar positivamente las características particulares y rechazar toda forma de discriminación, agresividad o violencia.

- Proveer igualdad de oportunidades, asegurando que los alumnos puedan participar por igual en todas las actividades, evitando asociar el trabajo de aula con estereotipos asociados a género, características físicas o cualquier otro tipo de sesgo que provoque discriminación.
- Utilizar materiales, aplicar estrategias didácticas y desarrollar actividades que se adecuen a las singularidades culturales y étnicas de los estudiantes y a sus intereses.
- Promover un trabajo sistemático, con actividades variadas para diferentes estilos de aprendizaje y con ejercitación abundante, procurando que todos tengan acceso a oportunidades de aprendizaje enriquecidas.

Atender a la diversidad de estudiantes, con sus capacidades, contextos y conocimientos previos, no implica tener expectativas más bajas para algunos de ellos. Por el contrario, hay que reconocer los requerimientos personales de cada alumno para que todos alcancen los propósitos de aprendizaje pretendidos. En este sentido, conviene que, al diseñar el trabajo de cada unidad, el docente considere los tiempos, recursos y métodos necesarios para que cada estudiante logre un aprendizaje de calidad. Mientras más experiencia y conocimientos tengan los profesores sobre su asignatura y las estrategias que promueven un aprendizaje profundo, más herramientas tendrán para tomar decisiones pertinentes y oportunas respecto de las necesidades de sus alumnos. Por esta razón, los Programas de Estudio incluyen numerosos Indicadores de Evaluación, observaciones al docente, sugerencias de actividades y de evaluación, entre otros elementos, para apoyar la gestión curricular y pedagógica responsable de todos los estudiantes.

Orientaciones para planificar

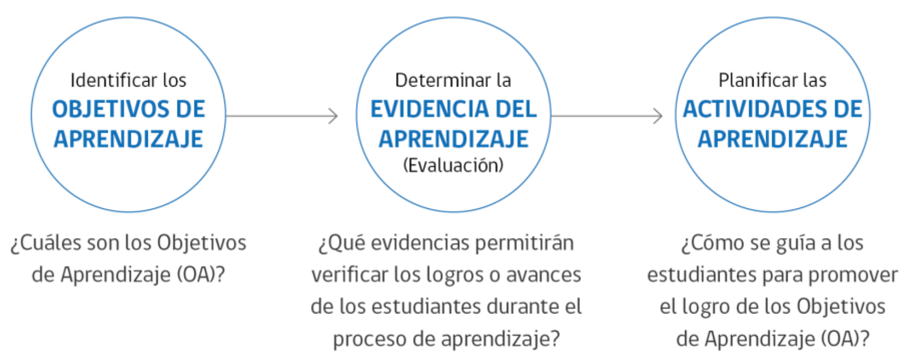
Existen diversos métodos de planificación, caracterizados por énfasis específicos vinculados al enfoque del que provienen. Como una manera de apoyar el trabajo de los docentes, se propone considerar el diseño para la comprensión, relacionado con plantear cuestionamientos activos a los estudiantes, de manera de motivarlos a poner en práctica sus ideas y nuevos conocimientos. En este sentido, y con el propósito de promover el desarrollo de procesos educativos con foco claro y directo en los aprendizajes, se sugiere utilizar la planificación en reversa (Wiggins y McTigue, 1998). Esta mantiene siempre al centro lo que se espera que aprendan los alumnos durante el proceso educativo, en el marco de la comprensión profunda y significativa. De esta manera, la atención se concentra en lo que se espera que logren, tanto al final del proceso de enseñanza y aprendizaje, como durante su desarrollo.

Para la planificación de clases, se considera tres momentos:

1. **Identificar el Objetivo de Aprendizaje que se quiere alcanzar**
   Dicho objetivo responde a la pregunta: ¿qué se espera que aprendan? Y se especifica a partir de los Objetivos de Aprendizaje propuestos en las Bases Curriculares y en relación con los intereses, necesidades y características particulares de los estudiantes.

2. **Determinar evidencias**
   Teniendo claridad respecto de los aprendizajes que se quiere lograr, hay que preguntarse: ¿qué evidencias permitirán verificar que el conjunto de Objetivos de Aprendizaje se logró? En este sentido, los Indicadores presentados en el Programa resultan de gran ayuda, dado que orientan la toma de decisiones con un sentido formativo.

3. **Planificar experiencias de aprendizaje**
   Teniendo en mente los Objetivos de Aprendizajes y la evidencia que ayudará a verificar que se han alcanzado, llega el momento de pensar en las actividades de aprendizaje más apropiadas.
   ¿Qué experiencias brindarán oportunidades para adquirir los conocimientos, habilidades y actitudes que se necesita? Además de esta elección, es importante verificar que la secuencia de las actividades y estrategias elegidas sean las adecuadas para el logro de los objetivos (Saphier, Haley- Speca y Gower, 2008).



Orientaciones para evaluar los aprendizajes

La evaluación, como un aspecto intrínseco del proceso de enseñanza-aprendizaje, se plantea en estos programas con un foco pedagógico, al servicio del aprendizaje de los estudiantes. Para que esto ocurra, se plantea recoger evidencias que permitan describir con precisión la diversidad existente en el aula para tomar decisiones pedagógicas y retroalimentar a los alumnos. La evaluación desarrollada con foco pedagógico favorece la motivación de los estudiantes a seguir aprendiendo; asimismo, el desarrollo de la autonomía y la autorregulación potencia la reflexión de los docentes sobre su práctica y facilita la toma de decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que permitan apoyar de mejor manera los aprendizajes.

Para implementar una evaluación con un foco pedagógico, se requiere:

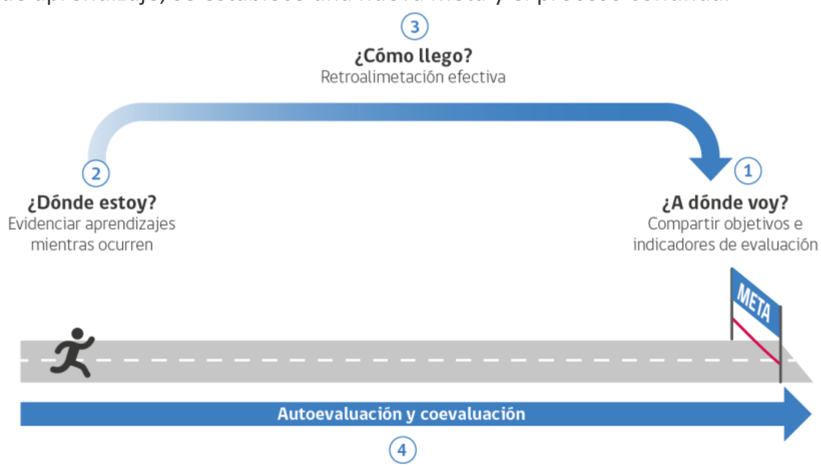
- Diseñar experiencias de evaluación que ayuden a los estudiantes a poner en práctica lo aprendido en situaciones que muestren la relevancia o utilidad de ese aprendizaje.
- Evaluar solamente aquello que los alumnos efectivamente han tenido la oportunidad de aprender mediante las experiencias de aprendizaje mediadas por el profesor.
- Procurar que se utilicen diversas formas de evaluar, que consideren las distintas características, ritmos y formas de aprender, necesidades e intereses de los estudiantes, evitando posibles sesgos y problemas de accesibilidad para ellos.
- Promover que los alumnos tengan una activa participación en los procesos de evaluación; por ejemplo: al elegir temas sobre los cuales les interese realizar una actividad de evaluación o sugerir la forma en que presentarán a otros un producto; participar en proponer los criterios de evaluación; generar experiencias de auto- y coevaluación que les permitan desarrollar su capacidad para reflexionar sobre sus procesos, progresos y logros de aprendizaje.
- Que las evaluaciones sean de la más alta calidad posible; es decir, deben representar de la forma más precisa posible los aprendizajes que se busca evaluar. Además, las evidencias que se levantan y fundamentan las interpretaciones respecto de los procesos, progresos o logros de aprendizajes de los estudiantes, deben ser suficientes como para sostener de forma consistente esas interpretaciones evaluativas.

EVALUACIÓN

Para certificar los aprendizajes logrados, el profesor puede utilizar diferentes métodos de evaluación sumativa que reflejen los OA. Para esto, se sugiere emplear una variedad de medios y evidencias, como portafolios, registros anecdóticos, proyectos de investigación grupales e individuales, informes, presentaciones y pruebas orales y escritas, entre otros. Los Programas de Estudio proponen un ejemplo de evaluación sumativa por unidad. La forma en que se diseñe este tipo de evaluaciones y el modo en que se registre y comunique la información que se obtiene de ellas (que puede ser con calificaciones) debe permitir que dichas evaluaciones también puedan usarse formativamente para retroalimentar tanto la enseñanza como el aprendizaje.

El uso formativo de la evaluación debiera preponderar en las salas de clases, utilizándose de manera sistemática para reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza, y para tomar decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que busquen promover el progreso del aprendizaje de todos los estudiantes, considerando la diversidad como un aspecto inherente a todas las aulas.

El proceso de evaluación formativa que se propone implica articular el proceso de enseñanza-aprendizaje en función de responder a las siguientes preguntas: ¿A dónde voy? (qué objetivo de aprendizaje espero lograr), ¿Dónde estoy ahora? (cuán cerca o lejos me encuentro de lograr ese aprendizaje) y ¿Qué estrategia o estrategias pueden ayudarme a llegar a donde tengo que ir? (qué pasos tengo que dar para acercarme a ese aprendizaje). Este proceso continuo de establecer un objetivo de aprendizaje, evaluar los niveles actuales y luego trabajar estratégicamente para reducir la distancia entre los dos, es la esencia de la evaluación formativa. Una vez que se alcanza una meta de aprendizaje, se establece una nueva meta y el proceso continúa.



Para promover la motivación para aprender, el nivel de desafío y el nivel de apoyo deben ser los adecuados –en términos de Vygotsky (1978), estar en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes–, para lo cual se requiere que todas las decisiones que tomen los profesores y los propios alumnos se basen en la información o evidencia sobre el aprendizaje recogidas continuamente (Griffin, 2014; Moss & Brookhart, 2009).

Estructura del programa

Propósito de la unidad

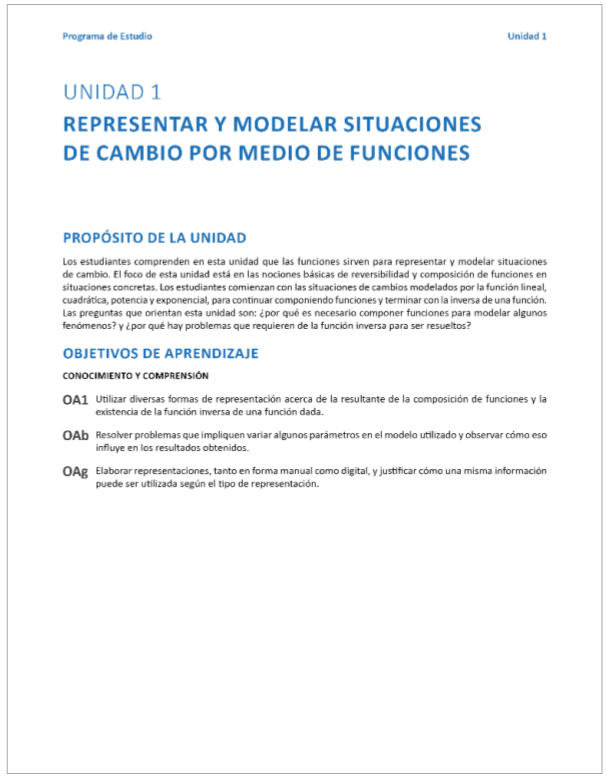
Resume el objetivo formativo de la unidad, actúa como una guía para el conjunto de actividades y evaluaciones que se diseñan en cada unidad. Se detalla qué se espera que el estudiante comprenda en la unidad, vinculando los contenidos, las habilidades y las actitudes de forma integrada.

Objetivos de aprendizaje (OA)

Definen los aprendizajes terminales del año para cada asignatura. En cada unidad se explicitan los objetivos de aprendizaje a trabajar.

Actividades de aprendizaje

El diseño de estas actividades se caracteriza fundamentalmente por movilizar conocimientos, habilidades y actitudes de manera integrada que permitan el desarrollo de una comprensión significativa y profunda de los Objetivos de Aprendizaje. Son una guía para que el profesor o la profesora diseñen sus propias actividades de evaluación.



Programa de Estudio Unidad 1

UNIDAD 1

REPRESENTAR Y MODELAR SITUACIONES DE CAMBIO POR MEDIO DE FUNCIONES

PROPÓSITO DE LA UNIDAD

Los estudiantes comprenden en esta unidad que las funciones sirven para representar y modelar situaciones de cambio. El foco de esta unidad está en las nociones básicas de reversibilidad y composición de funciones en situaciones concretas. Los estudiantes comienzan con las situaciones de cambios modelados por la función lineal, cuadrática, potencia y exponencial, para continuar componiendo funciones y terminar con la inversa de una función. Las preguntas que orientan esta unidad son: ¿por qué es necesario componer funciones para modelar algunos fenómenos? y ¿por qué hay problemas que requieren de la función inversa para ser resueltos?

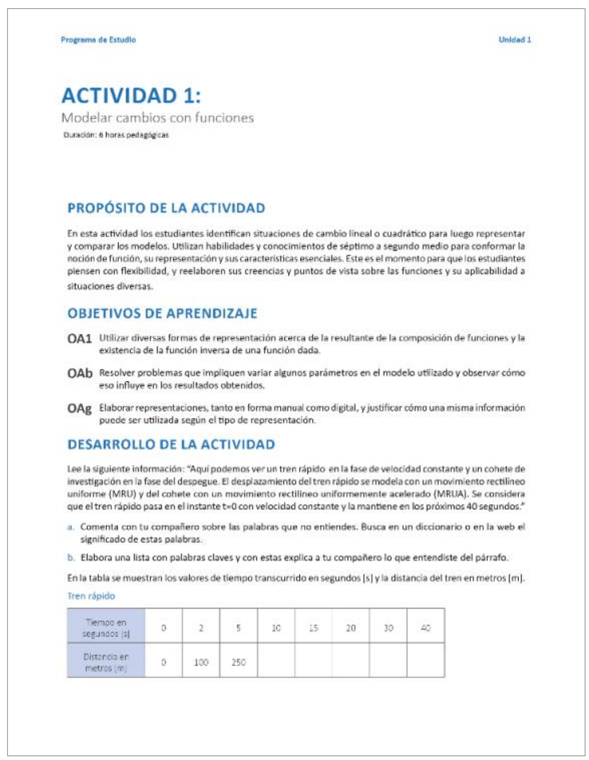
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

CONOCIMIENTO Y COMPRENSIÓN

OA1 Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OAb Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OAg Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.



Programa de Estudio Unidad 1

ACTIVIDAD 1:

Modelar cambios con funciones

Duración: 6 horas pedagógicas

PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD

En esta actividad los estudiantes identifican situaciones de cambio lineal o cuadrático para luego representar y comparar los modelos. Utilizan habilidades y conocimientos de séptimo a segundo medio para conformar la noción de función, su representación y sus características esenciales. Este es el momento para que los estudiantes piensen con flexibilidad, y reelaboren sus creencias y puntos de vista sobre las funciones y su aplicabilidad a situaciones diversas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

OA1 Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OAb Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OAg Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Lee la siguiente información: "Aquí podemos ver un tren rápido en la fase de velocidad constante y un cohete de investigación en la fase del despegue. El desplazamiento del tren rápido se modela con un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y del cohete con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Se considera que el tren rápido pasa en el instante t=0 con velocidad constante y la mantiene en los próximos 40 segundos."

a. Comenta con tu compañero sobre las palabras que no entiendes. Busca en un diccionario o en la web el significado de estas palabras.

b. Elabora una lista con palabras claves y con estas explica a tu compañero lo que entendiste del párrafo.

En la tabla se muestran los valores de tiempo transcurrido en segundos [s] y la distancia del tren en metros [m].

Tren rápido

Tiempo en segundos [s]	0	2	5	10	15	20	30	40
Distancia en metros [m]	0	100	250					

Indicadores de evaluación

Detallan uno o más desempeños observables, medibles, específicos de los estudiantes que permiten evaluar el conjunto de Objetivos de Aprendizaje de la unidad. Son de carácter sugerido, por lo que el docente puede modificarlos o complementarlos.

Orientaciones para el docente

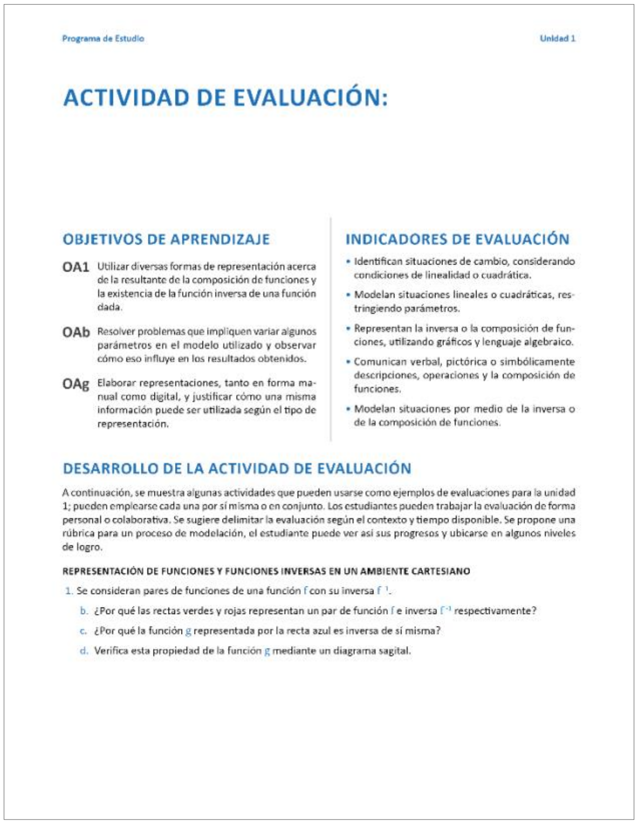
Son sugerencias respecto de cómo desarrollar mejor una actividad. Generalmente indica fuentes de recursos posibles de adquirir, (vínculos web), material de consulta y lecturas para el docente y estrategias para tratar conceptos habilidades y actitudes.

Recursos

Se especifican todos los recursos necesarios para el desarrollo de la actividad. Especialmente relevante, dado el enfoque de aprendizaje para la comprensión profunda y el de las Habilidades para el Siglo XXI, es la incorporación de recursos virtuales y de uso de TIC.

Actividades de evaluación sumativa de la unidad

Son propuestas de evaluaciones de cierre de unidad que contemplan los aprendizajes desarrollados a lo largo de ellas. Mantienen una estructura similar a las actividades de aprendizaje.



Programa de Estudio — Unidad 1

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN:

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

OA1 Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OAb Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OAg Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

INDICADORES DE EVALUACIÓN

- Identifican situaciones de cambio, considerando condiciones de linealidad o cuadrática.
- Modelan situaciones lineales o cuadráticas, restringiendo parámetros.
- Representan la inversa o la composición de funciones, utilizando gráficos y lenguaje algebraico.
- Comunican verbal, pictórica o simbólicamente descripciones, operaciones y la composición de funciones.
- Modelan situaciones por medio de la inversa o de la composición de funciones.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN

A continuación, se muestra algunas actividades que pueden usarse como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1; pueden emplearse cada una por sí misma o en conjunto. Los estudiantes pueden trabajar la evaluación de forma personal o colaborativa. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y tiempo disponible. Se propone una rúbrica para un proceso de modelación, el estudiante puede ver así sus progresos y ubicarse en algunos niveles de logro.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES Y FUNCIONES INVERSAS EN UN AMBIENTE CARTESIANO

1. Se consideran pares de funciones de una función f con su inversa f^{-1}.
   b. ¿Por qué las rectas verdes y rojas representan un par de función f e inversa f^{-1} respectivamente?
   c. ¿Por qué la función g representada por la recta azul es inversa de sí misma?
   d. Verifica esta propiedad de la función g mediante un diagrama sagital.

Límites, Derivadas e Integrales

Propósitos Formativos

Esta asignatura ofrece la oportunidad de comprender y utilizar algunas nociones básicas del cálculo infinitesimal. El estudio se hace desde una aproximación intuitiva, que incluye el uso abundante de ejemplos y de situaciones concretas. Se presentan problemas cercanos y accesibles, y se espera una formalización de las nociones que se utilizan. De esta manera, proporciona oportunidades de visualizar conceptos y situaciones, de plantear conjeturas y validarlas, y de experimentar o proponer soluciones.

Límites, Derivadas e Integrales se ocupa de conceptos y resultados que son útiles para estudiantes de Educación Media que quieren seguir estudios superiores, técnicos o universitarios, en que la asignatura de Matemática es una herramienta central; en particular, prepara para los cursos de Cálculo que habitualmente se dictan en la educación superior.

Para comenzar esta asignatura, se considera lo aprendido sobre funciones hasta 2° medio y se profundiza en la argumentación visual para determinar la función inversa y la composición de funciones. Posteriormente, como inicio de una nueva dimensión en el aprendizaje de la Matemática, se propone desarrollar la noción de límite y el cálculo de límite de ciertas funciones; para ello, se utiliza ejemplos y se da espacio para usar representaciones e ideas sobre el trabajo infinitesimal.

Luego se define la derivada en un punto como límite de una secuencia de pendientes de rectas secantes, límite que es finalmente la pendiente de la recta tangente. Esto permitirá usar la derivada como modelamiento de la rapidez instantánea de cambio de una magnitud, y emplearla para estudiar propiedades de funciones, como crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión.

Se continúa con la aplicación del concepto de límite como modelamiento de áreas bajo una curva, por medio del límite de sumas de áreas rectangulares; de este modo, se presenta el concepto de integral. El límite, la derivada y la integral son conocimientos que permiten desarrollar la habilidad de modelar y de resolver problemas; por esto, se categorizan las actividades correspondientes en dos grandes tipos: contextos reales de las ciencias naturales y contextos simbólicos. En ambos casos, la asignatura se debe centrar en que los estudiantes entiendan estos conceptos, y es conveniente considerar sus intuiciones y explicaciones visuales.

Enfoque de las asignaturas de Matemática

La asignatura pone énfasis en la relación entre el conocimiento matemático, el aprendizaje de la matemática y sus aportes a la formación de las personas. Resolver problemas, aplicar razonamiento matemático y estadístico, modelar, representar, argumentar y comunicar siguen siendo aspectos centrales para la formación y el hacer de Matemática en la escuela.

A continuación, se presenta las principales definiciones conceptuales y didácticas en que se sustentan tanto la asignatura del Plan Común de Formación General, Matemática, como las asignaturas de profundización del Plan Diferenciado Humanístico-Científico.

Proceso de aprendizaje

El conocimiento matemático y el aumento de la capacidad para usarlo tienen profundas e importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. Debido a ello, el entorno social valora ese conocimiento y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. Al aprender matemática, las personas pueden percibirse como seres autónomos y valiosos en la sociedad; la calidad, pertinencia y amplitud de dicho conocimiento incide en sus posibilidades y su calidad de vida y en el potencial desarrollo del país.

Aprender matemática es, primordialmente, participar en la actividad matemática; es decir: que los estudiantes puedan plantearse ante problemas y traten de resolverlos por sí mismos. Dicho aprendizaje es progresivo, relacionado y enfrenta un aumento creciente de complejidad conceptual y procedimental; por ende, no consiste solo en memorizar definiciones y algoritmos. En 3° y 4° medio, esto exige aplicar simultáneamente conocimientos y procedimientos propios de aritmética, álgebra, geometría, estadística o probabilidades, para resolver un problema o modelar un fenómeno de la disciplina, de otra área del conocimiento o de la vida cotidiana.

Desarrollo del pensamiento racional

Entendida como construcción cultural, la matemática tiene importantes consecuencias en el aprendizaje y la educación en general, que se originan en sus aportes indiscutibles al desarrollo del pensamiento, y en las estrategias y razonamientos que ofrece para actuar en el entorno científico, social y natural. La racionalidad de esta disciplina es inseparable de toda actividad que se relaciona con ella, trátese de la formulación de conjeturas, procedimientos, argumentos, de alguna de las diversas formas de verificación de la validez de estos, o bien del modelamiento matemático de situaciones y de la construcción del lenguaje disciplinar. Por su parte, la estadística provee maneras de pensar y de trabajar para tomar decisiones apropiadas en condiciones de incerteza, lo que la hace necesaria para enfrentar múltiples situaciones del ámbito laboral, disciplinario y del diario vivir.

Modelamiento matemático

El modelamiento matemático es el proceso que busca integrar la resolución de problemas, la argumentación, el razonamiento matemático y estadístico, la representación y el estudio de fenómenos cotidianos, y problemas propios de la disciplina o de otras áreas del conocimiento y la cultura. El escenario natural para desarrollar el modelamiento matemático es uno de colaboración entre los estudiantes, pues juntos tienen mayores posibilidades de asir la complejidad de algunas situaciones que interesa considerar. De esta manera, la discusión y de la reflexión colectiva ayudan a construir conocimiento; cada cual puede enriquecerse con las opiniones de sus pares, aprender a argumentar, a convencer con argumentos fundados y a validar los avances. Todo ello incide en el aprendizaje de diversas disciplinas, y también en el desarrollo de virtudes ciudadanas.

Problemas rutinarios y no rutinarios

Aprender matemática implica aplicar conocimientos y procedimientos, y elaborar estrategias para abordar los problemas propios de la disciplina o de la vida cotidiana. En ese sentido, se busca profundizar en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios como una oportunidad de aprendizaje clave en esta disciplina. Se propone avanzar en el tipo de situaciones en las cuales los estudiantes resuelven problemas, formulan posibles explicaciones o conjeturas, y en la habilidad de argumentar. Un aprendizaje central de la matemática consiste en justificar en términos disciplinares; por ende, se espera que –en esta etapa de su vida escolar– los alumnos experimenten cómo formular conjeturas y justificarlas o refutarlas.

Metacognición

La metacognición juega un rol importante dentro de la matemática. La disciplina se aprende “haciendo matemática”, reflexionando acerca de lo hecho y confrontando la actuación propia con el conocimiento construido y sistematizado anteriormente. Por ello, están imbricadas en toda tarea matemática las habilidades de razonar, representar, modelar matemáticamente, argumentar y comunicar, y resolver problemas. Además, su desarrollo permite alcanzar niveles de abstracción y demostración cada vez más complejos y que suelen requerir de una aplicación rigurosa del lenguaje matemático. El caso de la estadística es muy similar, pero agrega una componente relativa a los datos con los cuales se trabaja, los que son siempre contextualizados.

Aprendizaje Basado en Proyecto y Resolución de Problemas

Toda asignatura ofrece oportunidades para que los estudiantes aborden problemas vinculados a su vida cotidiana. El Aprendizaje Basado en Proyectos promueve que se organicen durante un periodo extendido de tiempo en torno a un objetivo basado en una pregunta compleja, problema, desafío o necesidad –normalmente surgida desde sus propias inquietudes– que pueden abordar desde diferentes perspectivas y áreas del conocimiento, fomentando la interdisciplinariedad. El proyecto culmina con la elaboración de un producto o con la presentación pública de los resultados. En el

Aprendizaje Basado en Problemas, en cambio, se parte de la base de preguntas, problemas y necesidades cotidianas sobre los cuales los estudiantes investigan y proponen soluciones.

En el caso de Matemática, estas metodologías permiten promover situaciones de aprendizaje desafiantes, pues para desarrollarlos es necesario que se resuelva –de manera colaborativa e incorporando las tecnologías digitales– problemas reales que exigen habilidades, conocimientos y actitudes en sus distintas etapas de diseño, ejecución y comunicación.

Ciudadanía digital

Las habilidades de alfabetización digital y uso de tecnologías que promueven las Bases Curriculares de 3° y 4° medio –como parte de las Habilidades para el siglo XXI– son fundamentales para que los alumnos trabajen en instancias de colaboración, comunicación, creación e innovación, mediante el uso de las TIC. También contribuyen a desarrollar la capacidad de utilizarlas con criterio, prudencia y responsabilidad.

Esta asignatura fomenta que los estudiantes usen las tecnologías digitales –por medio de software y aplicaciones digitales– para alcanzar diferentes niveles de comprensión y aplicación de los conocimientos y procedimientos, al modelar y resolver problemas propios de la disciplina o relacionados con otras asignaturas, o bien de la vida cotidiana. Los software y las aplicaciones digitales especialmente diseñados para aprender Matemática –como procesadores simbólicos o de geometría dinámica, simuladores, *apps*, o aquellos especialmente diseñados para el análisis estadístico, algebraico o geométrico (de los cuales hay versiones de uso libre y gratuito)– facilitan el análisis y la visualización de los conceptos o procedimientos en estudio, agilizan el testeo de conjeturas por la vía de comprobar una gran cantidad de casos particulares, y permiten desplazar la atención desde las rutinas de cálculo hacia la comprensión y resolución de un problema que se quiere modelar y resolver.

Orientaciones para el docente

Orientaciones didácticas

En matemática se requiere trabajar con las representaciones. Diversas investigaciones muestran que debe utilizarse varios tipos de representaciones (simbólico, gráfico, tabular, lenguaje natural, etc.) de manera articulada para una mejor comprensión; el tránsito de una forma de representar a otra es una fuente de aprendizaje que implica comprender el concepto e interpretarlo. Se debe considerar las representaciones (como la línea recta y el plano cartesiano) tanto para ubicar números como para indicar el infinito, la completitud, los intervalos y las operaciones.

En algunos casos, se requiere separar diferentes dominios (como álgebra, geometría o cálculo infinitesimal) para estudiarlos o para estructurar la planificación anual; sin embargo, no conviene plantearlos como disciplinas aisladas y sin relación entre sí. En muchos casos, es fácil constatar la presencia de un dominio en otro; por ejemplo: algunos teoremas de cálculo hablan de geometría. Hay que tener claro el tema que se está desarrollando y volver a mirar hacia atrás, pues a veces, al resolver un problema de geometría, los estudiantes se quedan con el recurso algebraico que se usó y no vuelven al problema original.

Por otra parte, no se puede esperar que todos los jóvenes terminen sabiendo todos los contenidos de la asignatura, ya que los ritmos y posibilidades de aprendizaje difieren entre ellos. Por ende, se debe tener presente que lo central es que desarrollen el *pensamiento matemático*, en lugar de retener fórmulas u otro tipo de información que carece de utilidad presente y futura si no las entienden.

En consecuencia, se debe hacer énfasis en la *actividad matemática*; para ello, se recomienda trabajar frecuentemente en forma colaborativa y, cuando sea posible, usar tecnologías digitales. Las herramientas digitales permiten liberarse en alguna medida de las rutinas de cómputo y dar mayor espacio al aspecto conceptual, a la experimentación, al sentido de los teoremas y a las aplicaciones.

En la asignatura Límites, Derivadas e Integrales, el estudiante tiene su primera aproximación al cálculo explícito de situaciones que involucran razonamiento sobre el infinito. Conviene recordar que el solo cálculo simbólico no garantiza que mejoren su intuición en ese sentido, por lo que se sugiere usar representaciones, esquemas, analogías y metáforas.

Orientaciones para la evaluación

En las actividades de evaluación que se sugiere, se ha procurado reconocer las instancias individuales y las colaborativas.

Las evaluaciones forman parte del proceso de aprendizaje, lo orientan y lo apoyan; no son medidas para determinar capacidades, pero permiten obtener información sobre los progresos, la comprensión y el aprendizaje de los contenidos y las habilidades. Es importante que la evaluación se realice como un continuo dentro de las actividades en la sala de clases. Hay varias alternativas disponibles:

- *Proyectos* (de grupos o individuales): De duración variable, sirven para resolver problemas complejos, efectuar una investigación guiada o modelar un problema real. Requieren de objetivos claros, acordados previamente, y de resultados abiertos. Es la forma ideal para conectar diferentes áreas del conocimiento.
- *Diario de vida matemático*: Cuaderno o carpeta en que el estudiante desarrolla estrategias personales, exploraciones, definiciones propias o descubrimientos. El profesor puede orientar su elaboración y verificar si comprenden los conceptos que usan.
- *Portafolio*: Selección periódica de evidencias (problemas resueltos, trabajos, apuntes, en un dosier o una carpeta) recogidas en un período determinado, y que responde a uno o más Objetivos de Aprendizaje. Permiten demostrar aprendizaje y deben incluir justificación y reflexión. El estudiante tiene un rol activo en su evaluación.
- *Presentación matemática* de la resolución de un problema: Indica el proceso y los procedimientos usados. Para evaluar, se aplica criterios o indicadores como dominio del

tema, uso de materiales de apoyo, uso del lenguaje. Los estudiantes deben conocer tales criterios y, eventualmente, el docente puede acordarlos con ellos.

- *Entrevista individual:* Mientras el curso trabaja en una tarea, el profesor dialoga con uno o más estudiantes de un mismo nivel de desempeño acerca de un concepto, un desafío o una pregunta relacionada con el tema abordado en la clase.
- *Actividad autoevaluable:* Al finalizar un tema o unidad, el profesor da a sus estudiantes la oportunidad de trabajar con un material que les permita autocorregirse (por ejemplo: hoja de actividades con las respuestas al reverso). A partir de los resultados, pueden verificar su avance o aquello que deben reforzar, corregir su tarea con ayuda de compañeros, completar su trabajo con recursos que estén a su alcance –como cuaderno, libros, diccionarios–, anotar sus dudas y, en última instancia, pedir ayuda al docente.

Orientaciones para contextualización

La asignatura de Límites, Derivadas e Integrales busca ofrecer a los estudiantes oportunidades de aprendizaje contextualizadas tanto en la matemática misma como en diferentes contextos, significativos, interdisciplinarios o de profundización matemática; de este modo, pueden sistematizar o aplicar los conocimientos y procedimientos aprendidos, y también idear y poner en práctica sus propias maneras de abordar aquellos fenómenos y problemas.

Organización curricular

Las Bases Curriculares de las asignaturas de profundización de Matemática presentan Objetivos de Aprendizaje de dos naturalezas: unos de habilidades[3], comunes a todas las asignaturas científicas del nivel, y otros enfocados en el conocimiento y la comprensión. Ambos tipos de objetivo se entrelazan en el proceso de enseñanza-aprendizaje, junto con las actitudes propuestas desde el marco de Habilidades para el siglo XXI.

Objetivos de Aprendizaje para 3° y 4° medio

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

Habilidades

Resolver problemas

a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.
b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

Argumentar y Comunicar

c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.
d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

Modelar

e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

Representar

g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.
h. Evaluar diferentes representaciones, de acuerdo a su pertinencia con el problema a solucionar.

[3] No es necesario seguir un orden lineal al enseñar el proceso de investigación, se puede trabajar cada uno de los Objetivos de Aprendizaje en forma independiente.

Habilidades digitales

i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática cuantitativa confiable a través de la web.

j. Desarrollar un trabajo colaborativo en línea para discusión y resolución de tareas matemáticas, usando herramientas electrónicas de productividad, entornos virtuales y redes sociales.

k. Analizar y evaluar el impacto de las tecnologías digitales en contextos sociales, económicos y culturales.

l. Conocer tanto los derechos propios como los de los otros, y aplicar estrategias de protección de la información en ambientes digitales.

Objetivos de Aprendizaje para 3° y 4° medio

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

Conocimiento y comprensión

1. Utilizar diversas formas de representación al argumentar acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.
2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.
3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.
4. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.
5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

Visión global del año

Unidad 1: Funciones	Unidad 2: Límites	Unidad 3: Derivadas	Unidad 4: Integrales
Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje
OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada. **OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos. **OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	**OA 2.** Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales. **OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados. **OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	**OA 3.** Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. **OA 4.** Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales. **OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.	**OA 5.** Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. **OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes	Actitudes	Actitudes	Actitudes
Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias. Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.	Pensar con autorreflexión y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar. Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.	Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas. Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.	Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista. Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
Tiempo estimado: 5 semanas	Tiempo estimado: 10 semanas	Tiempo estimado: 12 semanas	Tiempo estimado: 11 semanas

Unidad 1

Unidad 1: Representar y modelar situaciones de cambio por medio de funciones

Propósito de la unidad

Se espera que los estudiantes comprendan que las funciones sirven para representar y modelar situaciones de cambio; el foco está en las nociones básicas de reversibilidad y composición de funciones en situaciones concretas. Los estudiantes comienzan con las situaciones de cambios modelados por la función lineal, cuadrática, potencia y exponencial, para continuar componiendo funciones y terminar con la inversa de una función. Las preguntas que orientan esta unidad son: ¿Por qué es necesario componer funciones para modelar algunos fenómenos? ¿Por qué hay problemas que requieren de la función inversa para ser resueltos?

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actividad 1: Modelar cambios con funciones

PROPÓSITO

Los estudiantes identifican situaciones de cambio lineal o cuadrático para luego representar y comparar los modelos. Utilizan habilidades y conocimientos de 7° básico a 2° medio para conformar la noción de función, su representación y sus características esenciales. Este es el momento para que piensen con flexibilidad y reelaboren sus creencias y puntos de vista sobre las funciones y su aplicabilidad a situaciones diversas.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

MOVIMIENTOS LINEALES Y CUADRÁTICOS

1. Observa las siguientes imágenes y describe a tu compañero lo que ves.

   a. ¿Describen estas fotos una situación de cambio? Explica a tu compañero dónde habría un cambio.
   b. ¿Se puede expresar el cambio de ambas situaciones de la misma manera? Comunica a tu compañero tu postura.
   c. Determina las variables que describen el cambio.

2. Lee la siguiente información: “Aquí podemos ver un tren rápido[4] en la fase de velocidad constante y un cohete de investigación en la fase del despegue. El desplazamiento del tren rápido se modela con un movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y el del cohete, con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). Se considera que el tren rápido pasa en el instante $t = 0$ con velocidad constante y la mantiene en los próximos 40 segundos”.
   a. Comenta con tu compañero las palabras que no entiendes; busca su significado en un diccionario o en la web.
   b. Elabora una lista con palabras clave y, con ellas, explica a tu compañero lo que entendiste del párrafo.

3. La tabla se muestra los valores de tiempo transcurrido en segundos [s] y la distancia del tren en metros [m].

	Tiempo en segundos [s]	0	2	5	10	15	20	30	40
Tren rápido	Distancia en metros [m]	0	100	250					

   a. Completa la tabla.
   b. Grafica los puntos de la tabla, puedes usar alguna herramienta digital.
   c. Concluye cómo sería la gráfica para otros puntos, pensando en los intervalos de tiempo $[0;\ 1]$, $[1;\ 5]$, $[5;\ 10]$, $[10;\ 15]$, $[15;\ 20]$, $[20;\ 30]$, $[30; 40]$
   d. ¿Cómo cambia la distancia en términos del tiempo: doble, triple, cuádruple, … n-múltiple del tiempo?
   e. ¿Qué sucederá luego de estos 40 segundos? Evalúa con tus compañeros sobre el intervalo de tiempo y sobre definir el dominio y recorrido.
   f. Determina la función que describe este movimiento en el tiempo (MRU). Explícala a un compañero.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

4. La tabla muestra los valores de tiempo transcurrido en segundos [s] y la altura del cohete en metros [m]

	tiempo en [s]	0	2	5	10	15	20	30	40
Cohete de investigación	altura h(t) en [m]	0	80	500					

[4] Foto del tren: Proyecto Tren Santiago Valparaíso (TVS)
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.biobiochile.cl/noticias/nacional/region-metropolitana/2019/06/03/proyecto-de-tren-rapido-santiago-valparaiso-no-vera-la-luz-antes-de-2023.shtml

Completa la tabla y, con los datos, determina la función para el tiempo:

a. Utilizando herramientas digitales, elabora el gráfico de la función.
b. ¿Cómo cambian la altura en términos del tiempo: doble, triple, cuádruple, … n-múltiple del tiempo?
c. Determina la velocidad promedio en los intervalos de tiempo $[0,1]$, $[1,5]$, $[5,10]$, $[10,15]$, $[15,20]$, $[20,30]$, $[30,40]$.
d. ¿Cuál es la tendencia de las velocidades promedio con el pasar del tiempo?
e. ¿Qué sucederá luego de los 40 segundos? Extiende tu gráfico para describir cómo lo imaginas.
f. Evalúa con tus compañeros sobre el gasto de combustible y otros factores que podrían influir en esta situación.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

5. Compara las funciones generadas en el caso del tren con el caso del cohete.
   a. Comenta lo que ocurre al variar (aumentar o disminuir) los valores del tiempo, verbalmente y apoyándote en la información entregada.
   b. ¿Puedes asegurar que ambos modelos se mantienen en el tiempo? Explica a tu compañero lo que eso significaría.
   c. Averigua todo lo que puedas sobre ambas situaciones y compara con lo que ya tienes desarrollado.

6. Lee y responde.

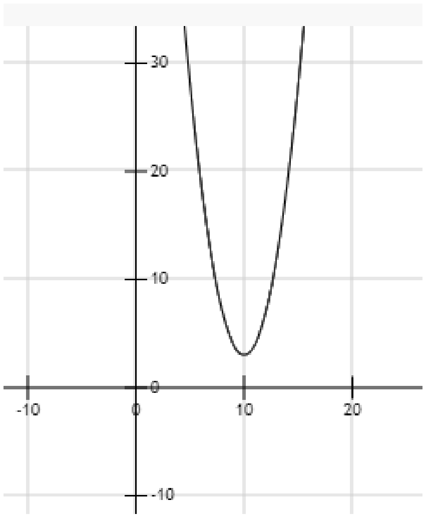
En el entrenamiento de atletismo escolar para la carrera de relevo, el primer atleta pasa con velocidad constante de $6{,}4\frac{m}{s}$ una marca que está puesta a una distancia de 8m del segundo atleta. En este instante, el segundo atleta parte con una aceleración constante de $3{,}2\ \frac{m}{s^2}$ para poder alcanzar al primer atleta, teniendo la misma velocidad de él.

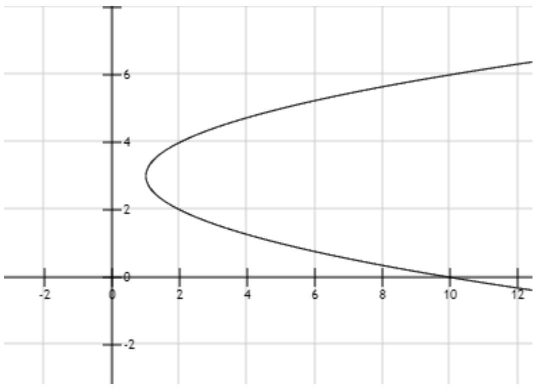
a. Elabora una tabla de datos y la función correspondiente.
b. ¿En qué tiempo y en qué lugar alcanza el segundo atleta al primero, suponiendo que el primer atleta mantenga su velocidad y el segundo logre mantener la aceleración de tiempo de 5 segundos?
c. Representa la situación en un gráfico y compara con tus compañeros.
d. ¿Qué ocurre luego de la carrera con la función elaborada? Responde en términos del tiempo y el dominio de la función según el contexto.

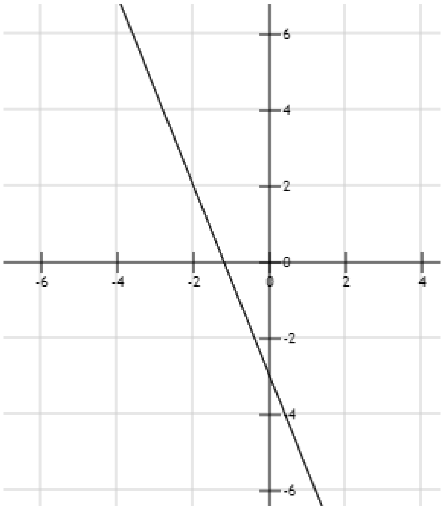
Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

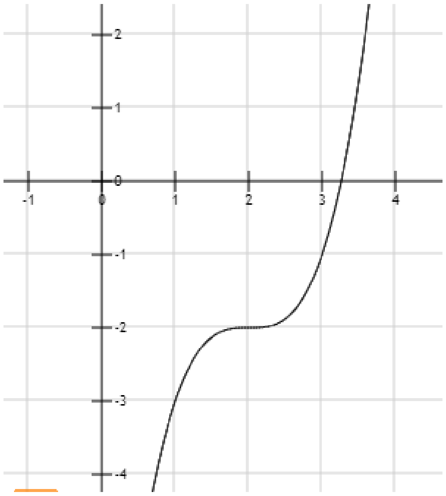
ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 1 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos previos de 2° medio; algunos ejercicios pueden ser:
   - ¿Cuáles son las características del gráfico de una función?
   - Indica si los siguientes gráficos representan una función y explícalo:

a) 

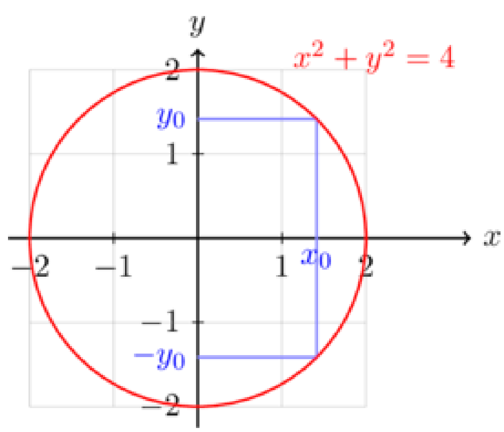
b) 

c) 

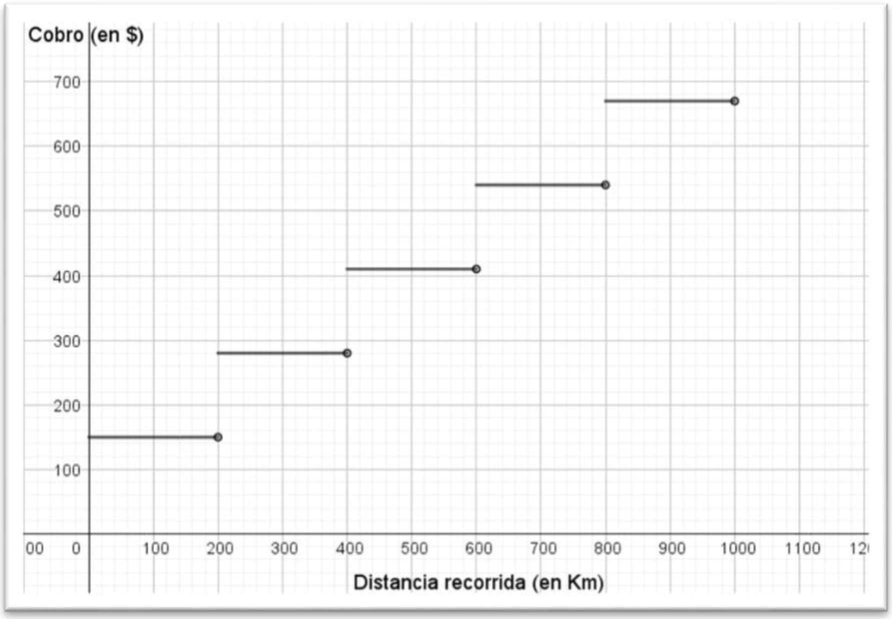
d) 

- Describe el gráfico de la función $f(x) = kx^2$
  a) Para el caso k positivo
  b) Para el caso k negativo

2. Las situaciones de cambio se describen por una variable que tiene una transformación. Sugiera a sus estudiantes analizar qué es lo que cambia y qué se mantiene, mencione el tiempo y la altura o plantee preguntas como: ¿Cambia el tiempo? ¿Cambia la altura? ¿Cambia la forma del objeto? ¿Quién va más rápido?
3. Se sugiere recordar la fórmula de la velocidad para responder y profundizar en este tema; en el caso del cohete, se puede considerar la gravedad como $g = 10$.
4. Las funciones lineal y cuadrática ya han sido vistas en 8° básico y 2° medio, respectivamente; se las presenta de nuevo para dar énfasis a los intervalos y la continuidad de la función, precisando que el intervalo de partida es $[0, 40]$ para ambas situaciones y el de llegada es $[0;\ 2000]$ y $[0;\ 64\ 000]$ en el caso del cohete.
5. Dado que se entregó la función con datos puntuales, pero corresponde a una función continua, se sugiere trabajar este proceso de forma detallada. Algunas preguntas para orientar en este proceso son: ¿Cuáles son las unidades para medir el tiempo? ¿Qué ocurre con la distancia entre segundo y segundo? ¿Cómo se refleja la situación del tiempo en términos de la distancia? ¿Puede haber un salto en el gráfico?
6. Al término de la actividad y usando los gráficos, se puede identificar el conjunto de partida y llegada; además, el gráfico muestra que a cada punto del conjunto de llegada, le corresponde un único punto en el conjunto de partida.
7. Dependiendo del contexto de los estudiantes, se puede dar una definición formal de una función y dar ejemplos para conversar sobre cuándo una representación es o no función.
8. Algunas relaciones para debatir con ellos pueden ser:
   a. Ecuación de una circunferencia



b. El cobro por el uso de un taxi, de acuerdo a la distancia recorrida. Aunque se cobra por cada 200 m o cada 60s, en este caso solo se considera la variable de distancia recorrida. El cobro inicial es \$150 y la tarifa aumenta \$130 cada 200m.



9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Identifican situaciones de cambio, considerando condiciones de linealidad o cuadrática.
   - Resuelven problemas relacionados con situaciones lineales o cuadráticas.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Video sobre modelamiento de una situación lineal, la caída de nieve
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/cc-eighth-grade-math/cc-8th-linear-equations-functions/8th-linear-functions-modeling/v/exploring-linear-relationships
- Revista del Instituto de Matemática y Física, Experiencias de aula para modelar situaciones lineales
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matesup.cl/portal/revista/2006/6.pdf
- Introducción a las funciones cuadráticas como una herramienta de modelación, programa EPJA, Mineduc
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/04/GuiaN2MatematicaIICiclodeEM.pdf

Actividad 2: Representar la composición de funciones

PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden la noción de componer funciones y utilizan representaciones pictóricas y simbólicas para la operatoria de funciones. También comparan la compuesta con la suma de funciones y reconocen diferentes funciones, pensando con flexibilidad para reelaborar e incluir conocimientos sobre la operatoria de funciones y cambiar eventualmente sus puntos de vista y creencias relacionadas con las funciones y su composición.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

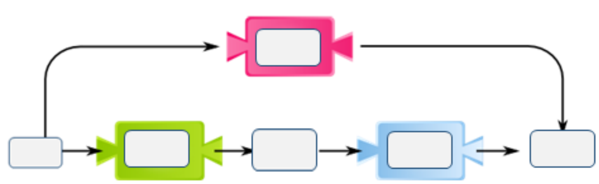
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

CONCEPTO DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

1. Observa el siguiente esquema y explica a tu compañero lo que entiendes al verlo.

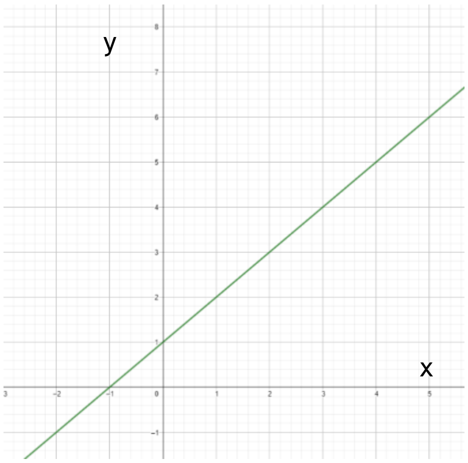


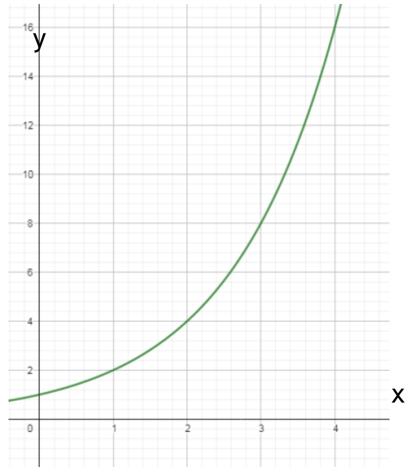
   a. Rotula el dibujo esquemático, formado por "máquinas", con las expresiones simbólicas de $g \circ f$, $f(g(x))$, g, f, x y $g(x)$.
   b. Haz funcionar la máquina con un cambio afín $g(x) = x + 1$ y la función f potencia cúbica.
   c. Elabora la compuesta $g \circ f$ expresándola de la forma $g(f(x))$.
   d. Elabora la compuesta $f \circ g$ cambiando el orden de aplicación, ¿qué ocurre con el esquema?

LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES CONOCIDAS

La composición de dos funciones en comparación con la suma de las mismas funciones.

1. Observa los dos gráficos e identifica la función que representan.



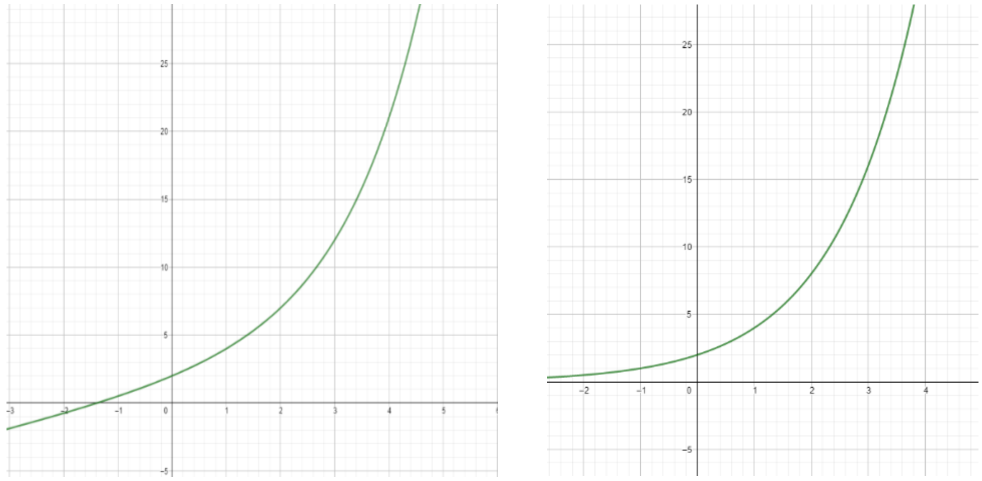


   a. A continuación, se presenta cuatro funciones:
      - $f(x) = 2^x$
      - $g(x) = x + 1$
      - $h(x) = 2^{x+1}$
      - $s(x) = 2^x + x + 1$

      Identifica la función con su gráfico.

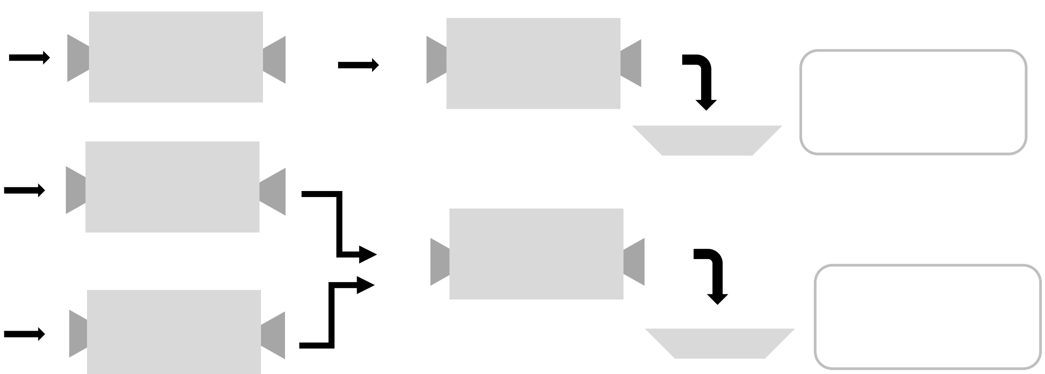
   b. Identifica cada una de las funciones con alguna de las siguientes expresiones verbales:
      - La función exponencial más la función afín.
      - A la variable se le ha sumado uno.
      - La variable más uno es el exponente.
      - La variable es el exponente de la función.
      - La variable es el exponente y a la potencia se le ha sumado la variable y uno.

2. Observa los siguientes gráficos e identifica la función correspondiente:



   a. Identifica las diferencias y descríbeselas a tu compañero.
   b. ¿Qué relaciones puedes ver con las funciones presentadas antes?
   c. ¿Cuál de ellos representa la composición de funciones $f \circ g$? ¿Cómo puedes estar seguro?

3. La figura de abajo muestra dos modelos distintos de interacción entre máquinas que representan la operación aritmética (adición, sustracción, multiplicación o división) entre funciones, o la composición de funciones.



   a. Rotula en el recuadro los modelos correspondientes con “operación” o “composición”.
   b. Considera las funciones

$$f(x) = 2^x$$
$$g(x) = x + 1$$

   y haz funcionar el esquema para la suma, la resta y la compuesta de estas funciones.
   c. Mirando el esquema de la composición de funciones, ¿qué rol tiene el recorrido de la primera función?

d. Elabora la ecuación de la función compuesta k en la cual se cambia el orden entre ambas funciones $g \circ f = k(x)$.
e. Elabora el gráfico de esta función compuesta k y contrástala con la función $h(x) = 2^{x+1}$.

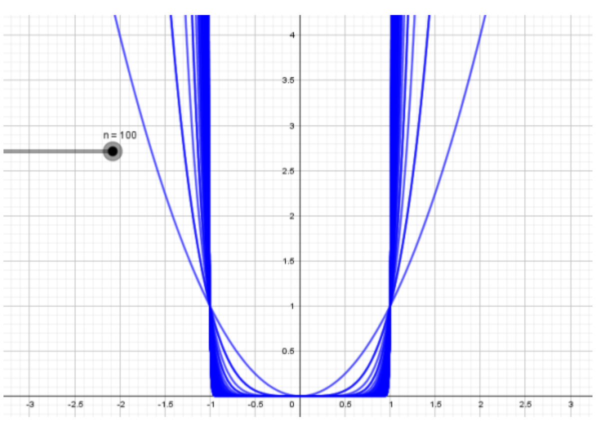
4. Encuentra una función $t(x)$ tal que, al componerla con
$$g(x) = x + 1,$$
se obtenga la función I(x) = x.
5. Crea dos funciones tales que, al componerlas, obtengas la función I(x) = x

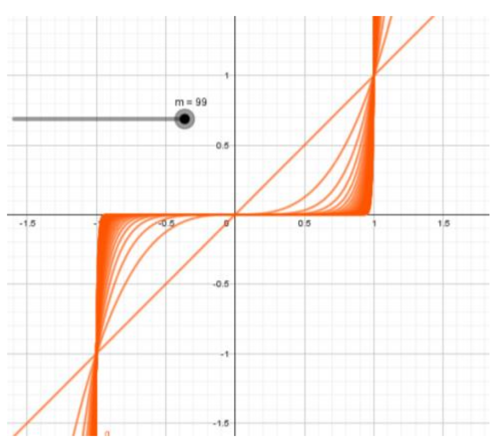
UNA FUNCIÓN MUY PARTICULAR

1. Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x$.
a. Grafica la función en el plano cartesiano.
b. ¿Qué tipo de relación se da en esta función? Describe el comportamiento de la función con tus propias palabras.
c. Considera distintos conjuntos de partida para la función; por ejemplo: solo los números naturales, solo los números enteros, solo los números racionales o intervalos. ¿Cuáles son las diferencias? ¿Qué ocurre con el conjunto de llegada?
d. ¿Por qué crees que es una función particular? ¿Qué dirías sobre lo que le ha pasado a la variable?
e. Compone varias veces la función con ella misma. ¿Qué ocurre? Y si sumas varias veces la función con ella misma, ¿qué ocurre?

FAMILIAS DE FUNCIONES

Enfóquense ahora en otros casos particulares de funciones potencia, dentro de la misma familia de funciones definida por $f(x) = x^n$, con $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. A continuación se muestra la gráfica de una familia de funciones.





Familia 1

Familia 2

Te puedes apoyar en la tecnología para responder y reflexionar sobre las preguntas:

a. ¿Qué condiciones para n se debe tener para generar la familia 1 y 2 de funciones?
b. ¿Qué diferencias hay entre ambas familias de funciones?
c. ¿Qué ocurre cuando compones algunas de estas funciones? Prueba dentro de una misma familia y luego con funciones de ambas familias.
d. ¿Qué ocurre si consideras otros valores para n enteros y menores a 1? ¿Se forma una nueva familia? Representa gráficamente estas soluciones.
e. ¿Qué ocurre cuando compones funciones de diferentes familias?

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES EN UN CONTEXTO DE LA ECONOMÍA

Un producto se fabrica en varias fases; por ejemplo: refinar la materia prima y después, convertir la materia refinada en un producto industrial.

a. ¿Por qué se puede modelar estos procesos industriales de producción con modelos matemáticos de composición de funciones? Argumenten y comuniquen la respuesta.
b. En la refinación de una materia prima se considera costos fijos k, más los ingresos variables por refinar, que son proporcionales a la cantidad x del material refinado. ¿Qué función matemática g puede modelar las ganancias en esta fase de producción? Elaboren la ecuación de esta función en general, sin valores numéricos; en ella, m es el factor de proporcionalidad.
c. En la Bolsa de Metales de Londres, el precio de una materia prima refinada varía cerca de US$ 2,21[5] por libra. Determinen el precio por megatonelada Mt[6].
d. En la producción de una de las materias primas refinada hay costos fijos de US$ $500\,000\,000$. Elaboren la ecuación de la función afín g que modela las ganancias por la refinación.
e. En la conversión de una materia refinada en un producto industrial, las ganancias por capital invertido se determinen aproximadamente por la función f con $f(z) = -0{,}2(z^2 - 6z)$, en la cual la variable z representa US$ $1\,000\,000\,000$. Conjeturen acerca del valor de z_m que representa las ganancias máximas. Expliquen la conjetura.
f. Completen la siguiente tabla funcional para verificar o rechazar la conjetura.

z	0	1	2	3	4	5	6
$f(z)$							

g. Con herramientas digitales, elaboren el gráfico de la función f.

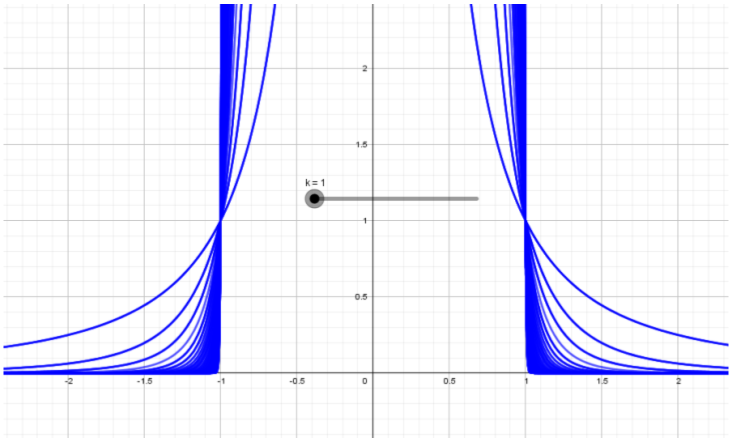
[5]$US: dólar estadounidense
[6]1Mt = 1 000 000t

h. Considerando el gráfico, ¿qué pasa con el capital invertido si se sobrepasa el valor de US$ 6 000 000 000?
i. Desarrollen la ecuación de la composición de ambas funciones $g \circ f$.
j. Con herramientas digitales, elaboren el gráfico de $g \circ f$.
k. ¿Hasta qué cantidad de materia refinada se obtiene ganancias en la conversión ulterior a un producto industrial?

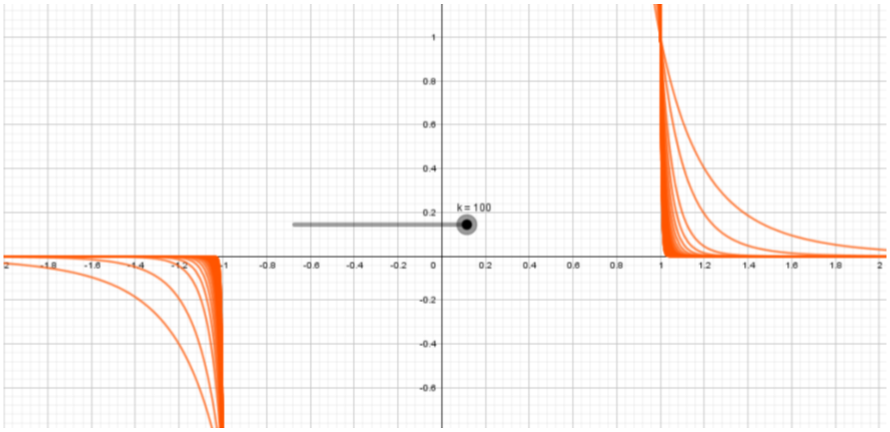
ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. En estas actividades se propone el estudio particular, inicialmente sin contexto cotidiano, de la función exponencial y la compuesta con la función lineal, dada la cercanía con los estudiantes. Desde 8° básico vienen trabajando con la función lineal, primero como relación de proporcionalidad directa para luego generalizarla como la función afín. Más adelante, en 2° medio, estudian la función cuadrática y la raíz cuadrada, momento en que se da un énfasis a la aplicación de estas funciones. En este curso, se debe profundizar en términos de describir el dominio y el recorrido, y encontrar condiciones para invertir las funciones; además, se tiene que enfatizar en describir el comportamiento de la función y las situaciones de cambio que describen. La función potencia se estudia en 4° medio en detalle. Si no se ha trabajado antes de esta actividad, no debiese ser un obstáculo para realizarla, ya que se usa el gráfico y el docente puede describir y comentar su comportamiento para luego profundizar en esta función.
2. Se espera que los jóvenes propongan varios casos particulares de la función potencia, diferenciando entre el caso de la función potencia de exponente par positivo y la función potencia de exponente impar positivo.
3. Según el contexto de sus estudiantes, se sugiere hacer el mismo tratamiento para la función raíz enésima par, donde pueden apreciar otras funciones y aproximarse a la noción de inversa.
4. En los casos estudiados, se puede tratar las definiciones no formales de la inyectividad y sobreyectividad junto con la técnica de la línea horizontal, que indica que, si toda línea horizontal toca a lo más un punto de la curva, es inyectiva, y si toca al menos un punto, es sobreyectiva. Se recomienda que los estudiantes argumenten utilizando el gráfico. Si lo estima adecuado, conviene hacer las definiciones formales para trabajar la escritura simbólica matemática.
5. Si el contexto y el tiempo lo permiten, se sugiere trabajar las siguientes funciones de familias:
   - La familia de funciones $f(x) = x^n$, con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n = \frac{1}{2k}, k \in \mathbb{N}$.
   - La familia de funciones potencia $f(x) = x^n$, con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{R} - \{0\}$

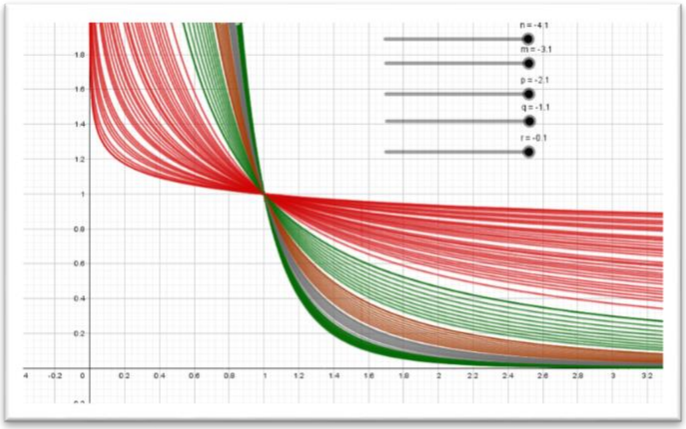
   Caso $n = -2k, k \in \mathbb{N}$; es decir, exponentes pares negativos.



Caso $n = -2k + 1, k \in \mathbb{N}$, es decir, exponentes impares negativos.



Caso valores negativos de n en intervalos; por ejemplo: $-5 < n < -4$; $-4 < n < -3$; $-2 < n < -1$; $-1 < n < 0$.



6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan la inversa o la composición de funciones con gráficos y lenguaje algebraico.
   - Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente.
   - Resuelven problemas, utilizando la inversa o la composición de funciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Calculadora gráfica DESMOS
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.desmos.com/calculator

- GeoGebra
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/KGWhcAqc

- Guía con definiciones y algunos ejercicios
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.udesantiagovirtual.cl/moodle2/pluginfile.php?file=%2F160049%2Fmod_resource%2Fcontent%2F1%2FFunciones.pdf

Actividad 3: Comprendiendo la reversibilidad por medio de la función inversa

PROPÓSITO

Los estudiantes trabajan responsablemente para lograr metas comunes; en este caso, comprender la aplicabilidad de la inversa de una función y entender cuáles son sus aportes al desarrollo científico. Como punto de partida, se analiza el problema de determinar la edad de un fósil a partir del método del carbono 14 y se modela el fenómeno por una función exponencial. Además, se pretende que encuentren la inversa de funciones, apoyándose tanto en la representación y la reflexión de la curva sobre la función identidad, como en cálculos algebraicos. Para esto, se espera que piensen con flexibilidad para reelaborar sus ideas y creencias sobre el trabajo con funciones.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1: Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

LOS FÓSILES

1. Seguramente has escuchado hablar del descubrimiento de fósiles de miles de años, que permiten inferir cómo era la vida hace tanto tiempo. ¿Cómo es posible que los científicos puedan conocer su edad? ¿Por qué pueden afirmar con tanta seguridad, por ejemplo, que tal fósil tiene alrededor de 30 000 años? Comparte tus ideas con tu compañero.

2. Lee la siguiente información con tu compañero: “Un método muy usado por los científicos es el del carbono 14 (C-14). Aunque presenta algunos problemas, como que no es válido para datar fósiles de más de 50 000 años, su fundamento es simple y se basa en el periodo de descomposición del fósil.

El carbono 14 es un isótopo[7] del carbono que se forma en las partes altas de la atmósfera a partir del nitrógeno. Cuando una planta hace la fotosíntesis, desde que nace hasta que muere, fija carbono en su interior, que incluye el isótopo carbono 14. Cuando muere la planta, comienza la fosilización y el proceso inverso: el carbono 14 empieza a transformarse de nuevo en nitrógeno. Al medir la cantidad de carbono 14 y de nitrógeno que hay en el fósil encontrado, se puede conocer su edad aproximada".

a. Averigua las palabras que no entendiste y busca su definición en un diccionario o en la web.
b. Comparte tus definiciones con tu compañero.
c. Busca las palabras clave para describir el texto y formula una o dos frases con ellas. Compártelas con tu compañero.

3. Lee el resto del siguiente texto: "En los seres vivos que no son plantas, el proceso de fijación de carbono 14 ocurre cuando se alimentan de organismos que sí hacen la fotosíntesis. En el animal, cuando muere, empieza el mismo proceso que en la planta muerta. El carbono 14 comienza a transformarse en nitrógeno. Al medir la cantidad de carbono 14 y de nitrógeno, se establece su edad. La masa de carbono 14 de cualquier fósil disminuye exponencialmente. Sabiendo la diferencia entre la proporción de carbono 14 que debería contener un fósil si aún estuviese vivo y la que realmente contiene, se puede conocer la fecha de su muerte".

a. Explícale a tu compañero con tus propias palabras lo que entendiste del texto.
b. ¿Qué relación podría tener el texto con las funciones? Comparte tu idea a tu compañero y traten de formar una sola idea.
c. Si encontraran un fósil, ¿qué podrían hacer para determinar hace cuánto tiempo vivió? Averigua cómo lo hacen los científicos.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA a, e, 3° y 4° medio

DETERMINANDO LA EDAD DE UN FÓSIL Y LA FUNCIÓN INVERSA

1. El periodo de semi-descomposición o vida media es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una sustancia radioactiva. Para el carbono 14, este período es de 5 730 años.
   $f(0)$ es la cantidad de carbono 14 al momento de morir.
   t es el tiempo transcurrido luego de la muerte del ser vivo.
   $f(t)$ es la cantidad de carbono 14 hallada en la muestra en el tiempo t.

a. Completa la tabla con la proporción de carbono 14 que habrá en un fósil, transcurridos los períodos de tiempo que se indican, a partir de la muerte de un ser vivo.

[7] Se denomina isótopos a los átomos de un mismo elemento, cuyos núcleos tienen una cantidad diferente de neutrones y, por lo tanto, difieren en número másico. Fuente: Wikipedia.

Tabla 1: Relación entre el tiempo transcurrido y la proporción de C14

Tiempo (vida media) t	Proporción de C14, respecto de $f(0)$, que hay en la muestra $\frac{f(t)}{f(0)}$
0 (en $f(0)$)	1
5730	½
11 460	¼
17 190	
22 920	

b. Bosqueja esta relación en el plano cartesiano; gradúa adecuadamente los ejes.
c. Señala si la relación es funcional. Argumenta.
d. Indica dominio y recorrido de $\frac{f(t)}{f(0)}$ y conjunto de partida y llegada.
e. Describe cómo varía $\frac{f(t)}{f(0)}$ por cada 5 730 años que transcurren desde la muerte del ser vivo.
f. ¿Conoces algún modelo matemático que permita acercarse a la función entre $\frac{f(t)}{f(0)}$ y t?

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.**
OA c, d, 3° y 4° medio

2. Para los restos fósiles, el valor de la proporción entre el carbono 14 en un periodo t, respecto del carbono 14 que había al momento de la muerte del ser vivo, viene dado por la expresión:

$$\frac{f(t)}{f(0)} = e^{-0,00012t}$$

Para poner a prueba el modelo encontrado:

a. Describe la velocidad de decrecimiento de $\frac{f(t)}{f(0)}$ respecto de t. Indica los criterios que has usado.
b. Si un ser vivo murió hace 12 000 mil años, ¿qué porcentaje de C14 debería contener su fósil?
c. Comprueba con el modelo algebraico que, a los 5 730 años, la proporción de C14 es $\frac{1}{2}$. Explica los cálculos realizados.

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.**
OA c, d, 3° y 4° medio

3. ¿Cómo se aplica el modelo anterior si se quiere determinar la fecha de muerte de un ser vivo, cuyo fósil contiene 23% de carbono 14?
En la actualidad, este método se utiliza así, “de forma inversa”, dado que hay dispositivos lo suficientemente precisos para determinar el porcentaje de C14 en un fósil, y lo que se desea es saber de qué época es.
a. ¿Siempre se puede determinar un valor t para un porcentaje de C14 dado?

b. ¿Se puede "revertir" lo que hace la función para conocer el valor de t?
c. Si f transforma a t en $f(t)$, ¿se puede determinar una función que transforme a $f(t)$ en t?

4. Se desea conocer la data de muerte de un fósil con un 23% de C14.
   a. ¿Cómo podrías usar la expresión anterior $f(t)$ para determinar t?
   b. ¿Cómo podrías encontrar una expresión para t desde la expresión algebraica de $f(t)$?

5. Enuncia en términos generales la expresión para determinar t en términos de $f(t)$.
   a. La expresión encontrada, ¿es también una función?
   b. ¿Qué restricciones debería tener el conjunto de partida y llegada de f para que la nueva expresión pueda ser una función?
   c. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta nueva función?

6. Reescribe la nueva función, considerando que ahora t es $f^{-1}(t)$ y que $f(t)$ ahora es t.
   a. ¿Qué crees que significa esto?
   b. ¿Por qué se puede y debe hacer este cambio?

7. Evalúa ambas funciones en $t = 1$ y luego en $t = 0{,}5$
   a. En f, ¿qué sentido tiene $t = 1$ y $t = 0{,}5$?
   b. En f^{-1}, ¿qué sentido tiene $t = 1$ y $t = 0{,}5$?

REPRESENTANDO LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

1. Consideren la función $f(x) = 2^x$.
   a. ¿Conocen algún problema que se pueda modelar con una función de este tipo?
   b. ¿Cuáles son el conjunto de partida y de llegada de esta función?
   c. Despejen x en términos de $f(x)$. ¿Qué expresión algebraica obtienen?
   d. Reescriban la nueva expresión, considerando que ahora x es $f^{-1}(x)$ y que $f(x)$ ahora es x. Expliquen por qué se debe hacer este cambio en las variables.

2. En un mismo plano cartesiano, grafiquen $f^{-1}(x)$ y $f(x)$.
   a. Describan qué particularidades ven en ambas gráficas.
   b. ¿Qué ocurre en el punto $(0,1)$ y su simétrico?
   c. Dibujen la recta $y = x$ en el plano cartesiano anterior. ¿Qué pueden decir de ambas curvas respecto de la recta $y = x$?

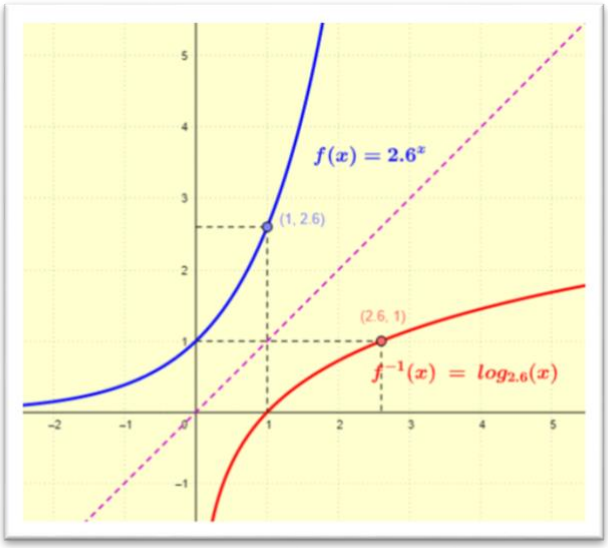
3. La función cuadrática $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = x^2$, ¿tiene inversa?
   a. Grafiquen la función h.
   b. Luego grafiquen $y = x$.
   c. ¿Qué deberían esperar de la función inversa con respecto a la gráfica?
   d. ¿En qué intervalos de $\mathbb{R}$ está definida la función h^{-1}?

e. ¿En qué intervalos de $\mathbb{R}$ para h existe h^{-1}?
f. ¿Qué condición debe cumplir la definición de una función para que exista su función inversa?
g. Obtengan h^{-1} de forma algebraica. Indiquen las restricciones del dominio y recorrido.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. La introducción de la función inversa se puede hacer directamente desde un gráfico, o mediante un contexto científico que requiere dar respuestas a los diferentes problemas. Se presenta una función exponencial dependiente del tiempo, y se plantea como una necesidad del mismo contexto invertir el camino; es decir, buscar un valor de tiempo, dado un valor del recorrido. Se desea instalar la idea intuitiva de que buscar una función inversa equivale a realizar el camino inverso: si f transformó a t en $f(t)$, entonces se desea invertir aquello que hizo f a t para determinar t, conociendo $f(t)$.
2. Para que los estudiantes reconozcan el modelo inicial, se recomienda usar una lista sistemática de valores que relacionen t y $\frac{f(t)}{f(0)}$, y no presentar de inmediato la función modeladora. En este caso, $\frac{f(t)}{f(0)}$ va variando cada 5 730 años en la mitad de su valor anterior, partiendo de 1, pues al relacionar $f(t)$ y $f(0)$ se tiene una proporción, motivo por el cual se puede interpretar su resultado como porcentaje. En este ejemplo, $\frac{f(t)}{f(0)} = 0{,}23$ se interpreta como 23%.
3. Se considera el estudio de $\frac{f(t)}{f(0)} = e^{-kt}$ y no de $f(t) = f(0) \cdot e^{-kt}$, dado que lo que se mide en la realidad es una comparación entre lo que había y lo que se encuentra al momento de medir el C14 en el fósil. En la literatura, la expresión aparece como $f(t) = f(0) \cdot e^{-kt}$, pero, para simplificar el tema, se ha optado por trabajarlo de forma explícita como la comparación, usando $\frac{f(t)}{f(0)} = e^{-kt}$.
4. De igual modo, simplificando el problema, se propone presentar el modelo con el valor $k = 0{,}00012$, donde el docente debe evaluar si esto es necesario o puede plantearlo como un desafío a algunos o todos sus estudiantes. En el recuadro de sugerencia, junto al punto 2, se muestra una forma de encontrar el valor de k.
5. El profesor debe supervisar constantemente la notación de función inversa que se introduce, pues se sabe que –en el estudio de las funciones– entender la notación que se usa es difícil para los estudiantes. En este caso, se debe enfatizar en que la inversa de una función no es lo mismo que el inverso multiplicativo de ella. No es igual f^{-1} que $\frac{1}{f}$.
6. Se sugiere indicarles que se puede determinar la inversa de una función, siguiendo la definición de función inversa como $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$, donde $f: A \to B$ y $f^{-1}: B \to A$, y agregando que f debe ser biyectiva en todo el dominio o en un intervalo de él.

7. En los tres casos de funciones y sus inversas, se analiza la forma gráfica de las funciones inversas, en caso de existir. Usando la recta $y = x$, se busca la curva simétrica de $f(x)$ y se obtiene $f^{-1}(x)$. Conviene usar algún programa para visualizar la curva y su simétrica a partir de una recta. Así se puede ir generalizando la función inversa de las funciones lineal, cuadrática, potencia y exponencial.



8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan la inversa o la composición de funciones con gráficos y lenguaje algebraico.
   - Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente.
   - Resuelven problemas, utilizando la inversa o la composición de funciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Contenidos breves y ejemplos de función inversa
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/funcion-inversa/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://ekuatio.com/calculo-de-la-funcion-inversa-ejercicios-resueltos-paso-a-paso/
- GeoGebra
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/KGWhcAqc
- El carbono 14 explicado de forma sencilla
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/Quimica/Carbono14.htm
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.portalastronomico.com/el-carbono-14/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.ehu.eus/biomoleculas/isotopos/carbono14.htm
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/Quimica/Carbono14.htm
- Calculadora de funciones inversas, solo la parte algebraica
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.symbolab.com/solver/function-inverse-calculator/inversa%20f%5Cleft%28x%5Cright%29%3Dx%5E3?or=ex

Actividad 4: Modelar situaciones utilizando la composición de funciones

PROPÓSITO

Los estudiantes modelan situaciones, utilizando la compuesta de funciones. También responden problemas y crean una situación a partir de funciones y su compuesta. Para esto, piensan con flexibilidad a fin de reelaborar sus ideas y representaciones sobre la función compuesta y su conexión con situaciones o fenómenos científicos, cotidianos o económicos.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1: Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

COMPRENDIENDO EL RECORRIDO DE FRENADO

1. En la escuela de conducir, a los alumnos se les enseña una fórmula con la cual se puede calcular el recorrido s de frenado de un auto, en términos de la velocidad v que tiene el automóvil.

$$\boxed{s = 0{,}01 \cdot v^2}$$

La velocidad v está en $[\frac{km}{h}]$ y el recorrido s se debe presentar en metros $[m]$.

El siguiente gráfico muestra los metros que se debe recorrer para frenar según la velocidad que tiene el vehículo.

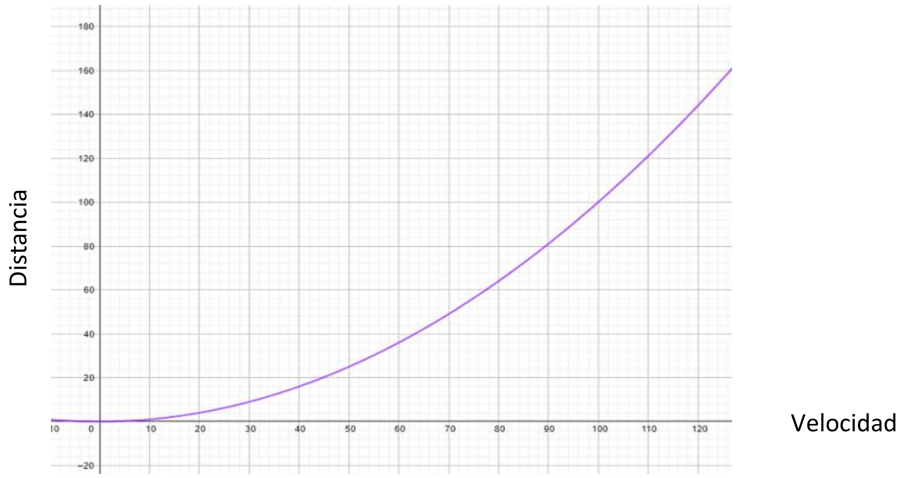


Figura 1: Distancia de frenado según velocidad del automóvil.

a. Elabora una tabla con datos extraídos del gráfico.
b. ¿Qué velocidad crees que sería la prudente para andar en la ciudad?
c. ¿Qué relaciones puedes sacar entre posiciones de letreros, semáforos y pasos peatonales? Prepara una lista de condiciones sobre letreros, semáforos y pasos peatonales, que estén apoyadas por los datos de la tabla o del gráfico.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, 3° y 4° medio

2. Ahora debes considerar la siguiente situación real: Un auto tiene un desperfecto en su tacómetro; por lo tanto, en vez de la verdadera velocidad v, indica una velocidad falsa v_f que considera un 10% menos que la verdadera.

a. Completa la siguiente tabla de valores

v	$10\ \frac{km}{h}$	$25\ \frac{km}{h}$	$40\ \frac{km}{h}$	$60\ \frac{km}{h}$	$90\ \frac{km}{h}$
v_f	$9\ \frac{km}{h}$				

b. Elabora la ecuación de la función que relaciona la velocidad falsa v_f con la verdadera velocidad v.
c. Evalúa la situación en relación con el peligro que presenta.
d. Argumenta tu respuesta anterior con la ecuación de la función compuesta que modela el recorrido de frenado falso.
e. Muestra con valores concretos lo que ocurriría en caso de tener que frenar y el tacómetro tiene un desperfecto. Elabora el gráfico para apoyar tus argumentos y generalizar todas las situaciones.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

f. Contrasta el gráfico de la función compuesta con la función original, y deduce a partir de qué momento la situación presenta un peligro.

MODELANDO LA COMPRA Y VENTA CON LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Un vendedor de una tienda de electrodomésticos anuncia un descuento de 10% en todas sus lavadoras. Además, por una promoción del fabricante, se ofrece una rebaja de $20 000 por la compra de una lavadora de una marca particular.

a. Encuentra una función f que modela el precio de una lavadora cualquiera de la tienda, considerando solo el descuento de la tienda con respecto al precio original.

b. Encuentra una función g que modele el precio de una lavadora de la marca del fabricante que ofreció el descuento de $20 000, sin considerar el descuento para toda la tienda.

c. Encuentra $g \circ f$ y $f \circ g$. Señala qué representa cada función según el contexto.

d. Si una familia desea comprar una lavadora de $\$150\ 000$, ¿cuál de los tratos le conviene más?

e. ¿Qué recomendaciones se puede hacer sobre los descuentos de la tienda?

f. Si fueras comerciante de la tienda y fabricante, ¿qué es lo que más te conviene? Argumenta tus respuestas basado en la composición de funciones.

CREACIÓN DE SITUACIONES PARA LA COMPUESTA

1. Consideren ahora dos funciones del mismo tipo que en el caso anterior y grafíquenlas.

$$f(x) = 2x \quad g(x) = x^2$$

   a. Hagan un listado de situaciones que se puedan asociar a $f(x)$.
   b. Hagan un listado de situaciones que se puedan asociar a $g(x)$.

2. ¿Cómo se visualiza gráficamente la composición de ambas funciones en un plano cartesiano?
   a. Determinen algebraicamente $g \circ f$ y $f \circ g$.
   b. Completen las dos tablas de valores y luego grafiquen ambas compuestas en el plano cartesiano.

Tabla 1: Tabla de valores para x, $f(x)$ y $g(f(x))$

x	$f(x)$	$g \circ f$
0		
0,2		
0,4		
0,6		
0,8		
1		

Tabla 2: Tabla de valores para x y $f \circ g$

x	$f \circ g$
0	
0,2	
0,4	
0,6	
0,8	
1	

c. Grafiquen las funciones y las compuestas en dos planos cartesianos.
d. Describan cómo varía el rol de x (valores en el eje X) en las tres gráficas.
e. ¿Cuál es la forma gráfica para componer dos funciones en un plano cartesiano?
f. Apoyándote en el listado de situaciones elaborado anteriormente, crea una situación que pueda interpretarse por medio de la compuesta $g \circ f(x)$. (Nota: Puedes imaginar situaciones ficticias, lo importante es que la compuesta tenga sentido en el contexto que ideaste).

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere que los estudiantes identifiquen la función $h(v) = 0{,}9\, v$ como la que indica la velocidad falsa, y la función $c(v) = 0{,}01 \cdot (0{,}9v)^2$ como la función compuesta; para esto, primero tienen que encontrar la función h y después, la compuesta. Se debe precisar que el proceso de "evaluar" una variable en otra función corresponde a la composición de dos funciones.

2. Conviene comparar los dos gráficos para resaltar el tema de la velocidad y los cuidados que se debe tener para andar en zonas peatonales, de escuelas y donde hay niños jugando. Se podría complementar esta actividad con señalizaciones y su ubicación en las calles.

3. Se recomienda introducir la notación de composición de funciones, $g \circ f$ como una expresión equivalente a $g(f(x))$. Pueden deducir esta última perfectamente durante la actividad, pues en ella se enfatiza que $g(f(x))$ significa que g ha sido evaluada en $f(x)$. El docente debe verificar que los jóvenes comprenden la notación, que no la confunden con un producto de funciones y, además, que respetan el orden en que se aplica.

4. Según el contexto del curso, se puede profundizar en términos de los conjuntos de llegada y de partida para la composición de funciones. Lo mismo se puede hacer respecto de la notación simbólica y en el trabajo con la compuesta de funciones conocidas. Cabe considerar la modelación para trabajar con otras funciones.

5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan la inversa o la composición de funciones con gráficos y lenguaje algebraico.
   - Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente.
   - Resuelven problemas, utilizando la inversa o la composición de funciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Material para practicar, con soluciones
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/WFunciones/Composicion_de_funciones.htm

- GeoGebra
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/KGWhcAqc

- Wiki GeoGebra, cómo agregar restricciones al dominio y recorrido de una función
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://wiki.GeoGebra.org/es/Comando_Funci%C3%B3n

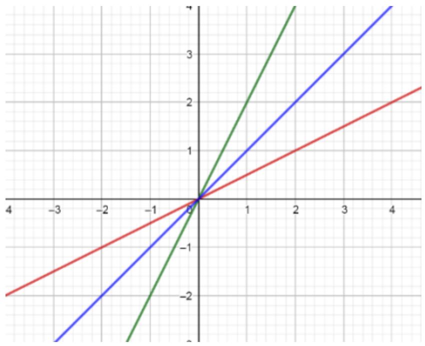
Actividad de evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada. **OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos. **OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	• Identifican situaciones de cambio, considerando condiciones de linealidad o cuadrática. • Modelan situaciones lineales o cuadráticas, restringiendo parámetros. • Representan la inversa o la composición de funciones, utilizando gráficos y lenguaje algebraico. • Comunican descripciones, operaciones y la composición de funciones, verbal, pictórica o simbólicamente. • Modelan situaciones por medio de la inversa o de la composición de funciones.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se recomienda usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1; pueden emplearse cada una por sí misma o en conjunto. Los estudiantes pueden trabajar la evaluación de forma personal o colaborativa. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible. Se propone una rúbrica para un proceso de modelación, pues permite al alumno ver sus progresos y ubicarse en algunos niveles de logro.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES Y FUNCIONES INVERSAS EN UN AMBIENTE CARTESIANO



1. Se consideran pares de funciones de una función f con su inversa f^{-1}.
   a. ¿Por qué las rectas verdes y rojas representan un par de función f e inversa f^{-1}, respectivamente?
   b. ¿Por qué la función g representada por la recta azul es inversa de sí misma?
   c. Verifica esta propiedad de la función g mediante un diagrama sagital.

2. Se considera la función f con $f(x) = \frac{1}{x}$.
   a. Elabora el gráfico de f en el primer cuadrante del sistema de coordenadas.
   b. ¿Qué simetría axial tiene el gráfico de f y qué se puede conjeturar acerca de su función inversa f^{-1}?
   c. Desarrolla la función inversa f^{-1} para verificar o rechazar la conjetura.
   d. Verifica algebraicamente qué funciones g con $g(x) = a \cdot x^{-1}$,$(a \neq 0)$ son inversas de sí misma.
3. Con base en los resultados de las actividades anteriores, determina la función afín h, que es inversa de sí misma, y verifica gráficamente el resultado mediante herramientas digitales.
4. Se considera la función k con $k(x) = \frac{-2}{x}$.
   a. Elabora el gráfico de k para $x > 0$ con herramientas tecnológicas
   b. ¿Es k inversa de sí misma? Argumenta gráfica o algebraicamente.

MODELANDO LOS COSTOS DE EMPAQUE

Una empresa que empaca libros de enciclopedia envía a los clientes, estima en $\$10\ 000$ los costos fijos de empaque para mantener su infraestructura. Se quiere modelar la situación de costos variables con una función afín decreciente para que, a partir de 10 ejemplares, el envío quede libre de aquellos costos fijos. En otra variante, se piensa en el modelo de la proporcionalidad inversa que considera, por ejemplo, costos de $\$2\ 000$ de empaque si se encarga 5 libros.

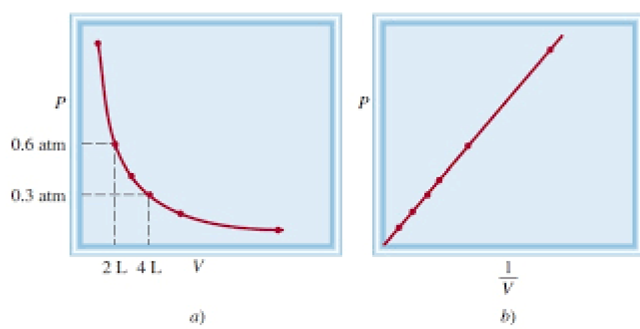
a. Elaboran el gráfico que representa la función *f* del primer modelo y la función *g* del segundo modelo. (Escala: eje X: 1 una unidad representa 1 libro, eje Y: 1 unidad representa $\$1\ 000$).
b. Determinan ambas funciones.
c. Explican el significado de la variable independiente y de la variable dependiente, para la función inversa de ambas funciones.
d. ¿Qué debilidades tienen ambos modelos, si se sobrepasa los 10 ejemplares?
e. ¿Qué debilidad tiene el modelo de la proporcionalidad inversa con respecto a los gastos fijos?

Para la tarea “Modelamiento de una situación del ámbito de la economía”, puedes guiarte por la siguiente rúbrica de evaluación:

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Determinan las variables del contexto para elaborar tablas, gráficos y funciones.	Describen las variables del contexto según los modelos presentados en el problema.	Describen variables asociadas a un modelo del problema.	Identifican información del problema y asocia letras con frases del problema.
	Elaboran tablas, gráficos y funciones de forma manual o utilizando tecnología.	Elaboran tablas, gráficos y funciones que están relacionados de alguna manera con el problema.	Ordenan la información del problema.
Modelan situaciones por medio de funciones, sus inversas y compuestas de funciones.	Determinan e interpretan la función inversa de cada modelo según las variables y el contexto.	Determinan la función inversa de cada modelo.	Determinan funciones inversas de otros modelos completamente diferentes a los presentados.

MODELANDO EL VOLUMEN Y LA PRESIÓN DE GASES

Un recipiente de gas tiene un pistón móvil. Si se disminuye el volumen del gas, se aumenta la presión del gas. Durante el proceso del cambio del volumen, se debe mantener la temperatura del gas (proceso isotérmico) para evitar accidentes.



a. ¿Qué función de presión y volumen representan los gráficos?

b. Elabora la función *p* que modela la presión en dependencia del volumen.

c. ¿Por qué el segundo gráfico modela el mismo fenómeno? ¿Qué debilidades presentan los modelos?

d. Determina la función inversa p^{-1} de la función *p* según el primer gráfico.

e. Elabora el gráfico de la función inversa p^{-1} y explica el cambio del significado de las variables.

TRABAJANDO ALGEBRAICAMENTE

1. Despejar las ecuaciones según la variable indicada en paréntesis.

   a. $2y - 3x = -1 \ (y)$

   b. $\frac{1}{4}x + 2y = \frac{1}{4} \ (x)$

2. La función f tiene la ecuación $f(x) = 2x + 5$. Determina la pendiente de la recta que representa la función f^{-1}.

3. En algunas ocasiones es posible confundirse con el símbolo de producto y el de composición, como en el caso de $(f \cdot g)(x)$ o $(f \circ g)(x)$.
   a. $I(x)$ se obtuvo como el producto de dos funciones. Prueba componiendo las mismas funciones y verifica si la resultante es igual a $I(x)$ o es distinta.
   b. Interpreta ambas composiciones de funciones y compárenlas con $I(x)$.

4. Encuentra $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$ y $(f \cdot g)(x)$, utilizando herramientas digitales si es posible y confirmando los resultados de forma algebraica.

   a. $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = x - 3$
   b. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
   c. $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = \frac{x}{2}$

5. Grafica las funciones $f(x) = 3x - 2$ y $g(x) = 4x + 1$.

   a. Marca un punto C en el eje X.

   b. Traza una recta vertical que pase por C y que corte a la gráfica de $f(x)$ y a la gráfica de $g(x)$.

   c. Copia sobre $g(x)$ el segmento formado entre C y la gráfica de $f(x)$, como se muestra en la figura.

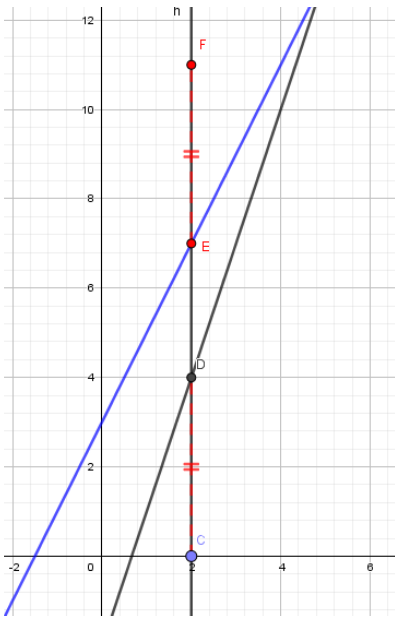
   d. Repite lo anterior, ubicando otros puntos sobre el eje X.

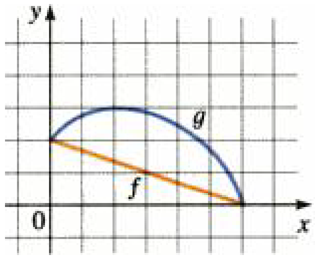
   e. Completa con la forma gráfica que une los puntos obtenidos.

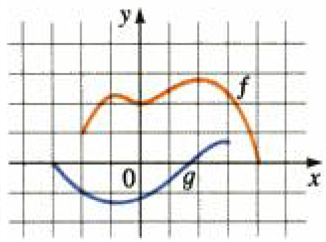
   f. Por otro lado, suma algebraicamente las funciones f y g; es decir, determina $(f+g)(x)$.

   g. Compara la función resultante con la forma gráfica obtenida.

   h. Prueba con otros ejemplos de funciones y generaliza para la adición de funciones.







i. Prueba con otras operaciones. ¿Son todas igualmente fáciles de obtener gráficamente?

6. Realiza las siguientes acciones: Se considera la función afín f con $f(x) = 2x - 1$.
   a. Determina la ecuación de la función inversa f^{-1}.
   b. En el mismo sistema cartesiano de coordenadas, dibuja el gráfico de f y f^{-1} junto con la bisectriz del primer y tercer cuadrante. ¿Qué propiedad existe entre los tres gráficos?
   c. Marca el dominio y recorrido en los ejes con diferentes colores.

7. Se considera la función cuadrática g con $g(x) = x^2$.
   a. Dibuja el gráfico de g.
   b. Determina la ecuación de la función inversa g^{-1}.
   c. En el mismo sistema cartesiano de coordenadas, dibuja el gráfico de g y g^{-1} junto con la bisectriz del primer cuadrante.

8. Aplicación del concepto inversa de una función a funciones conocidas.
   a. Determina la ecuación de la función inversa f^{-1} de la función exponencial f con $f(x) = 2^x$.
   b. En el mismo sistema cartesiano de coordenadas, dibuja el gráfico de f y f^{-1} junto con la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
   c. Determina la ecuación de la función inversa g^{-1} de la función logarítmica g con $g(x) = \log_{10} x$.

2. Sea f la función cuadrática $f(x) = x^2$.
   a. Determina la ecuación de la función compuesta “$f \circ f$”.
   b. Conjetura: ¿Qué función resulta si se compone una función f con su función inversa f^{-1}? Argumenta con la metáfora de “máquina”.
   c. Elige pares de funciones f y f^{-1}, compone y compara los resultados con la actividad anterior.

MODELANDO LA OFERTA Y DEMANDA

1. De acuerdo con su experiencia y la información que ha recabado a lo largo de los años, Alex ha determinado que las funciones de oferta y demanda de las cómodas que él produce y vende son las siguientes:

$$O(p) = 60\ 000p - 230\ 000$$
$$D(p) = -3\ 000p + 220\ 000$$

   a. ¿Que podría representar p en ambas funciones?
   b. ¿Qué información entregan la función oferta y la función demanda? ¿Qué representan las funciones $D(p)$ y $O(p)$?

2. Grafica ambas funciones en un plano cartesiano. Puedes usar alguna herramienta digital, graduando adecuadamente los ejes.

3. ¿Cómo se interpreta el punto de intersección de las rectas?

4. Encuentra el punto de intersección de las rectas de forma algebraica.
   a. ¿Qué relación se da entre ambas funciones para encontrar el punto de intersección de las rectas?
   b. Otra forma de resolverlo es restar ambas funciones. Opéralas de esta forma y compara con tu respuesta anterior.

5. Las funciones de oferta y demanda de cierto producto están dadas por:

$$Q(x) = -50 + 1{,}5p$$
$$D(x) = 600 - p$$

   a. Calcula el precio y la cantidad para tener equilibrio en el mercado.
   b. ¿A qué precio se producirá una escasez de 100 unidades?

6. Las funciones de oferta y demanda de un determinado producto son:

$$Q(x) = -200 + \frac{1}{4}p^2$$
$$D(x) = 520 - \frac{1}{5}p^2$$

   a. ¿Cuál es la cantidad para el equilibrio?
   b. Si el fabricante desea poner un precio de \$50 al producto, ¿qué cantidad de producto demandará el mercado?

MODELANDO EL PRECIO DE BIENES

1. Para conocer los costos por la producción de las cómodas, Alex estima algunos gastos y concluye que si el costo por una cómoda es $100 000, puede reducir el gasto por dos cómodas y costarían $198 000; tres cómodas tendrían un costo de $294 000, y así sucesivamente.
   a. Completen la tabla.

Tabla 1: Tabla de valores. Relación entre costos y unidades de cómodas.

Cantidad de cómodas x	1	2	3	4	5	10	20	50	60
Costo $C(x)$	100 000	198 000	294 000						

2. Trabajando en grupo con alguna herramienta digital (Excel), encuentren la curva que mejor aproxima la función entre x y $C(x)$.
   a. Distribúyanse las siguientes tareas:
   - Ingresar los datos anteriores en una tabla de dos columnas; la primera corresponde a la cantidad de cómodas y la segunda, a los costos.
   - Insertar un gráfico de dispersión.
   - Describir de manera general la forma de esta gráfica.
   - Agregar la línea de tendencia, usando la opción de tendencia "polinómica".

   b. ¿Qué función es la mejor aproximación a los datos presentados?

3. Interpreten esta función en el contexto del costo de producción de x unidades.
   a. Según el modelo, ¿a partir de qué cantidad de unidades de cómodas deja de aumentar el costo? ¿Qué sentido tiene?
   b. ¿Qué debería hacer Alex para resolver este problema?

4. Respecto del precio que debe cobrar, Alex estima que debe hacer un descuento a medida que aumentan las unidades solicitadas. Descuenta un 1% por cómoda, desde la compra de dos de ellas en adelante. No se hace descuento por comprar solo una.
   a. Completen la tabla.

Tabla 2: Tabla de valores. Relación entre precio y unidades de cómodas.

Cantidad de cómodas x	1	2	3	4	5	10	20	50	60
Precio $P(x)$	200 000	396 000	588 000			1 800 000			

5. En Excel, encuentren la curva que mejor aproxima la función entre $P(x)$.

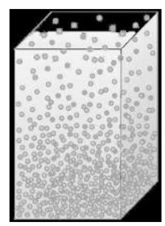
6. Interpreten esta función en el contexto del precio de venta de x unidades.
   a. ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?
   b. Según el modelo, ¿a partir de qué cantidad de cómodas deja de aumentar el precio de venta? ¿Qué sentido tiene?
   c. ¿Qué debería hacer Alex para resolver este problema?

7. ¿Cómo pueden determinar los ingresos de Alex solo por estas cómodas, según la cantidad de unidades producidas y vendidas?
   a. ¿Qué operación matemática pueden realizar entre $P(x)$ y x para obtener los ingresos?
   b. Muestren la operación y el modelo $I(x)$ obtenido en a.
   c. Grafiquen la función $I(x)$.
   d. Interpreten la función de acuerdo con el contexto.

8. ¿En qué valor de x Alex no gana ni pierde dinero entre la producción y la venta de cómodas?

9. ¿En qué valores de x Álex gana lo máximo posible?

MODELANDO LA PRESIÓN DEL AIRE



Subiendo por 1km sobre el nivel del mar, la presión del aire siempre decrece aproximadamente en un 10% en comparación con la anterior. Al nivel del mar, la presión del aire tiene un valor de aproximadamente $P_0 = 1\ 000\ hP$ (*hecto Pascal*).

a. Elaboren la ecuación de la función exponencial que representa la disminución de la presión del aire en intervalos de 1km de altura.
b. Determinen la presión del aire en la cima del “Ojos del Salado” (6 893m) y al nivel del Mar Muerto (-430m).
c. En la subida de una carretera a la montaña, el altímetro integrado en un auto de aventura muestra una presión de 714hP. ¿En qué altura se encuentra el auto?
d. Desarrollen la fórmula que modela la altura según la presión del aire.
e. Grafiquen ambas funciones en diferentes sistemas de coordenadas, utilizando alguna herramienta digital.
f. ¿Con qué base de la función exponencial es constante la presión del aire? Representen la validez de la conjetura sobre un gráfico.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Comparan funciones y sus funciones inversas, utilizando diferentes representaciones.			
Describen funciones y sus inversas, utilizando características de simetría o asimetría.			
Verifican la correspondencia entre funciones y sus inversas, utilizando gráficos y procedimientos algebraicos.			
Representan funciones y sus inversas de forma manual o con herramientas digitales.			
Modelan situaciones por medio de funciones, sus inversas y compuestas de funciones.			
Explican el significado de las variables dependientes e independientes de funciones y sus inversas.			
Varían parámetros para evaluar la pertinencia de modelos basados en una función y su inversa.			
Determinan de forma algebraica la adición, sustracción y multiplicación de funciones.			
Determinan de forma algebraica la inversa y la compuesta de funciones.			
Resuelven un problema, utilizando la intersección de rectas y de curvas.			
Determinan dominio y recorrido de funciones y dan sentido a las restricciones según un contexto.			
Evalúan modelos basados en funciones para tomar decisiones.			

Unidad 2

Unidad 2: Reconocer un patrón infinito y la noción de límite

Propósito de la unidad

Los estudiantes utilizan sus conocimientos de regularidades y patrones en esta unidad, para acercarse de manera intuitiva a la noción de límite. Trabajan con sucesiones naturales para generalizar al caso real e incluir en su vocabulario los términos de continuidad, convergencia y divergencia. Asimismo, trabajan el límite desde contextos geométricos, ordenamientos y situaciones concretas que han sido modificadas para generar las nociones básicas de este concepto. Las preguntas que pueden ayudar a orientar a la unidad son: ¿Cómo se describe las situaciones que tienen un límite? ¿Cómo describir la noción de límite desde lo intuitivo a lo matemático?

Objetivos de Aprendizaje

OA 2.
Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actividad 1: Representando el límite de sucesiones en contextos geométricos

PROPÓSITO

Los estudiantes estiman el límite de una sucesión de forma intuitiva y visual. Se comienza con patrones geométricos sencillos y la noción del último elemento de un patrón infinito. Se espera que, al hacer conjeturas sobre el límite, reconozcan que un error es una posibilidad que se puede discutir y sirve a todos para aprender. Además, podrán resolver los problemas utilizando las herramientas digitales o de conocimientos que estén a disposición.

Objetivos de Aprendizaje

OA2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

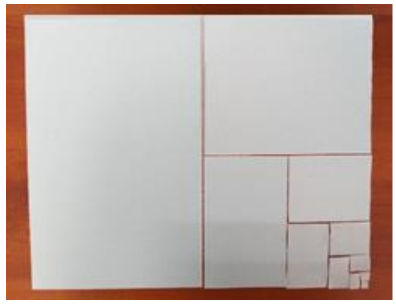
- Pensar con autorreflexión y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

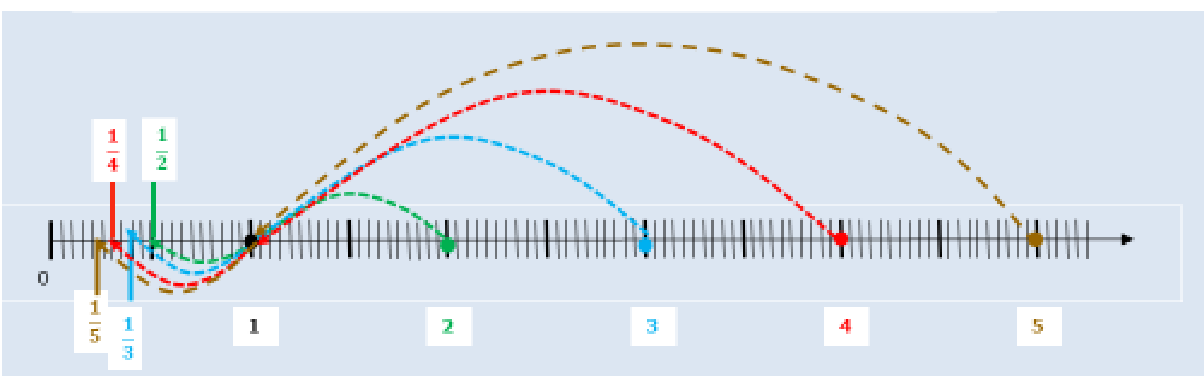
COMPRENDIENDO LOS PATRONES INFINITOS

1. En la imagen se ve las partes ordenadas de una hoja entera de papel, recortadas según un patrón.



   a. ¿Cómo podrías describir el patrón de la imagen? Explica a tu compañero la necesidad de utilizar las fracciones en esta descripción.
   b. Elabora una expresión algebraica que represente el enésimo elemento de la sucesión. (Nota: la hoja inicial más grande que se ve puede ser el primer paso $n = 1$).
   c. Si este patrón continúa eternamente, ¿puedes encontrar el "último elemento" de la sucesión elaborada?, ¿cuál podría ser?
   d. Comparte tu conjetura con tu compañero e intenten encontrar juntos el "último elemento" de la sucesión.
   e. ¿A qué valor se acercarán los elementos de la sucesión, sin alcanzarlo?
   f. ¿Qué relación puedes ver entre "sin alcanzar", el "infinito" y los números naturales?
   g. Grafica puntualmente cada paso de la sucesión.
   h. ¿Se pueden ordenar los elementos de la sucesión de menor a mayor? Explica tu conjetura a tu compañero.
   i. ¿Qué ocurre con el "último elemento" en este caso?

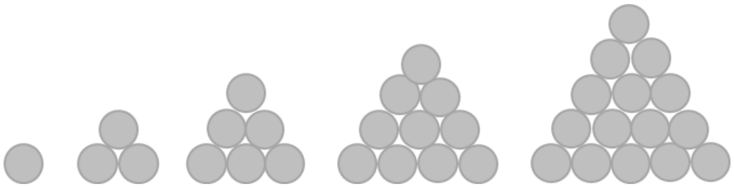
2. La recta numérica muestra una transformación de números naturales a fracciones.



   a. ¿En qué intervalo de la recta están todas las transformaciones?
   b. Elabora algebraicamente el término general (funcional de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$), que modela esta transformación.

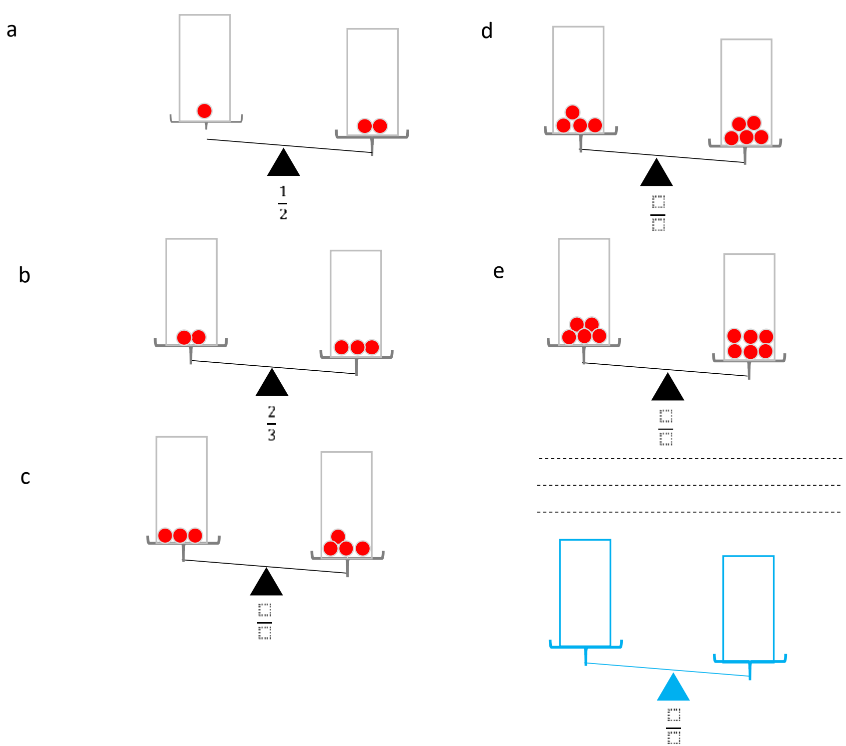
c. ¿A qué número se acercan los elementos de la sucesión?
d. Considerando que un elemento de la sucesión alcanza el valor mínimo, ¿qué número sería su imagen previa en la recta numérica?, ¿es esto posible? Explica a tu compañero lo que ocurre en este caso.

3. La imagen muestra cinco “pilas” de círculos, cuya cantidad sigue un patrón numérico.



a. ¿Cuál podría ser la cantidad de los círculos en la próxima pila?
b. Determina la cantidad de círculos en la pila n-ésima.
c. ¿Cuál es la cantidad de círculos cuando n tiende al infinito?
d. Grafica los valores discretos, observa qué pasa en el gráfico y úsalo para explicar “el último valor”.

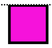
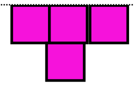
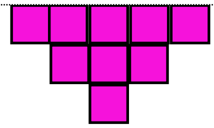
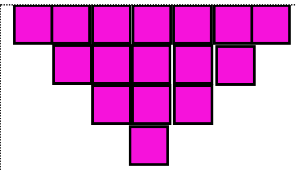
4. La imagen muestra una balanza en cuyos platos hay bolitas que tienen la misma masa. Se pone la cantidad de bolitas en los platos siguiendo un patrón. Las fracciones escritas debajo las balanzas representan la razón entre la cantidad de las bolitas en el plato izquierdo y la cantidad de las bolitas en el plato derecho.



a. Describe verbalmente a tu compañero un patrón según el cual se irían llenando ambos platos de la balanza.
b. Escribe un patrón según el cual se forman las fracciones que representan la razón entre la cantidad de las bolitas del plato izquierdo y del plato derecho.
c. ¿Cuál podría ser el término n-ésimo? Escribe la fracción de la balanza en enésima posición dibujada en azul.
d. ¿Cuál es el valor al que tienden a llegar todos los elementos de la sucesión de las fracciones?
e. ¿Qué valor no pueden superar los elementos de la sucesión?
f. Siguiendo infinitamente el mismo procedimiento de llenar las balanzas, ¿alcanzarán el equilibrio en algún momento? Explica a tu compañero lo que piensas.
g. Manteniendo la misma cantidad de bolitas e invirtiendo los platos del lado izquierdo con el derecho, ¿cuál es la diferencia con la sucesión anterior?
h. Elabora el término general de la nueva sucesión.
i. ¿A qué número tienden los elementos de esta sucesión?
j. ¿Se pondrá en algún momento la balanza en equilibrio? Explica tu respuesta a un compañero.
k. Grafica las dos situaciones en un mismo plano cartesiano y explica utilizando el gráfico.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 2 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos de cursos anteriores. Algunos de los ejercicios pueden ser:
   - Encuentra el patrón del siguiente arreglo de figuras geométricas y completa la tabla.

Figura					
Cantidad de cuadrados	1				
Descripción verbal de las figuras: Fórmula:					

   - Grafica la siguiente función de números naturales $f(n) = 2n + 1$ y encuentra un arreglo geométrico que defina el mismo patrón.
   - ¿Cuáles son las características de un patrón? ¿Cuáles son sus diferencias o similitudes con una función?
2. Se recomienda considerar las nociones básicas del límite como: i) la aproximación de los valores de la sucesión hacia un valor fijo; ii) a partir de un cierto valor de la sucesión y para cada entorno cada vez más pequeño alrededor del límite, todos los términos de la sucesión se encuentran dentro del entorno. Se debe especificar nuevamente estas nociones en el caso de las funciones para denotar el caso del límite de la función en un punto.

3. Para comenzar con la noción de límite, conviene considerar solo las sucesiones y graficarlas en un plano de coordenadas para visualizar el comportamiento que tienen. En estos casos, cabe hablar de la noción de tendencia de la sucesión, para luego poder hablar de la tendencia de una función.

4. Si fuera pertinente y necesario, se podría trabajar la sucesión presentada en 2 al final de esta actividad, o para retomar como introducción a las funciones en la actividad 4. Esta sucesión tiene término general $\frac{1}{n}$ y puede retomarse para presentar el paso desde los números naturales a los números reales con la función real $f(x) = \frac{1}{x}$. Se puede trabajar comenzando con los números decimales mayores a 1 y ver lo que ocurre en el gráfico.

5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Representan gráficamente para visualizar el comportamiento de la sucesión, serie o función.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Video introductorio a la noción de límite
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limit-basics-dc/limits-introduction-dc/v/introduction-to-limits-hd

- Estimación de valores de límites a partir de gráficas
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limit-basics-dc/limits-introduction-dc/e/two-sided-limits-from-graphs

- Límite que tiende a infinito
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/eXtSCdQn

Actividad 2: Comprendiendo la paradoja de Zenón

PROPÓSITO

Los estudiantes argumentan sobre las posibilidades de acercarse al límite de una serie. La pregunta que orienta la actividad es si será posible que Aquiles alcance a la tortuga. Para contestar y extender una situación infinitamente en el tiempo, elaboran tablas y modelan la situación a fin de conjeturar y dar respuestas. Se espera que piensen con perseverancia y que identifiquen proactivamente aquellos conceptos sobre el límite que les permiten responder a la situación planteada.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

AQUILES Y LA TORTUGA

1. Lee con tu compañero el siguiente párrafo: La paradoja del filósofo griego Zenón de Elea (490-430 a. Cr.) cuenta “la carrera de Aquiles con la tortuga”, en la cual se conjetura acerca de la posibilidad de dividir una distancia física real del espacio en infinitas partes, y de la posibilidad de dividir un lapso real de tiempo en infinitas partes.

Conexión interdisciplinaria: **Filosofía.** OA a, 3° y 4° medio.

   a. ¿Qué es una paradoja? Busca definiciones en el internet con tu compañero y contrasten esta definición con ejemplos de paradojas.
   b. Construyan paradojas propias en contextos diversos, como la vida, el tiempo, la filosofía, la matemática, las ciencias u otras áreas.
   c. Investiguen sobre otras paradojas famosas de la historia.

2. Investiguen en internet y redacten un resumen de 200 palabras como máximo, para compartir en clases sobre:
   a. La biografía de Zenón de Elea.
   b. La noción del “infinito” en la historia de la humanidad (cultura, religión, arte, ciencias naturales u otras áreas de interés).
   c. El término “infinito” en la historia de la matemática.

3. Basados en los resúmenes, discutan los siguientes puntos:
   a. Las consecuencias que tendría para el flujo de tiempo, una serie de intervalos de tiempo que sucesivamente se acercan a 0.
   b. La contradicción en la paradoja de Zenón.
   c. Situaciones paradójicas matemáticas en las cuales se incluye el infinito.

COMPRENDER LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA

1. Se considera las siguientes condiciones de la carrera:

– La tortuga parte con 100m de adelanto.
– La tortuga y Aquiles parten de sus posiciones en el mismo instante.
– Si Aquiles llega al punto de partida de la tortuga, ella ya avanzó $\frac{1}{10}$ del recorrido de Aquiles.

Por ejemplo: si Aquiles avanza por 10m, la tortuga ya avanzó otra vez $\frac{1}{10}$ del último recorrido de Aquiles.
– Este proceso se repite iterada e infinitamente.

a. Reconociendo las condiciones anteriores de la carrera, conjetura si Aquiles puede alcanzar a la tortuga o no. Si estimas que no puede alcanzarla, explícalo a tu compañero.

b. Utilizando herramientas digitales de cálculo, completa la siguiente tabla, que muestra las distancias entre la tortuga y Aquiles al final del intervalo de tiempo que queda por recorrer en el próximo avance de la carrera. Conjetura acerca del límite de la sucesión de los anchos de los intervalos de tiempo.

Intervalo de tiempo en s	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$
Distancia entre ellos al final del intervalo de tiempo en m	10						

c. Utilizando herramientas digitales de cálculo, completa la siguiente tabla, que muestra las posiciones absolutas de la tortuga y de Aquiles al final del intervalo de tiempo que queda por recorrer en el próximo avance de la carrera, y en referencia al punto de partida de Aquiles.

Intervalo de tiempo en s	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$
Posición de la tortuga al final del intervalo de tiempo en m	110						
Posición de Aquiles al final del intervalo de tiempo en m	100						

d. Conjetura acerca de la siguiente estrategia: "El tiempo puede avanzar en unidades que se disminuyen en un porcentaje de la unidad anterior, paso por paso, y así no puede sobrepasar un cierto lapso".

e. Estima las siguientes magnitudes, bajo el supuesto de que el proceso de acercamiento se repite iteradamente:
   - Tiempo total
   - Recorrido total de la tortuga
   - Recorrido total de Aquiles
   - Distancia entre la tortuga y Aquiles

f. ¿Cómo se escribe el tiempo total de la corrida en forma decimal?

g. ¿Cómo se representa el tiempo de la corrida en forma de una fracción?

2. Traspaso de la situación de intervalos discretos de tiempo al modelo continuo del tiempo.

   a. Con las condiciones de la carrera, determina cada elemento de las funciones del desplazamiento:

      Tortuga *T:* $X_T(t) = v_T \cdot t + X_0$

      Aquiles *A*: $X_A = v_A \cdot t$

      v_T: velocidad de la tortuga

      $v_{A:}$ velocidad de Aquiles

   b. Elabora los gráficos esquemáticos del desplazamiento de la actividad anterior. (Eje horizontal *t*, eje vertical desplazamiento *X(t)*, X_0 adelanto de la tortuga, τ tiempo en el momento del alcance).

   c. Determina gráficamente el tiempo que pasa hasta que Aquiles alcance a la tortuga.

   d. Determina gráficamente el recorrido de Aquiles y de la tortuga cuando Aquiles alcanza a la tortuga.

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, 3° y 4° medio.

LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA

Consideren la siguiente tabla de sucesión de los intervalos de tiempo que pasan desde la partida.

Número n del intervalo de tiempo	1	2	3	4	4	5	6
Intervalo de tiempo en s	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{10\,000}$	$\frac{1}{100\,000}$

a. Desarrollen la expresión algebraica de los intervalos de tiempos con potencias de base "10": $t_n = 10^n$

b. Calculen la suma de los primeros 8 tiempos de la actividad anterior y represéntenla como número decimal.

c. Suponiendo que haya infinitos intervalos de tiempo construidos mediante la expresión de la actividad b, y recordando la transformación de números decimales periódicos, ¿con que fracción se puede expresar el número decimal que representa la suma de los tiempos t_n?

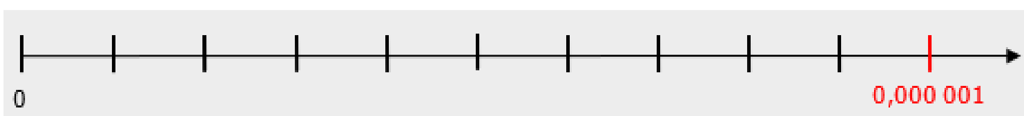
d. Representando la suma de los intervalos de tiempos como serie, ¿por qué es una serie geométrica?

e. Expresen la serie 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + … como serie geométrica con los términos t_1 y q.

f. Determinen el límite de la serie.

g. En un sistema de coordenadas, elaboren un gráfico que representa discretamente el recorrido de Aquiles según el tiempo, basándose en los tiempos: 10s; 11s; 11,1s; 11,11s;… Expliquen el tipo del gráfico que resulta.

h. Se considera la sucesión (a_n) con $a_n = \frac{1}{n}$ y una "carrera" en la recta numérica, haciendo "saltos" de un término de la sucesión hasta el próximo término. Suponiendo que haya avanzado con un millón de saltos hasta el término $a_{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$, ¿se puede decir que "ahora faltan menos saltos hasta el límite 0 que al inicio de la carrera"? Argumenten y comuniquen la respuesta a un compañero.



ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se recomienda iniciar la actividad individual con el cuento de la corrida entre Aquiles y la tortuga, y motivar a los estudiantes a que argumenten matemática y prácticamente si es o no posible que Aquiles alcance a la tortuga.

2. En la estimación intuitiva del límite, se les puede recordar cómo convertir las fracciones en números decimales periódicos y viceversa, para trabajar con números que les sean más familiares. También se puede transformar, paso a paso, una adición de fracciones decimales en números decimales periódicos y viceversa, como:

$$S_6 = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} \ldots, S_6 = 10 + 1 + 0{,}1 + \cdots$$

3. Para resolver el problema mediante gráficos de funciones lineales afines, los alumnos deben saber que, en el modelo de Zenón, se considera posiciones relativas entre Aquiles y la tortuga, mientras en este modelo se contempla el desplazamiento absoluto de Aquiles y de la tortuga en dependencia del tiempo corriente.

4. Se sugiere elaborar la expresión con números de una serie geométrica infinita, luego escribir su expresión algebraica y de ahí determinar su límite para $n \to \infty$.
5. Con base en este límite, los alumnos determinan los límites de los recorridos de Aquiles y de la tortuga. En el gráfico, los puntos se enfilan en una línea recta cuya "pendiente" es el factor 10, que es el inverso multiplicativo del factor q de la serie geométrica.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Resuelven problemas de límites de sucesiones, series o funciones.
   - Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones o series.
   - Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- El problema de Aquiles y la tortuga

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://demostracionpy.wordpress.com/2015/02/14/aquiles-y-la-tortuga/

- Matemática e historia

  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematicasmundo.ftp.catedu.es/HISTORIA/historia_Zenon.htm

  La paradoja de Aquiles

- https://www.curriculumnacional.cl/link/http://cienciacomonunca.blogspot.com/2014/08/resolviendo-la-paradoja-de-aquiles-y-la.html

Actividad 3: Argumentando con la noción de límites en diferentes contextos

PROPÓSITO

Los estudiantes piensan con perseverancia para desarrollar el concepto de límite de sucesiones y series numéricas. Elaboran proactivamente representaciones de ellas en la recta numérica y el sistema de coordenadas para proyectar y conjeturar hacia el infinito. Además, se espera que expliquen pictóricamente lo que significa el límite; que transfieran la representación pictórica al nivel simbólico, que planteen una conjetura acerca de un posible límite y la confirmen o rechacen con el cálculo de límite.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

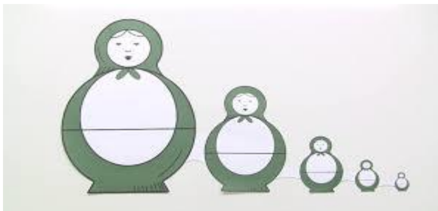
- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

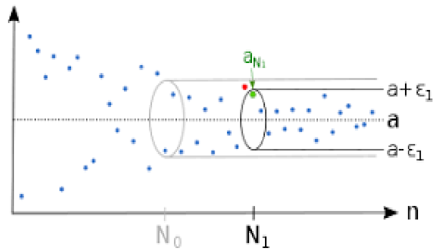
Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

COMPRENDIENDO EL CONCEPTO DE LÍMITE

1. Observa y describe las dos imágenes a tu compañero.



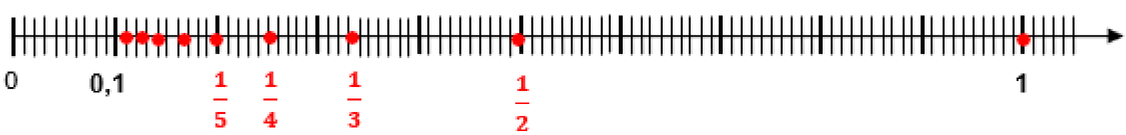


a. ¿Qué piensas que quieren decir estas imágenes?
b. ¿Cómo las puedes relacionar con la palabra “límite”?
c. ¿Cómo se vinculan con “sucesión” o “serie”?
d. Lee con tu compañero el siguiente párrafo: “Para cada intervalo épsilon alrededor del límite, tan pequeño que sea, siempre quedan finitos elementos fuera de ello y todos los demás infinitos elementos de la sucesión están adentro del intervalo épsilon”. ¿Qué imagen corresponde mejor al párrafo? Explica cada elemento a tu compañero.

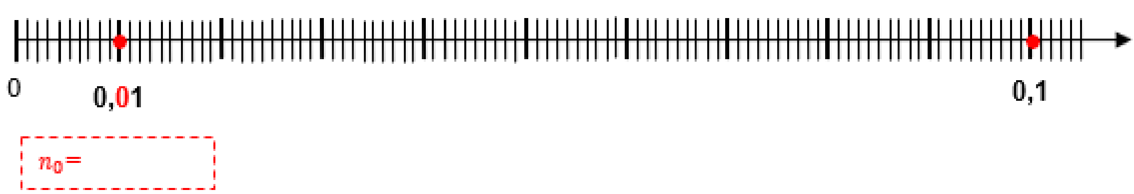
¿QUÉ ENTENDEMOS POR CONVERGENCIA?

1. La imagen muestra números de una sucesión marcados con puntos rojos en el segmento de la recta numérica entre 0 y 1.

a. Los números se acercan al número 0,1, disminuyendo la diferencia entre dos términos seguidos. ¿Por qué el número 0,1 no puede ser el límite de la sucesión? Encuentra la expresión general de la sucesión.

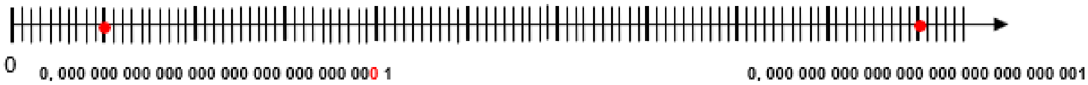


b. Se considera el segmento entre 0,1 y 0. ¿Cuál es la posición n_0 de la sucesión que corresponde al punto rojo más avanzado hacia la izquierda?



c. A continuación, se representa más aumentos de la recta numérica. Determina la posición n_0 de la sucesión que corresponde al punto rojo más avanzado hacia la izquierda.

$n_0=$



$n_0=$

d. Si se sigue observando los números $\frac{1}{n}$ con una "lupa imaginaria" con más y más aumentos, llegando a más posiciones n_o, contesta las siguientes preguntas y explica las respuestas de forma verbal.

i. ¿Qué propiedad tiene el conjunto de números $a_n = \{\frac{1}{n} \mid n \leq n_0\}$?

ii. ¿Qué propiedad tiene el conjunto de números $a_n = \{\frac{1}{n} \mid n \geq n_0\}$?

iii. Los números representados por $a_n = \frac{1}{n}$, ¿pueden disminuir a números negativos?

iv. ¿Por qué el número 0 es límite de la sucesión?

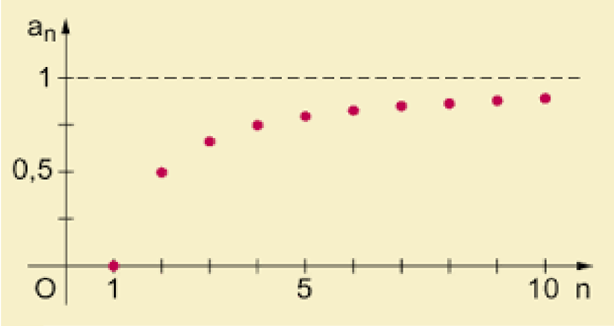
v. Llegando los puntos a cada posición n_0 nueva y desplazando hacia "0", ¿quedan menos números a recorrer?

e. Se considera un "intervalo ε" alrededor del límite 0 "$[0-\varepsilon, 0+\varepsilon]$" y se elige un valor de $\varepsilon = 0{,}0000000005$. ¿A partir de qué número n_0 todos los términos a_n están dentro de $[0-\varepsilon, 0+\varepsilon]$?

f. Verifica que, para cada ε > 0 y muy cercano a 0, ocurre la misma situación: a partir de un cierto n_0 todos los términos a_n están en el intervalo $[0-\varepsilon, 0+\varepsilon]$.

g. Verifica que para un "límite falso", por ejemplo "$\frac{1}{100}$", no ocurra la situación.

2. La imagen muestra un gráfico de puntos que representa una sucesión (b_n).



   a. Determina el término general b_n.

   b. Conjetura acerca del límite de la sucesión.

   c. Determina algebraicamente $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

3. Determina algebraicamente el límite de la sucesión (a_n) con $a_n = \frac{2-3n^2}{(2n+1)^2}$.

4. Elaboración de sucesiones a partir de un límite dado.

   a. Elabora el término general de una sucesión con expresión fraccionara (c_n) que tiene el límite $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{3}{2}$

   b. Elabora un término general de una sucesión con expresión fraccionara (d_n) que no tenga límite.

¿CÓMO CALCULAR $\sqrt{2}$?

1. El gráfico de más adelante muestra una sucesión de cinco fichas rectangulares de 12 cm^2 de área cada uno. Las fichas tienen un vértice común y están apiladas en una mesa, de tal manera que la ficha con el mayor largo esté más abajo.

   a. A partir de dicho gráfico, elabora con tus compañeros de grupo una tabla que muestre los valores posibles de los lados de los rectángulos.

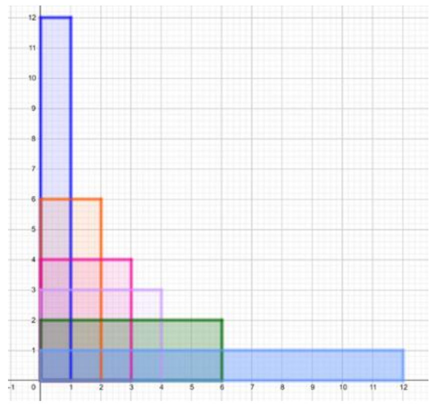
   b. Dibujen un gráfico de puntos de los vértices superiores derechos de cada rectángulo.

   c. Determinen la ecuación de la sucesión que representa la altura a_n de los rectángulos.

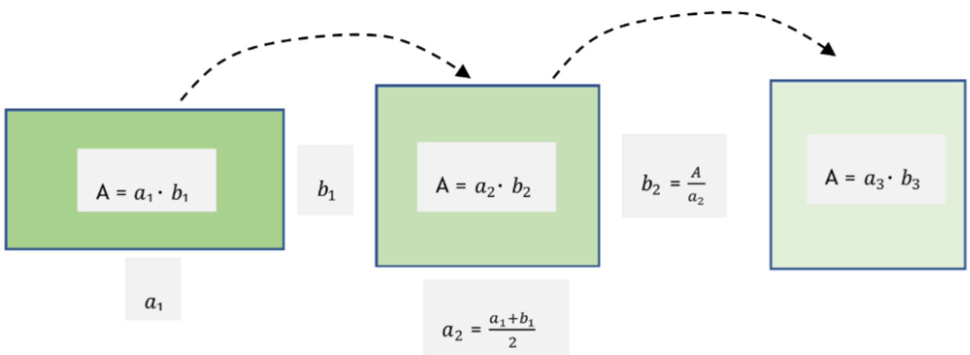
   d. Determinen el límite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   e. Tomando en cuenta el área de cada rectángulo, ¿qué número puede resultar para la expresión "$\infty \cdot 0$"?

f. Conjeturen acerca de la pregunta: ¿Hay más números que podrían resultar de la expresión $A = r^2$? Verifiquen la conjetura con ejemplos.



2. El siguiente esquema muestra el proceso de elaborar una sucesión infinita con la cual se puede determinar la raíz cuadrada irracional de un número racional "A", cuya representación pictórica es transformar un rectángulo en un cuadrado. El matemático y filósofo Herón de Alejandría (10 d.C. – 70 d.C.) creó este método para calcular aproximadamente raíces cuadradas.



Así se explica el esquema: "Se transforma la ecuación cuadrática $x^2 = 2$, que tiene $\sqrt{2}$ como una de las soluciones en la ecuación $x = \frac{2}{x}$. Empezando con valor inicial x_1, se determina la cota inferior y la cota superior de los intervalos en los cuales siempre se encuentra $\sqrt{2}$; estas cotas determinan nuestro primer intervalo. Con la ecuación recursiva $x_{n+1} = \frac{x_n + \acute{x}_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ se elabora nuevos intervalos, denominados encaje de intervalos, ya que se van poniendo uno dentro del otro y tienen como centro $\sqrt{2}$".

a. Explica a tu compañero lo que entendiste de esta explicación. Elaboren juntos un ejemplo.

b. ¿Cuál es la premisa para que la ecuación $x^2 = 2$ se pueda transformar en la ecuación $x = \frac{2}{x}$ y por qué se cumple?

c. Ahora consideren el valor inicial $x_1 = 2$ (superior a $\sqrt{2}$ y primera cota superior del intervalo) y sigan con la ecuación: $x = \frac{2}{x'}$, resultando el término $x_1{}' = \frac{2}{2} = 1$ (inferior a $\sqrt{2}$ y primera cota inferior del intervalo). Determinen los primeros 6 intervalos del encaje de intervalos mediante la ecuación recursiva $x_{n+1} = \frac{x_n + x_n'}{2}$. Completen la tabla, calculando fracciones en vez de números decimales y utilizando una calculadora.

N	Cota inferior/superior x_n	Cota superior/inferior $x_n{}' = \frac{2}{x_n}$	Promedio entre x_n y x_n' $x_{n+1} = \frac{x_n + x_n'}{2}$
1	$x_1 = 2$	$x_1{}' = \frac{2}{2} = 1$	$x_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$
2	$x_2 = \frac{3}{2}$	$x_2{}' = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$	$x_3 = \frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2} = \frac{21}{12}$
3			
4			
5			

d. Comparen el valor aproximado con el valor aproximado que expresa la calculadora.

e. ¿Con qué valor inicial x_1, los siguientes pasos de aproximación a $\sqrt{2}$ son iguales a comenzar con $x_1 = 2$? Argumenten y comuniquen la respuesta, mostrando un ejemplo a su compañero.

f. ¿Se puede aplicar el procedimiento de Herón para todos los números reales? Prueben de forma sistemática, comuniquen la respuesta a dos compañeros, al menos, y argumenten en 3 frases como máximo.

¿CUÁNDO NO EXISTE EL LÍMITE DE UNA SUCESIÓN?

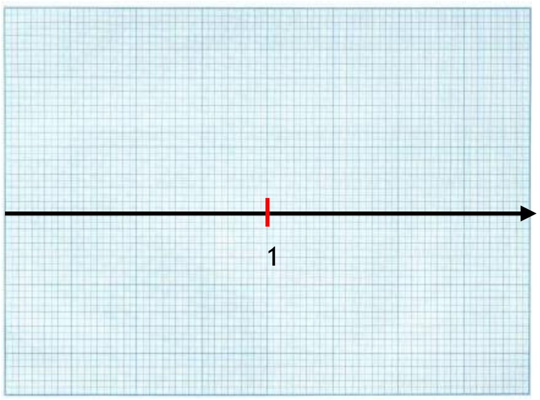
1. Determina algebraicamente el límite de las sucesiones o argumenta la inexistencia de las siguientes sucesiones.

   a. (a_n) con $a_n = \frac{(2n+1)^2}{1-3n^2}$.

   b. (b_n) con $b_n = \frac{(3n-1)^2}{3n-1}$.

2. Se considera la sucesión (c_n) con $c_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$.

   a. Marca los primeros 8 elementos en la recta numérica.



   b. Conjetura acerca de la existencia del límite de (c_n)

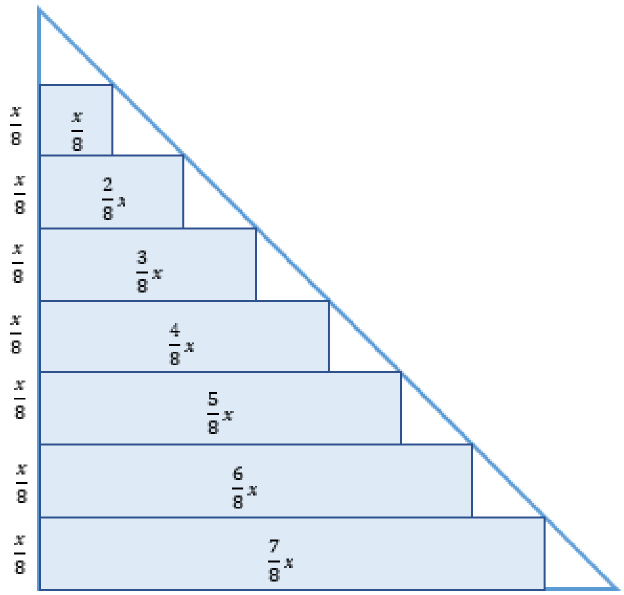
   c. Verifica la conjetura, determinando $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$ y considerando números pares e impares.

   d. Si la ecuación de la sucesión se cambia a $d_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n}$, ¿qué efecto tiene el cambio? Argumenta la respuesta.

Se sugiere abordar la siguiente actividad en forma grupal.

CALCULANDO ÁREAS MEDIANTE LA NOCIÓN DE LÍMITES

1. La imagen muestra un triángulo rectángulo isósceles de catetos x (el grande). Expliquen qué entienden de la imagen. Redacten una pregunta y describan cómo la noción de límite les podría ayudar a responderla.



Respondan dentro del grupo lo siguiente:

a. ¿Cuál es la expresión algebraica del área de este triángulo?
b. La imagen muestra una aproximación inferior mediante rectángulos del ancho $\frac{x}{8}$. Determinen la suma de todos los rectángulos y comparen con la expresión del área del triángulo.
c. ¿Qué porcentaje del área total se ha alcanzado con esta aproximación inferior de la subdivisión de la altura en $\frac{x}{8}$?
d. Con herramientas tecnológicas digitales, determinen aproximaciones hasta alcanzar el 90% del área total.
e. ¿Qué aproximación será una subdivisión en $\frac{x}{10}$?
f. Desarrollen una expresión algebraica para una aproximación inferior del triángulo en rectángulos del ancho $\frac{x}{n}$. (Notar que $A_n = \frac{x^2}{n^2} + 2 \cdot \frac{x^2}{n^2} + 3 \cdot \frac{x^2}{n^2}$ + ... + (n-1) $\cdot \frac{x^2}{n^2}$).
g. Factoricen la expresión A_n lo más posible.
h. Considerando la fórmula de la suma de los primeros n números naturales $\sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, desarrollen la expresión algebraica de los primeros $(n-1)$ números naturales.
i. Determinen el límite $\lim_{n-\infty} A_n$ y comparen con la expresión algebraica del triángulo elaborada en a.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Una forma diferente de acercarse a esta actividad es iniciarla con una “carrera de puntos” hacia el “infinito”, llegando a los “hitos” como “0,1”, “0,01”, “0,000 000 000 01”, “0,000 000 000 000 000 000 001” y “0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 1”. Para obtener una imaginación intuitiva de que es imposible acercarse verdaderamente con los términos al límite, los estudiantes deben calcular la cantidad de términos que quedan atrás del “hito” alcanzado, y conjeturar acerca de las posiciones de la sucesión que “faltan” para el límite.
2. Para entender el “intervalo ε” alrededor de un límite, es importante que comprendan que una inecuación de la forma “$n \leq n_0$” tiene finitas soluciones y para “$n > n_0$”, todos los números naturales mayores que n_0 forman el conjunto solución. Hay que motivar a los estudiantes a explicar la noción de límite en lenguaje natural: que para cada intervalo épsilon alrededor del límite, tan pequeño como sea, siempre quedan finitos elementos fuera de ello y todos los demás infinitos elementos de la sucesión están adentro del intervalo épsilon.
3. Se sugiere darles constantemente la posibilidad de conjeturar y averiguar sobre convenciones para el significado de las expresiones que involucran el infinito como “$\infty \cdot 0$”, las cuales son indeterminadas y no representan un término algebraico. La representación gráfica hace entendible, mediante la proporcionalidad inversa, que hay posibilidades indeterminadas de representar “$\infty \cdot 0$” como número.
4. Cabe notar que en esta actividad se muestra una sucesión cuyo límite es el número real de $\sqrt{2}$, la cual incluye una sucesión infinita de intervalos encajonados cuyo número interior es $\sqrt{2}$. Se sugiere invitar a los jóvenes a averiguar sobre este método y que prueben hacer cálculos que superen el uso de la calculadora.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Resuelven problemas de límites de sucesiones, series o funciones.
   - Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Algoritmo de Herón de Alejandría para calcular la raíz cuadrada de un número
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://actividadesinfor.webcindario.com/algoritmo1.htm

- Biografía de Herón de Alejandría, su fórmula y método
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.matesfacil.com/matematicos/Heron/Heron-de-Alejandria-formula-area-triangulo-metodo-aproximar-raiz-cuadrada-demostracion.html

- Propuesta para calcular la raíz cuadrada, usando el método de cuadrar rectángulos
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://docplayer.es/21463319-Propuesta-para-el-calculo-de-la-raiz-cuadrada.html

Actividad 4: Argumentado la existencia de límites de funciones reales

PROPÓSITO

Los estudiantes se aproximan a las nociones de lo infinitesimal y lo infinitamente grande. Ambos infinitos se pueden hallar en los números reales, que son la base de las actividades que se propone. Piensan con perseverancia para entender cómo se comportan las imágenes de una función cuando los elementos del dominio se aproximan infinitesimalmente a un número escogido. Trabajan proactivamente elaborando tablas, gráficos y cálculos para describir cómo los elementos del dominio tienden al infinito positivo o negativo, y cómo esta aproximación los lleva a los términos de convergencia o divergencia de la función.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

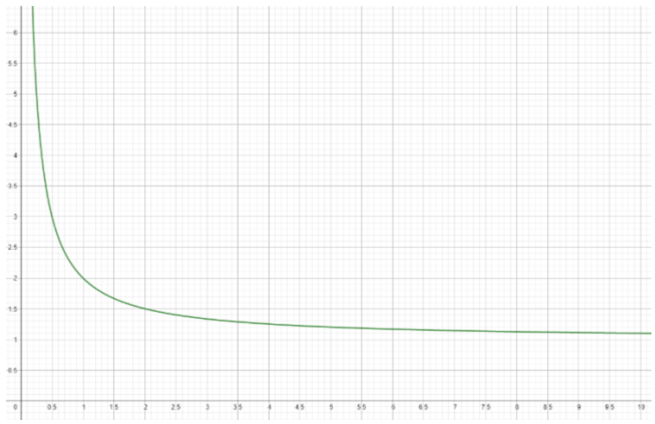
- Pensar con autorreflexión y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿CUÁNDO EXISTE EL LÍMITE DE FUNCIONES?

1. La imagen muestra el gráfico parcial de una función real f con $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, que es la suma de una función constante k con $k(x) = 1$ y la función g con $g(x) = \frac{1}{x}$.



   a. Avanzando en el eje X, es decir, cuando $x \to \infty$, ¿a qué número tienden los valores $f(x)$? Explica tu respuesta desde el gráfico.

   b. La función f es la suma de las funciones k y g. Si se considera el avance $x \to \infty$, ¿a qué valor tienden $k(x)$ y $g(x)$? Explica la respuesta utilizando el gráfico.

   c. ¿Cuál es la ecuación de la recta al cual se acerca infinitamente el gráfico de f? Grafica esta recta en el mismo plano cartesiano donde se encuentra f.

   d. ¿Observas alguna similitud entre esta gráfica y la realizada en la actividad anterior?

   e. Considerando un acercamiento $x \to 0$, ¿existe un número al cual tienden los valores $f(x)$? Explica tu respuesta a un compañero, utilizando el gráfico.

   f. Considerando un acercamiento $x \to 0$, ¿a qué recta se acerca infinitamente el gráfico de f? Argumenta y explica la respuesta.

2. Si se tiene una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, interesa saber qué sucede cuando x se acerca infinitesimalmente a un valor específico. Estudia esto, usando las tablas y gráficos de las funciones siguientes:

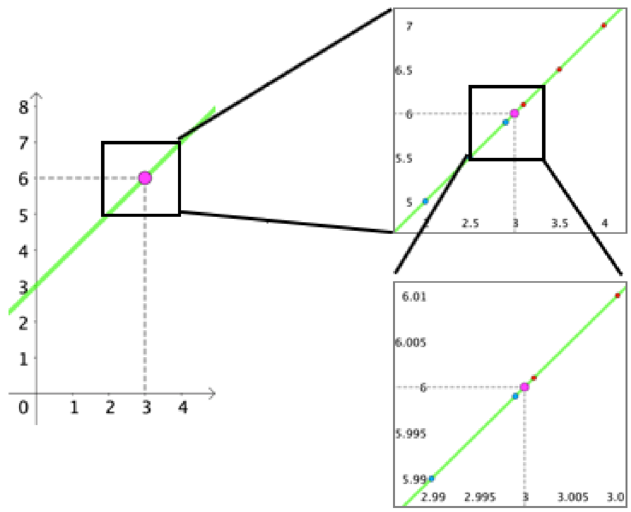
   a. Función afín $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por la expresión $f(x) = x + 3$. Observa cómo se comportan los valores de $f(x)$ cuando x se acerca a 3 por la derecha (valores mayores que 3, pero muy cercanos a 3) en la primera tabla y cuando x se acerca a 3 por la izquierda (valores menores que 3 pero muy cercanos a 3) en la segunda tabla. Completa las tablas:

Tabla

x	$f(x)$
2	$f(2) = \quad +3 = 5$
2,5	$f(\quad) = 2{,}5 + 3 = 5{,}5$
2,9	$f(2{,}9) = 2{,}9 + \quad = 5{,}9$
2,99	$f(2{,}99) = 2{,}99 + 3 =$
	$f(2{,}999) = 5{,}999$
	$f(2{,}99999) =$
	$f(\quad) = 5{,}9999999$

x	$f(x)$
4	$f(4) = +3 = 7$
3,5	$f(\quad) = 3{,}5 + 3 = 6{,}5$
3,1	$f(3{,}1) = 3{,}1 + \quad = 6{,}1$
3,01	$f(3{,}01) = 3{,}01 + 3 =$
	$f(3{,}001) = 6{,}001$
	$f(3{,}00001) =$
	$f(\quad) = 6{,}0000001$

Gráfico



b. Observa el esquema de la derecha y explica la relación entre el esquema y los valores de las tablas.

c. Lee con tu compañero la siguiente explicación del profesor: “Si en ambos casos, cuando x se acerca a 3 (por la izquierda o por la derecha), el valor de $f(x)$ se acerca a 6, entonces se puede escribir:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6\text{”}.$$

¿Por qué piensas que es así? Conversa con tu compañero y lleguen a una conclusión conjunta. Nota: la expresión $\lim_{x \to 3}(x+3) = 6$ se lee “el límite de la función $x + 3$, cuando x tiende a 3, es 6” o bien “el límite de $f(x)$ es 6 cuando x se acerca infinitesimalmente a 3 por la derecha y por la izquierda”.

d. Estudia a qué valor tiende $f(x) = x^2$ cuando x tiende a 2, completando las siguientes tablas:

x	$f(x)$
1	$f(1) = 1^2 =$
1,5	$f(1{,}5) = 1{,}5^2 =$
1,9	$f(1{,}9) = 1{,}9^2 =$
1,99	$f(1{,}99) = 1{,}99^2 =$
1,999	$f(1{,}999) =$
1,99999	$f(1{,}99999) =$
1,99999999	$f(1{,}9999999) =$

x	$f(x)$
3	$f(3) = 3^2 =$
2,5	$f(2{,}5) = 2{,}5^2 =$
2,1	$f(2{,}1) = 3{,}1^2 =$
2,01	$f(2{,}01) = 3{,}01^2 =$
2,001	$f(2{,}001) =$
2,00001	$f(2{,}00001) =$
3,0000001	$f(2{,}0000001) =$

e. ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando x tiende a 2? Escribe tu hallazgo como el límite de una función:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$

3. Considera la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ cuando x tiende a -1. Usaremos la notación $x \to -1^+$ para indicar que x tiende a -1 por la derecha, y $x \to -1^-$ para indicar que x tiende a -1 por la izquierda.

a. Completa la tabla, usando una calculadora u otra herramienta apropiada para realizar los cálculos.

$x \to (-1)^-$	-2	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}001$	...	-1		...	$-0{,}999$	$-0{,}99$	$-0{,}9$	0	$(-1)^+ \leftarrow x$
$f(x) \to$					...	___	___	...					$\leftarrow f(x)$
Aproximación a -1 por la izquierda $(x \to -1^-) \to$						=		$\leftarrow$ Aproximación a -1 por la derecha $(x \to -1^+)$					

b. ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x \to -1^+$? ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x \to -1^-$?

c. Si en ambos casos se obtiene el mismo resultado, entonces es posible escribir el resultado:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2} = \_\_\_\_\_\_$$

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Comúnmente se utiliza un lenguaje ambiguo para hablar de límite; por ejemplo, al decir la función "tiende al límite", se puede pensar que hay puntos que nunca tomarán ese valor y, si la función es continua en ese punto, el límite de la función en él es precisamente el valor de la función en ese punto.
2. Se puede considerar como “límite” un valor al cual la sucesión se acerca para valores muy grandes de n. La noción de límite es local y en la gráfica se puede decir que, por más pequeños que consideremos una vecindad de x, los valores de la sucesión no “tocarán” este límite. En el caso de una sucesión, se puede decir que se acerca al límite sin tocarlo. Además, tiene que explicarles que un “límite” siempre debe ser un número y que el infinito no es un número. En esta etapa, conviene utilizar los términos de convergencia y divergencia de sucesiones.
3. Al final de esta actividad, y para relacionar la sucesión de las balanzas presentada en la actividad 1, se sugiere graficar la función $\frac{x+1}{x}$ para analizar lo que ocurre cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$. Se propone utilizar una tabla Excel para dar valores de *x* muy grandes o pequeños (negativos), para que los jóvenes observen que la función tiende a 1, cuando x tiende tanto al infinito positivo como al infinito negativo. Se recomienda también hacer notar la diferencia entre qué significa que la gráfica de la curva no sobrepase la recta y =1 y la noción de límite. Cabe notar que la función toma valores mayores a 1 para valores de x positivos menores a 1, situación que se puede utilizar para enfatizar que, en el caso del límite, se debe especificar la tendencia de los valores de x.
4. Según el contexto del curso, se puede avanzar al cálculo de límites de funciones reales e introducir la notación simbólica para describir lo que ocurre con la función y sus límites, por ejemplo:

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) \neq \lim_{x \to -\infty} f(x)$, para indicar que los límites laterales son diferentes.
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = \nexists$, para indicar que no existe el límite de la función.

5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan gráficamente para visualizar el comportamiento de la sucesión, serie o función.
   - Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
   - Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Volumen de un cono, applet
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/g8QE7eHc

- Una definición de límite de una función
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikipedia.org/wiki/Límite_de_una_función

- Teoría y práctica con límites
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm3a.html

Actividad de evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales. **OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados. **OA g.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	• Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones. • Representan gráficamente para visualizar el comportamiento de la sucesión, serie o función. • Representan para explicar argumentos sobre el límite de sucesiones, series o funciones. • Resuelven problemas de límites de sucesiones, series o funciones. • Argumentan sobre la convergencia de sucesiones, series o funciones, utilizando representaciones y el cálculo de límites.

Duración: 12 horas pedagógicas

A continuación, se muestra algunas actividades que pueden usarse como ejemplos de evaluaciones para la unidad 2, cada una por sí misma o en conjunto. También se puede hacer un portafolio de problemas donde el estudiante trabaje de forma personal por dos semanas y elija cuáles de estos problemas quiere entregar para evaluación. Los requerimientos de entrega y criterios de evaluación deben priorizar las habilidades de representar, modelar y resolver problemas trabajadas durante la unidad. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible.

1. Considera la sucesión (a_n) con $a_n = \frac{10}{n}$.
   a. Determina los 15 primeros términos y representa gráficamente la sucesión.
   b. ¿Es una sucesión convergente o divergente?
   c. Si fuese convergente, determina a qué tiende o converge esta sucesión.

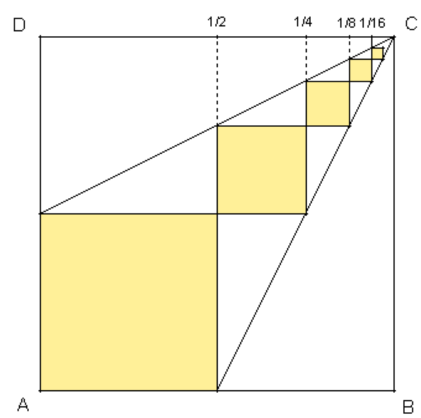
2. Determina el límite de $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ cuando x tiende a 2.
   (puedes usar una calculadora u otra herramienta apropiada para calcular)

$x \to (2)^-$	1,9	1,99	1,999	1,9999	…	2	…	2,000001	2,001	2,01	3	$(2)^+ \leftarrow x$
$f(x) \to$ ¿					…		…					¿ $\leftarrow f(x)$
Aproximación a 2 por la izquierda ($x \to 2^-$) →						=	← Aproximación a 2 por la derecha ($x \to 2^+$)					

   a. Grafica la función y determina si existen asíntotas verticales, horizontales, oblicuas.
   b. ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x \to 2^+$? ¿A qué valor tiende $f(x)$ cuando $x \to 2^-$?
   c. Determina el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3, si existe.

3. Contesta las siguientes preguntas:
   a. ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no está definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto? Argumenta tu respuesta con ejemplos.
   b. El denominador de una determinada función se anula en $x = a$, ¿presenta siempre una asíntota vertical en $x = a$? Argumenta tu respuesta con ejemplos.
   c. ¿Puede tener una función dos asíntotas verticales? En caso afirmativo, muestra algún ejemplo.
   d. ¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales? ¿Por qué?
   e. Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, ¿se puede afirmar que $f(x)$ es continua en $x = 1$? Explica.

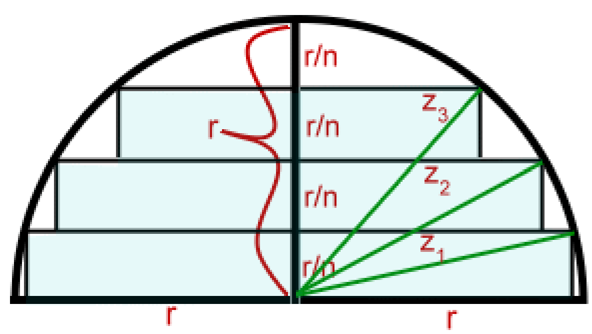
4. La imagen muestra un cuadrado unitario ABCD, cuyos lados se subdividen según las líneas punteadas.
   a. Determina la ecuación de la sucesión (a_n), que representa el largo de los lados.
   b. Determina la ecuación de la sucesión (b_n), que representa las áreas de los cuadrados coloreados.
   c. Conjetura acerca de los límites de ambas sucesiones (a_n) y (b_n).
   d. Determina simbólicamente los límites conjeturados.
   e. Conjetura acerca de límite de la serie $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k)$.
   f. Conjetura acerca de límite de la serie $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (b_k)$.
   g. Determina simbólicamente el límite de la serie $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k)$.
   h. Determina simbólicamente el límite de la serie $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (b_k)$.



5. Se considera la sucesión (a_n), con $a_n = \frac{n+1}{2n-1}$.
   a. Determina los primeros cuatro elementos, el décimo elemento, el centésimo, el milésimo y finalmente el mil milésimo elemento. Representa los elementos mencionados mediante fracciones.
   b. Conjetura acerca del límite u de esta sucesión y determina para algunos valores de ε, como $\varepsilon = 0{,}000001$ ó $\varepsilon = 0{,}000000001$, el número n_0 a partir del cual todos los elementos de (a_n) están en el "entorno ε" del límite u.
   c. Verifica algebraicamente el límite, mediante la operatoria con límites.
   d. Generaliza, desde la actividad b, el límite u de la sucesión y muestra que, con otro número v, la verificación está fallando.

6. Determinar límites de funciones para $x \to x_0$ y $x \to \infty$.
   Se considera la función f con $f(x) = \frac{x+2}{x^2-2}$.
   a. Factoriza el denominador en la expresión fraccionaria $\frac{x+2}{x^2-4}$ de la ecuación funcional y determina los lugares x_1 y x_2 en los cuales la expresión fraccionaria se indefine. Menciona el dominio de la función f.
   b. Teniendo en consideración el dominio de la función, reduce la expresión fraccionaria a su forma más sencilla.
   c. Con herramientas digitales y utilizando la forma más sencilla de la ecuación funcional, elabora el gráfico de la función f.
   d. Con base en el gráfico, conjetura acerca de la existencia de los límites $\lim_{x \to x_1} f(x)$, $\lim_{x \to x_2} f(x)$, $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
   e. Verifica algebraicamente los límites, mediante la operatoria con límites.
   f. ¿En cuál de los lugares x_1 o x_2 hay continuidad de f?

7. Desarrollar el volumen de una esfera como límite de una serie de cilindros inscritos.
   La imagen representa una semiesfera del radio *r* cuyo volumen se aproxima mediante la suma de los cilindros inscritos con igual altura $h = \frac{r}{n}$.



   a. Determina los radios z_k de los cilindros en dependencia de n.
   b. Determina la expresión algebraica del volumen V_k de los cilindros inscritos.
   (resultado parcial: $V_k = \pi \cdot {z_k}^2 \cdot \frac{r}{n}$ con ${z_k}^2 = r^2 - k^2 \cdot (\frac{r}{n})^2$)
   c. Elabora la expresión algebraica de la serie s_n de los cilindros inscritos $\sum_{k=1}^{n} V_k$, insertando el término para ${z_k}^2$.

d. Aplicando la fórmula de la suma de los cuadrados $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, determina el límite $\lim\limits_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} V_k$ y la fórmula del volumen de una esfera.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Conjeturan acerca del valor del límite de sucesiones, series o funciones.			
Determinan elementos de una sucesión o serie para encontrar el término general.			
Determinan la convergencia o divergencia de sucesiones o series.			
Determinan límites de sucesiones o series de forma algebraica.			
Determinan límites de funciones de forma algebraica.			
Analizan la existencia o el valor de límites, usando aproximaciones por la derecha y la izquierda.			
Evalúan la existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.			
Analizan la continuidad de las funciones en un punto, utilizando representaciones y el cálculo de límites.			
Modelan situaciones geométricas y de medidas, utilizando la noción de límites.			
Aplican fórmulas de sumas de cuadrados y de volumen para encontrar el volumen de una figura 3D, usando la noción de límites.			

Unidad 3

Unidad 3: Modelar situaciones de cambio con derivadas

Propósito de la unidad

Los estudiantes comprenden las nociones básicas de la derivada como la razón de cambio y la pendiente de la tangente a la curva. En ambos casos, se ve de forma intuitiva que la derivada implica un límite y que permite dar respuestas a problemas geométricos, económicos o científicos. En esta unidad, podrán representar la derivada, modelar situaciones, resolver problemas y derivar de forma simbólica para construir el significado de la derivada. Las siguientes preguntas pueden orientarlos: ¿Cómo se relaciona el cambio de una situación con la derivada? ¿Cómo modelar el comportamiento de las situaciones de cambio?

Objetivos de Aprendizaje

OA 3.
Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA 4.
Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.
OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actividad 1: Describiendo el cambio por medio de la derivada

PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden que la razón instantánea en un punto es el límite de una sucesión de razones medias. Trabajan con funciones y con expresiones indeterminadas (como cero divido por cero), aprovechando las herramientas disponibles para aprender, visualizar y resolver problemas sobre funciones, y las expresiones relacionadas con el cero y el infinito. Relacionan la inexistencia de una tangente con la inexistencia de una razón instantánea de cambio, e investigan y practican en lo posible el experimento de Galileo Galilei de forma colaborativa.

Objetivos de Aprendizaje

OA3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

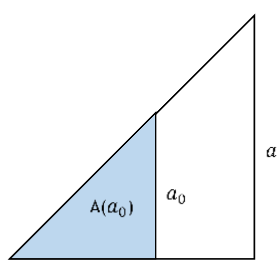
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿QUÉ SIGNIFICA LA RAZÓN DE CAMBIO EN UN CONTEXTO GEOMÉTRICO?

1. En la figura, tanto el triángulo sombreado inscrito como el triángulo blanco son triángulos rectángulos isósceles con un vértice común. El triángulo azul crece en dependencia del lado a.



a. ¿Qué relación tiene la expresión $\frac{a^2-a_0^2}{2(a-a_0)}$ con el triángulo? Describe la expresión $\frac{a^2}{2}$ y luego las diferencias para terminar con toda la expresión; ¿qué significado le puedes dar a la fracción?

b. Si se habla de cambio y de razón instantánea, ¿qué expresión representaría la razón entre el área del triángulo sombreado y el lado a? Descríbela con tus propias palabras a un compañero.

c. Se considera la razón instantánea en el instante $a_0 = 2$, ¿por qué no se la puede determinar valorando con $a_0 = 2$ en la expresión algebraica?

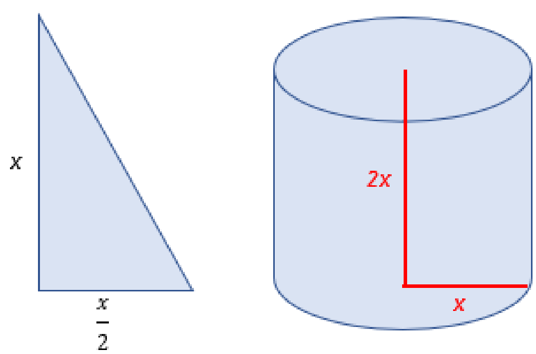
d. Completa la siguiente tabla para determinar la razón instantánea en el instante $a_0 = 2$.

a	1	1,5	1,9	1,99		2,01	2,1	2,5	3
$\frac{a^2-4}{2a-4}$									

e. ¿Qué ocurre con el límite en el punto $a_0 = 2$? Argumenta tu respuesta utilizando cálculos, sin olvidar el contexto geométrico.

f. ¿Qué significado tiene el límite en este contexto?

2. La imagen muestra un triángulo rectángulo y un cilindro recto.

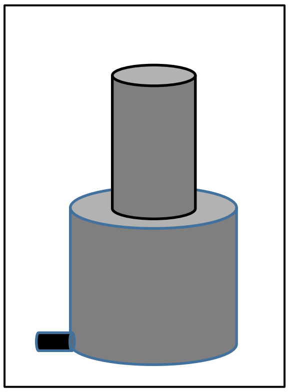


a. Determina la expresión algebraica del área del triángulo rectángulo.

b. Determina la expresión algebraica del volumen del cilindro recto y forma la función con respecto a la altura.

c. Crea tu propio problema de razón de cambio para el caso de un cilindro; sombrea si es necesario.

d. Elabora una tabla de datos donde tú mismo des los valores. Crea una lista de tus observaciones y compara con el ejercicio anterior.



3. La figura muestra dos recipientes cilíndricos compuestos, de los cuales el recipiente inferior tiene el doble del diámetro del recipiente superior. Se llena la combinación de los dos recipientes con un caudal constante de $c = 314 \frac{cm^3}{min}$.
   a. Elabora la ecuación de la altura h de la superficie del agua en dependencia del tiempo t durante el proceso de llenado.
   b. Conjetura acerca de la razón instantánea de la altura h en el momento t_0 en el cual se empieza a llenar el recipiente superior.
   c. Verifica o rechaza la conjetura mediante un procedimiento algebraico.
   d. ¿Existe una tangente en el gráfico de la función de la altura h en el momento t_0? Explica tu respuesta a un compañero.

¿CUÁL ES LA RELACIÓN ENTRE EL TIEMPO Y EL DESPLAZAMIENTO DE UN OBJETO?

La imagen muestra la ilustración del famoso experimento de Galileo Galilei (1564-1642), en el que Galileo descubrió la relación entre el tiempo y el recorrido en el movimiento de una bola deslizándose hacia abajo en una viga inclinada.

1. Observa la imagen y descríbesela a un compañero.
   a. ¿Qué piensas que están haciendo?
   b. ¿Qué objetos están en juego?
   c. ¿Qué relación podría tener con el tema de trabajo?
   d. ¿Observas algún cambio? ¿Qué relación tiene con el experimento?
   e. ¿Por qué la dependencia entre el recorrido d y el tiempo t se puede modelar con una función cuadrática?
   f. Determina, con base en los resultados del experimento histórico, el parámetro k en la ecuación $d(t) = k \cdot t^2$.

2. Utilizando una calculadora y basándote en los resultados "ideales" con t y D, elabora una sucesión de velocidades promedio para los intervalos de tiempo $[3{,}9;\ 4]$, $[3{,}99;\ 4]$, $[3{,}999;\ 4]$, $[3{,}9999;\ 4]$ y $[3{,}99999;\ 4]$, acercándose al instante $t = 4$ desde la izquierda. ¿A qué valor se acercan las velocidades medias?

3. Repite el procedimiento para las velocidades promedio en $[4;\ 4{,}1]$, $[4;\ 4{,}01]$, $[4;\ 4{,}001]$, $[4;\ 4{,}0001]$ y $[4;\ 4{,}00001]$, acercándose al instante desde la derecha. Comparando ambas sucesiones de las velocidades medias, ¿cuál sería el límite de ambas sucesiones?

4. Con el mismo procedimiento de aproximar la velocidad media con sucesiones de velocidades promedio, se obtiene para $t = 2$ la velocidad instantánea de $v(2) = 132\ \left[\frac{p}{u}\right]$. Para $t = 8$ se obtiene $v(8) = 528\ \left[\frac{p}{u}\right]$. ¿Con qué tipo de función, en dependencia de t, se puede modelar la velocidad instantánea de la bola?

> Conexión interdisciplinaria:
> **Ciencias para la ciudadanía.**
> OA c, d, 3° y 4° medio

   a. Elabora una tabla con velocidades promedio y después, la ecuación de la función de la velocidad instantánea.

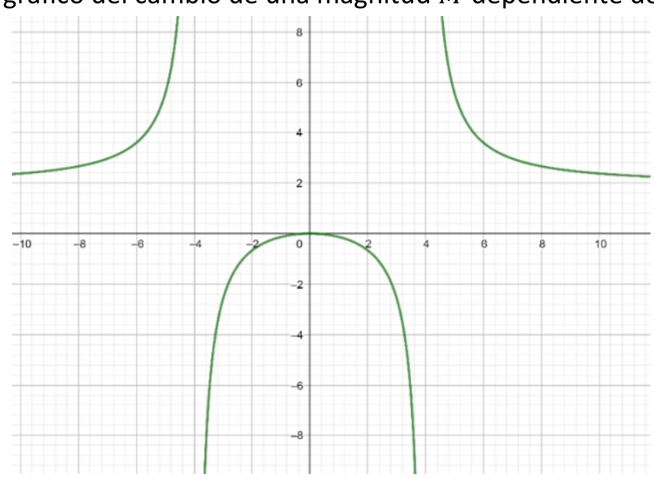
   b. Comparando las ecuaciones de $d(t)$ y de $v(t)$, ¿qué llama la atención, si se compara los exponentes y el parámetro k con factor proporcional de la velocidad instantánea?

   c. Elabora el gráfico de la función del desplazamiento d. ¿Qué se representa gráficamente mediante las velocidades promedio y la velocidad instantánea?

   d. ¿Qué representa gráficamente la función v de la velocidad instantánea?

¿CÓMO SE REPRESENTA GRÁFICAMENTE LA RAZÓN INSTANTÁNEA DE CAMBIO?

La imagen muestra el gráfico del cambio de una magnitud M dependiente del tiempo t.



a. Determina los intervalos en los cuales la razón instantánea es positiva.

b. Determina los intervalos en los cuales la razón instantánea es negativa.

c. ¿En qué instante la razón instantánea del cambio es 0?

d. ¿En qué instante no existe una razón instantánea del cambio?

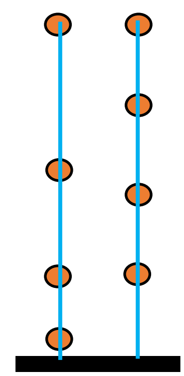
e. ¿A qué valor se acerca la razón instantánea del cambio para $t \to \infty$ o para $t \to -\infty$?

¿TODOS LOS OBJETOS CAEN AL MISMO TIEMPO?

Si es posible, realiza este experimento con tu grupo de trabajo; para ello, lee las ideas de Galileo y consigue los materiales. Galileo consideró que su experimento con la viga inclinada se puede transformar en un experimento de la caída libre para el cual el ángulo de la inclinación de la viga se elevaría a 90°.

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA g, 3° y 4° medio

En el experimento se fijan cuatro tuercas en un hilo. Se sujeta el hilo sobre un molde de lata como suelo, de manera que el extremo libre del hilo toque el molde. En el primer hilo se fijan las tuercas a las siguientes distancias sobre el molde: 5cm, 20cm, 45cm y 80cm. En el segundo hilo se fijan las tuercas en forma equidistante de 20cm entre ellas.



a. Conjetura sobre la ley que resulta con la viga en 90°. ¿Piensas que será la misma que en el caso de la viga inclinada? ¿Por qué?

b. Para comenzar con el experimento, elabora una lista de materiales y organízate con tu grupo para distribuirse las tareas.

c. Se suelta el primer hilo y se dejan caer las tuercas al mismo instante. ¿En qué secuencia de tiempo se escucha el choque de las tuercas en el molde de lata?

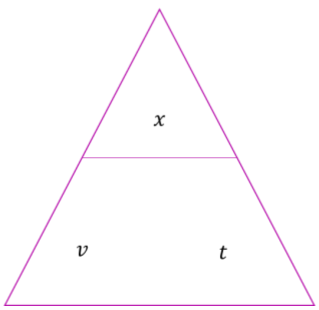
d. Verificar algebraicamente la conjetura, considerando las distancias de las tuercas en el hilo.

e. Se suelta el segundo hilo y se dejan caer las tuercas al mismo instante. ¿En qué secuencia de tiempo se escucha el choque de las tuercas en el molde de lata?

f. Verificar algebraicamente la conjetura, considerando las distancias de las tuercas en el hilo.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 3 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos sobre la velocidad. Algunos ejercicios pueden ser:
   - Describe la fórmula de la velocidad y explícale a tu compañero las variables que están involucradas.
   - ¿Cuál de las siguientes alternativas describe mejor la velocidad?
     a. Mientras mayor distancia recorro en más tiempo, más rápido voy.
     b. Mientras menor distancia recorro en más tiempo, más rápido voy.
     c. Mientras mayor distancia recorro en menos tiempo, más rápido voy.
     d. Mientras menor distancia recorro en menos tiempo, más rápido voy.
   - ¿Piensas que la velocidad es directa o inversamente proporcional al tiempo? ¿Qué relación hay entre la distancia y la velocidad?
   - Para resolver los ejercicios a continuación, utiliza el siguiente esquema (si quieres encontrar una de las variables, debes taparla con tu mano y veras la operación que se debe realizar; por ejemplo: si deseas encontrar la distancia x, la tapas con tu mano y debajo queda la multiplicación de la velocidad por el tiempo $v \cdot t$):



     e. Alondra anda en bicicleta una ruta de 5,2 km en 12 minutos. Para la misma ruta, Pablo necesita 14 minutos. Determina la velocidad promedio de Alondra y Pablo.
     f. El señor Ovalle maneja de Curicó a San Fernando (68,8 km) con una velocidad promedio de 65 $\frac{km}{h}$; en cambio, el señor Bulnes lo hace con una velocidad promedio de 82 $\frac{km}{h}$. ¿Cuánto tiempo necesitan ambos para recorrer la distancia entre ambas ciudades?
     g. ¿Qué distancia puede recorrer Ana en 5 minutos si camina a una velocidad de 12,7 $\frac{km}{h}$? ¿Qué velocidad puede lograr Emilio en 30 minutos si anda con su bicicleta a velocidad promedio de 30 $\frac{km}{h}$?
     - ¿Qué entiendes por velocidad promedio? ¿Qué diferencias hay con la velocidad constante?
     - Da ejemplos de tu vida donde esté involucrada la velocidad y descríbelos a tu compañero lo mejor posible.

2. Se recomienda incluir una reflexión acerca de expresiones indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$ para que constaten que hay que determinar la razón instantánea mediante un procedimiento infinitesimal de acercamiento. Para esto, se puede plantear ejercicios como:

    a. Factorizar $\frac{2x^2-2}{3x+3}$ y simplificarlo a la forma más reducida.

    b. ¿Para qué valor de x se indefine la expresión algebraica $\frac{x^3-x^2}{x^3+x^2}$?

3. Se sugiere hacer el experimento en clases y dejar que los estudiantes tomen sus propios datos. A partir de su experimento, pueden elaborar conjeturas y luego comparar con lo ocurrido históricamente. Para lograrlo, tienen que hacer un registro tabular de muchos datos y de repeticiones del experimento, y elaborar gráficos y ecuaciones de forma algebraica.
4. En la última actividad, hay que destacar que las mediciones de tiempo de precisión del siglo XVI no eran tan sofisticadas como hoy, así que cualquier indicio o ayuda tecnológica que los jóvenes puedan ofrecer y que sea de fácil acceso, beneficiará la medición del experimento.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:

    - Identifican la rapidez instantánea con la forma temporal de la razón instantánea de un cambio.
    - Resuelven problemas relacionados con la rapidez instantánea de un cambio.
    - Identifican el cociente de la razón de cambio cuando es igual a cero, con un cambio en la función.
    - Modelan situaciones por medio de funciones y la noción de razón de cambio.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Artículo sobre el plano inclinado
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.scielo.br/pdf/rbef/v34n2/v34n2a08.pdf
- Información sobre Galileo y el péndulo
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://cuantozombi.com/tag/plano-inclinado/

Actividad 2: Describiendo la derivada como función de pendientes de rectas tangentes

PROPÓSITO

Los estudiantes analizan el comportamiento de funciones y comparan este comportamiento de forma local y global. Resuelven problemas científicos, pensando con flexibilidad para reelaborar sus ideas y puntos de vista sobre la aplicación de las funciones al mundo real. Además, representan las funciones, argumentan sus respuestas y realizan cálculos algebraicos en situaciones dentro del contexto matemático, y aplicados al mundo real.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

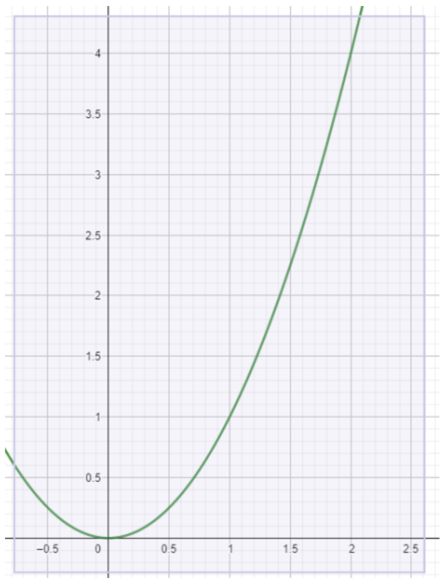
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.

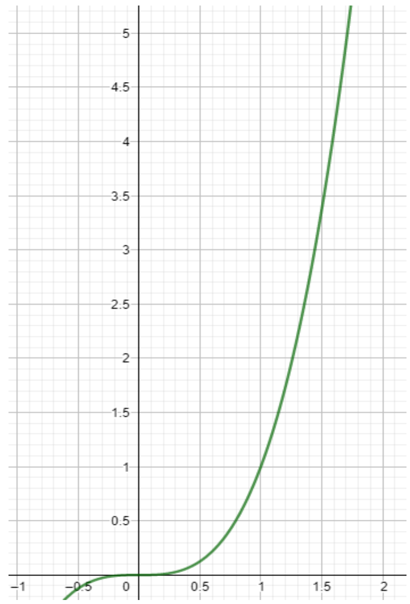
Duración: 12 horas pedagógicas

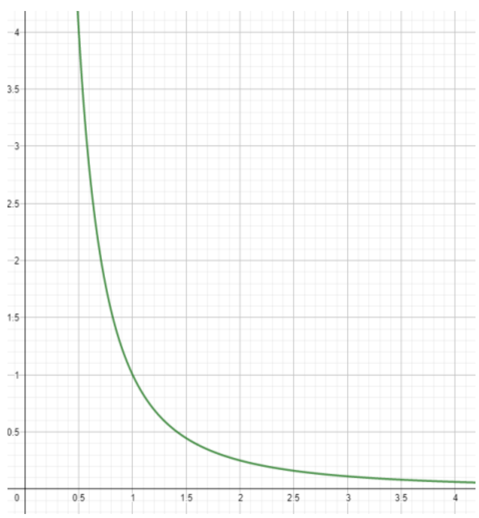
DESARROLLO

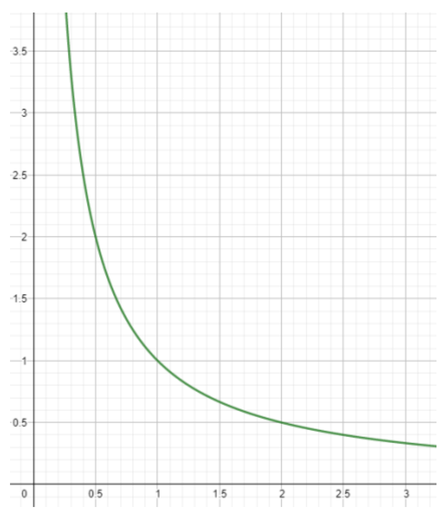
¿QUÉ RELACIÓN HAY ENTRE LA TANGENTE Y LA DERIVADA?

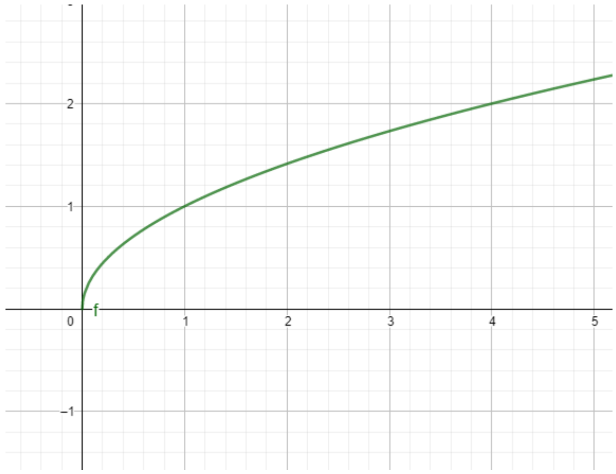
Se muestra a continuación los gráficos de cuatro funciones f, g, h, k, l. Todas son derivables en el lugar $x_0 = 1$.











a. Identifica los gráficos con sus funciones respectivas: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $h(x) = \frac{1}{x}$, $k(x) = \frac{1}{x^2}$, $l(x) = \sqrt{x}$.

b. En los puntos F_0, G_0, H_0 y K_0 de las funciones, f, g, h y k, todos con la abscisa $x_0 = 1$, dibuja una recta que aproxime mejor la tangente en los puntos considerados y determina aproximadamente su pendiente.

c. Elabora la expresión algebraica de la pendiente de las secantes $\overline{F_0F}$, $\overline{G_0G}$, $\overline{H_0H}$, $\overline{K_0K}$ y $\overline{L_0L}$ en la forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_{0+h}) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$$

d. Determina la pendiente de la tangente en $x_0 = 1$ como límite de la sucesión de las secantes $\lim_{h \to x_0} \frac{f(x_{0+h}) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$.

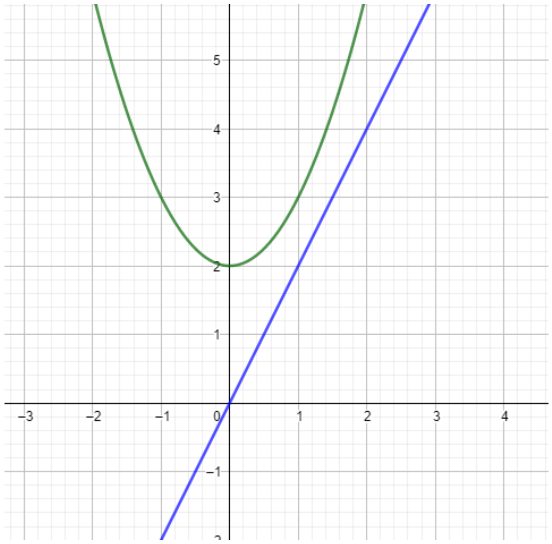
e. Relaciona la expresión $f'(x_0)$ llamada "derivada de f en x_0" con el límite calculado anteriormente.

f. Compara la derivada con la pendiente anteriormente estimada.

g. ¿Qué procedimiento matemático se puede aplicar para obtener la pendiente de la tangente?

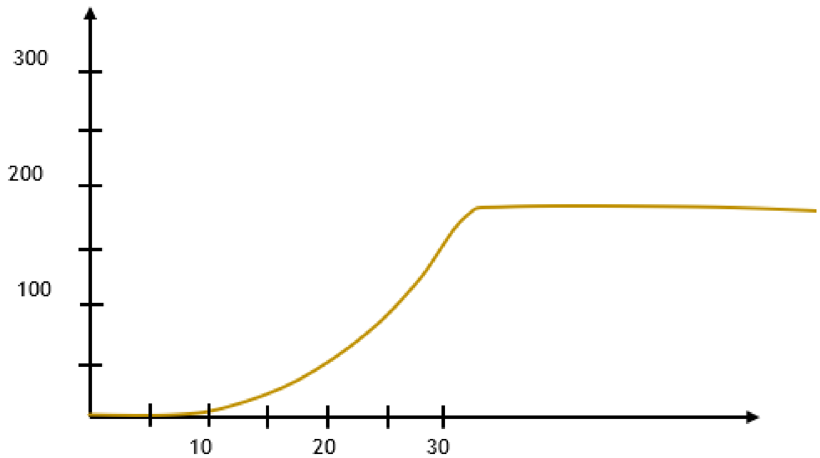
REPRESENTAR RECTAS TANGENTES CON LA NOCIÓN DE DERIVADA

1. Se considera la función cuadrática f, descrita por la ecuación $f(x) = x^2 + 2$, y una colección g_t de rectas que pasan por el origen $O(0,0)$ con la ecuación $g_t(x) = t \cdot x$ ($t \in \mathbb{R}$).
   a. Determina el parámetro t de manera que la recta tenga un solo punto común con el gráfico de f.
   b. Conjetura acerca de la cantidad de soluciones del problema.
   c. Mediante herramientas tecnológicas, resuelve gráficamente el problema.
   d. Resuelve algebraicamente el problema, aplicando la noción de la derivada.
   e. Resuelve algebraicamente el problema mediante la elaboración de una ecuación cuadrática con el parámetro t, restringiendo las soluciones a una sola.



2. Un vehículo para explorar planetas tiene la capacidad de subir en cráteres de hasta una pendiente de 100%. Abajo se muestra el perfil del cráter de un planeta, que está representada aproximadamente por una función cuadrática f con $f(x) = \frac{1}{400}x^2$ en la cual la variable x representa metros.

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA d, 3° y 4° medio



a. Verifica que el vehículo explorador no puede subir hasta la meseta que se extiende en la orilla del cráter.

b. ¿Hasta qué altura puede subir el vehículo explorador?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Según el contexto del curso, se puede generalizar la derivada para estas funciones, extendiendo el grado de los exponentes. En general, se debe considerar los puntos $F(x_o, f(x_o))$, $G(x_o, g(x_o))$, $H(x_o, h(x_o))$, $K(x_0, k(x_0))$ y $L(x_0, l(x_0))$ y para cada punto determinar, para cada función, el límite $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$. De aquí se debe desarrollar la expresión $\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$ para una función potencia f con $f(x) = x^m (m \in \mathbb{N})$, aplicando el "triángulo Pascal" y luego determinar $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}$. Con esto se verifica que la derivada $f´$ se expresa por $f´(x) = (m-1)x^{m-1}$.

2. Se sugiere realizar ejercicios sencillos de cálculo de límites de expresiones fraccionarias; por ejemplo:

   con la forma $\lim\limits_{h\to x_0} C(x_0 + h)$.

   - $C(x) = \frac{2x^2-2}{x-1}$ para x_0 = 1
   - $C(x) = \frac{x^3+x^2}{2x+2}$ para x_0 = -1

   con la forma $\lim\limits_{x\to\infty} K(x)$

   - $K(x) = \frac{2x^4+x^3}{x^3-1}$
   - $K(x) = \frac{2x^2-8}{3x^3-12x}$

3. Para la última actividad, se debe considerar que la pendiente de 100% corresponde a un ángulo de 45°, $m = tg\ \alpha = 1$.

4. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Resuelven problemas relacionados con la rapidez instantánea de un cambio.
   - Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones.
   - Verifican algebraica y gráficamente las derivadas de funciones conocidas.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web para estudiantes y profesores:

- Información sobre la derivada de una función en un punto
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.decarcaixent.com/actividades/mates/derivadas/derivadas2.htm

- Applet para investigar algunas funciones polinómicas
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/polynomial/cubic.html

- Información sobre la interpretación geométrica de la derivada
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://ekuatio.com/interpretacion-geometrica-de-la-derivada-ejercicio-resuelto/

Actividad 3: Describiendo las derivadas como funciones de las tendencias de un cambio

PROPÓSITO

Los estudiantes aprovechan las herramientas disponibles para resolver problemas en el ámbito de la velocidad de un tren y de corredores, y una situación de costos de una empresa. Antes de esta aplicación, trabajan en un contexto puramente matemático donde se apoyan de representaciones y cálculos que pueden hacerse de forma manual o digital.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

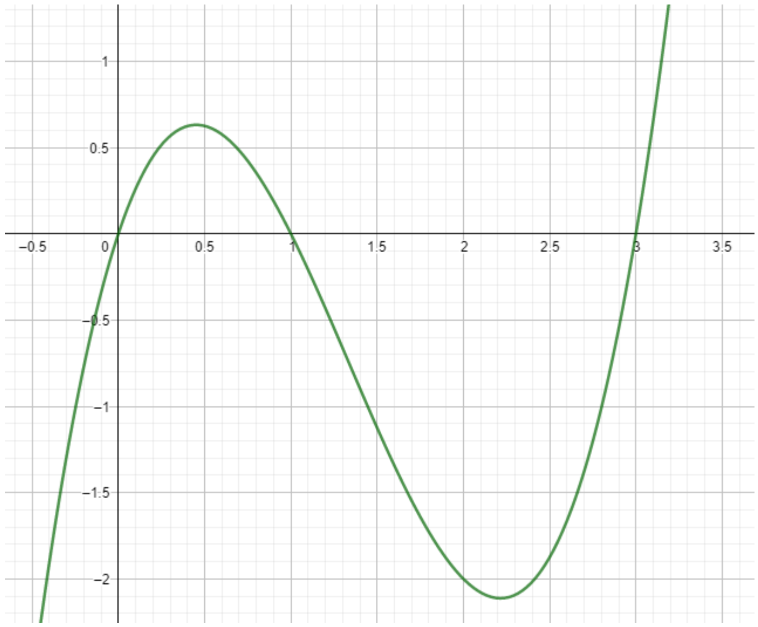
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿QUÉ ES UN PUNTO DE INFLEXIÓN?

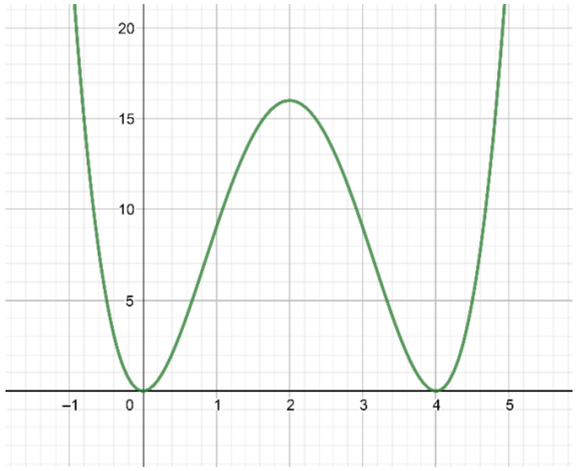
1. La imagen representa el gráfico de la función f con $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$.



a. Considerando el gráfico, ¿cuáles son los “ceros” de la función f?
b. Determina algebraicamente los “ceros” de la función.
c. Considerando el gráfico, ¿en qué puntos x_1, x_2 aproximadamente hay puntos máximos o mínimos locales?
d. Determina la derivada f' de la función f y elabora el gráfico mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.
e. Considerando los gráficos de f y f', ¿qué comportamiento tiene la derivada f' en los lugares x_1, x_2?
f. Determina algebraicamente el lugar x_1 del máximo local y el lugar x_2 del mínimo local. Relaciona con el gráfico.
g. Considerando el gráfico de f, ¿en qué lugar x_3 aproximadamente hay un punto de inflexión?
h. Determina la segunda derivada f'' de la función f y elabora el gráfico mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.
i. Considerando los gráficos de f' y f'', ¿qué comportamiento tiene la derivada f' y la segunda derivada f'' en el lugar x_3?
j. Determina algebraicamente el lugar x_3 en el cual existe el punto de inflexión.
k. Verifica mediante la tercera derivada de f la existencia del punto de inflexión.

IDENTIFICACIÓN GRÁFICA Y ALGEBRAICA DE MÍNIMOS, MÁXIMOS Y DE INFLEXIÓN

1. En la imagen se representa el gráfico de la función f con $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$.
   Mirándolo, responde:



   a. ¿Cuáles son los puntos de intersección con el eje x? ¿Qué propiedad adicional tienen estos puntos?
   b. ¿En qué lugares x_1, x_2, y x_3 hay puntos extremos? ¿De qué tipo son?
   c. ¿En qué lugares x_4 y x_5 hay puntos de inflexión?
   d. Determina algebraicamente la primera, segunda y tercera derivada de f.
   e. Verifica algebraicamente la existencia y las coordenadas de los ceros, y de los puntos máximos, mínimos y de inflexión.
   f. Utilizando herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, representa los resultados de la actividad anterior mediante los gráficos de f', f'' y f''' en el mismo sistema de coordenadas.
   g. Describe el comportamiento de f', f'' y f''' en los puntos máximos, mínimos y de inflexión. Completa la tabla considerando además los cambios de $f'(x_i)$ y de $f''(x_i)$ en x_i. Anota también el cambio de curvatura en los puntos de inflexión.

$f(x_i)$	Punto máximo	Punto mínimo	Punto de inflexión
$f'(x_i)$	0 y cambio: $(+) \rightarrow (-)$		---
$f''(x_i)$			
$f'''(x_i)$			

   h. Determina algebraicamente la ecuación de la tangente en los puntos de inflexión.

i. Aprovechando la simetría del gráfico de f, determina el punto de intersección entre las tangentes de los puntos de intersección.

j. Se considera una colección de funciones g_a con $g_a(x) = x^2 \cdot (x^2 - 8x + a)$. ¿Para qué valor de a la función g_a coincide con la función f?

k. Determina el valor de a de tal manera que, en $x_0 = 0$, el gráfico de g_a tenga un punto de inflexión.

l. Represente el resultado de la actividad k, elaborando el gráfico de g_a mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.

¿CUÁLES SON LAS LIMITACIONES DE UN MODELO MATEMÁTICO AL DESCRIBIR LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA?

1. Un tren de carga tiene una aceleración de aproximadamente $\frac{1}{10}\frac{m}{seg^2}$ que, en condiciones ideales, genera un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado s con $s(t) = \frac{1}{20}t^2$, $(t \geq 0)$.

   ($s =$ recorrido en metros y $t =$ tiempo en segundos).

   a. Elabora el gráfico de s mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.

   b. Elabora la fórmula de la función $s´$ que representa la velocidad instantánea del movimiento, y determina el instante t_0 en el cual el tren llega a la velocidad de $90\frac{km}{h}$.

   c. ¿Por qué, en el movimiento real, el modelo matemático que describe la velocidad instantánea tiene limitaciones? Argumenta la respuesta.

   d. Elabora un gráfico esquemático de la velocidad instantánea en el cual, a partir de un instante t_1, se considera que el modelo matemático no refleja la realidad.

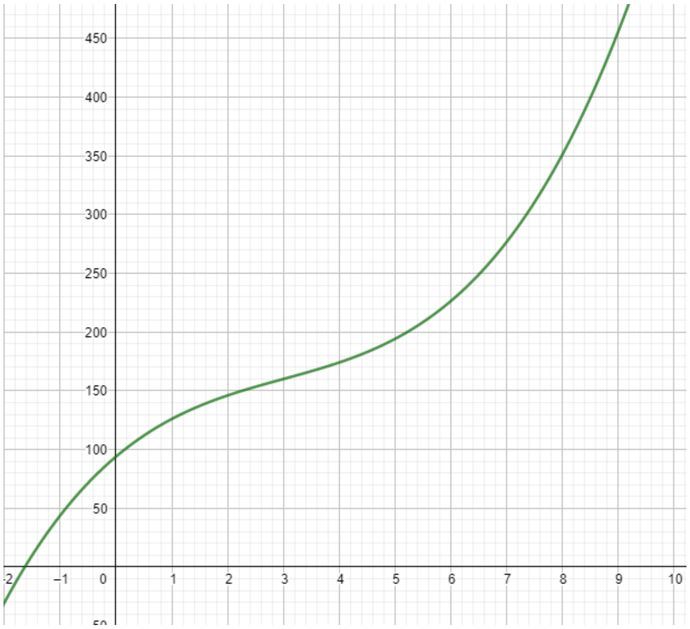
   e. En este instante t_1, el gráfico ¿tiene un punto de inflexión? Argumenta y comunica la respuesta.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

2. Un maestro de instalaciones de calefacción quiere empezar a instalar termopaneles para aumentar el rubro de su servicio. Una institución consultora para mini-pymes le hizo gratuitamente un estudio de los costos g que dependen de la cantidad de paneles semanalmente instalados. La función g de los costos se modela por la ecuación:

   $$g(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94,$$

   cuyo gráfico se muestra en el siguiente sistema de coordinadas. El eje X representa la cantidad de termopaneles instalados y el eje vertical representa los costos en miles de pesos.



a. Conjetura si la función g podría tener máximos o mínimos locales para valores de x que están fuera del intervalo mostrado.

b. Verifica o rechaza algebraicamente la conjetura anterior.

c. ¿Por qué la función no tiene sentido en la realidad para $x < 0$?

d. Si se considera la tendencia del aumento de los costos, ¿con qué función se describe esta tendencia?

e. Elabora la función que describe la tendencia del aumento de los costos.

f. Con herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, grafica la función que describe la tendencia del aumento de los costos.

g. Basado en el gráfico anterior, contesta: ¿en qué lugar x_0 se cambia la tendencia del aumento de los costos, y en qué dirección se realiza el cambio?

Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

h. Determina algebraicamente, mediante la función $C(x)$ que describe la tendencia del aumento de los costos, el lugar x_0 en el cual se cambia la tendencia del aumento de los costos.

i. Determina algebraicamente, mediante la noción de derivadas de la función g, el lugar x_0 en el cual se cambia la tendencia del aumento de los costos.

j. ¿Cómo se llama el punto $C(x_0, f(x_0))$?

¿ES POSIBLE PREDECIR QUIÉN GANARÁ LA CARRERA DE ATLETISMO?

1. En un certamen regional de atletismo, los dos mejores atletas en la disciplina tienen los datos deportivos que muestra la siguiente tabla. Una carrera de 100m tiene dos fases: la primera es la aceleración hasta la velocidad máxima y la segunda implica un movimiento a velocidad constante con la velocidad máxima lograda en la fase de aceleración. En el modelo matemático, se supone que la aceleración también es constante.
   La fase de aceleración se modela con la función f con $f(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2$, en la cual $f(t)$ representa el recorrido f en el instante t a partir de la partida.

	Aceleración	Tiempo máximo de mantener la aceleración
Atleta A	$3\left[\frac{m}{s^2}\right]$	3[s]
Atleta B	$2{,}8\left[\frac{m}{s^2}\right]$	3,4[s]

Con base en estos datos:

a. Conjetura acerca del posible ganador de la carrera.
b. Utilizando herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, elabora el gráfico de la función f para ambos alumnos.
c. Determina gráficamente el posible ganador.
d. Resuelve algebraicamente el problema, aplicando la noción de la razón instantánea (velocidad instantánea) expresada por la tangente y la derivada de la función f.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Para iniciar la actividad, se recomienda presentar los gráficos y dar instrucciones o preguntas como: ¿Dónde crees que hay un cambio? ¿Cómo se puede describir este cambio? ¿Qué ocurre con la tangente? También se debe hacer notar las situaciones extremas, los extremos locales y los puntos de inflexión.

2. Se sugiere indicar las unidades de medida; la aceleración en esta actividad está en la unidad de $\frac{m}{seg^2}$, lo cual implica que la velocidad se debe adaptar al sistema de metros y segundos. Normalmente, cuando se habla de vehículos, la velocidad está en kilómetros y horas.

3. Conviene hacer una especie de dictado con las características de una función para que los estudiantes grafiquen lo que están entendiendo. Algunas pueden ser: entre un punto máximo y un punto mínimo local hay un punto de inflexión; entre dos puntos máximos hay un punto mínimo; entre dos puntos de inflexión hay un punto mínimo; entre dos puntos de inflexión hay un punto máximo. Para evitar la derivación de un producto, se recomienda transformar de producto a suma.
4. Cabe notar que, en una de las tareas, se aplica la noción de derivadas de funciones en un contexto de economía. La función de los costos muestra tendencias que disminuyen, aunque los costos aumenten y muestra un punto de inflexión en los costos.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones.
   - Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
   - Resuelven problemas de optimización en contextos diversos, como geometría, ciencias y economía.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web para estudiantes y profesores:

- La noción de derivada en el contexto de economía

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.scribd.com/document/246639834/Derivadas-en-economia

Actividad 4: Aplicando la derivada para detectar máximos y mínimos.

PROPÓSITO

Los estudiantes retoman desde el inicio el concepto de derivada, comenzando con un contexto de medición y velocidad, para luego continuar con la comprensión de la ley de Turgot y con problemas de aplicación en el ámbito de la extracción de minerales, costos e ingresos de una producción y procesos de fotosíntesis. Finalmente, retoman nuevamente la función compuesta y la derivada, en una aplicación relacionada con procesos de desagües y los costos de transporte del agua. En todas las aplicaciones, deben valorar y aprovechar las herramientas disponibles para resolver el problema, retomando y utilizando conceptos de actividades anteriores.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

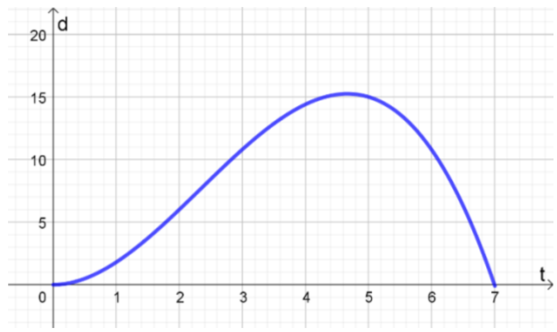
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

¿CÓMO INTERPRETAR LOS NIVELES DE CONTAMINACIÓN?

Desde su edificio central, un vehículo de monitoreo ambiental sale diariamente a recorrer la ciudad para medir niveles de contaminación atmosférica en dos rondas continuadas; la primera se extiende por siete horas. Para determinar la distancia p (medida en kilómetros) de la central a la que está el vehículo en todo instante t (medido en horas) durante su primera ronda, se ha encontrado que la distancia p puede modelarse por la función p: $[0,7] \to \mathbb{R}$, definida por
$p(t) = -0{,}3t^3 + 2{,}1t^2$.



La imagen muestra una gráfica de esta función.

a. Utiliza la función $p(t)$ para dibujar en el gráfico anterior la distancia de la central a la que estaba el vehículo de monitoreo a las 4 horas y a las 6 horas; es decir, grafica los puntos $(3, p(3))$ y $(5, p(5))$.
b. En el gráfico del enunciado, construye la recta que pasa por los puntos $(3, p(3))$ y $(5, p(5))$ y determina la pendiente de esta recta.

Si en dos tiempos t_0 y t_1 se registran las respectivas ubicaciones $p(t_0)$ y $p(t_1)$ de un móvil, la rapidez media (v_m) de dicho móvil se define como la razón entre el desplazamiento que realiza $p(t_1) - p(t_0)$ y el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ que le toma dicho desplazamiento. Esto se escribe de la siguiente manera:

$$v_m = \frac{p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0} \mid [t_0, t_1]$$

c. Determina la distancia de la central a que estaba el vehículo de monitoreo a las 3 horas y a las 5 horas:

$p(3) =$ $\qquad\qquad$ $p(5) =$

d. La rapidez media se interpreta como la rapidez que habría tenido un móvil si se hubiese movido con rapidez constante entre las t_0 y las t_1 horas durante su recorrido. Redacta la interpretación de la rapidez media del vehículo de monitoreo.
e. Con los datos anteriores, determina la rapidez media del vehículo de monitoreo de las 3 a las 5 horas:

$$v_m = \underline{\qquad}$$

f. Compara el valor de v_m con el valor de la pendiente de la recta secante a $p(t)$ que graficaste en ejercicio b, ¿son iguales o son distintos? De ser iguales, relaciona la pendiente de la recta que corta a una función en dos puntos de su gráfica, con la noción de rapidez media.

g. Determina la rapidez media del vehículo de monitoreo en los siguientes intervalos de tiempo:

t_0	t_1	$p(t_0)$	$p(t_1)$	$v_m = \frac{(p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0}$
3	5			
3,5	4,5			6
3,8	4,2			
3,9	4,1			
3,99	4,01			
3,999	4,001			

h. Como los intervalos de tiempo se van acortando cada vez más, conjetura el valor de la rapidez instantánea que llevaba el vehículo de monitoreo a las 4 horas de su recorrido.

Para hallar la rapidez instantánea como una función derivada, se deja fijo el tiempo t_0 y el tiempo posterior t_1 se puede escribir como $t_1 = t_0 + h$, donde h es un valor positivo. Luego, interesa conocer la rapidez media entre t_0 y t_1 cuando t_1 tiende a t_0 o también, como la tendencia de $t_0 + h$ cuando h tiende a cero; o sea, el límite de la rapidez media cuando $h \to 0$, lo que se escribe

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(t_0 + h) - p(t_0)}{t_0 + h - t_0}$$

i. Utiliza esta última expresión para determinar una expresión algebraica para la rapidez instantánea en t_0 del vehículo de monitoreo, calculando el respectivo límite:

t_0	t_1	$p(t_0)$	$p(t_1)$	$v_m = \frac{(p(t_1) - p(t_0)}{t_1 - t_0}$
t_0	$t_0 + h$			$\frac{p(t_0 + h) - p(t_0)}{t_0 + h - t_0}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(t_0 + h) - p(t_0)}{t_0 + h - t_0}$$

j. La expresión que hallaste es la expresión algebraica de la rapidez instantánea a partir de la función $p(t)$ de la distancia del móvil de monitoreo con su central, en el momento t. La expresión algebraica que hallaste es la función derivada (que se denota por $(d\,p(t))/dt$) de la función de distancia $p(t)$. Escribe la función derivada con la notación que usaremos:

$$\frac{d\,p(t)}{dt} =$$

k. Usando el resultado anterior, determina la rapidez instantánea del móvil de monitoreo a las siguientes horas (escribe los resultados en la unidad de medida correspondiente):

t (h)	0	1	2	3	4	$\frac{14}{3}$	5	6
$\frac{dp(t)}{dt}\, en\, \frac{km}{h}$	$\frac{dp(0)}{dt} =$	$\frac{dp(1)}{dt} =$	$\frac{dp(2)}{dt} =$	$\frac{dp(3)}{dt} =$	$\frac{dp(4)}{dt} =$	$\frac{dp\left(\frac{14}{3}\right)}{dt} =$	$\frac{d\,p(5)}{dt} =$	$\frac{d\,p(6)}{dt} =$

l. Compara el valor de la pendiente de la recta secante a $p(t)$ que pasa por $p(3{,}999)$ y $p(4{,}001)$, con el valor de $\frac{dp(4)}{dt}$. ¿Son parecidos o son muy distintos? De ser parecidos, relaciona la pendiente de la recta que corta a una función en dos puntos muy cercanos de su gráfica, con la noción de rapidez instantánea. Si la recta entre $p(3{,}999)$ y $p(4{,}001)$ es secante a $p(t)$, cuando los puntos están infinitamente cercanos a 4, la recta se convierte en tangente en el punto $(4, p(4))$. En este caso, ¿a qué elemento de la recta tangente corresponde el valor $\frac{dp(4)}{dt}$ =?

m. Compara el valor de la rapidez media a las 4 horas de viaje del móvil que conjeturaste en d, con el valor de la rapidez instantánea a las mismas 4 horas de viaje del móvil ($\frac{dp(4)}{dt}$) que obtuviste ahora, y conjetura la relación que hay entre rapidez media y rapidez instantánea.

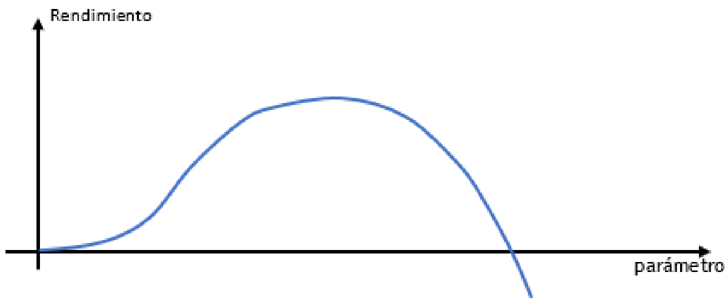
Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.**
OA c, d, 3° y 4° medio

Utiliza lo estudiado para responder estas preguntas:

a. ¿Cómo puedes interpretar la rapidez instantánea del móvil en el tiempo $t = 1$?
b. ¿Cómo puedes interpretar la rapidez instantánea del móvil en el tiempo $t = 6$?
c. ¿Cómo puedes interpretar la rapidez instantánea del móvil en el tiempo $t = \frac{14}{3}$? (compárala con la rapidez instantánea en $t = 0$).
d. Observa que, a partir de cierto valor, las rapideces instantáneas cambian de positivas a negativas. Formula una hipótesis acerca de lo que indica este comportamiento.
e. ¿En qué intervalo de tiempo el móvil va disminuyendo su rapidez y en cuál va aumentado?
f. ¿Cómo se puede interpretar el signo positivo y el signo negativo en los valores de la derivada en este caso?

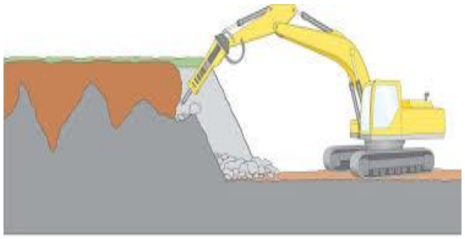
COMPRENDIENDO LA LEY DE TURGOT

El economista y político francés A.R.J. Turgot (1727 - 1781) encontró una ley que dice: Si aumenta y sigue aumentando un parámetro en la producción, mientras los demás parámetros queden invariantes, la producción inicialmente sube en su rendimiento, después disminuye su rendimiento y finalmente llega a resultados negativos. Un comportamiento similar se muestra en esta imagen.



a. Mediante herramientas tecnológicas digitales y utilizando deslizadores, diseña gráficos de polinomios de tercer grado para mostrar que pueden modelar un comportamiento similar a la “ley de Turgot”.

Una empresa minera está explotando un mineral. Los costos para la extracción se pueden modelar con una función C con $C(x) = 0{,}2x^3 - 4x^2 + 22x + 6$, en la cual x es la cantidad en toneladas del mineral diariamente extraído y C son los gastos en la unidad de 1 millón de pesos. Los ingresos I de la venta del mineral por tonelada, también en la unidad de 1 millón de pesos, siguen la función lineal $I(x) = 10x$.

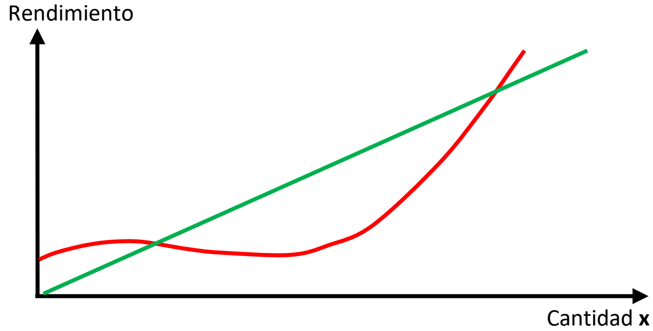


a. Elabora la ecuación de la función G que representa las ganancias.
b. Confecciona el gráfico de la función de las ganancias G en el intervalo de toneladas de $[0;\ 18]$ y determina aproximadamente, en el gráfico, la cantidad extraída para la cual se genera un mínimo y un máximo de las ganancias G.
c. Verifica algebraicamente con la noción de derivadas, las cantidades x_1 y x_2 para las cuales se genera un mínimo y un máximo de las ganancias.
d. Confecciona el gráfico de la derivada de G' de G y verifica la coincidencia entre las actividades anteriores.
e. Por una sobreoferta y debido a otros indicadores económicos en el mercado internacional, los ingresos por tonelada bajan a 3 millones de pesos. Determina gráficamente el intervalo de extracción en el cual se genera ganancias.

IDENTIFICANDO GRÁFICAMENTE COSTOS, INGRESOS Y GANANCIAS

En el gráfico, la variable y representa los costos y los ingresos de una producción. Los jóvenes deben contestar las preguntas y razonarlas.

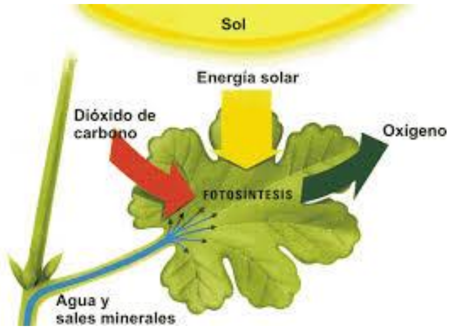
- ¿Cuál de los gráficos representa los costos y cuál los ingresos?
- ¿Hay costos fijos?
- ¿Dónde hay máximos, mínimos e inflexión? Marcar los puntos.
- ¿En qué intervalo hay ganancias en la producción? Marcar el intervalo en el eje X.

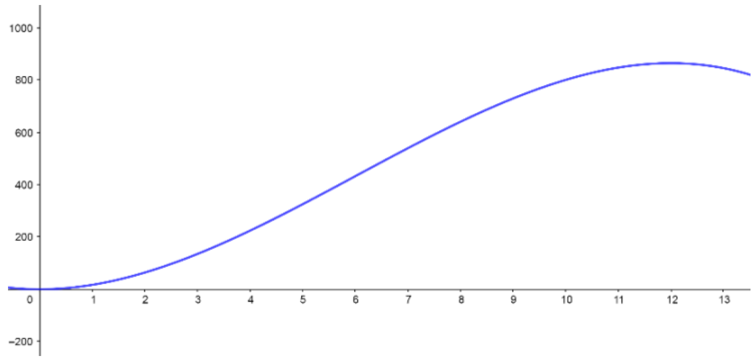


INTERPRETANDO GRÁFICAMENTE LA FOTOSÍNTESIS

La fotosíntesis se genera en las hojas de las plantas y su producto es oxígeno, uno de los elementos fundamentales para la vida. En la imagen se muestra el gráfico de una función que modela aproximadamente la producción diaria de oxígeno de un árbol.

- La función representa un polinomio de tercer f grado con la ecuación $f(t) = at^3 + bt^2$.
- La función f representa el volumen total del oxígeno producido en litros hasta la hora indicada.
- La variable t representa el tiempo en horas que han pasado desde la salida del sol.





a. Determina los parámetros a y b con la siguiente información:
   - En el instante $t = 6$ horas después de la salida del sol, se han acumulado 540 litros de oxígeno producido.
   - En el mismo instante se empieza a cambiar la tendencia del oxígeno producido.

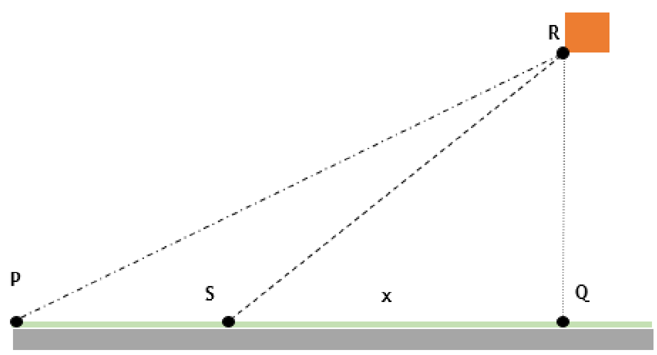
Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

b. Con los resultados de la actividad anterior y utilizando herramientas tecnológicas digitales, elabora el gráfico de la función f.

c. Determina algebraicamente el punto máximo de la función f.

DERIVANDO UNA COMPUESTA EN UN CONTEXTO DE DESAGÜES

Una empresa de construcción de conductos de agua ganó la licitación de una obra que conecte una casa rural a un servicio del agua y desagüe ya existente, que está lejos de la casa. El dibujo esquemático muestra la ubicación de la casa, cuyo terreno se extiende hacia una calle vecinal dibujada por la franja gris.



El servicio existente de agua y desagüe llega hasta el punto P, al lado de una calle que sigue en dirección Q. La casa R tiene la distancia $\overline{QR}$ más corta de la calle de 300m. El segmento $\overline{PQ}$ tiene el largo de $500\ m$. Debido a la situación geológica del suelo, los costos estimados por metro corriente de la nueva conexión directamente al lado de la calle son de 3UF, y por el terreno hacia la casa son de 6UF. Como la empresa quiere maximizar las ganancias, se modela la conexión determinando el punto S al lado de la calle, en el cual se debe iniciar la bifurcación del conducto hacia la casa rural.

a. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado directo $\overline{PR}$.

b. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado compuesto $\overline{PQ}$ u $\overline{QR}$.

c. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado compuesto $\overline{PS}$ u $\overline{SR}$ con $x = 450m$.

d. Determina los costos que se generaría en la construcción mediante el trazado compuesto $\overline{PS}$ u $\overline{SR}$ con $x = 350m$.

e. Elabora la ecuación de la función C, que modela los costos de la conexión a la casa en dependencia de x.

f. Determina la derivada C' de la función C, aplicando la regla de la función compuesta.

g. Determina el valor de x_{min} para el cual los costos lleguen a un mínimo.

h. Conjetura acerca de la condición bajo la cual la conexión directa $\overline{PR}$ del conducto sea la más barata. Argumenta y comunica la conjetura.

i. Si los costos en la construcción del conducto a través del terreno aumentan más y más en comparación con los costos al lado de la calle, ¿en qué dirección se mueve el lugar x_{min} en el dibujo esquemático que determina el punto S de la bifurcación? Explica y argumenta sin realizar cálculos.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Para la verificación algebraica, es importante que los alumnos resuelvan ecuaciones hasta el cuarto grado, aplicando la factorización de una suma con potencias para obtener un producto de dos expresiones algebraicas potenciales con el exponente 2 como el de mayor grado. Así se reducen las ecuaciones a ecuaciones cuadráticas. Este proceso no debe hacerse necesariamente de forma manual, hay que dar la posibilidad de elegir entre cálculos manuales y digitales.

2. Se sugiere motivar a los estudiantes para que ellos mismos encuentren la ecuación de la función de las ganancias a partir de los costos y de los ingresos. Se pueden apoyar en el gráfico y considerar valores de una situación real, modelando la curva y guiándose por la ley de Turgot.

3. Se recomienda hacer el gráfico para visualizar la situación en todos los casos de aplicación. Antes de determinar algebraicamente las derivadas de $\boldsymbol{G}'$ y $\boldsymbol{G}''$, también es importante que ubiquen en el gráfico de $\boldsymbol{G}$ los puntos extremos y de inflexión. Esto les permite detectar errores en los cálculos y les ayuda a explicar los resultados de forma visual y algebraica.

4. Para que recuerden la función compuesta, se sugiere que, al iniciar la actividad, elaboren gráficos de una función cuadrada compuesta con una función lineal y que calculen la derivada de una función compuesta.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones.
   - Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos y puntos de inflexión.
   - Resuelven problemas de optimización en contextos diversos, como geometría, ciencias y economía.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Información sobre la derivada de una función en un punto
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.decarcaixent.com/actividades/mates/derivadas/derivadas2.htm
- Applet para investigar algunas funciones polinómicas
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/polynomial/cubic.html
- Artículo sobre las derivadas en economía
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.scribd.com/document/246639834/Derivadas-en-economia
- Derivada de la función compuesta
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funcion_derivada/derivada_3.htm
- Método para derivar la raíz cuadrada de x
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikihow.com/derivar-la-ra%C3%ADz-cuadrada-de-X
- Información sobre máximos, mínimos y puntos de silla
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/optimizing-multivariable-functions/a/maximums-minimums-and-saddle-points

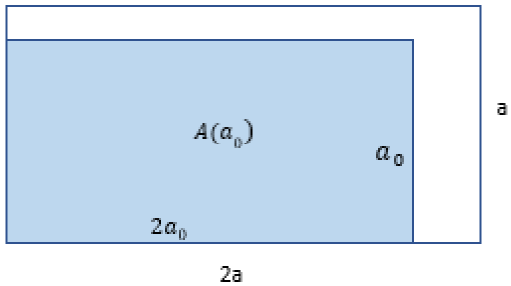
Actividad de evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 3. Modelar situaciones o fenómenos que involucren rapidez instantánea de cambio y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. **OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados. **OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.	• Identifican la rapidez instantánea con la forma temporal de la razón instantánea de un cambio. • Resuelven problemas relacionados con la rapidez instantánea de un cambio. • Argumentan sus respuestas, utilizando la derivada de funciones. • Verifican algebraica y gráficamente las derivadas de funciones conocidas. • Resuelven problemas que implican determinar derivadas de funciones, funciones compuestas, máximos, mínimos y puntos de inflexión. • Resuelven problemas de optimización en contextos diversos, como geometría, ciencias y economía.

Duración: 12 horas pedagógicas.

A continuación, se muestra algunas actividades que pueden usarse como ejemplos de evaluaciones para la unidad 3, cada una por sí misma o en conjunto. También se puede hacer un portafolio de problemas donde el estudiante trabaje de forma personal por dos semanas y elija cuáles de esos problemas quiere entregar para evaluación. Los requerimientos de entrega y criterios de evaluación deben priorizar las habilidades de representar, modelar y resolver problemas trabajados durante la unidad. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible. Se propone una rúbrica para un proceso de modelación; así, el estudiante puede ver sus progresos y ubicarse en algunos niveles de logro.

1. Para valores de $a > 0$, la función A representa el cambio del área A de un rectángulo en dependencia del lado a. El ancho del rectángulo se representa por a y el largo es el doble del ancho.



   a. Elabora la expresión algebraica $\frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)}$ de la razón del cambio del área del rectángulo considerado.

   b. Completando la tabla, conjetura acerca de la razón instantánea $(a \to a_0)\ \frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)}$ del cambio de A para $a_0 = 2$

(Si no se logra determinar el resultado, seguir con $\frac{2a^2-8}{a-2}$)

a	1	1,5	1,9	1,99	2	2,01	2,1	2,5	3
$\frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0)}$					¿?				

2. Se considera la función f con $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{para } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{para } x < 1 \end{cases}$

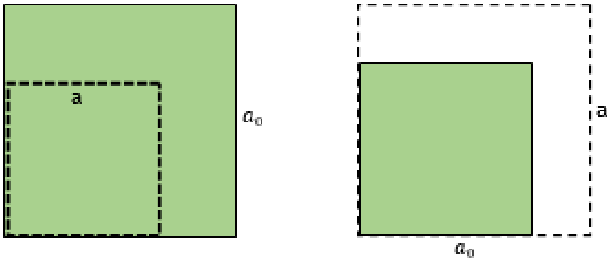
   a. Dibuja el gráfico de f.

   b. Conjetura acerca de la razón instantánea en el lugar $x_0 = 1$.

   c. Verifica la conjetura mediante procedimiento simbólico.

Relacionar la rapidez instantánea del cambio con el cambio mismo

3. Para valores de $a > 0$, la función $A(a) = a^2$ representa el cambio del área A de un cuadrado en dependencia del lado a.

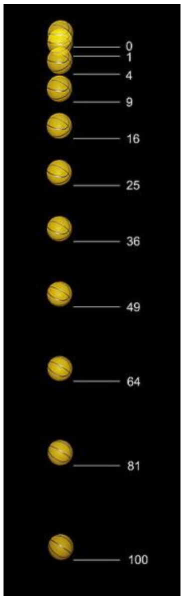


a. Completando la tabla, conjetura acerca de la razón instantánea $(a \to a_0)\ \frac{A(a)-A(a_0)}{(a-a_0\ )} = \frac{a^2-25}{a-5}$ cambio de A para $a_0 = 5$.

A	4	4,5	4,9	4,99	5	5,01	5,1	5,5	6
$\frac{a^2-25}{a-5}$					¿??				

b. Verifica la conjetura mediante la derivada $A´(5)$ del cambio del área del cuadrado.
c. ¿Qué significado geométrico tiene esta razón instantánea?

4. En la foto estroboscópica, se observa la caída “casi” libre de una pelota de basquetbol. Al inicio de la caída, las velocidades no son muy altas y se puede despreciar la resistencia del aire.



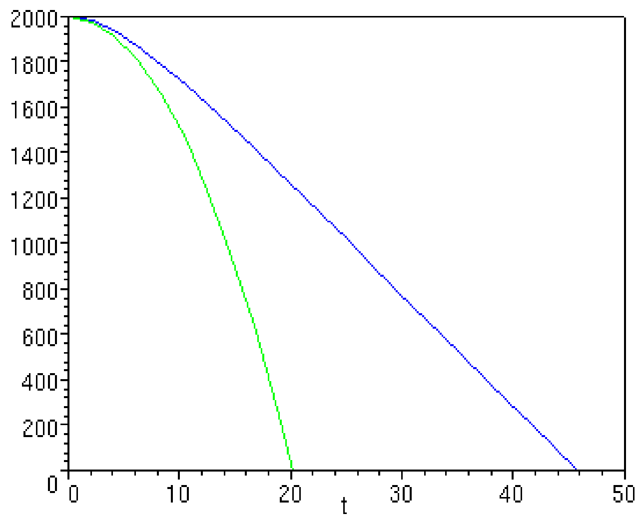
Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

La función f que modela el desplazamiento de un cuerpo versus el tiempo durante una caída libre es una función cuadrática del tiempo:

$$f(t) = h - at^2$$

- h es la altura desde la cual cae un cuerpo.
- t representa el tiempo en segundos.
- $a = \frac{g}{2}$ donde g es la constante de gravedad 9,81 y que puede ser considerada con su valor aproximado $g \cong 10$ y por lo tanto se puede considerar $a \cong 5$.

La imagen representa los gráficos de un cuerpo que cae desde una altura de $2\,000\ m$. La línea verde representa una caída libre y la azul representa la caída del mismo cuerpo, considerando la resistencia del aire.



Curva verde: caída libre, curva azul: caída con resistencia del aire

a. Según el gráfico de la caída libre, la altura inicial es $2\,000m$ y en el instante $x = 20s$ es $0m$. Determina la ecuación de la función que representa la caída libre.
b. Determina la rapidez instantánea del cuerpo en el instante $x_0 = 10$, bajo el supuesto de la "caída libre", aplicando la derivada f' de la función f.
c. Determina, mediante el gráfico azul, las velocidades medias en los intervalos de tiempo $[20,30]$ y $[30,40]$. La función se denomina con la letra r.
d. Considerando los resultados de c, ¿qué se puede concluir? Explica la respuesta.
e. Determina la ecuación de una función g cuyo gráfico también es parábola con el mismo vértice $S(0;\ 2\,000)$, pero con el intercepto $B(46;\ 0)$ con el eje X.
f. Mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra, dibuja ambas parábolas, compáralas con el gráfico azul y conjetura acerca de la validez de ambas funciones para modelar la caída bajo la influencia de la resistencia del aire.
g. Con los datos del gráfico azul, elabora un gráfico esquemático que represente la rapidez instantánea de la caída bajo la influencia de la resistencia del aire.

Modelamiento de una situación del ámbito de la economía

5. La editorial de una revista técnica tiene $25\,000$ lectores y por cada lector gana anualmente $\$4\,000$. El directorio decide aumentar las ganancias totales. Para modelar esta situación, se puede considerar dos medidas en la venta de su producto.

   Primero: reducir las ganancias anuales por lector y atraer simultáneamente más lectores. Segundo: subir las ganancias anuales por lector y tomar en cuenta una pérdida de lectores.

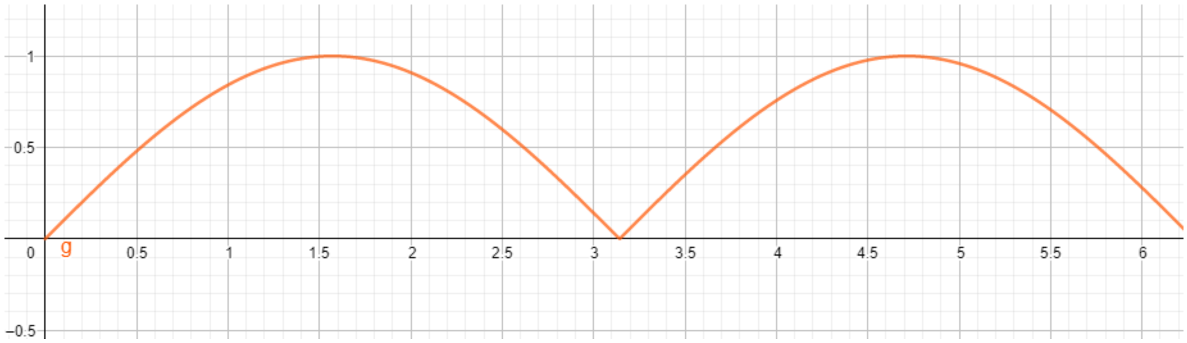
   a. ¿Por qué la primera medida podría ser la más adecuada? Justifica tu respuesta, utilizando valores de una tabla y la ley de Turgot.
   b. Reducir las ganancias por lector significa una pérdida y, por otra parte, que aumenten los lectores, aunque con base en una ganancia menor. ¿Dirías que esto va en dirección opuesta? ¿Qué se puede concluir para la meta de la editorial?
   c. Se asigna a la ganancia total de la empresa la variable f, a la ganancia por lector la variable g y al número de los clientes la variable c. Elabora en general la ecuación que representa la relación entre f, g y c.
   d. Considera los datos iniciales y supón un aumento en 100 lectores, si se rebaja la ganancia por lector en $1 000; sobre esa base, elabora la ecuación de la función que modela la situación. La variable x representa $1 000.
      (Resultado intermedio $f(x) = 1\,000\,000 + 15\,000x - 1\,000\,000\mathrm{x}^2$).
   e. Dibuja el gráfico y establece gráficamente la rebaja x_0 para la cual se logra una ganancia máxima total. Determina esta ganancia total.
   f. Determina la derivada f' de la función f para encontrar máximos o mínimos e interpreta según el problema.

Para la tarea "Modelamiento de una situación del ámbito de la economía", puedes usar la siguiente rúbrica de evaluación:

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Varían parámetros de un modelo y comparan resultados.	Elabora una tabla con datos según la cantidad de lectores, para ejemplificar los dos casos iniciales del problema.	Elabora una tabla con datos según la cantidad de lectores, para ejemplificar uno de los dos casos.	Elabora una tabla con valores que corresponden a otra situación.
Utilizan la Ley de Turgot para justificar fenómenos de la economía.	Basado en los valores de la tabla junto con la Ley de Turgot, argumenta para justificar sobre cuál de las dos estrategias conviene aplicar.	Da una sola justificación sobre cuál de las dos estrategias conviene aplicar.	Da una justificación que es independiente de la Ley de Turgot o de la tabla de valores.
Modelan situaciones por medio de funciones y la noción de razón de cambio.	Relaciona las variables ganancia total con ganancias por lector y cantidad de lectores, mediante una composición de funciones.	Relaciona las variables ganancia total con ganancias por lector y cantidad de lectores, mediante operaciones diferentes a la composición de funciones.	Describe verbalmente la relación de las variables, sin utilizar una operación matemática.
Determinan puntos mínimos, máximos y de inflexión utilizando la derivada de funciones.	Relaciona la derivada con los conceptos de máximo o mínimo de la función.	Determina la derivada de la función.	Aplica procedimientos con la función que son distintos del cálculo de la derivada.
Analizan la función y su comportamiento para dar respuestas a situaciones.	Interpreta la derivada y los valores encontrados según el contexto del problema presentado.	Interpreta la derivada y los valores encontrados respecto de algunas partes del contexto del problema.	Interpreta la derivada y los valores encontrados con información que está fuera del contexto.

Conjeturar acerca de la existencia de la razón instantánea de un cambio como límite de pendientes de secantes

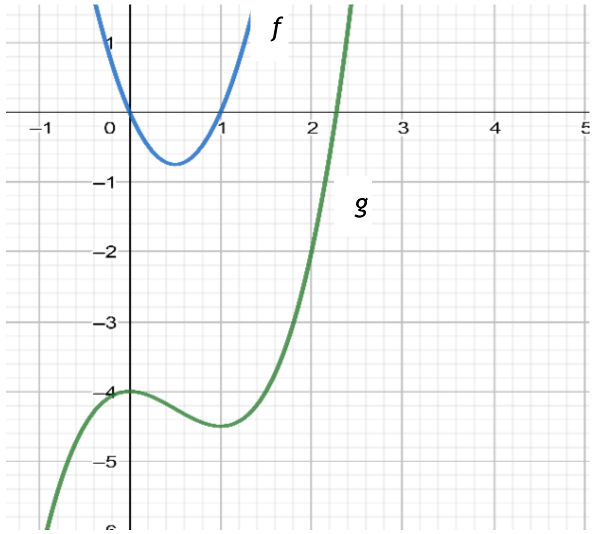
6. Se considera la función f definida por $f\ (x)\ =\ |sen\ x|$, como muestra el gráfico:



   a. Mediante el gráfico, determina aproximadamente la razón media del cambio en los intervalos $[2{,}5, \pi]$, $[3, \pi]$, $[\pi, 3{,}3]$, $[\pi, 3{,}78]$.
   b. Conjetura acerca de si existe una razón instantánea en el punto $S(\pi, f\,(\pi))$.
   c. Elabora la ecuación de la función f sobre los intervalos $[0, \pi]$ y $]\pi, 2\pi[$.
   d. Elabora la ecuación de la función f' sobre los intervalos $[0, \pi]$ y $]\pi, 2\pi[$.
   e. Realiza el siguiente procedimiento para límites: $\lim\limits_{h \to 0} f'(\pi - h)$ y $\lim\limits_{h \to 0} f'(\pi + h)$. Con el resultado, verifica o rechaza la conjetura de la actividad b.
   f. Dibuja el gráfico de la derivada f' y comenta el comportamiento de f' en el lugar $x_0 = \pi$.

Relacionar funciones con sus derivadas.

7. La imagen muestra el gráfico de dos funciones f y g, una de las cuales es derivada de la otra.
   a. Conjetura: ¿Cuál de las funciones es la derivada de la otra?
   b. Argumenta tu decisión con al menos 4 propiedades entre f y g.



8. Completa la tabla con las informaciones relacionadas entre función y su derivada.

	Ordenada de un punto en el gráfico de f	Recorrido de un movimiento en el instante x	Crecimiento de una magnitud en el instante x	El volumen de una esfera con el radio x	El trabajo físico desde el inicio hasta el desplazamiento x
$f(x)$					
$f`(x)$					

9. Con base en la tabla, elabora en forma esquemática el gráfico de la función g.

$g(x)$	aumentando	aumentando	aumentando	constante	disminuyendo	disminuyendo
$g'(x)$	aumentando	constante	disminuyendo	¿?	disminuyendo	constante

Responde:

a. ¿Cuántas veces se puede derivar una función potencia con exponentes positivos hasta que la derivada no se cambia? Explica la respuesta.

b. Determina pendientes de tangentes en el gráfico de funciones en un punto $P_0(x_0, f(x_0))$.

10. Se considera una parábola con la ecuación $f(x) = ax^2 + b$. La parábola tiene el punto $P(2; 5)$, y la pendiente de la tangente en el punto $Q(2;\ f(2))$ es $m = 1$.

a. Elabora la ecuación de la parábola.

b. Grafica la parábola en un sistema de coordenadas.

11. Un polinomio de tercer grado tiene la ecuación de $f(x) = x^3 - tx^2 + 1$.

a. Desafío**:** Determina el valor del parámetro t de manera que la tangente en el punto de inflexión pase por el origen $O(0; 0)$ del sistema cartesiano de coordenadas (resultado parcial para seguir con la actividad: $t = 3$).

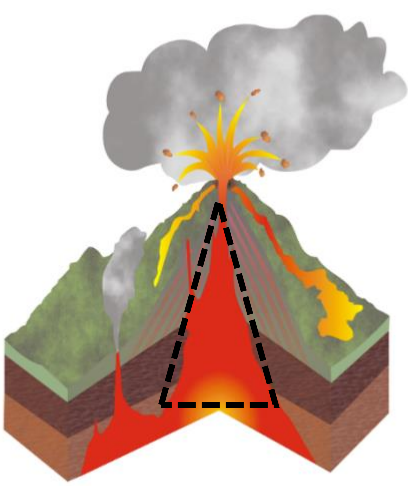
b. Establece los puntos máximos, mínimos y de inflexión para el gráfico de f.

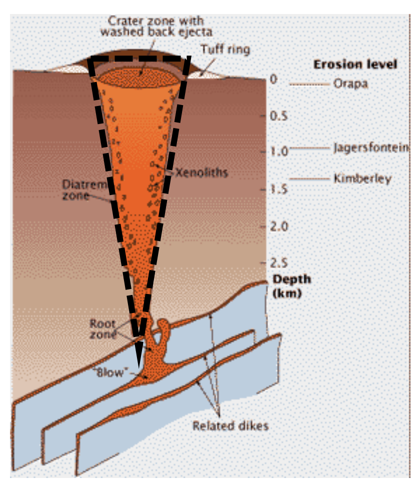
c. Dibuja el gráfico de f sobre el intervalo de $[-3{,}5;\ 1]$

d. Con el valor de $t = 3$, elabora la ecuación de la tangente en el punto de inflexión y verifica que la tangente es una recta que pasa por el origen $O(0; 0)$.

Concepto de la derivada como función que representa la razón instantánea de cambio

12. Las “chimeneas de lava” de los volcanes pueden tener diferentes formas –como tubos, conos o conos invertidos–, dependiendo de las formaciones geológicas.





a. Si se llenan las chimeneas con un caudal constante de lava, ¿cuál de los siguientes gráficos representa la altura de la columna de lava en la chimenea, en dependencia del tiempo? Razona la respuesta.

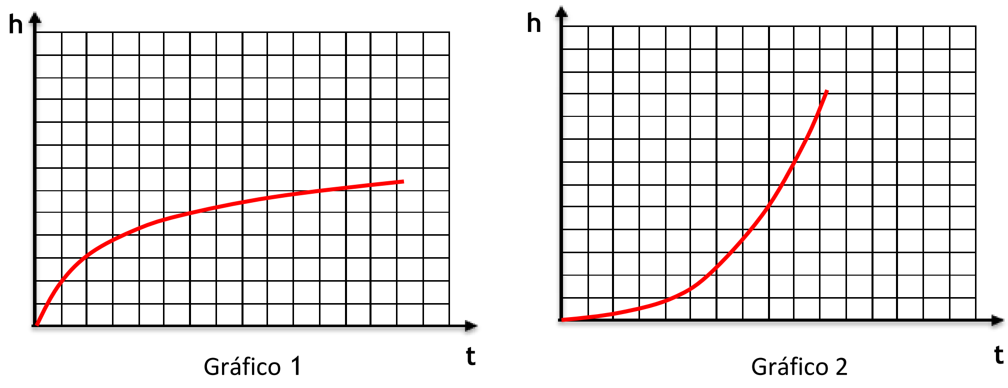
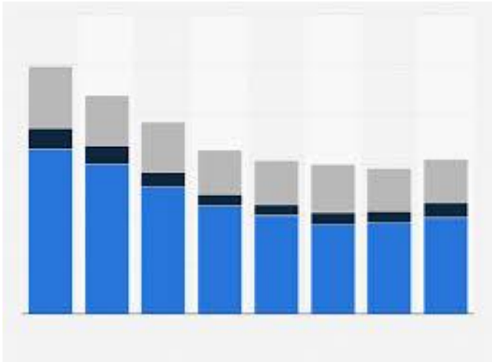


Gráfico 1 Gráfico 2

b. Determina para el volcán tipo "Kimberley" (cuya chimenea parece un cono invertido), la ecuación de la función que representa la altura h en dependencia del tiempo t, si se considera un caudal constante de la lava afluente. Los datos de la "chimenea de lava" son:
Altura total de la chimenea: $H = 2km$, radio máximo $R = \frac{1}{16}H$ y caudal constante de la lava afluente en unidad u de tiempo $V = 1\,000\,\frac{m^3}{u}$.
c. Elabora el gráfico de la función h.
d. Determina la ecuación de la función h', que representa la razón instantánea del cambio de la altura de lava en la chimenea.
e. Determina la razón instantánea del cambio de la altura en el momento de llegar a la altura H.

Determinar valores extremos e inflexión en contextos de economía



13. El volumen V de ventas del año pasado de una empresa grande del rubro de energía, se puede representar aproximadamente por la siguiente función:

$$V(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 - 200$$

a. La variable x representa el tiempo en meses y los valores numéricos se entregan en miles de millones, es decir multiplicados por $1 000 000 000.
b. Confecciona el gráfico con herramientas digitales como GeoGebra.
c. Determina gráficamente en qué meses el volumen de ventas está máximo o mínimo, o en cuáles cambia la tendencia de las ventas.
d. Establece algebraicamente, mediante la noción de derivada, los meses con máxima o mínima venta o de cambio de tendencia, y contrástalos con las soluciones gráficas.
e. Si el volumen de ventas siguiese igual, ¿se podría contar con más extremos o cambios de tendencia? Argumenta matemáticamente y comunica la respuesta.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Elaboran expresiones algebraicas, utilizando la noción de razón de cambio en situaciones geométricas, científicas y económicas.			
Conjeturan sobre la razón instantánea del cambio en un punto.			
Verifican de forma algebraica la razón instantánea en un punto, basándose en los límites laterales.			
Explican el significado de la razón instantánea para contextos geométricos.			
Modelan situaciones por medio de funciones y la noción de razón de cambio.			
Varían parámetros de un modelo y comparan resultados.			
Elaboran modelos, considerando condiciones iniciales diferentes.			
Comparan modelos y eligen el más adecuado para la situación dada.			
Representan la derivada como límites de pendiente de secantes.			
Conjeturan sobre la derivada de una función, utilizando las características de ambas.			
Describen una función y su derivada según sus características de comportamiento.			
Determinan puntos mínimos, máximos y de inflexión, utilizando la derivada de funciones.			
Analizan la función y su comportamiento para dar respuestas a situaciones.			

Unidad 4

Unidad 4: Comprender la integral como proceso de reversibilidad y cálculo de áreas

Propósito de la unidad

Los estudiantes comprenden que la integral es el proceso inverso de derivar y, además, sirve para encontrar el área bajo la curva. Se comienza con funciones conocidas, sus derivadas y antiderivadas, para continuar con la integral definida y con aplicaciones en geometría, ciencias o economía. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿Cómo se puede describir la relación entre el cambio y la superficie? ¿Cómo se puede describir las situaciones de cambio por medio del área?

Objetivos de Aprendizaje

OA 5.
Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

Actividad 1: Describiendo la integral definida como área bajo la curva

PROPÓSITO

El primer objetivo es que los alumnos descubran –a partir del límite de una serie de rectángulos inscritos y circunscritos del área debajo una curva– la relación entre la integral definida y la antiderivada de funciones potencia o raíz cuadrada. Se espera que comparen los resultados del trabajo colaborativo y encuentren la regularidad en la integral definida $\int_0^1 f(x)dx = [F(x)]$. Se pretende que resuelvan algebraicamente para determinar las funciones de derivadas y antiderivadas. Además (en el contexto de generar energía), se busca que recuperen gráficamente el cambio de una magnitud a partir de su forma en la razón instantánea, y que descubran una regularidad entre las ecuaciones de ambas funciones: constante → función lineal y función lineal → función cuadrática.

Objetivos de Aprendizaje

OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 18 horas pedagógicas

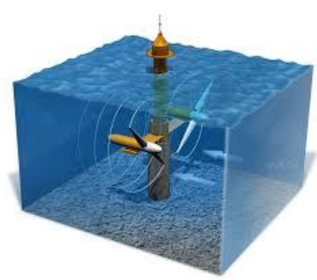
DESARROLLO

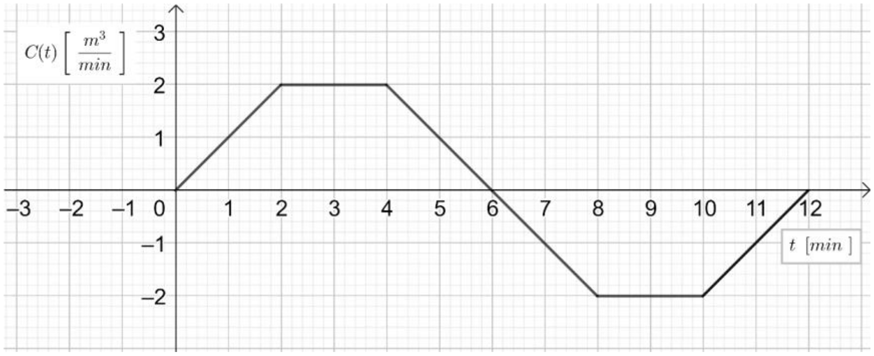
DESCRIBIENDO EL COMPORTAMIENTO DEL CAMBIO DE UNA MAGNITUD A PARTIR DE LA RAZÓN INSTANTÁNEA

1. Completa la tabla que pide determinar la ecuación de funciones f, derivada f', f'' y posible antiderivada F, y compárala con la de tu compañero.

Posible antiderivada F	Función f	Primera derivada f´	Segunda derivada f´´
	$f(x) = x^1$		
	$f(x) = a$ $(a \neq 0)$		
		$f'(x) = c$ $(c \neq 0)$	
	$f(x) = x^2$		
		$f'(x) = x^2$	
			$f''(x) = 0$
$F(x) = x^3 + x^2 + x$			
	$f(x) = \sqrt{x}$		
	$f(x) = e^x$		

2. En un laboratorio oceanográfico hidráulico se efectúa pruebas con corrientes de agua, para investigar la generación de energía eléctrica mareomotriz. En un experimento, inician la rotación de turbinas para estudiar la corriente de agua en una cámara. El gráfico representa la razón instantánea C del volumen de agua entrando en la cámara o saliendo de ella.





Conexión interdisciplinaria: **Ciencias para la ciudadanía.** OA c, d, 3° y 4° medio

a. Considerando los tramos del gráfico en los intervalos $[0,2],],[2,4]$, $[4,6]$, $[6,8]$, $[8,10]$ y $[10,12]$, elaboren la ecuación de la razón instantánea representada en los nuevos sistemas de coordenadas, empezando en el instante $t = 0$. Completen la siguiente tabla en sus cuadernos.

Gráfico	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Ecuación de la razón instantánea C						

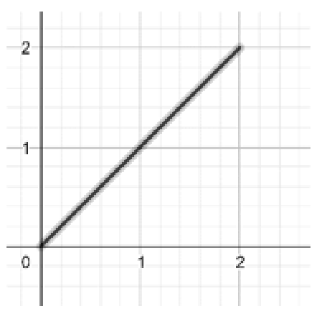


Figura 1

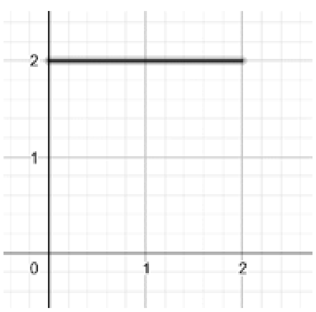


Figura 2

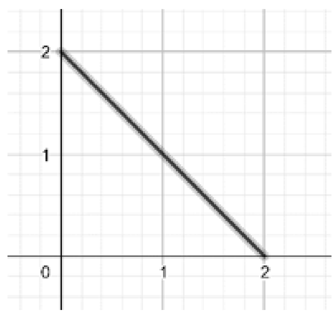


Figura 3

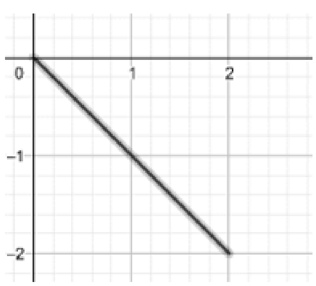


Figura 4

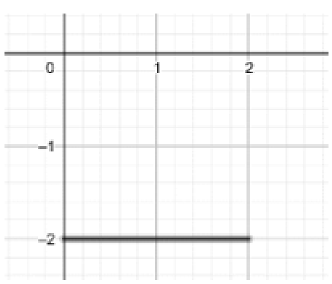


Figura 5

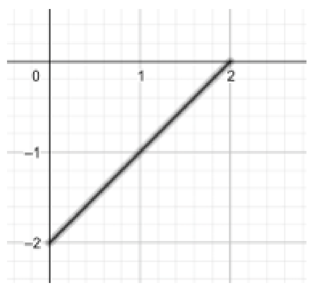


Figura 6

b. ¿Por qué el área debajo el gráfico representa el volumen del agua que entra en la cámara o sale de ella? Compartan su respuesta con un compañero.

c. ¿Cómo se nota en el gráfico, en qué fase entra el agua o sale el agua? Dibujen por separado sus respuestas y luego compartan las ideas.

d. Determinen mediante el gráfico, el volumen del agua que entra o sale de la cámara según los intervalos de $[0;\ 2]$. Completen la tabla.

Gráfico	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Volumen sobre [0, 2]						

e. Determinen la ecuación de la función que representa el crecimiento o el decrecimiento del volumen V en la cámara. Completen la tabla.

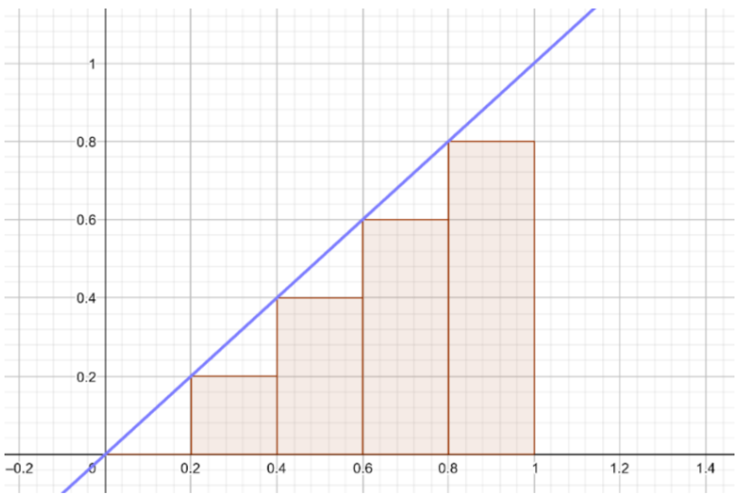
Gráfico	Figura 1	Figura 2	Figura 3	Figura 4	Figura 5	Figura 6
Ecuación del crecimiento o decrecimiento del Volumen V						

f. ¿Qué regularidad hay entre los tipos de funciones de la razón instantánea C y el cambio del volumen V? Expliquen su respuesta a un compañero.

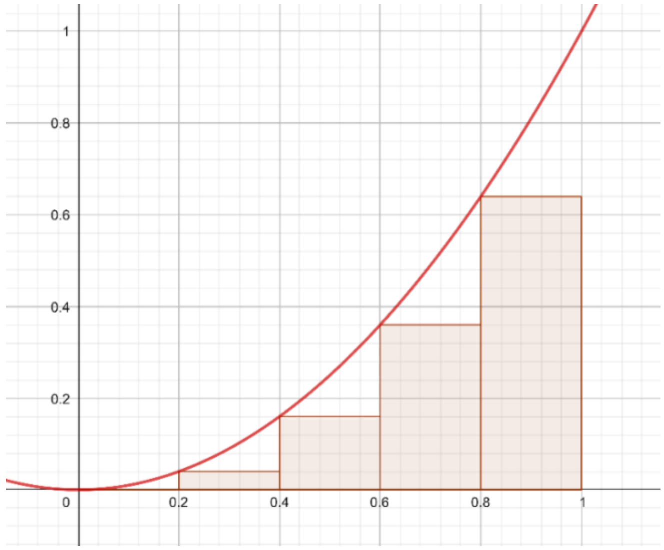
DESCUBRIENDO LA REGULARIDAD ENTRE LA FUNCIÓN QUE DELIMITA UN ÁREA Y LA FUNCIÓN QUE DETERMINA EL ÁREA BAJO EL GRÁFICO

1. A continuación, se muestra los gráficos de cuatro funciones:

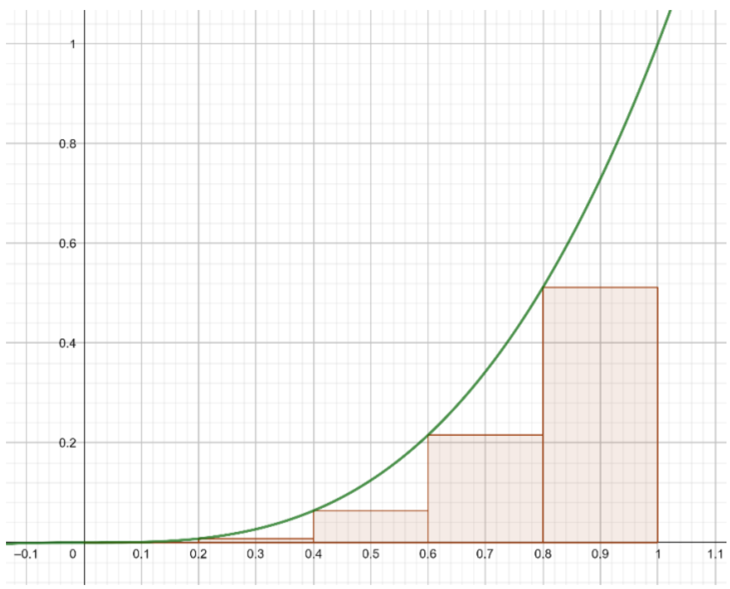
$\boldsymbol{f(x) = x^1}$



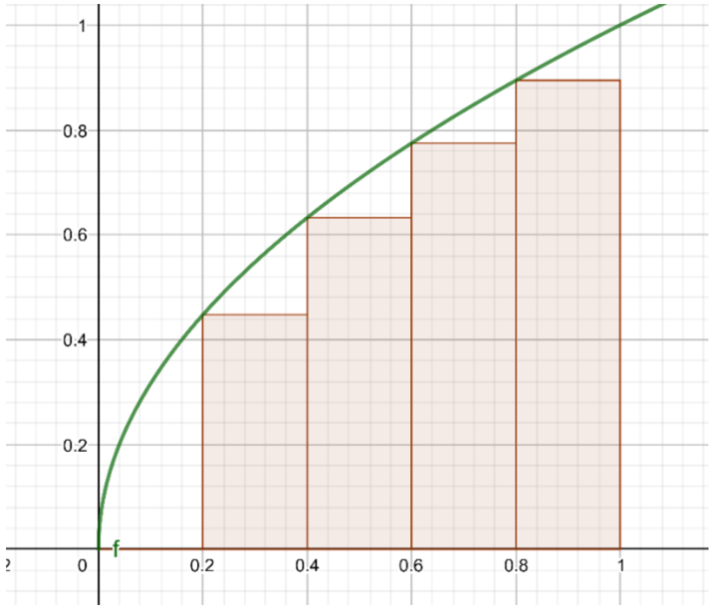
$\boldsymbol{g(x) = x^2}$



$h(x) = x^3$



$k(x) = \sqrt{x}$



Determinen el área debajo del gráfico sobre el intervalo $[\mathbf{0};\mathbf{1}]$ para todas las funciones.
Sugerencia: aproximar una serie de áreas de rectángulos inscritos con el mismo ancho $\boldsymbol{x_n - x_{n-1} = \Delta x = \frac{1}{n}}$, cuya altura es $\boldsymbol{f(x_{n-1})}$.

2. Se considera la función f con $f(x) = x^1$.

   a. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico en el intervalo [0; 1] con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.

   b. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico en el intervalo [0; 1] con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.

   c. Apliquen la fórmula del área del triángulo para verificar que el límite de la serie de las áreas de los rectángulos inscritos es $\frac{1}{2}$.

   d. Al desarrollar la expresión algebraica de la serie de las áreas, resulta:

   $A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1)$.

   Para la suma (0 + 1 + 2 +… + n-1), se tiene la expresión algebraica $\frac{(n-1)\cdot n}{2}$.

   Determinen el límite $\lim_{n\to\infty} A_n$.

   e. Considerando que el límite del área bajo el gráfico en el intervalo [0; 1], se puede representar por $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2$, ¿cómo se puede representar –mediante una expresión algebraica– el área sobre el intervalo [0; x] y con las alturas $f(x_0) = {x_0}^1$ de los rectángulos en cada lugar x_0?

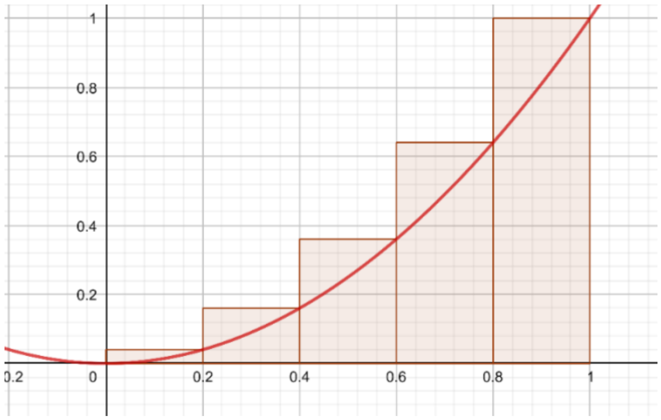
3. Se considera la función g con $g(x) = x^2$.

   a. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico en el intervalo [0; 1] con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.

   b. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo [0; 1] con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.

   c. Cada rectángulo tiene como ancho $(x_n - x_{n-1})$ y en cada lugar x_0 la altura es $g(x_0) = {x_0}^2$. ¿Cómo se puede representar el área sobre el intervalo $[0;\ x]$ mediante una expresión algebraica?

4. Se considera la función g con $g(x) = x^2$ y se aproxima el área bajo el gráfico mediante rectángulos circunscritos.



a. Al desarrollar la expresión algebraica de la serie de las áreas, resulta:

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2).$$

Para la suma $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$, se tiene la expresión algebraica: $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Determinen el límite $\lim_{n \to \infty} A_n$.

b. Comparen los resultados anteriores: ¿hay diferencias o similitudes? Expliquen.

5. Se considera la función *h* con $h(x) = x^3$.

a. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo [0;1] con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.

b. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área debajo el gráfico sobre el intervalo $[0;\ 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.

c. Al desarrollar la expresión algebraica de la serie de las áreas, resulta:

$$A_n = (\frac{1}{n})^4 \cdot (0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3)$$

Para la suma de $(0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3)$, la expresión algebraica es $\frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

Determinen el límite $\lim_{n \to \infty} A_n$.

Cada rectángulo tiene como ancho $(x_n - x_{n-1})$ y en cada lugar x_0 la altura es $\mathrm{h}(x_0) = {x_0}^3$. ¿Cómo se puede representar el área sobre el intervalo $[0;\ x]$ mediante una expresión algebraica?

6. Considerando los resultados de las actividades anteriores, ¿qué regularidad se puede constatar entre la función f, cuyo gráfico delimita el área, y la función F que representa el área sobre el intervalo $[0;\ x]$? Verifiquen con:

   a. $f(x) = x^1;\ F(x)\ =$ ______________________________

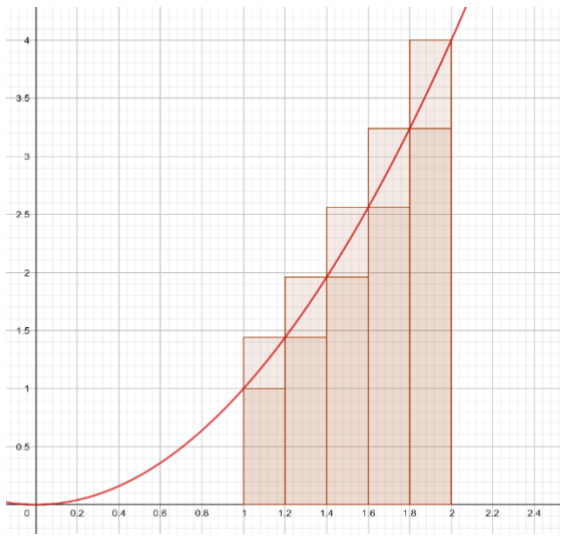
   b. $g(x) = x^2;\ G(x)\ =$ ______________________________

   c. $h(x) = x^3;\ H(x)\ =$ ______________________________

   d. Generalicen para $r(x) = x^m, m\ \in \mathbb{N}\ R(x)\ =$ ______________________________

   e. ¿Cuáles son las funciones que resultan, si se derivan las funciones F, G, H y R?

7. Se considera la función g con $g(x) = x^2$. La imagen muestra una aproximación inferior y superior del área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[1;\ 2]$.



   a. Calculen una aproximación inferior y superior del área marcada.

   b. Utilizando un graficador digital, se puede encontrar más aproximaciones; redondeen a las centésimas y represéntenlas en una tabla.

   c. Conjeturen acerca del límite de la serie de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos, y represéntenlos como fracción.

d. Verifiquen que el límite conjeturado se puede obtener mediante la función *G*, determinando la diferencia *G*(2) – *G*(1).

rectángulos	inferior	superior
20	2,26	2,41
50	2,30	2,36
100	2,32	2,35
200	2,33	2,34

8. Se considera la función k con $k(x) = \sqrt{x}$.

   a. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$.

   b. Determinen con una calculadora, aproximadamente el área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[0; 1]$ con $\Delta x = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$.

   c. Suponiendo que la regularidad entre las funciones f y F existiría también para "funciones potencias" con exponentes fraccionarios:

   - ¿Qué función F puede resultar para la función f con $f(x) = \sqrt{x}$?
   - ¿Qué número se puede esperar como límite del área sobre intervalo $[0; 1]$?

DETERMINAR EL ÁREA BAJO UNA CURVA

1. Se considera la función l con $l(x) = \frac{2}{x^2}$, cuyo gráfico se muestra, junto con una aproximación superior e inferior del área bajo el gráfico y sobre el intervalo $[1;\ 2]$.

Función l

   a. Calculen una aproximación inferior y superior del área marcada, sumando las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
   b. Conjeturen acerca del límite de la serie de áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos.
   c. Apliquen la regularidad encontrada en 5 y determinen la ecuación funcional de la función L para la función l con $l(x) = \frac{2}{x^2}$.
   d. Verifiquen que el límite conjeturado se puede obtener mediante la función L (resultado de G en 5), determinando la diferencia $L(2) - L(1)$.

2. Se considera la función j con $j(x) = \frac{1}{x}$. ¿Por qué la regularidad entre f y F encontrada en 5, no existe en este caso? Expliquen sus respuestas dentro del grupo.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 3 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos sobre el área y el volumen: Algunos ejercicios pueden ser:
   - ¿Cuál es la diferencia entre área y volumen?
   - ¿Cómo se calcula el área de un cuadrilátero cualquiera?
   - ¿Cómo se calcula el volumen de un paralelepípedo?
   - Describe la red de un paralelepípedo y de un prisma, e identifica los elementos básicos que te permiten reconstruir estos cuerpos por repetición.
   - Describe las fórmulas de volumen para los cuerpos que ya conoces.
2. Se recomienda comenzar con ejercicios en que los jóvenes establezcan las derivadas y posibles antiderivadas de funciones polinómicas, y luego descubran la regularidad que existe entre la función f de la curva que delimita el área y la antiderivada F, con la cual se determina el contenido del área bajo la curva.
3. Al obtener resultados y hacer representaciones, obtienen una primera impresión intuitiva sobre la regularidad entre la función que delimita el área y la función con la cual se establece el contenido del área bajo la curva.
4. Igual que en la actividad en la cual descubrieron la regularidad entre tangente, razón instantánea y derivada, para la integral se recomienda que usen una sola función de potencias con exponente natural para explicar y representar en detalle la relación entre la curva y la integral definida. Luego conviene seguir con la función “raíz cuadrada”, y revisar la derivada y la integral en una representación gráfica y mediante cálculos.
5. Se sugiere verificar en cada caso las regularidades que se dan tanto en una familia de la función potencia, como en una familia de la función raíz cuadrada; tales regularidades permiten observar y concluir lo común que resulta del procedimiento de determinar la integral definida. Si ya surgen preguntas acerca de funciones potencia con exponente entero negativo, hay que aludir a otra familia de la función potencia y realizar el trabajo con herramientas digitales para facilitar las representaciones y los cálculos.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan gráficamente la integral, definida como área bajo la curva que describe la razón instantánea del cambio considerado.
   - Elaboran el modelo del área bajo la curva como una noción básica de la integral.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Interactivo para la integral definida

  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/integral/integral.html

- Explicación de la integral definida

  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://bioprofe.com/calculo-de-areas-integral-definida/

- Definición de la integral definida

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.ecured.cu/Integral_definida

Actividad 2: Representar y aplicar la integral definida

PROPÓSITO

Los alumnos aplican las reglas básicas de las integrales definidas, para evitar un procedimiento extenso en el cálculo de la integral definida. Entienden las nociones de la derivada y de la integral definida, estableciendo los ejes en plano cartesiano con base en gráficos de funciones F, f y f'. Determinan el volumen de un cilindro cuya base tiene forma de un segmento parabólico. En la segunda actividad, se espera que investiguen una situación del ámbito económico y recuperen las funciones de los costos C y de los ingresos I de una producción, por medio de integración.

Objetivos de Aprendizaje

OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

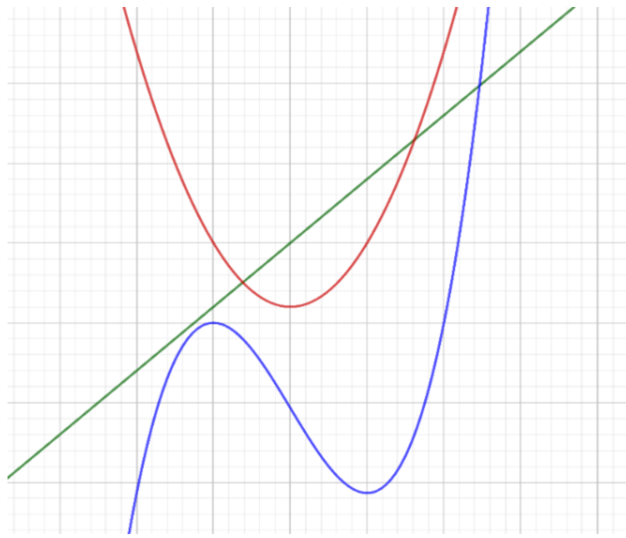
REPRESENTAR LAS PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS, Y CONJETURAR AL RESPECTO

1. Establece las siguientes integrales definidas:
   a. $\int_{-2}^{5} 3x^2\,dx$ - $15\int_{-2}^{5} \frac{1}{5}x^2\,dx.$
   b. $\int_{1}^{4} (2^2 + 3\sqrt{x^2-1})\ dx$ - $3\int_{1}^{4} \sqrt{x^2-1}\,dx.$
   c. $\int_{2}^{5} (x^3 - 2x^2)dx$ + $\int_{5}^{2} (x^3 - 2x^2)dx$

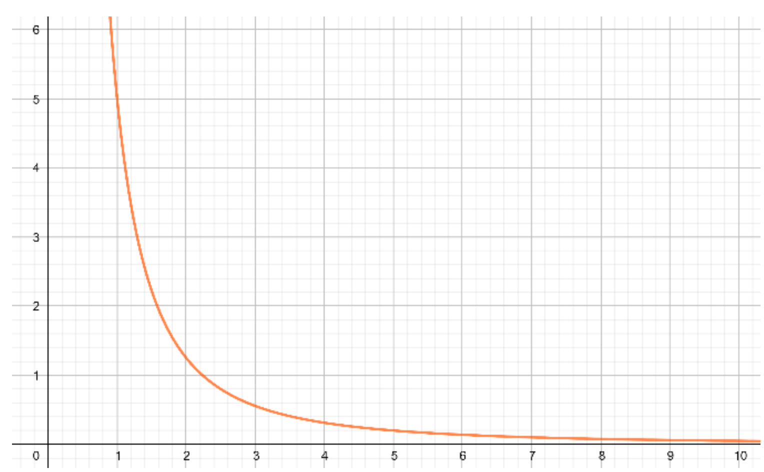
La imagen muestra los gráficos de tres funciones. Una función se llama f, otra es la derivada f' de f y la última es una posible antiderivada F de f.

¿Cuáles de los gráficos en rojo, azul o verde, representan f, f' o F respectivamente? Da, al menos, un argumento para cada respuesta y menciona las propiedades entre función, derivada y antiderivada.

Dibuja los ejes de coordenadas y argumenta la decisión para cada eje.



La imagen muestra el gráfico de la función f con $f(x) = \frac{5}{x^2}$. Determina el siguiente límite del área debajo del gráfico: $\lim_{t-\infty} \int_1^t \frac{5}{x^2} dx$



MODELAR LA CONTAMINACIÓN EN UN TÚNEL, USANDO INTEGRALES

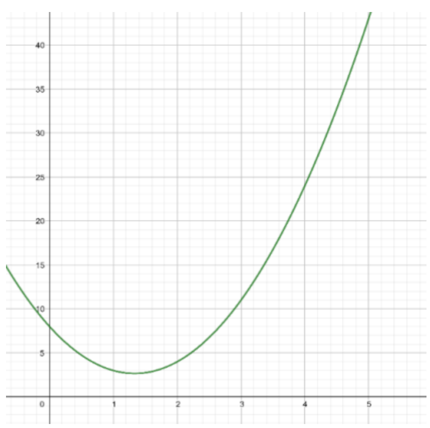
1. El túnel de la foto tiene un corte transversal en forma de parábola con un ancho en el suelo de 8m y una altura máxima de 8m también.
   a. Elijan adecuadamente un sistema de coordenadas y determinen la ecuación de la parábola que delimita el corte transversal del túnel. (Resultado para seguir: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$)
   b. El túnel, con 380m de largo, es de una construcción antigua y no tiene ventilación. Para modelar la concentración de carbono de dióxido en el caso de una congestión vehicular en su interior, se requiere saber el volumen del túnel; establézcanlo.

MODELAR LOS COSTOS, USANDO INTEGRALES

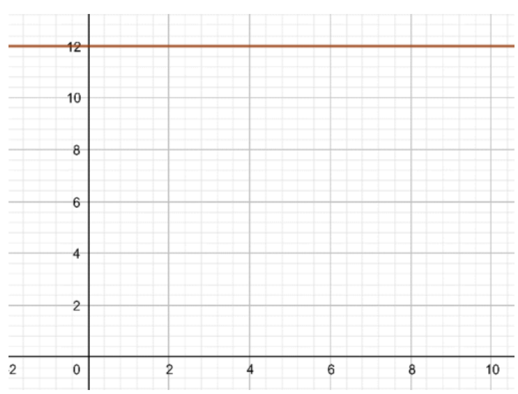
2. De la fabricación de un producto industrial se conoce la función $C´$, que representa la razón instantánea de los costos C, en dependencia de la cantidad x de unidades producidas.

   Además, también en forma de razón instantánea, se dispone de la función $I´$ de los ingresos I obtenidos por la venta del producto dependiente de x. La razón instantánea $C´$ se representa por la ecuación $C´(\mathrm{x}) = 3x^2 - 8x + 8$ y la razón instantánea $I´$ se representa por la ecuación $I´(x) = 12$. Los costos C_0 fijos en la producción son de 4 (unidades monetarias).

   Las imágenes muestran los gráficos de las funciones $C´$ e $I´$.



Función C’



Función I’

   a. Determinen la función de los costos C mediante la integración, con el procedimiento $C(x) = \int_0^x C´(t)dt$, considerando los gastos fijos C_0 mencionados.
   b. Elaboren el gráfico de la función C con herramientas digitales como GeoGebra.
   c. Determinen la función de los ingresos I mediante la integración, con el procedimiento $I(x) = \int_0^x I´(\mathrm{t})\mathrm{dt}$.

d. Elaboren el gráfico de la función I con herramientas digitales.

e. Comparen los gráficos de $C´$ e $I´$ con los gráficos de C e I y verifiquen las relaciones que existen entre los puntos extremos y los puntos de inflexión.

f. Considerando los gastos C y los ingresos I, ¿con qué operación entre ambas funciones se modela las ganancias G en dependencia de la cantidad producida? Argumenten y comuniquen sus respuestas.

g. Elaboren la ecuación de la función G y grafiquen mediante herramientas tecnológicas.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se recomienda comenzar repitiendo las reglas de integración, como integral de una suma o diferencia, influencia de un factor constante o cambio del margen superior por el inferior, para establecer las integrales definidas de manera más sencilla.
2. Se sugiere representar gráficamente en el plano cartesiano, algunos "triples" de funciones f, $f´$ y F con toda la información, como ecuación funcional, puntos extremos y de inflexión. Conviene que usen herramientas digitales.
3. Se recomienda volver a la noción de límite y del cálculo de límites, repitiendo eventualmente el límite de una expresión fraccionaria para $x \rightarrow \infty$.
4. La actividad de costos tiene el mismo problema de economía que se presentó en el contexto de las derivadas. En este caso, la única diferencia que hay en la "partida" del problema es que empieza con las derivadas $I´$ y $C´$ de las funciones de los ingresos I y de los costos C.
5. Se sugiere el siguiente indicador para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Verifican, para las funciones lineales, afines y cuadráticas, el concepto $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, en el cual la función F es la antiderivada de f.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Interactivo para la integral definida
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/integral/integral.html
- Explicación de la integral definida
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://bioprofe.com/calculo-de-areas-integral-definida/
- Aplicaciones a la administración y la economía
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/AplicacionesEconomia.htm

Actividad 3: Aplicación de la integral a diversos contextos

PROPÓSITO

Los estudiantes trabajan de forma colaborativa aplicando los conocimientos sobre la integral, para dar respuestas a problemas en contextos de salud y economía. Se espera que entiendan que la integral es un modelo de la situación planteada y que el cálculo de integrales permite responder a las situaciones planteadas. Además, comprenden que, con estos modelos, se puede tomar decisiones fundamentadas para administrar dosis de medicamentos y solucionar problemas de costos de la producción de baterías.

Objetivos de Aprendizaje

OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

MODELANDO UNA SITUACIÓN DE MEDICINA Y SALUD CON LA INTEGRAL DEFINIDA

Durante las primeras 17 horas luego de una operación, a un paciente se le aplica una solución fisiológica. La razón instantánea del caudal de la solución está programada por una bomba: sube en las primeras 5 horas hasta $4{,}5\,\frac{mg}{h}$ y baja más lentamente hasta $0\,\frac{mg}{h}$ en el instante $t = 17h$.

El gráfico representa la función $f´$ con

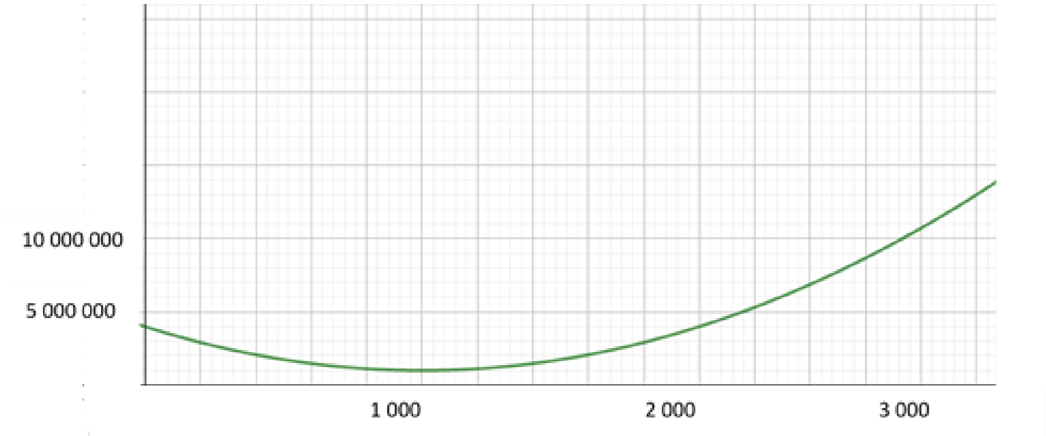
$f´(t) = \frac{1}{192}t^3 - \frac{11}{64}t^2 + \frac{85}{64}t + \frac{289}{192}$, que modela aproximadamente la razón instantánea del caudal de la solución fisiológica que se aplica al paciente en la fase postoperatoria.

a. Determina la dosis total de la solución fisiológica aplicada en las 17 horas.
b. Conjetura si a la mitad del tiempo se ha aplicado la mitad de la dosis, y verifica o rechaza algebraicamente esa conjetura.
c. Establece en qué instante se ha aplicado la mitad de la dosis total.

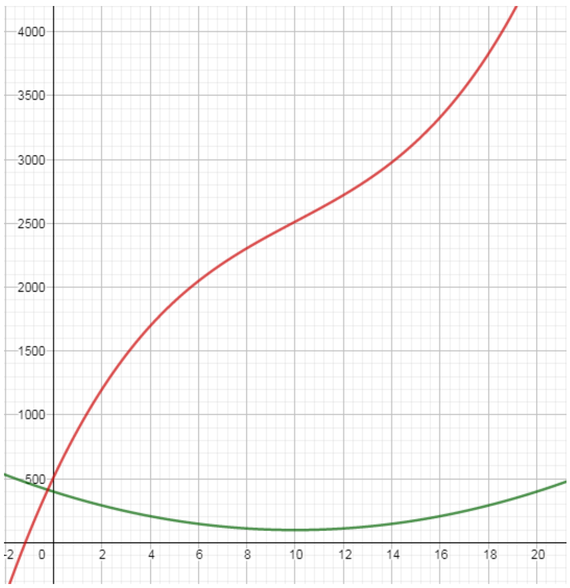
Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la ciudadanía.
OA c, d, 3° y 4° medio

MODELANDO UNA SITUACIÓN DE ECONOMÍA CON LA INTEGRAL DEFINIDA

El gráfico muestra la razón instantánea C' de los costos C por unidad en la producción de baterías para la electromovilidad de autos. El eje horizontal representa la cantidad producida y el eje vertical, la razón instantánea C' del precio.



a. La función C' con $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ modela la razón instantánea de los costos por unidad producida. Verifica algebraicamente que la razón instantánea tiene un mínimo relativo para $x_0 = 1\ 000$.
b. Determina los costos totales de una producción de $1\ 000$ unidades.
c. Mirando el gráfico, conjetura si la producción de las próximas $2\ 000$ unidades (hasta $3\ 000$) tiene el doble de los costos de las primeras $1\ 000$ unidades.
d. Conjetura, utilizando al menos 3 argumentos, si la curva en rojo modela la función C de los costos totales.



e. ¿Qué decisiones tomarías para mejorar los costos de producción?
f. ¿Cómo te ayuda el cálculo de la integral a tomar decisiones relacionadas con costo y producción?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere mostrar gráficamente el significado del caudal de la solución y relacionarlo con el cálculo de volumen de medicamento que se administra. Cabe hacer notar que la función entregada se refiere a la primera derivada y que, para encontrar la función del caudal, se debe integrar.

2. En ambos casos, se recomienda que usen herramientas digitales para elaborar los gráficos de las funciones que modelan las situaciones. También se puede hacer un análisis previo de estas funciones para determinar puntos críticos de la función y luego contrastar con el contexto y formular preguntas.

3. Se sugiere el siguiente indicador para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Determinan antiderivadas *F* de funciones *f* para establecer la integral definida, en contextos científicos, económicos y cotidianos.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Interactivo para la integral definida
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/integral/integral.html
- Explicación de la integral definida
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://bioprofe.com/calculo-de-areas-integral-definida/
- Aplicaciones a la administración y la economía
  https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.fca.unl.edu.ar/Intdef/AplicacionesEconomia.htm

Actividad 4: Aplicación de las integrales a la geometría

PROPÓSITO

Los estudiantes trabajan colaborativamente para comprender el método de los discos, que permite determinar el volumen de cuerpos redondos generados por la rotación de una generatriz alrededor del eje X. Utilizan una estrategia para establecer volúmenes de cuerpos, realizando cálculos manuales o digitales para apoyar, simplificar y potenciar las actividades propuestas.

Objetivos de Aprendizaje

OA5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

Actitudes

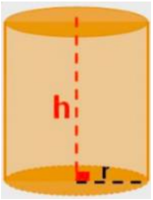
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

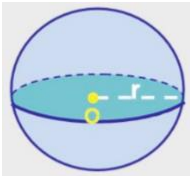
CALCULANDO VOLÚMENES DE CUERPOS REDONDOS

La siguiente imagen resume las fórmulas de cada volumen y, donde corresponda, se denomina el área basal como A_B, el radio como r y la altura como h:



$V = A_B \cdot h$
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3} A_B \cdot h$
$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$



$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$

Ilustración 1. Cuerpos redondos[8]

[8]Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR4.jpg

I. Volumen del cilindro

El cilindro es un cuerpo "redondo", debido a que se puede generar por la rotación[9] de un rectángulo en torno a uno de sus lados, como muestra la imagen[10] adjunta.

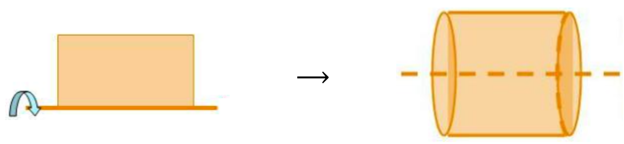
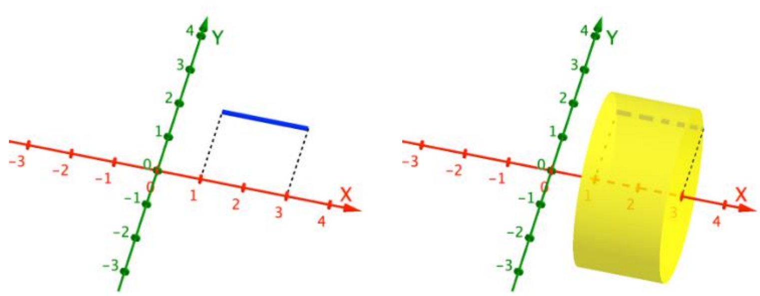


Ilustración 2. Generación de un cilindro

Observen que, en el applet sugerido a pie de página, el rectángulo y el eje tienen una orientación vertical; en cambio, en la imagen superior ambos tienen una orientación horizontal. Se puede generar el mismo cilindro si el rectángulo y el eje de rotación están horizontales o están verticales. Esto es importante para realizar los cálculos con integrales, pues usaremos funciones, mientras que, en el caso de la orientación vertical, necesitaríamos usar las funciones inversas, lo que aumenta innecesariamente la complejidad de la explicación que se quiere dar.

Considerando este modo de generar un cilindro y que daremos por cierta la fórmula del cilindro (que es área basal por altura), usaremos esta última para deducir la fórmula para calcular el volumen de un cilindro, utilizando integrales ("método de los discos").

A partir de la visualización del applet y de la Ilustración 1. Cuerpos redondos, sabemos que un cilindro se puede generar por una rotación de un segmento de recta paralelo al eje X, en torno al eje horizontal (eje X en un sistema cartesiano). Que el segmento sea paralelo a dicho eje, indica que la función que rota es una recta con pendiente igual cero. A modo de ejemplo, consideremos la función $f\colon [1,3] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2$ (que es una recta con pendiente $m = 0$), cuya gráfica muestra la Ilustración 3.a.



a. b.

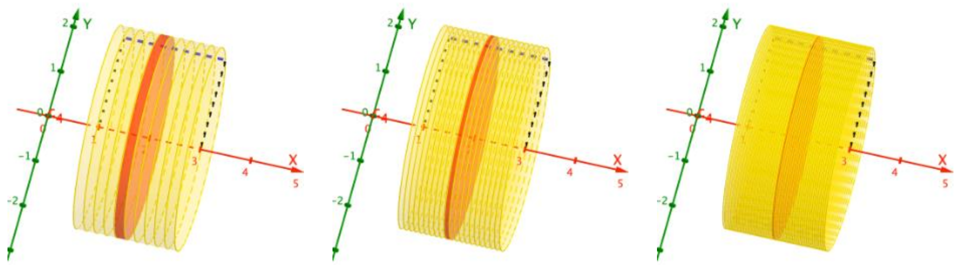
Ilustración 3.
Cilindro generado por revolución de un rectángulo.

[9] Puedes ver cómo se genera un cilindro a partir de un rectángulo en el siguiente applet: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR (Escoge la opción cilindro)

[10] Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR1.jpg

El cilindro resultante al rotar $f(x)$ en torno al eje X se muestra en la Ilustración 3.b. Para calcular el volumen de cuerpo, consideraremos que está compuesto por la yuxtaposición de cilindros infinitesimalmente delgados, y sumaremos los volúmenes de todos ellos para obtener el volumen del cuerpo. Las siguientes imágenes muestran un refinamiento en la cantidad de cilindros que componen el cuerpo.

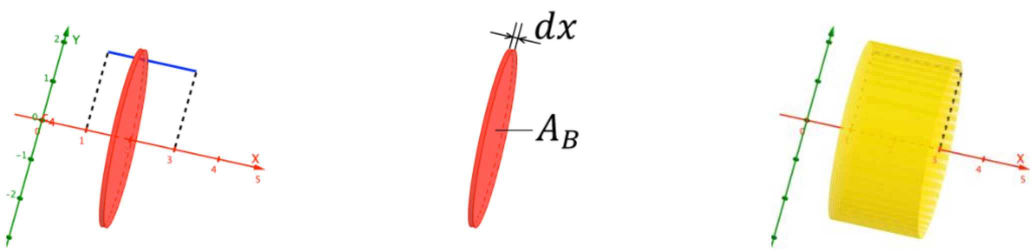
La Ilustración 4.a muestra el cuerpo compuesto por 10 cilindros, la Ilustración 4.b muestra 20 y la Ilustración 4.c muestra 50. En cada una, se ha destacado un cilindro para resaltar el aspecto que tiene:



a. b. c.

Ilustración 4.

Si se sigue el refinamiento hasta que cada cilindro tenga un espesor infinitesimal –que llamaremos dx–, cada uno de estos cilindros infinitesimales (Ilustración 5.a) tendrá un área basal $\mathrm{A_B}$ y una altura dx. Por lo tanto, cada cilindro infinitesimal tendrá un volumen igual a $A_B \cdot dx$ (Ilustración 5.b) y el cuerpo tendrá un volumen igual a la suma infinita de todos estos cilindros desde $x = 1$ hasta $x = 3$; es decir, $\int_1^3 A_B\, dx$ (Ilustración 5.c).



a.
Uno de los cilindros infinitesimales

b.
Volumen de un cilindro infinitesimal: $A_B \cdot dx$

c.
El volumen del cuerpo es $\int_1^3 A_B\, dx$

Ilustración 5.

a. Si la base del cilindro infinitesimal es un círculo y su radio es la imagen de la función f del punto x en el que está su centro sobre el eje X, determina el área de la base A_B de uno de los cilindros infinitesimales.

$$A_B =$$

b. Usando el resultado anterior, determina el volumen V_i de uno de los cilindros infinitesimales.

$$V_i =$$

c. Usando los dos resultados anteriores, escribe la integral que permite obtener el volumen del cuerpo, según la suma infinita de cilindros infinitesimales en este ejemplo.

$$V = \int \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dx$$

d. Calcula la integral para determinar el volumen del cuerpo en este ejemplo.

e. Formaliza el trabajo anterior y determina el volumen generado por una función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, (con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), definida por $f(x) = r$. Llama h a la resta $b - a$. Guíate por los mismos pasos a, b y c anteriores para hallar el resultado y escríbelo a continuación:

$V =$ ___________ unidades cúbicas.

II. Volumen del cono

El cono también se llama cuerpo "redondo", debido a que se puede generar por la rotación[11] de un triángulo rectángulo en torno a uno de sus catetos, como muestra la imagen[12] adjunta (análogo: el cilindro se genera a partir de un rectángulo).

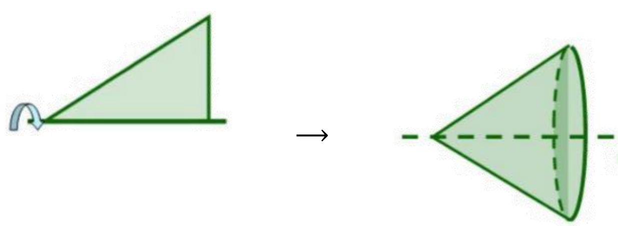


Ilustración 6. Generación de un cono

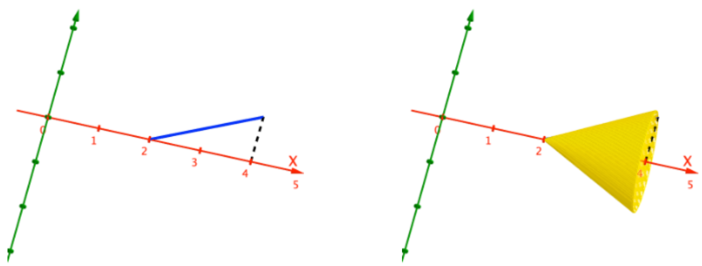
Observa que, en el applet sugerido a pie de página, el triángulo y el eje tienen una orientación vertical, mientras en la imagen superior ambos tienen una orientación horizontal. Recuerda que esto es importante para hacer los cálculos con integrales, pues usaremos funciones, mientras que, en el caso de la orientación vertical, necesitaríamos utilizar las funciones inversas, lo que aumenta innecesariamente la complejidad de la explicación que se quiere dar.

[11] Puedes ver cómo se genera un cono a partir de un triángulo rectángulo en el siguiente applet: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR (Escoge la opción cilindro)

[12] Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR1.jpg

Considerando este modo de generar un cono, deduciremos la fórmula para calcular el volumen de un cono, utilizando integrales ("método de los discos").

Después de visualizar el applet y la Ilustración 1. Cuerpos redondos, sabemos que un cono se puede generar por una rotación de un segmento de recta oblicuo respecto del eje X, en torno al eje horizontal (eje X en un sistema cartesiano). Que el segmento sea oblicuo, indica que la función que rota es una recta con pendiente distinta de cero. A modo de ejemplo, consideremos la función $f: [2,4] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ (que es una recta con pendiente $m = \frac{1}{2}$) cuya gráfica muestra la Ilustración 7.a siguiente.

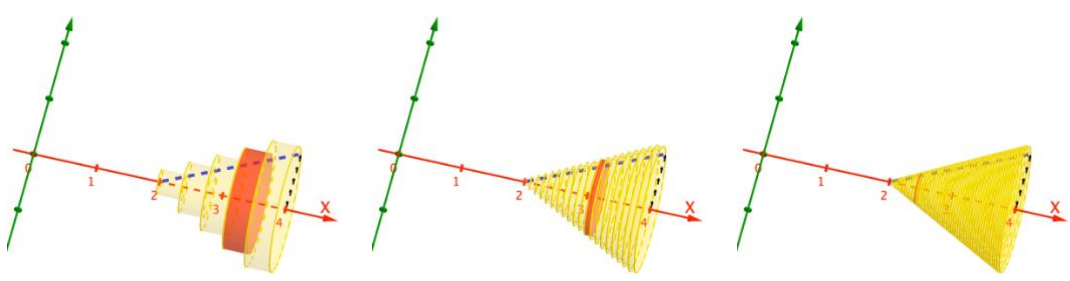


a. b.

Ilustración 7.
Cono generado por revolución de un triángulo rectángulo.

La Ilustración 7.b. muestra el cono resultante al rotar $f(x)$ en torno al eje X.

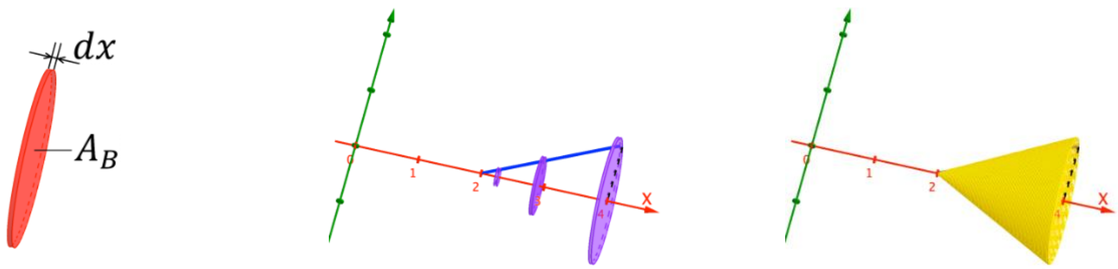
Para calcular el volumen del cuerpo, nuevamente consideraremos que está compuesto por la yuxtaposición de cilindros muy delgados, y sumaremos los volúmenes de todos ellos para obtener el volumen del cuerpo. Las siguientes imágenes muestran un refinamiento en la cantidad de cilindros que componen el cuerpo. La ilustración 8a. muestra al cuerpo compuesto por 5 cilindros; la Ilustración 8.b. muestra 20 y la Ilustración 8.c muestra 50. En cada una se ha destacado uno de los cilindros para resaltar el aspecto que tienen:



a. b. c.

Ilustración 8.

Nuevamente seguimos el refinamiento hasta que cada cilindro tenga un espesor infinitesimal dx. Así, cada uno de estos cilindros infinitesimales (Ilustración 9.a) tendrá un área basal A_B y una altura dx, pero cada cilindro infinitesimal tendrá un área basal diferente, pues va creciendo a medida que se recorre desde $x = 2$ hasta $x = 4$. Por lo tanto, el área basal no es constante como en el cilindro; dependerá del valor que tome $f(x)$ en cada punto x de su dominio, y el volumen de cada cilindro dependerá de la ubicación que tenga (Ilustración 9.b). Entonces, el cuerpo tendrá un volumen igual a la suma infinita de todos estos cilindros desde $x = 1$ hasta $x = 3$, es decir, $\int_1^3 A_B\, dx$ (Ilustración 9.c).



a. El volumen de un cilindro infinitesimal es $A_B \cdot dx$

b. Cilindros infinitesimales ubicados en diferentes valores de x en el dominio de f.

c. El volumen del cuerpo es $\int_2^4 A_B\, dx$

Ilustración 9.

a. Si la base del cilindro infinitesimal es un círculo y su radio es la imagen de la función f del punto$x$ en el que está su centro sobre el eje X, determina el área de la base A_B de uno de los cilindros infinitesimales (debe quedar en función de x).

$$A_B =$$

b. Usando el resultado anterior, determina el volumen V_i de uno de los cilindros infinitesimales.

$$V_i =$$

c. Usando los dos resultados anteriores, escribe la integral que permite obtener el volumen del cuerpo, según la suma infinita de cilindros infinitesimales en este ejemplo.

$$V = \int$$

d. Calcula la integral para determinar el volumen del cuerpo.

e. Formaliza el trabajo anterior y determina el volumen generado por una función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, (con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), definida por $f(x) = r$. Llama h a la resta $b - a$. Guíate por los mismos pasos a, b y c anteriores para hallar el resultado, y escríbelo a continuación:

$V =$ __________ unidades cúbicas.

III. Volumen de la esfera

El tercer cuerpo llamado "redondo" es la esfera, que también se puede generar por la rotación[13] de un semicírculo en torno a uno de sus catetos, como muestra la imagen[14] adjunta.

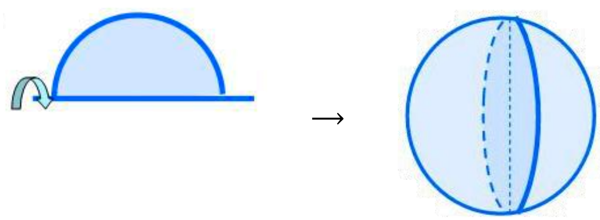
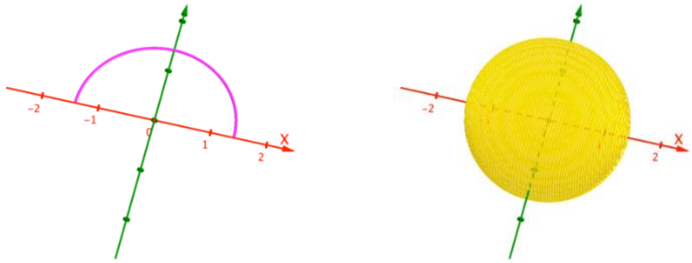


Ilustración 10. Generación de una esfera

Observa que, en el applet sugerido a pie de página, el semicírculo y el eje tienen una orientación vertical, mientras en la imagen superior ambos tienen una orientación horizontal. Recuerda que esto es importante para calcular con integrales, pues usaremos funciones; en el caso de la orientación vertical, necesitaríamos utilizar las funciones inversas, lo que aumenta innecesariamente la complejidad de la explicación que se quiere dar. Considerando este modo de generar una esfera, deduciremos la fórmula para calcular el volumen de la esfera, utilizando integrales (método de los discos).

Después de visualizar el applet y la Ilustración 11, sabemos que se puede generar una esfera por una rotación de un semicírculo respecto del eje X, en torno al eje horizontal (eje X en un sistema cartesiano). En este caso, la función que rota es una semicircunferencia; como ejemplo, consideraremos la función $f: [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$, cuya gráfica muestra la Ilustración 11.a.

[13]Puedes ver cómo se genera una esfera a partir de un semicírculo en el siguiente applet: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR (Escoge la opción esfera)
[14]Figuras adaptadas de la imagen: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matematica.cubaeduca.cu/media/matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/piu/73Cuerpos_comp/res/FR1.jpg

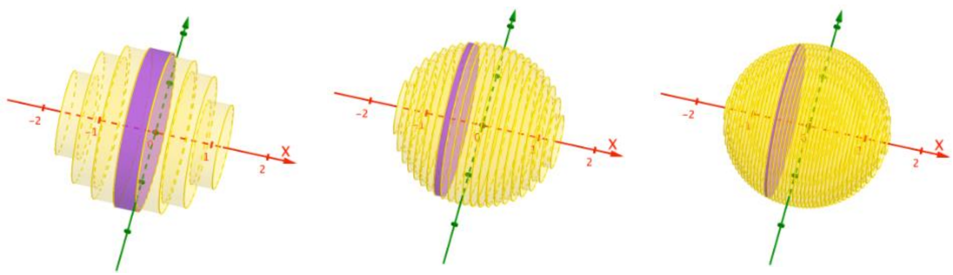


a. b.

Ilustración 11.

La Ilustración 11.b. muestra el cono resultante al rotar $f(x)$ en torno al eje X.

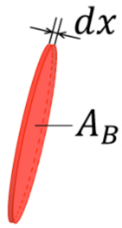
Para calcular el volumen de cuerpo, nuevamente consideraremos que está compuesto por la yuxtaposición de cilindros muy delgados y sumaremos los volúmenes de todos ellos para obtener el volumen de la esfera. Las siguientes imágenes muestran un refinamiento en la cantidad de cilindros que componen la esfera. La Ilustración 12.a muestra al cuerpo compuesto por 10 cilindros; la Ilustración 12.b. muestra 30 y la Ilustración 12.c muestra 60. En cada una se ha destacado uno de los cilindros para resaltar el aspecto que tienen:



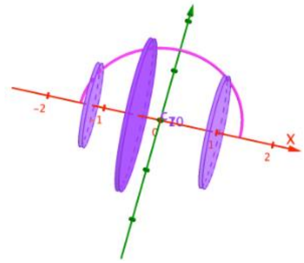
a. b. c.

Ilustración 12.

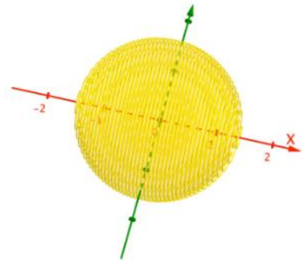
Nuevamente seguimos el refinamiento hasta que cada cilindro tenga un espesor infinitesimal dx. Cada uno de estos cilindros infinitesimales (Ilustración 13.a) tendrá un área basal A_B y una altura dx, pero cada cilindro infinitesimal tendrá un área basal diferente, pues va creciendo a medida que se recorre desde $x = 2$ hasta $x = 4$. Por lo tanto, el área basal no es constante como en el cilindro; dependerá del valor que tome $f(x)$ en cada punto x de su dominio, y el volumen de cada cilindro dependerá de la ubicación que tenga (Ilustración 13.b). Entonces, el cuerpo tendrá un volumen igual a la suma infinita de todos estos cilindros desde $x = 1$ hasta $x = 3$; es decir, $\int_1^3 A_B \, dx$ (Ilustración 13.c).



a.
El volumen de un cilindro infinitesimal es $A_B \cdot dx$



b.
Cilindros infinitesimales ubicados en diferentes valores de x en el dominio de f.



c.
El volumen del cuerpo es $\int_2^4 A_B\, dx$

Ilustración 13.

a. Si la base del cilindro infinitesimal es un círculo y su radio es la imagen de la función f del punto x en el que está su centro sobre el eje X, determina el área de la base A_B de uno de los cilindros infinitesimales (debe quedar en función de x).

$$A_B =$$

b. Usando el resultado anterior, determina el volumen V_i de uno de los cilindros infinitesimales.

$$V_i =$$

c. Usando los dos resultados anteriores, escribe la integral que permite obtener el volumen del cuerpo, según la suma infinita de cilindros infinitesimales en este ejemplo.

$$V = \int \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \, dx$$

d. Calcula la integral para determinar el volumen del cuerpo en este ejemplo.

e. Formaliza el trabajo anterior y determina el volumen generado por una función $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, (con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$), definida por $f(x) = r$. Llama h a la resta $b - a$. Guíate por los mismos pasos a, b y c anteriores para hallar el resultado y escríbelo a continuación:

$V =$ ____________ unidades cúbicas.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Las actividades individuales se inician con un resumen de los tres sólidos básicos que se puede concebir como generados por revolución de elementos lineales simples (segmento paralelo al eje X, oblicuo al eje X y una semicircunferencia sobre el eje X simétrica al eje Y). Los tres ejemplos de cálculo de volumen se situaron convenientemente en el eje X para no aumentar la complejidad de entrada del cálculo del volumen que se realizará.

2. La idea que subyace a este diseño para calcular el volumen del cilindro es que el alumno se enfoque en el método de los discos para establecer el volumen de sólidos de revolución con integrales; asimismo, se busca que perciba que, como conoce el volumen del cilindro, no aumenta la complejidad del cálculo de los discos ni de la integral resultante.

3. Se recomienda que, antes de la clase o cuando empiece, los jóvenes vean el applet que visualiza la generación de cilindros, conos y esferas https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PARYTHhR, para que tengan una noción geométrica de la idea de rotación de un elemento lineal para generar un sólido. Esto ayudará a la primera explicación asociada al cálculo del volumen del cilindro y a familiarizarlos con las imágenes de este punto y los siguientes.

4. Se sugiere visualizar dinámicamente, en el applet http://www.curriculumnacional.cl/, cómo aumenta la cantidad de cilindros al mismo tiempo que disminuye su altura. En las imágenes asociadas, se destacó –con uno de esos cilindros de otro color– la manera en que estos cilindros se van modificando a medida que aumenta el refinamiento. Se debe tratar la segunda idea de disco de espesor infinitesimal, ya que es imposible "ver" uno de estos discos; los jóvenes debiesen captar que son discos infinitamente delgados y de allí que su altura se defina por un diferencial de x (dx). Este es un salto al límite que debiesen realizar para relacionarlo con las integrales.

5. Conviene que los ayude a formalizar la deducción del volumen de un cilindro con el método de los discos. El cambio de $b - a$ por h busca que la fórmula obtenida sea la misma que se presentó en el resumen, al inicio de esta actividad.

6. En el punto 2, se aborda el cálculo del volumen del cono. Este estudio es muy análogo al primero y se propone las mismas recomendaciones anteriores; eso sí, hay que agregar que la función generatriz del cono es una recta oblicua al eje X (en el caso del cilindro, es paralela). Esto implica que se tiene una función generadora que es lineal o lineal afín, por lo que la expresión algebraica contiene x (no es una constante, como en el caso del cilindro).

7. El procedimiento propuesto para calcular el volumen es idéntico al anterior y el cálculo es sencillo, salvo que la integral es un poco más laboriosa. Conviene que el docente acompañe a los estudiantes cuando concreten la fórmula de volumen de un cono según el método de los discos; para que entiendan ese método, recuérdeles los conceptos que articulan aquella fórmula. Si ya establecieron la fórmula del volumen del cilindro, esa formalización debiese ser más clara, aunque es algebraicamente más laboriosa.

8. En el punto 3, la función generatriz de la esfera es una semicircunferencia y su forma algebraica es del tipo $f(x) = \sqrt{p - x^2}$. Esto implica que se tiene una función generadora que es un radical, y la integral que deben obtener eleva a $f(x)$ al cuadrado, eliminando el radical y dejando una integral que, nuevamente, tiene polinomios simples integrados.
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Utilizan representaciones de figuras geométricas para determinar áreas y volumen.
   - Desarrollan fórmulas de volumen, girando figuras 2D o descomponiendo figuras 3D.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Video que explica la generalización del método de discos alrededor del eje x: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/calculus-home/integral-calculus/ic-int-app/modal/v/generalizing-disc-method-around-x-axis
- Visualización de un sólido de revolución entre dos funciones: https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/BZWTCPfd
- Visualización del método de los discos:

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/fy3c4pyf
- Applet con visualización de sólidos de revolución:

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/gDDvkMAm
- Ajuste de curva para generar un sólido de revolución:

  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/PuBVTMep

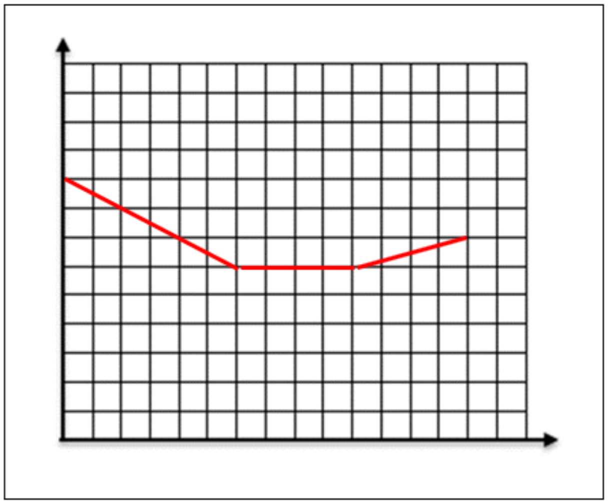
Actividad de evaluación

Objetivos de Aprendizaje	Indicadores de evaluación
OA 5. Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. **OA a.** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas. **OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.	• Representan gráficamente la integral, definida como área bajo la curva que describe la razón instantánea del cambio considerado. • Verifican para las funciones lineales, afines y cuadráticas, el concepto $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, en el cual la función F es la antiderivada de f. • Determinan antiderivadas F de funciones f para determinar la integral definida, en contextos científicos, económicos y cotidianos. • Desarrollan fórmulas de volumen, girando figuras 2D o descomponiendo figuras 3D.

Duración: 6 horas pedagógicas

A continuación, se muestra algunas actividades que sirven como ejemplos de evaluaciones para la unidad 3, cada una por sí misma o en conjunto. También se puede hacer un portafolio de problemas, donde el estudiante trabaje individualmente por dos semanas y elija cuáles de esos problemas quiere entregar para evaluación. Los requerimientos de entrega y criterios de evaluación deben priorizar las habilidades de representar, modelar y resolver problemas trabajados durante la unidad. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible. Se propone una rúbrica para un proceso de modelación; así, el alumno puede ver sus progresos y ubicarse en algunos niveles de logro.

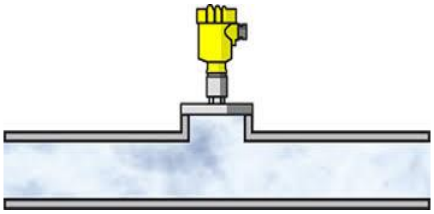
1. La imagen muestra el gráfico de razón instantánea $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ del volumen de un líquido en un recipiente. El eje horizontal representa el tiempo t.



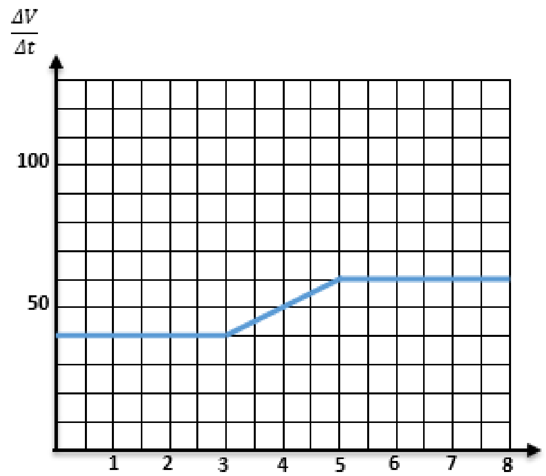
   a. Marca en el gráfico los instantes en los cuales se cambia la razón instantánea del volumen.
   b. ¿En qué intervalos la razón instantánea $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ es invariante, positiva o negativa?
   c. Elabora para cada intervalo, por separado, un gráfico esquemático del volumen V mismo en dependencia del tiempo.
   d. Argumenta acerca del tipo de función que representa el volumen V en dependencia del tiempo.

Recuperar informaciones del cambio a partir de su razón instantánea.

1. El gráfico representa la razón instantánea del volumen de vapor que transporta una tubería.

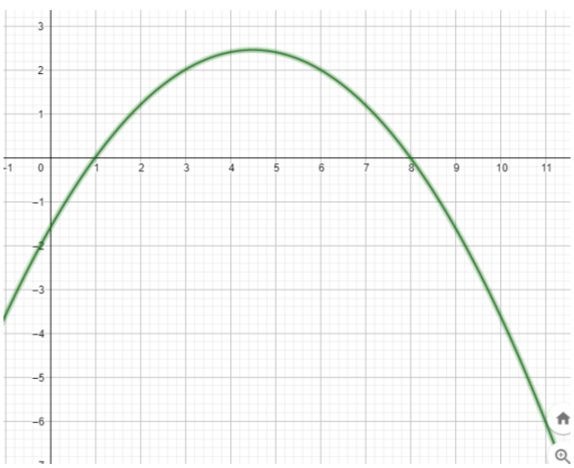


La escala del tiempo es de minutos [min] y la de la razón instantánea es de $[\frac{m^3}{min}]$



a. Describe verbalmente el comportamiento de la razón instantánea del volumen, en el intervalo de tiempo [0 min, 8min].
b. Mediante el gráfico, recupera el volumen total del vapor transportado por la tubería en los instantes de t = 1s, 2s, …, 8s.
c. Elabora el gráfico del vapor transportado por la tubería en los instantes de t = 1s, 2s, …, 8s.
d. Compara la función del cambio con la función de la razón instantánea del cambio. ¿Qué tipo de funciones son?

2. El gráfico representa la función f con $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{9}{5}x - \frac{8}{5}$.

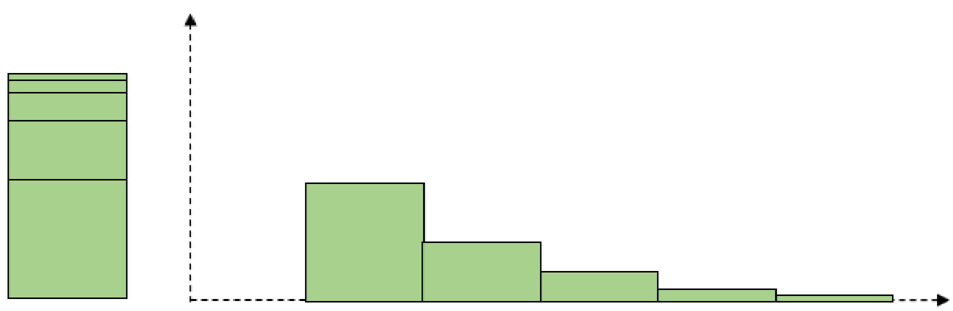


a. Verifica algebraicamente los puntos de intersección con los ejes del sistema de coordenadas.
b. Determina el vértice de la parábola mediante la derivada f' de f, y compáralo con el gráfico.
c. Calcula la integral definida de la función f en los márgenes de $a = 0$ y $b = 12$. $\int_0^{12} f(x)\ dx$

d. Argumenta acerca del resultado numérico.
e. Se quiere pintar el área que se encuentra bajo la curva y el eje X. Determínala en unidades de área contando los cuadraditos del gráfico.
f. Compare este conteo con el resultado obtenido en c.
g. Considere que la función f interpreta la razón momentánea de los ingresos por venta de un producto, obtenidos en dependencia de la cantidad x de unidades vendidas. Determina los ingresos máximos (eje x: una unidad de medida representa 1 000 unidades, eje y: una unidad de medida representa 10 000 UF) ¿qué podría significar el cálculo del área en este contexto?

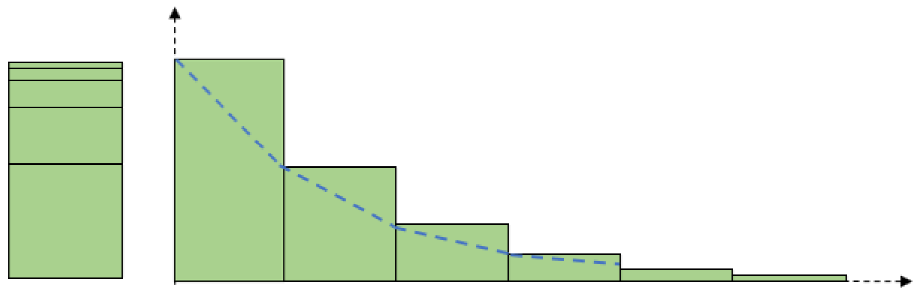
Comprendiendo las áreas bajo una curva con márgenes variables para $x \rightarrow \infty$ o $x \rightarrow x_0$.

1. La imagen muestra una pila de rectángulos, todos representan el ancho 1m y las alturas h disminuyen, empezando con 1m, $\frac{1}{2}$m, $\frac{1}{4}$m, …,$\frac{1}{2^{n-1}}$m.
Se coloca los rectángulos de la pila uno al lado del otro, empezando con el más grande, como muestra la figura. Describan a un compañero lo que entienden.



a. Marquen con un punto rojo en cada rectángulo, el vértice en la posición izquierda arriba y junten los vértices marcados, trazando una curva adecuada que represente de mejor forma la disminución de las alturas.
b. Extrapolen la curva hacia la izquierda y marquen aproximadamente el punto de intersección con la línea vertical punteada. ¿Cuál sería la altura del rectángulo que antecede al primer rectángulo representado?
c. La suma infinita de las alturas $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +\ldots$ representa una serie geométrica. Determinen el sumando en la posición n.
d. Determinen el límite de la suma de las alturas para encontrar después el área de la suma infinita de los rectángulos ($\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \frac{a_0}{1-q}$, en la cual a_0 es el primer sumando y q, el cociente constante).
e. La curva dibujada en la actividad a. separa todos rectángulos en dos partes. Estimen el contenido de la suma infinita de las áreas que están debajo la curva.

f. Considerando el gráfico de segmentos ¿qué función resulta si se reduce el ancho de todos los rectángulos? Argumenten y expliquen la respuesta.



g. Desarrollen la ecuación de la función f que representa la curva roja dibujada en la actividad a.

h. Apliquen la igualdad entre q^t y $e^{t \cdot lnq}$ para expresar la ecuación de la función exponencial f a la base del número Euler e.

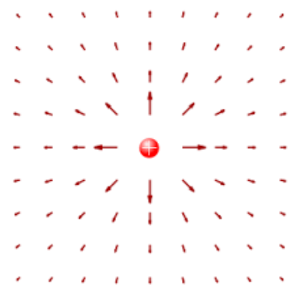
i. Determinen el límite $\lim_{x \to \infty} \int_1^x f(t)\ dt$ y contrástenlo con el límite estimado.

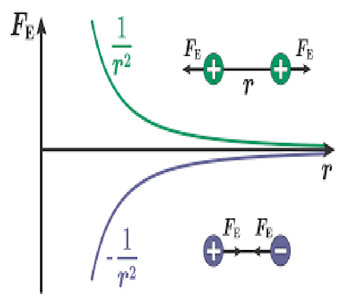
Para la tarea "Comprendiendo las áreas bajo una curva con márgenes variables para $\boldsymbol{x} \to \infty$ o $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}$" puedes guiarte por la siguiente rúbrica de evaluación:

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Identifican la invarianza del área de un objeto cuando se descompone en partes.	Describen la descomposición de un rectángulo en partes más pequeñas y lo relacionan con el área de la figura.	Describen la descomposición del rectángulo en partes más pequeñas.	Describen el rectángulo y el gráfico de forma independiente.
Relacionan una partición finita con procesos que se pueden repetir infinitamente.	Determinan la altura del rectángulo, extrapolando (a partir de la información inicial del problema) la altura del triángulo anterior.	Determinan la altura del rectángulo, dibujando la curva de forma aproximada.	Determinan la altura de un rectángulo cualquiera.
Relacionan la serie geométrica con la suma infinita de áreas de los rectángulos.	Determinan el límite de la serie geométrica y lo relacionan con el área de la suma infinita de los rectángulos.	Determinan algún límite y algún área, utilizando sumatorias infinitas y propiedades de límites.	Realizan cálculos que corresponden a la operatoria básica con números.

Relacionan el área bajo la curva con la partición en rectángulos que están sobre y bajo ella.	Comparan las áreas obtenidas por rectángulos que están sobre la curva y bajo ella, usando la noción de límites.	Determinan el área bajo la curva, usando la noción de límites.	Determinan áreas de figuras rectangulares asociadas a otros problemas.
Relacionan el área bajo la función cociente con el logaritmo natural.	Asocian los resultados del área y límites con los valores del logaritmo natural.	Disminuyen la base de los rectángulos utilizando límites, y determinan la función cociente.	Disminuyen la base de los rectángulos, utilizando procedimientos numéricos.

2. El campo eléctrico radial E de una carga eléctrica Q no es homogéneo y aumenta proporcionalmente a $\frac{1}{r^2}$ respecto de la distancia r del centro de la carga. Si una carga de prueba q del mismo signo está frente a la carga Q, actúa una fuerza repelente sobre ambas. Esta fuerza se llama "Fuerza de Coulomb"; se calcula mediante la fórmula $F_E = \mathrm{k} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$, en la cual el factor k contiene una constante natural y r es la distancia entre el centro de ambas cargas. Para determinar la energía eléctrica W_{el}, que se obtiene cuando se acerca una carga de prueba q a la carga Q a la distancia r, se debe aplicar la integración, porque la fuerza eléctrica no es constante. Además, se pone el nivel "0" de la energía a una distancia r_∞ infinitamente lejos de la carga Q, porque allá la fuerza F_E es infinitésimamente pequeña.





Así se calcula la energía: $W_{el} = \int_{r_\infty}^{r} F_E \, dr$

a. Elaboren la integral con la cual se determina la energía eléctrica en dependencia de Q, q y r.

b. Determinen el límite $\lim_{r_\infty \to \infty} \int_{r_\infty}^{r} F_E \; dr$, en el cual F_E representa la fuerza "F_E" y no la antiderivada de una función f.

c. Determinen cuánta energía eléctrica acumula una partícula α al acercarse a una distancia de $\mathrm{r} = 10^{-10} m$ del núcleo de un átomo de oro. Busquen las informaciones de la constante k, la carga de partícula α y la carga del núcleo del átomo de oro en la web.

PAUTA DE EVALUACIÓN

	Niveles de logros		
Criterios de evaluación	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Describen la razón instantánea de cambio por medio de la derivada.			
Usan la integral definida para calcular el volumen.			
Determinan el área bajo la curva, utilizando la integral definida.			
Relacionan el límite de series con la integral definida.			
Describen el área bajo la curva, usando aproximaciones por rectángulos.			
Modelan situaciones, utilizando la integral definida.			

Proyecto Interdisciplinario

Manual de orientación

¿Qué es el Aprendizaje Basado en Proyectos?
El Aprendizaje Basado en Proyectos se define como una propuesta de enseñanza que se organiza en torno a un problema o necesidad que se puede resolver, aplicando diferentes perspectivas y áreas del conocimiento. Para encontrar la solución, los estudiantes movilizarán conocimientos, habilidades y actitudes durante todo el proceso hasta llegar a una solución que se expresa en un producto. Los proyectos surgen desde sus propias inquietudes e intereses, potenciando así su motivación por aprender y su compromiso frente al propio aprendizaje.

¿Por qué fomenta el trabajo interdisciplinario?
La complejidad de un problema real o necesidad es la razón que justifica la participación y conexión de distintos saberes y disciplinas. Por ejemplo, los proyectos STEM se desarrollan sobre problemas o necesidades que vinculan ciencia, tecnología, matemática e ingeniería para su solución.

¿Cómo se relaciona con las Habilidades para el siglo XXI?
La metodología de proyecto permite que los estudiantes potencien estas habilidades y actitudes, ya que, por ejemplo, su procedimiento los organiza para que busquen juntos una solución, los desafía para que flexiblemente encuentren una respuesta nueva al problema y para que reflexionen con otros desde diferentes perspectivas, generando así el trabajo colaborativo, la comunicación y el pensamiento crítico y creativo.

¿Cuáles son los elementos del Aprendizaje Basado en Proyectos?
Pregunta o problema central
Los problemas que se aborda en un proyecto se vinculan con situaciones reales y significativas para los estudiantes. Se relacionan con sus inquietudes e intereses y los motivan a explorar y participar activamente en la búsqueda responsable de una solución.

Indagación sostenida
Cuando se enfrentan a un problema desafiante, comienza el proceso de búsqueda para construir soluciones. Durante este proceso, los alumnos hacen nuevas preguntas, utilizan recursos y profundizan los conocimientos.

Autenticidad
Los proyectos tienen un contexto auténtico. Por ejemplo: los estudiantes resuelven problemas que enfrentan las personas fuera de la escuela, pero también pueden centrarse en problemas auténticos dentro de ella. Los proyectos pueden tener un impacto real en los demás, como cuando los alumnos atienden una necesidad en su escuela o comunidad (por ejemplo: diseñar y construir un huerto escolar, mejorar un parque comunitario, ayudar a los inmigrantes locales); también pueden crear algo que otras personas usarán o experimentarán. Un proyecto puede tener autenticidad personal

si refleja las preocupaciones, los intereses, las culturas, las identidades y los problemas de los estudiantes en sus vidas.

Voz y elección del estudiante

Los alumnos deben sentir que pueden participar activamente, tomar decisiones, expresar sus puntos de vista, proponer soluciones durante el trabajo en equipo y expresarse por medio de los productos que crean. Participan activamente en un proyecto, desde el momento en que identifican el problema hasta que divulgan el producto; así fortalecen su compromiso y motivación con el propio aprendizaje.

Metacognición

A lo largo de un proyecto los estudiantes –junto con el docente– deben reflexionar sobre lo que están aprendiendo, cómo están aprendiendo y por qué están aprendiendo. La reflexión puede ocurrir de manera informal, como parte de la cultura y el diálogo en el aula, pero también debe ser una parte explícita de los diarios del proyecto, la evaluación formativa programada, las discusiones en los puntos de control del proyecto y las presentaciones públicas de su trabajo. La reflexión sobre el proyecto en sí, cómo se diseñó e implementó, los ayuda a decidir cómo podrían abordar su próximo proyecto y a mejorar la forma de aplicar esta metodología.

Crítica y revisión

Los estudiantes deben estar abiertos a dar y recibir comentarios constructivos acerca del trabajo propio y el de sus compañeros, lo que permite mejorar los procesos y productos del proyecto. Idealmente, tiene que hacerlo según protocolos formales y con el apoyo de rúbricas. Los invitados o expertos externos también pueden ayudar, brindando un punto de vista auténtico y real. La crítica y revisión del trabajo propio permite a los alumnos evaluar los resultados de su aprendizaje, fortaleciendo la evaluación formativa.

Producto público

A diferencia de otras metodologías, en el Aprendizaje Basado en Proyectos la respuesta o solución a la pregunta o problema se expresa en un "producto", que puede ser un artefacto tangible, multimedial o digital, una presentación sobre la solución a un problema, un desempeño o evento, entre otras opciones. Al finalizar el proyecto, los estudiantes tienen que poder presentarlo públicamente; eso aumenta su motivación, ya que no se reduce a un intercambio privado entre profesor y alumno. Esto tiene un impacto en el aula y en la cultura escolar, pues ayuda a crear una "comunidad de aprendizaje", en la cual los estudiantes y los maestros discuten lo que se está aprendiendo, cómo se aprende, cuáles son los estándares de desempeño aceptables y cómo se puede mejorar el desempeño de los alumnos. Finalmente, hacer que el trabajo de los alumnos sea público es una forma efectiva de comunicarse con los pares y los miembros de la comunidad.

¿Qué debo considerar antes de la ejecución de un proyecto?

- Incorporar en la planificación anual de la asignatura una o más experiencias de proyectos, tomando en cuenta el tiempo semanal de la misma.
- Si la asignatura es de 2 horas a la semana, se recomienda incorporar un proyecto acotado o abordar toda una unidad de aprendizaje mediante esta metodología.

- Si la asignatura es de 6 horas semanales, se recomienda destinar un tiempo fijo a la semana (por ejemplo, 2 horas) para el proyecto.
- La planificación anual también debe incorporar la exhibición pública de los proyectos. Se recomienda que sea una instancia en que se invite a los padres, familias, expertos y otros miembros de la comunidad (se sugiere solicitar a la dirección del establecimiento que reserve un día para llevar a cabo la actividad).
- Identificar en los Objetivos de Aprendizaje, tópicos, necesidades o problemas que se pueda abordar interdisciplinariamente con dos o más asignaturas.
- Si el proyecto involucra a dos o más asignaturas, los profesores deben planificarlo juntos y solicitar un tiempo adecuado para ello a su jefe técnico o al director.
- Una vez hecha esta planificación e iniciado el año escolar, se debe explicar a los estudiantes en qué consiste esta metodología, exponerles los tópicos que se identificó en las Bases Curriculares y pedirles que, a partir de ello, propongan problemas o preguntas que se puede resolver o responder mediante un proyecto.
- El Aprendizaje Basado en Proyectos requiere de un trabajo grupal y colaborativo. Cada integrante del grupo debe asumir un rol específico, el cual puede ir rotando durante la ejecución del proyecto.

¿Cómo se organiza y ejecuta el proyecto?
Para organizar el proyecto, se presenta una ficha con diferentes componentes que ayudarán a ejecutarlo. A continuación, se explica cada uno de esos componentes.

Resumen del proyecto
Síntesis del tema general, el propósito y el resultado esperado del proyecto.

Nombre del proyecto
Se recomienda incluir un subtítulo que evidencie el tema o el contenido que se trabaja en el proyecto.

Problema central
En esta sección, se expone un párrafo de la pregunta o problema que se quiere resolver por medio del proyecto. Se recomienda explicar cuál es el tema que se va a resolver y por qué el proyecto puede hacerlo o desarrollar reflexiones profundas en los alumnos.

Propósito
Se explica el objetivo general y específico del proyecto.

Objetivos de Aprendizaje de Habilidades y Conocimientos
En esta sección, se explica cuáles son los Objetivos de Aprendizaje de la asignatura que se desarrollará en el proyecto. Se espera que sean interdisciplinarios, por lo que se recomienda incorporar los OA de las otras asignaturas involucradas.

Tipo de Proyecto Interdisciplinario
Es importante aclarar qué aspectos de las distintas disciplinas se aplicará en el proyecto. Esta sección busca que el docente exponga y explique tales relaciones de manera que sea más fácil guiar el

trabajo interdisciplinario. Para esto, conviene que se coordine con los profesores de las otras áreas disciplinares.

Producto
Todo proyecto debe tener como resultado un producto; es decir, algún objeto, aparato, informe, estudio, ensayo, disertación oral, escrita, visual, audiovisual o multivisual para que los estudiantes divulguen el trabajo realizado.

Habilidades y actitudes para el siglo XXI
Es importante que el docente resalte que esta metodología pretende que los alumnos desarrollen habilidades y actitudes del siglo XXI, que son transversales a todas las áreas del currículum. Esto permite que profesores y alumnos sean conscientes de que ellas van más allá de los conocimientos y habilidades disciplinares.

Recursos
Se tiene que describir los componentes, insumos de trabajo, bibliografía o elementos fundamentales para el proyecto.

Etapas
Hay que planificar el proyecto según fases de trabajo, considerando el tiempo destinado al mismo en la planificación anual.

Cronograma semanal
Es importante planificar el avance del proyecto clase a clase; en una sola se puede desarrollar más de una etapa, o una etapa puede durar más de una clase. Lo importante es que la planificación sea clara y ordenada para que profesor y alumnos trabajen de la manera más regular posible, considerando los avances u obstáculos que puedan encontrar en el desarrollo del proyecto.

Evaluación formativa y sumativa
En esta sección, el docente tiene que especificar con qué criterios se evaluará el proyecto y qué instrumentos se aplicará, tanto en la dimensión formativa como en la sumativa. Es importante recordar que la retroalimentación es un componente esencial del proyecto, por lo que profesor debe señalar cómo llevará a cabo dicho proceso.

Difusión final
Dependiendo del objetivo del proyecto, se sugiere que cuando lo terminen, los alumnos dediquen algún tiempo para difundirlo a la comunidad escolar.

Proyecto STEM: Mejoremos nuestra calidad de vida

Posibles causas de un infarto cardiovascular o cerebral y su prevención

Resumen del Proyecto

Este proyecto interdisciplinar presenta a los estudiantes un problema real de relevancia médica y que afecta a la población de Chile y el mundo, con conclusiones de alta significancia personal y social en el ámbito de la salud. Se trata de los infartos cardiovasculares y cerebrovasculares, cuyo impacto se puede desglosar en lo siguiente:

- Las enfermedades cardiovasculares figuran como la causa principal de muerte en Chile y el mundo. Para ejemplificar, el evento representó un 27,53% del total de defunciones en nuestro país, en 2014.
- Por su parte, el ataque cerebrovascular es la principal causa de muerte y provocó alrededor de 9 mil muertes al año en 2013 (una persona por hora).
- Se sabe que, en ambas patologías, son factores determinantes la presión arterial elevada, la diabetes, el colesterol elevado, la obesidad o el consumo de tabaco, entre otros.

En este proyecto, los estudiantes se basan en sus conocimientos de matemática, física y biología para hacer una investigación experimental concreta, a fin de descubrir y demostrar científicamente errores relativos a los eventos vasculares.

Nombre del Proyecto **MEJOREMOS NUESTRA CALIDAD DE VIDA** **POSIBLES CAUSAS DE UN INFARTO CARDIOVASCULAR O CEREBRAL Y SU PREVENCIÓN**
Problema central A pesar de las permanentes campañas públicas con base científica que informan a la población respecto de los factores de riesgo y las medidas de prevención de los infartos cardio y cerebrovasculares, ciertos preconceptos o ideas erróneas podrían impedir que la población asuma prácticas preventivas.
Propósito Se pretende que los estudiantes utilicen los conocimientos y habilidades propios de Matemática, Física y Biología, para refutar de manera empírica la siguiente hipótesis errónea: *Si disminuimos el diámetro de un objeto cilíndrico, el líquido fluye a través de él con menor velocidad*. Se puede transferir esta idea al funcionamiento de los vasos sanguíneos, que se relacionan directamente con los eventos vasculares. Para esta tarea, los jóvenes se basarán el modelo matemático de estenosis, experimento “Hagen-Poiseuille” y ecograma estenosis (ver Anexo 1).

Objetivos de Aprendizaje	Preguntas esenciales
Ciencias para la Salud **OA Conocimiento y comprensión** **OA 3.** Analizar relaciones causales entre los estilos de vida y la salud humana integral a través de sus efectos sobre el metabolismo, la energía celular, la fisiología y la conducta. **OA 5.** Evaluar cómo el desarrollo científico y tecnológico a través de innovaciones en biotecnología, nanomedicina, medicina nuclear, imagenología, farmacología, entre otras, influyen en la calidad de vida de las personas. **MATEMÁTICA** **OA Conocimiento y comprensión** **OA5.** Modelar situaciones o fenómenos que involucren el concepto de integral como área bajo la curva en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales, y evaluar la necesidad eventual de ajustar el modelo obtenido. **OA Habilidades** **OA H.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos. **OA D.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados. **OA G.** Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.	¿Qué efectos tienen los estilos de vida en la salud humana integral? ¿Cómo nos puede ayudar la ciencia a mejorar nuestros estilos de vida y salud integral? ¿Cómo nos permite la matemática modelar el funcionamiento del cuerpo humano? ¿Por qué las preconcepciones erróneas obstaculizan la adquisición de prácticas preventivas sustentadas en evidencia científica? ¿Cómo podemos difundir el conocimiento científico en la comunidad para colaborar en la prevención de la salud?

Tipo de Proyecto Interdisciplinario STEM

- Ciencias de la Salud
- Matemática

Producto
Difusión de los resultados de la experiencia empírica en la comunidad educativa y en redes sociales, para ayudarla a adquirir prácticas preventivas de eventos vasculares.

Habilidades y actitudes para el Siglo XXI
Pensamiento Crítico
Pensamiento Creativo
Trabajo Colaborativo

Recursos
- Set de mangueras de PVC transparente (por lo menos, dos diámetros diferentes).
- Cuerpo de jeringas de diferentes tamaños.
- Vasos, moldes, sistemas de soporte experimental, disponibles en los laboratorios de ciencias naturales del colegio.
- Gel de fijación capilar.

Etapas
- Fase 1: Comprensión del problema y organización de los equipos de trabajo.
    - Se reparten las tareas en grupos para trabajar en paralelo los diferentes ejercicios y experimentos.
    - Elaboran un modelo matemático que verifica o refuta la hipótesis errónea.
    - Describen los experimentos a desarrollar:
        - **Experimento A**: Cambio de velocidad de partículas del agua al disminuir el diámetro de la manguera de PVC.
        - **Experimento B:** Influencia de la viscosidad del líquido en el transporte por una manguera de PVC.
        - **Experimento C:** Generación de "placas" en las paredes de la manguera, dependiendo del tipo de líquido.
        - **Experimento D**: Influencia de la disminución del diámetro de la manguera en el transporte por una manguera de PVC (Ley de Hagen-Poiseuille).
        - **Experimento E**: Modelar cuantitativa o cualitativamente el efecto Doppler, mediante un experimento real en el laboratorio de Física o de Ciencias Naturales.
            1. *Alternativa 1* con aplicaciones (applet) en el celular, con emisión y recepción de sonido real para el caso del receptor alejándose.
            2. *Alternativa 2***:** Applet de simulación (por ejemplo, con GeoGebra u otro), aplicando una velocidad negativa en el deslizador.

- Fase 2: Modelamiento matemático (ver Anexo 2 para los ejercicios).
- Fase 3: Realización de los experimentos (ver Anexo 3 para los experimentos).
- Fase 4: Comunicación de los resultados científicos: edición de los videos registrados.

Fase 5: Elaboración de informe con las conclusiones de los experimentos.

- Fase 6: Difusión de los resultados en la comunidad educativa y en las redes sociales.

Cronograma semanal

Semana 1 (Fase 1)
- Plantear el problema.
- Guiar a los estudiantes mediante las preguntas esenciales.
- Constituir los equipos de trabajo y distribuir las tareas para cada integrante.

Semana 2 (Fases 2 y 3)
- Modelamiento matemático.
- Realización de los experimentos y registro en video.

Semana 3 (Fases 3 y 4)
- Realización de los experimentos, registro en video y edición.

Semana 4 (Fases 5 y 6)
- Redacción de conclusiones en informe escrito o digital.
- Presentación de videos y conclusiones a la comunidad educativa y a través de redes sociales.

Evaluación Formativa

Resolución de casos para análisis de modelos.

Evaluación Sumativa

Exposición del proyecto.

Difusión Final

Exposición de las conclusiones frente a la comunidad y a través de redes sociales.

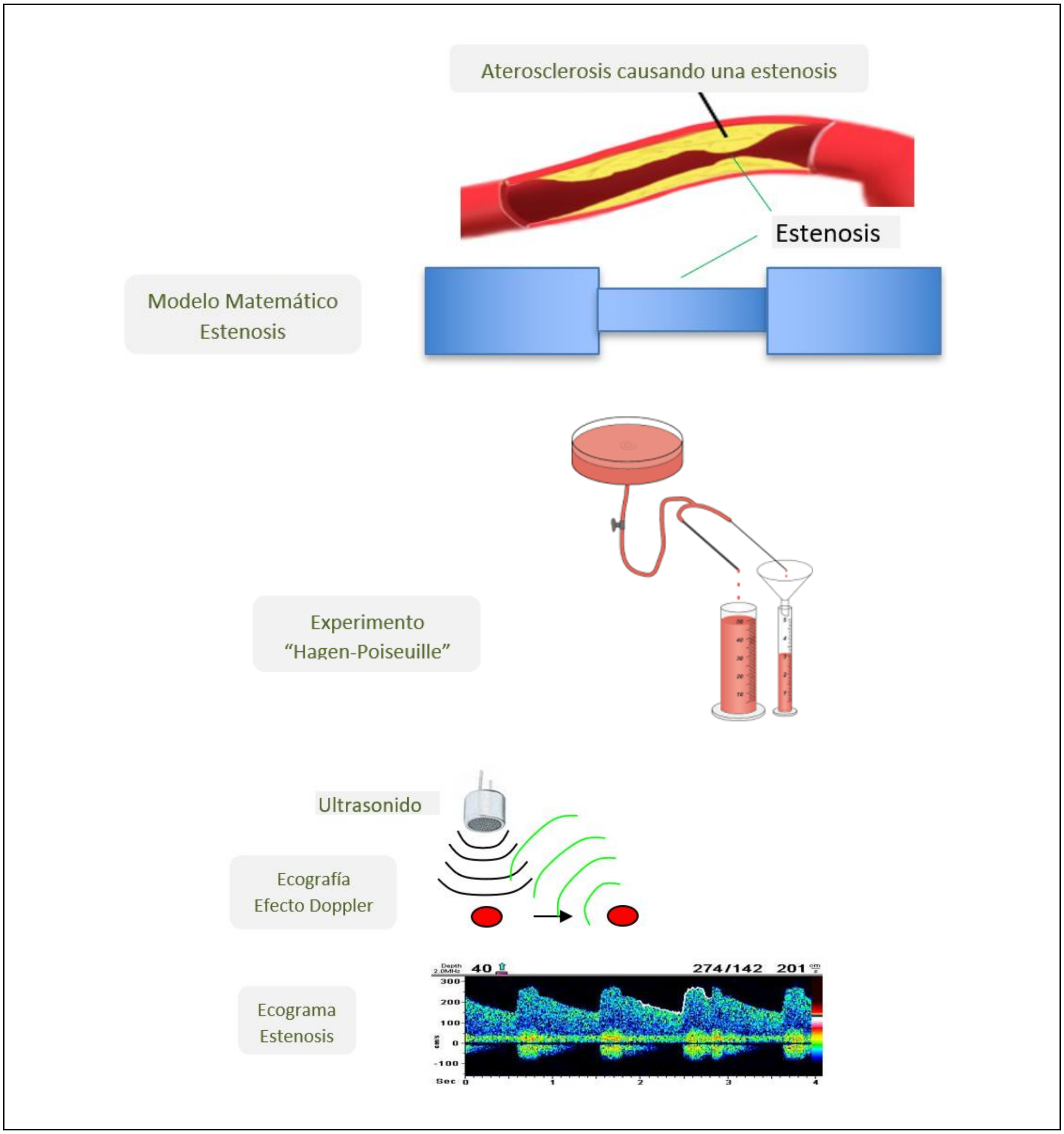
Bibliografía
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.minsal.cl/mes-del-corazon-2017/ https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.minsal.cl/ataque_cerebral/ https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.doctorolguin.cl/estenosis-carotidea-prevencion-de-infartos-cerebrales/ https://www.curriculumnacional.cl/link/http://fluidosmpolo.blogspot.com/2012/12/la-sangre-como-fluido-newtoniano-si.html https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.compadre.org/osp/EJSS/4441/235.htm

Criterios de evaluación

Tanto para las habilidades del s. XXI de Pensamiento creativo e innovación, Pensamiento crítico y Trabajo colaborativo, como para el Diseño de proyecto y la Presentación del trabajo, ver las rúbricas correspondientes en el Anexo.

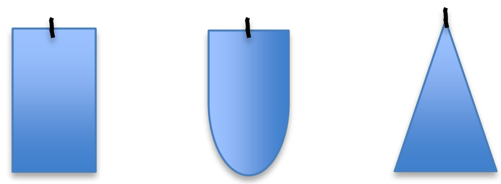
Anexos de proyectos

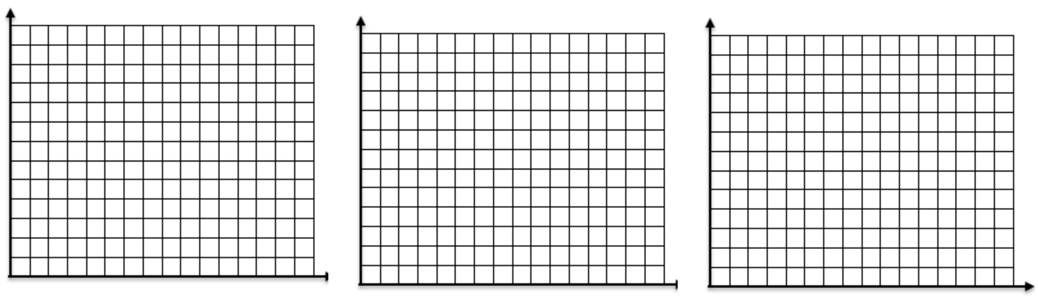
1. **MODELO MATEMÁTICO DE ESTENOSIS, EXPERIMENTO “HAGEN-POISEUILLE” Y ECOGRAMA ESTENOSIS.**



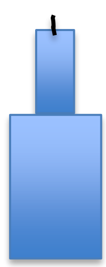
2. EJERCICIOS

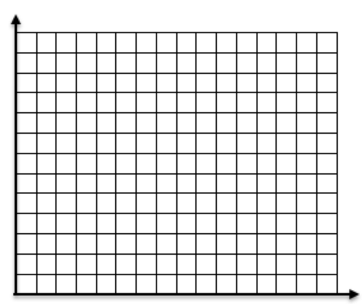
- Ejercicio 1: La figura muestra tres velas con formas diferentes. Las tres velas tienen la misma altura *h* de 12cm. Se las prende y se observa el cambio de la altura en cada una en el tiempo. Se supone que el volumen de cera se queme constantemente en las tres. Elaboren de manera esquemática los gráficos cartesianos que representan la variación de la altura de las velas en el tiempo.



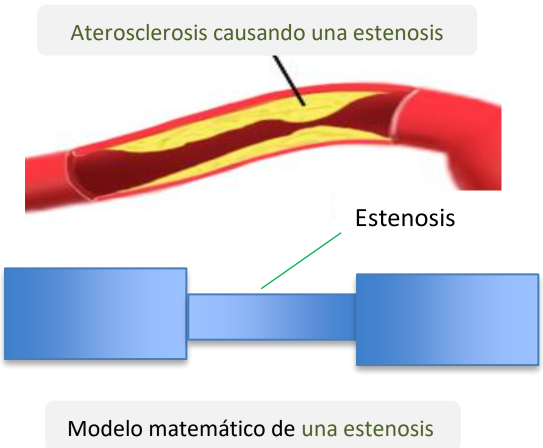


- Ejercicio 2: La figura muestra una vela que está compuesta por dos cilindros de una misma altura *h*. La vela superior tiene la mitad del diámetro de la vela inferior. Se la prende y se observa el cambio de la altura total *H* en el tiempo *t*. Se supone que el volumen de cera se quema constantemente. Elaboren el gráfico esquemático que representa la altura momentánea de la vela compuesta, considerando correctamente los diferentes diámetros de las velas.





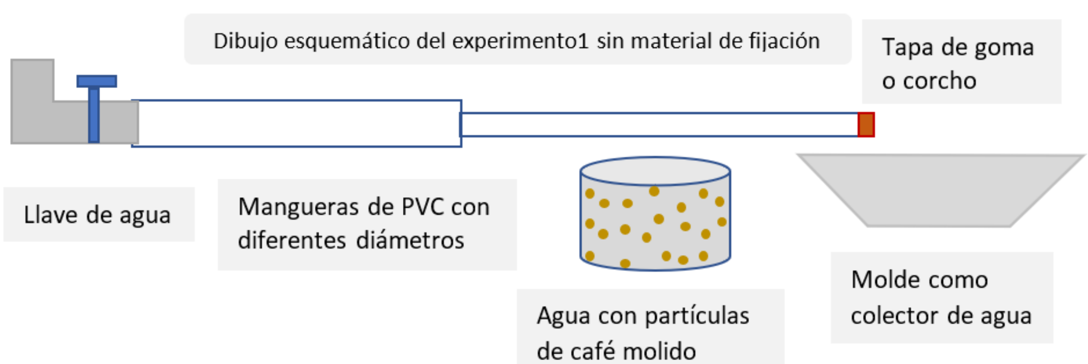
- Ejercicio 3: La figura muestra el dibujo de una estenosis arterial, que significa que placas arteriales estrechan una arteria. El modelo matemático que se muestra consiste en tres cilindros combinados; el central tiene la mitad del diámetro de los exteriores.



- Preguntas para el análisis de los ejercicios 1, 2 y 3.
  - ¿Por qué los tres cilindros conectados modelan la situación de una estenosis arterial? Argumenten y comuniquen su respuesta.
  - Considerando la situación real, ¿en qué detalles del modelo se hace una simplificación? Argumenten y comuniquen su respuesta.

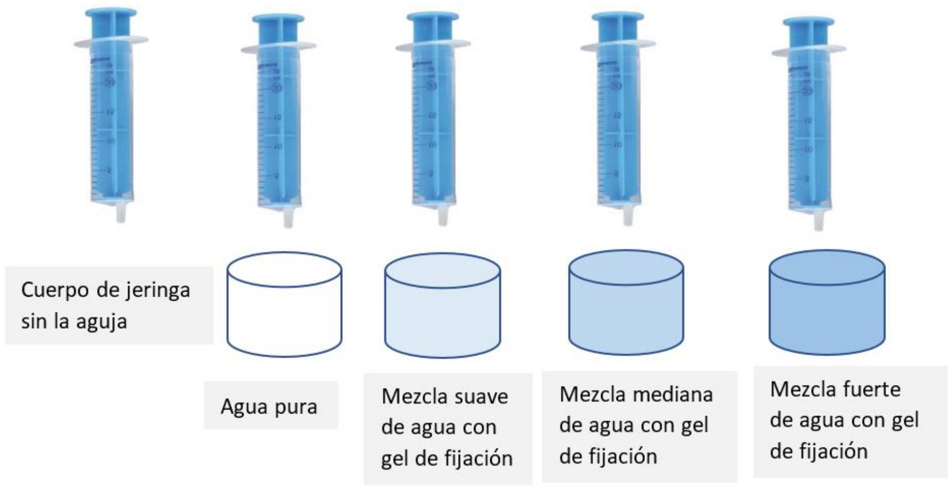
3. EXPERIMENTOS

- **Experimento 1:** Verificación experimental del modelamiento de los ejercicios 2 y 3.



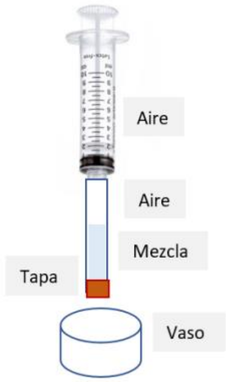
- **Observaciones:**
  - Experimentar con un circuito de agua requiere de una bomba experimental que, en la mayoría de los colegios, no está disponible. Por esta razón, se propone diseñar el recorrido del agua desde la llave hasta un molde como colector.
  - En el flujo del agua en una manguera transparente, no se puede observar el cambio de la velocidad al pasar de la manguera ancha a la manguera delgada. Para poder ver dicho cambio de velocidad, se echa polvo de café molido (no instantáneo) al agua, que es arrastrado por la corriente del agua e indica la velocidad. En una etapa previa al experimento, se combina la manguera ancha con la delgada. Para ello, se aumenta el diámetro de un extremo de la manguera delgada, envolviéndolo con una cinta de teflón hasta que coincida con el diámetro interior de la manguera ancha. Se conectan con pegamento de PVC o silicona.
  - Procedimiento:
    - Se tapa la manguera delgada y se llena la manguera delgada con agua pura, a través de la manguera ancha.
    - Después se llena la parte superior de las mangueras con la mezcla de agua con café molido.
    - Se conecta la combinación de las mangueras llenas con la llave de agua.
    - Se coloca el extremo de la manguera delgada encima del molde de agua.
    - Se abre levemente la llave del agua para que se pueda generar una corriente suave de agua en las mangueras.
    - La atención se dirige a observar la parte de la conexión entre ambas mangueras.
    - Se saca la tapa de la manguera delgada y se observa el flujo del agua.
    - Se registra la observación en el protocolo del experimento.

- **Experimento 2:** Verificación experimental de la influencia de la viscosidad del líquido que fluye por una tubería, como mangueras o vasos sanguíneos.



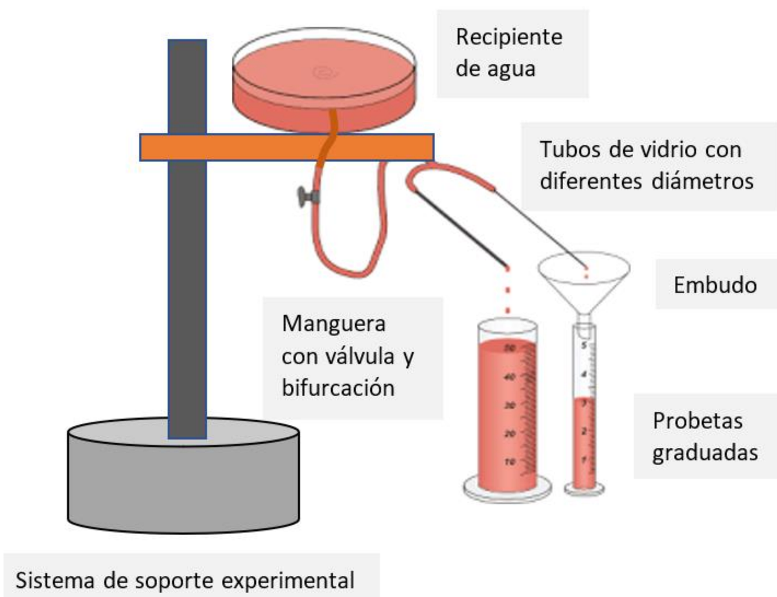
- **Observaciones:**
  - Se experimenta con el cuerpo de una jeringa sin la aguja.
  - Se prepara tres mezclas de agua con gel de fijación capilar, en tres diferentes concentraciones: suave, mediana y fuerte. Las *viscosidades* (roce interior) de las mezclas aumentan con la concentración de la mezcla.
  - Se tira el émbolo del cuerpo de la jeringa hacia el extremo abierto para que entre aire a la jeringa. Se registra una estimación individual de la fuerza necesaria.
  - Se experimenta al mismo tiempo con las 4 jeringas, llenándolas respectivamente con agua pura, y con mezcla suave, mediana y fuerte.
  - Se expulsa los cuatro líquidos de la jeringa, y se registra una estimación cualitativa de las fuerzas necesarias en cada caso.

- **Experimento 3:** Observar el transporte de líquidos de diferentes viscosidades y registrar las “placas” en las paredes de la manguera.



- **Observaciones:**
  - Se tapa una manguera corta.
  - Se llena una parte con la mezcla de la menor viscosidad.
  - Se retira el émbolo de la jeringa hasta el extremo, manteniendo la punta en el tubo de la jeringa.
  - Se conecta la manguera con la punta de la jeringa.
  - Se presiona levemente el émbolo hacia abajo.
  - Se retira la tapa y se vacía la jeringa.
  - Se saca la manguera de la jeringa y se deja secar por un tiempo.
  - Se hace un corte longitudinal de la manguera y se observa su pared interior tapada por el líquido de la mezcla.
  - Se repite con las demás mezclas y se registra las observaciones de las paredes.
  - Para registrar el efecto de las placas en las paredes, el émbolo que vacía la tubería echando la mezcla no debe tener contacto directo con la mezcla, porque así se rasparía la pared y no habría placas. En el experimento, una columna de aire echa la mezcla sin raspar la pared. Además, así se respeta que la viscosidad es un “roce interior” del líquido.

- **Experimento 4:** Verificar la Ley de Hagen-Poiseuille



- **Observaciones:**
    - Se coloca el recipiente con el sistema de manguera en el soporte experimental.
    - El diámetro de un tubo de vidrio equivale a la mitad del otro.
    - Se abre la válvula y se observa cómo se llenan las probetas graduadas.
    - Se registra la observación del proceso.
    - Al terminar, se registra la cantidad de agua en cada probeta graduada.
    - Se compara el resultado con el obtenido mediante la ley de Hagen-Poiseuille

- **Ecografía Doppler en la detección de una estenosis arterial:** El efecto Doppler ocurre cuando un receptor de sonido se está alejando de la fuente del sonido. Al hacer una ecografía del flujo sanguíneo, se emite ultrasonido que se refleja en los eritrocitos de la sangre transportados por el vaso sanguíneo. El sonido reflejado vuelve a un receptor. Si los eritrocitos se alejan, se registra una frecuencia menor que la frecuencia del sonido emitido. Si la sangre pasa por una estenosis (estrechamiento), se aumenta la velocidad de los eritrocitos (ver resultado del experimento 1), lo que conlleva una disminución adicional de la frecuencia del sonido recibido. Este efecto se transforma en información digital y, por vía electrónica, genera puntos en una pantalla, los cuales incluyen intensidad y colores.

- **Ejercicio final:** Conseguir, si es posible, un ecograma real de flujo sanguíneo, e identificar y argumentar el lugar de una estenosis arterial según los datos indicados, reconociendo el aumento de la velocidad de los eritrocitos.

Proyecto STEM: Mejoremos el tránsito

Haciéndolo más seguro, eficiente e inteligente

Resumen del Proyecto

Este proyecto interdisciplinar presenta a los estudiantes un problema real que afecta a todas las personas que habitamos ciudades y necesitamos trasladarnos (ya como peatones o en vehículos) por calles, autopistas y carreteras: el transporte vial. Este problema tiene diferentes consecuencias; por ejemplo:

- Hay miles de muertes todos los años, solo en Chile, como consecuencia de accidentes de tránsito, muchas personas que quedan mutiladas y muchas familias que tienen que padecer dramáticos sufrimientos. Todo ello tiene, además, consecuencias económicas importantes para las personas involucradas y para el país.
- En algunos momentos, la congestión vial genera una gran pérdida de tiempo para las personas, un considerable aumento de las emisiones contaminantes del aire, además de contaminación acústica y un gasto enorme de combustible, con el correspondiente aporte al calentamiento global, lo cual también significa enormes gastos para la gente y para el país.
- Supone complejos problemas para el estacionamiento de vehículos y bicicletas, especialmente en centros comerciales, escuelas, hospitales y lugares de trabajo.
- Cada año hay miles de robos de vehículos, portonazos, asaltos, etc. Las vías públicas son peligrosas, porque constituyen un medio propicio para la delincuencia.

La idea es que los alumnos, basados en sus conocimientos de física y de las tecnologías que se derivan de ella (sensores, radares, cámaras de video, sistemas de posicionamiento global, etc.), diseñen soluciones plausibles para reducir los problemas que ocasiona un transporte vial deficiente, anticuado y poco inteligente.

Nombre del Proyecto **Mejoremos el tránsito** **Haciéndolo más seguro, eficiente e inteligente**
Problema central Diseñar un sistema vial para la ciudad en que vivimos, que incorpore medidas de seguridad y control del flujo de vehículos (por ejemplo: semáforos inteligentes, control de velocidad según condiciones del tiempo, desvíos dependiendo de la congestión, etc.), y esté controlado por una central que coordine la información satelital de cada vehículo, con apoyo de drones. Asimismo, definir los dispositivos y accesorios (sensores, radares, GPS, etc.) con que deberían contar todos los vehículos motorizados.

Propósito
Se pretende que los estudiantes utilicen los conocimientos y habilidades propias de la Física, la Matemática y de la Formación Ciudadana para dar solución a una situación real, definiendo las estrategias más efectivas para controlar el flujo vehicular, prever accidentes, evitar las congestiones y reducir la contaminación, etc., y respetando las libertades y los derechos de las personas.

Objetivos de Aprendizaje

FÍSICA

OA Conocimiento y comprensión

OA 6 Valorar la importancia de la integración de los conocimientos de la física con otras ciencias para el análisis y la propuesta de soluciones a problemas actuales, considerando las implicancias éticas, sociales y ambientales.

MATEMÁTICA

OA Conocimientos y comprensión

OA 3, 3° Medio: Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos de situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponencial y logarítmica de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.

OA 4, Límites, derivadas e Integrales: Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA Habilidades

OA a Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA c Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA e Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema y tomar decisiones fundamentadas.

Preguntas

- ¿Qué dicen las estadísticas respecto de los accidentes de tránsito en Chile?
- ¿Cuáles son los momentos y situaciones en que se produce mayor número de accidentes de tránsito?
- ¿Cuáles son las principales causas de los accidentes de tránsito en Chile?
- ¿Cómo nos puede ayudar la física a comprender el comportamiento del flujo de vehículos?
- ¿Por qué hay tantos choques entre vehículos y atropellos a ciclistas y peatones, si con la tecnología que existe, no debieran producirse?
- ¿Cuáles son los principales factores que inciden en que haya accidentes viales?
- ¿Qué medidas de seguridad debes adoptar como peatón o como ciclista?
- ¿Cómo se podrá evitar los grandes tacos que se producen en algunos lugares en ciertos horarios?
- ¿En qué medida eliminar la congestión vehicular puede contribuir a ahorrar energía, reducir la contaminación, ahorrar tiempo y aumentar el bienestar de las personas?
- ¿Qué leyes del tránsito habría que dictar y cómo fiscalizarlas, respetando el derecho de las personas?
- ¿Cómo será el tránsito en el futuro si el parque vehicular (automóviles, motos, bicicletas, etc.) continúa creciendo como lo hace hoy?

HISTORIA, GEOGRAFÍA Y CIENCIAS SOCIALES **OA 5** Evaluar, a partir de la investigación, el estado del medioambiente en Chile y América Latina, incluyendo efectos de distintas actividades humanas y acciones emprendidas por los Estados de la región para avanzar en sustentabilidad. **EDUCACIÓN CIUDADANA** **OA Conocimiento y comprensión** **OA 3** Analizar el impacto de diversos modelos de desarrollo y las políticas económicas en la vida cotidiana y en el cambio climático, en función de la sustentabilidad y del aseguramiento de una vida digna y justa para todos y todas con condiciones para el desarrollo personal y colectivo. **OA Habilidades** **OA 7** Proponer formas de organización del territorio y del espacio público que promuevan la acción colectiva, la interculturalidad, la inclusión de la diversidad y el mejoramiento de la vida comunitaria. **OA 8** Tomar decisiones fundadas en principios éticos, valores y virtudes públicas en las prácticas ciudadanas, resguardando la dignidad del otro y la vida en democracia.	
Tipo de Proyecto Interdisciplinario STEM • Física • Matemática • Formación ciudadana • Tecnología	
Productos Elaborar modelos de: 1) Calles, autopistas y carreteras con señalización electrónica para peatones, ciclistas y choferes de vehículos motorizados. Puede consistir en una maqueta real o una simulación computacional. 2) Vehículos motorizados con sistemas anti-accidentes. Puede ser simplemente descriptivo, aunque debe basarse en tecnologías existentes.	
Habilidades y actitudes para el siglo XXI Pensamiento crítico Pensamiento creativo	

Trabajo colaborativo

Recursos

1. Para un modelo concreto, conviene que los estudiantes construyan una maqueta como la de la imagen adjunta –idealmente con materiales reciclados– para modelar el tránsito en calles, carreteras, autopistas, etc., que incluya semáforos, alumbrado público, sensores, señalización, etc.

2. Para un modelo abstracto, se recomienda que hagan una simulación computacional. Tiene que representar principalmente el movimiento de vehículos motorizados en calles, autopistas y carreteras; las señalizaciones y lo que ocurre cuando la densidad de vehículos es muy alta o cuando hay cuellos de botella en los caminos por barreras de peajes o accidentes en la ruta, entre muchas otras situaciones.

3. Un modelo ideal de un vehículo motorizado, preferentemente eléctrico, que cuente con tecnología antichoque; por ejemplo: que ajuste automáticamente su velocidad de acuerdo con las condiciones del pavimento, de visibilidad y condiciones climáticas, así como la distancia a otros vehículos ya en movimiento o en reposo; que se detenga automáticamente al detectar una persona en el camino; que reconozca las condiciones física del chofer (por ejemplo, estado de ebriedad) y que no comience a funcionar si la persona no está en condiciones de manejar; que cuente con sistemas antirrobo; que esté conectado a una base de control de tránsito que avise cambio de ruta para evitar las congestiones; etc.

Etapas

- **Fase 1: Comprensión del problema**. Ayudar a los estudiantes por medio de preguntas y actividades destinadas a descubrir que:
    - los accidentes de tránsito se pueden reducir considerablemente:
        - por medio de campañas destinadas a que los conductores tomen conciencia de sus responsabilidades cuando manejan un vehículo
        - si se incrementa la fiscalización en los límites de velocidad, en la condición de los choferes (ingesta de alcohol y otras drogas), el estado del vehículo, etc.
        - si los vehículos cuentan con tecnología moderna que los haga reducir su velocidad y/o detenerse si se acerca a otro vehículo o persona
    - las congestiones de vehículos que se producen en ciertos lugares y horarios pueden disminuir considerablemente:
        - con semáforos adecuadamente controlados, con la debida información a los choferes y con desvíos programados y calles y avenidas reversibles, etc.
        - si se incentiva el uso del transporte público, de las bicicletas y otros medios livianos, frente al automóvil
    - las soluciones a los problemas del tránsito pueden significar:

  - un gran ahorro de energía y recursos para el país y las personas
  - un incremento significativo en la calidad de vida de mucha gente
- Fase 2: Diagnóstico y estadísticas del problema del tránsito vehicular en Chile. Los jóvenes investigan sobre el estado actual de la situación en nuestro país y las soluciones dadas en otros países. Para ello, pueden analizar los contenidos de páginas web como las siguientes:
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.conaset.cl/programa/observatorio-datos-estadistica/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://blogs.worldbank.org/es/voices/congestion-vehicular-contaminacion-accidentes-de-transito-podria-la-tecnolog-poner-fin-a-los-problemas
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.latercera.com/nacional/noticia/radiografia-los-accidentes-transito-chile-dias-donde-hora-ocurre-la-mayoria-los-siniestros/422921/
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.emol.com/noticias/Autos/2017/04/28/856132/Las-principales-causas-de-accidentes-en-Chile.html
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/27813/6/S0301049_es.pdf
- Fase 3: Para estudiar el problema del tránsito mediante modelos matemáticos, considerar páginas web como las siguientes:
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://medium.com/@TomasDeCamino/la-matem%C3%A1tica-de-las-congestiones-de-tr%C3%A1fico-29681db8dbc0
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.emol.com/noticias/Autos/2016/09/06/820739/Disenan-sistema-que-predice-accidentes-de-transito.html
- Fase 4: En esta fase, los alumnos se informan sobre la normativa legal que regula la conducta de distintos tipos de choferes y peatones. Estudian, por ejemplo, la “ley Emilia”.
- Fase 5: Construyen el modelo (maqueta real o simulación virtual), explicando cómo resuelve el problema de tránsito. Emplean conceptos matemáticos como intensidad de tránsito y densidad vehicular, entre otros.
- Fase 6: Elaboran las conclusiones de su investigación.
- Fase 7: Presentan las conclusiones al curso.

Cronograma semanal

Semana 1 (Fase 1)
- Plantear el problema.
- Guiar a los estudiantes por medio de preguntas y actividades sobre las ventajas de resolver el problema del tránsito en muchos lugares y ocasiones.
- Constituir los equipos de trabajo y distribuir las tareas para cada integrante.

Semana 2 (Fases 2 y 3)
- Investigación sobre estadísticas de accidentes de tránsito y las leyes del tránsito.

Semana 3 (Fases 4 y 5)
- Construcción de alguno de los modelos propuestos y análisis de su funcionamiento.

Semana 4 (Fases 6 y 7)
- Redacción de conclusiones en un informe escrito en algún medio electrónico.
- Presentación de conclusiones al curso con algún medio electrónico.

Evaluación Formativa
Resolución de casos para análisis de modelos.

Evaluación Sumativa
Exposición del proyecto.

Difusión Final
Exposición de las conclusiones frente a la comunidad y a través de redes sociales.

Bibliografía
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://spain.minilandeducational.com/school/metodologia-stem-en-el-aula

Criterios de evaluación

Tanto para las habilidades del siglo XXI de Pensamiento creativo e innovación, Pensamiento crítico y Trabajo colaborativo, como para el Diseño de proyecto y la Presentación del trabajo, referirse a las rúbricas correspondientes en el Anexo.

Proyecto STEM: Bacterias para degradar el plástico de los océanos

Resumen del Proyecto

El proyecto ***Bacterias para degradar el plástico de los océanos*** toma como punto de partida el origen del plástico y su permanencia en los océanos, el problema medioambiental y de salud que supone, y la propuesta de una solución que implique usar bacterias para eliminarlo.

Para ello, los estudiantes contextualizan el problema por medio de una investigación en diversas fuentes, determinando sus causas y consecuencias. Sobre esa base, modelan la creación de bacterias (mediante ingeniería genética) que sean capaces de degradar plástico, e identifican las variables involucradas, como tipos de plásticos y los procesos físico-químicos que permitan su degradación; especies de bacterias que puedan ser manipuladas genéticamente y los procesos biológicos involucrados para crearlas; formas de liberación en zonas críticas del planeta, considerando el comportamiento de las masas de agua y corrientes marinas que optimicen la acción de las bacterias de eliminar el plástico contaminante.

Los jóvenes presentan sus proyectos a evaluación y luego los difunden en la comunidad escolar y/o en ferias científicas.

Nombre del Proyecto **Bacterias para degradar el plástico de los océanos**
Problema central ¿Cómo podemos contribuir a eliminar el plástico presente en los océanos mediante el uso de bacterias? El uso del plástico en nuestra sociedad está ampliamente aceptado; paralelamente, ha crecido la contaminación desde mediados del siglo pasado, en parte debido al plástico desechable (de un solo uso). De hecho, cada año se produce 400 millones de toneladas de plástico en el mundo, pero solo un 9% de los desperdicios se recicla. Se estima que los océanos reciben entre 4,8 y 12,7 millones de toneladas de plástico anuales; por ende, en unos 30 años, el plástico flotante en los mares de la Tierra pesará más que todos los peces que nadan en ellos. Esto afectará también a los ecosistemas terrestres y el aire, y representará un potencial problema en la salud de las personas. Usar bacterias para la descontaminación de aguas con fines biotecnológicos ofrece una posibilidad concreta para eliminar el plástico de los océanos. Las bacterias son muy diversas y ya se encontró una especie capaz de digerir y asimilar plástico. Por lo tanto, se requiere avanzar en la investigación para permitir su uso a gran escala, considerando las variables involucradas en su liberación, permanencia y productividad en el medio ambiente.
Propósito Se espera que los alumnos utilicen los conocimientos y habilidades propias de las ciencias, la geografía y la matemática para resolver un problema medioambiental. Para ello, investigan su origen y consecuencias, y después modelan cómo usar bacterias para degradar plástico en los océanos, considerando las principales variables involucradas en su creación, liberación y permanencia en el ambiente.

Objetivos de Aprendizaje **BIOLOGÍA DE LOS ECOSISTEMAS** **OA Conocimiento y comprensión** **OA 5** Valorar la importancia de la integración de los conocimientos de la biología con otras ciencias para el análisis y la propuesta de soluciones a problemas actuales presentes en sistemas naturales, considerando las implicancias éticas, sociales y ambientales. **BIOLOGÍA CELULAR Y MOLECULAR** **OA Conocimiento y comprensión** **OA 7** Analizar aplicaciones biotecnológicas en diversas áreas, como tratamientos para el cáncer, preservación y uso de células madre, y producción de organismos transgénicos, entre otros, y evaluar sus implicancias éticas, sociales y legales. **CIENCIAS DE LA SALUD** **OA Conocimiento y comprensión** **OA 4** Investigar y comunicar la relación entre la calidad del aire, las aguas y los suelos con la salud humana, así como los mecanismos biológicos subyacentes. **FÍSICA** **OA Conocimiento y comprensión** **OA 5** Investigar y aplicar conocimientos de la física (como mecánica de fluidos, electromagnetismo y termodinámica) para la comprensión de fenómenos y procesos que ocurren en sistemas naturales, como los océanos, el interior de la Tierra, la atmósfera, las aguas dulces y los suelos. **OA6** Valorar la importancia de la integración de los conocimientos de la física con otras ciencias para el análisis y la propuesta de soluciones a problemas actuales, considerando las implicancias éticas, sociales y ambientales. **QUÍMICA**	**Preguntas** • ¿Cuál es el origen y el destino del plástico producido en el mundo? • ¿Por qué es un problema que haya plásticos en los ecosistemas, en especial en los océanos? • ¿Por qué las bacterias pueden servir para eliminar el plástico de los océanos? • ¿Cómo se puede crear o mejorar bacterias que degraden el plástico de los océanos? • ¿Cómo podemos modelar el uso de bacterias para descontaminar ambientes marinos? • ¿Qué eventuales variables hay que tener en cuenta para la liberación y permanencia de bacterias degradadoras de plástico en los ambientes marinos? • ¿Qué ventajas y limitaciones puede presentar un modelo?

OA Conocimiento y comprensión **OA 1** Evaluar el desarrollo del conocimiento científico y tecnológico en nanoquímica y química de polímeros, considerando sus aplicaciones y consecuencias en ámbitos como el ambiental, médico, agrícola e industrial. **OA 7** Valorar la importancia de la integración de los conocimientos de la química con otras ciencias para el análisis y la propuesta de soluciones a problemas actuales, considerando las implicancias éticas, sociales y ambientales. **GEOGRAFÍA, TERRITORIO Y DESAFÍOS SOCIOAMBIENTALES** **OA Conocimiento y comprensión** **OA 6** Recoger, sistematizar y comunicar información sobre procesos y dinámicas espaciales mediante el uso de estrategias y metodologías propias de la geografía, como interpretación y análisis de cartografía, georreferenciación y uso de imágenes, estadísticas e información geográfica, trabajo de campo, entrevistas, encuestas, mapeos participativos y escalas de percepción, entre otros. **MATEMÁTICA** **OA Conocimiento y comprensión** **OA 3, 3° Medio:** Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos de situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponencial y logarítmica de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales. **OA 4, Límites, derivadas e Integrales:** Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del	

cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales. **OA Habilidades** **OA a** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA c** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico. **OA e** Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas. **CIENCIAS** **OA Habilidades** **OA a** Formular preguntas y problemas sobre tópicos científicos de interés, a partir de la observación de fenómenos y/o la exploración de diversas fuentes. **OA c** Describir patrones, tendencias y relaciones entre datos, información y variables. **OA f** Desarrollar y usar modelos basados en evidencias para predecir y explicar mecanismos y fenómenos naturales. **OA i** Analizar críticamente implicancias sociales, económicas, éticas y ambientales de problemas relacionados con controversias públicas que involucran ciencia y tecnología.	

Tipo de Proyecto Interdisciplinario STEM

- Ciencias
- Matemática
- Geografía

Producto

Un modelo integrado y contextualizado –basado en el conocimiento actual, biotecnológico, científico, geográfico y matemático– que describa la creación de bacterias degradadoras de plástico en ambientes marinos, su liberación en zonas geográficas relevantes y su permanencia en dichos ambientes.

Habilidades y actitudes para el siglo XXI

- Pensamiento creativo
- Pensamiento crítico
- Trabajo colaborativo
- Solución de problemas

Recursos

Para la fase de entender el problema, deben acceder a fuentes de información, fundamentalmente a través de internet.

En la fase de crear el modelo de bacteria, sería adecuado que construyan una maqueta, idealmente con materiales reciclados, donde se describa el proceso y las características de la bacteria. Otra opción es que elaboren imágenes y animaciones computacionales.

Asimismo, para crear los modelos, conviene que usen una simulación computacional, principalmente sobre: el crecimiento bacteriano y la tasa de liberación necesaria para mantenerse en el ambiente; la sobrevivencia de las bacterias bajo influencias ambientales como salinidad y temperatura del agua, y la dinámica de flujo del agua en los puntos geográficos clave donde la contaminación por plástico es crítica, teniendo en cuenta al menos las corrientes marinas que puedan afectar la permanencia de las bacterias en el ambiente acuático.

Etapas

- Fase 1: Comprender del problema. Cabe ayudar a los estudiantes con preguntas y actividades, a indagar sobre:
    - El origen del problema: ¿Por qué los océanos se están llenando de plástico?
    - Tipos de plástico, su uso y degradación
    - El uso biotecnológico de bacterias para la descontaminación ambiental
- Fase 2: Elaborar de un modelo de bacteria que permita degradar plástico en los ambientes marinos.

- Fase 3: Elaborar un modelo que describe las condiciones geográficas para liberar la bacteria creada en los océanos, y aplicar modelos matemáticos que describan su crecimiento y permanencia en el ambiente.
- Fase 4: Integrar los modelos y ponerlos a prueba. Elaborar las conclusiones del trabajo y la proyección para su desarrollo a futuro.
- Fase 5: Presentar los resultados a la comunidad escolar y/o ferias científicas, de acuerdo a la disponibilidad y el contexto.

Cronograma semanal

Semana 1 (Fase 1)

- Buscar información para entender el problema.
- Guiar a los estudiantes con preguntas para que investiguen sobre las causas y consecuencias de usar plástico y liberarlo en ambientes marinos, y planteen las posibles variables involucradas y la utilización de bacterias para la descontaminación ambiental.
- Determinar la ejecución del trabajo: establecer roles y tareas para cada integrante.

Semanas 2-3 (Fase 2)

- Elaborar un modelo de bacteria creada biotecnológicamente para degradar plástico.

Semana 4: (Fase 3)

- Elaborar un modelo que represente la dinámica de crecimiento y mantención de la población bacteriana en el ambiente marino, así como los factores geográficos que la afectan.

Semanas 5-6: (Fase 4)

- Integrar los modelos elaborados y ponerlos a prueba.
- Redactar las conclusiones y proyecciones del trabajo realizado.
- Elaborar la presentación del proyecto.

Semana 7: (Fase 5)

- Difundir el proyecto en la comunidad escolar y otras instancias, según disponibilidad y contexto.

Evaluación Formativa

Rubrica para pensamiento crítico.

Evaluación Sumativa

Puesta a prueba del modelo integrado y exposición del proyecto (rúbricas para el diseño de proyectos y la presentación).

Difusión Final

Exposición del trabajo realizado a la comunidad escolar.

Bibliografía
Contextualización del problema del plástico en los océanos https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.dw.com/es/onu-s%C3%B3lo-9-por-ciento-del-pl%C3%A1stico-usado-en-el-mundo-se-recicla/a-44077167 https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.elmundo.es/papel/historias/2019/03/05/5c7d4ad9fc6c83665c8b45db.html https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.nationalgeographic.com.es/naturaleza/grandes-reportajes/ahogados-mar-plastico_12712/4 https://www.curriculumnacional.cl/link/https://news.un.org/es/story/2019/03/1452961 **Bacterias y degradación de plástico** https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.argenbio.org/index.php?action=novedades&note=202 https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.elmundo.es/ciencia/2016/03/10/56e1c141e2704e7a6a8b4629.html https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.nationalgeographic.com.es/ciencia/actualidad/crean-enzima-mutante-que-se-come-plastico_12616 **Islas de plástico** https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.infobae.com/2016/05/08/1809677-el-septimo-continente-la-misteriosa-isla-plastico-que-flota-el-pacifico/ https://www.curriculumnacional.cl/link/https://blogthinkbig.com/el-rostro-de-nuestros-desperdicios https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.lavanguardia.com/natural/20160609/402387225954/isla-basura-pacifico.html

Criterios de evaluación

Tanto para las habilidades del siglo XXI de Pensamiento creativo e innovación, Pensamiento crítico y Trabajo colaborativo, como para el Diseño de proyecto y la Presentación del trabajo, referirse a las rúbricas correspondientes en el Anexo.

Proyecto STEM: ¡Todos contra el fuego!

El control de los incendios forestales

Resumen del Proyecto

El proyecto ***¡Todos contra el fuego!*** toma como punto de partida los daños ambientales, sociales y económicos que causan los incendios forestales en nuestro país año tras año, y que llegan a un promedio de 52.000 hectáreas quemadas en cada período, según los datos organizados por Conaf entre 1964 y 2018.

Con estos antecedentes, se busca que los estudiantes profundicen en soluciones para controlar la propagación de los incendios forestales en nuestro país, abordando el problema y la solución desde una perspectiva matemática y científica

Nombre del Proyecto **¡TODOS CONTRA EL FUEGO!** **El control de los incendios forestales**
Problema central ¿Cuáles son las estrategias de control más efectivas de los incendios forestales, acorde a los patrones de propagación del fuego? Las condiciones ambientales que se dan especialmente en las estaciones de primavera y verano en nuestro país, como la carencia de lluvias y las altas temperaturas, aumentan las posibilidades de que se produzca un incendio forestal. Aunque las campañas de las autoridades se concentran en las acciones de prevención, es también un desafío para los organismos especializados, definir las mejores estrategias para controlar la propagación del fuego. De las buenas decisiones depende que disminuya el impacto negativo de estos fenómenos. Por lo tanto, uno de los objetivos de este proyecto es crear conciencia y convocar para la búsqueda de soluciones.
Propósito Se pretende que los alumnos utilicen los conocimientos y las habilidades propias de la matemática y de las ciencias para dar solución a una situación real, definiendo las estrategias más efectivas para controlar un incendio forestal, por medio de la construcción de modelos que permitan determinar los patrones de propagación del fuego.

Objetivos de Aprendizaje	Preguntas
BIOLOGÍA **OA 3 Conocimiento y comprensión** Explicar los efectos del cambio climático sobre la biodiversidad, la productividad biológica y la resiliencia de los ecosistemas, así como sus consecuencias sobre los recursos naturales, las personas y el desarrollo sostenible. **FÍSICA** **OA Conocimientos y comprensión** **OA 5** Investigar y aplicar conocimientos de la física (como mecánica de fluidos, electromagnetismo y termodinámica) para la comprensión de fenómenos y procesos que ocurren en sistemas naturales, tales como los océanos, el interior de la Tierra, la atmósfera, las aguas dulces y los suelos. **OA 6** Valorar la importancia de la integración de los conocimientos de la física con otras ciencias para el análisis y la propuesta de soluciones a problemas actuales, considerando las implicancias éticas, sociales y ambientales. **QUÍMICA** **OA 7** Valorar la importancia de la integración de los conocimientos de la química con otras ciencias para el análisis y la propuesta de soluciones a problemas actuales, considerando las implicancias éticas, sociales y ambientales. **MATEMÁTICA** **OA Conocimientos y comprensión** **OA 3, 3° Medio:** Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos de situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponencial y logarítmica de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.	• ¿Por qué los incendios forestales son hoy un problema mayor? • ¿Cómo nos ayuda la ciencia a comprender el comportamiento del fuego en los incendios forestales? • ¿Por qué podemos afirmar que aún no logramos extinguir los incendios con efectividad? • ¿Hay patrones en la propagación del fuego en los incendios? • ¿Cuáles son las posibles variables de control para manejar un incendio? • ¿Cómo podemos modelar situaciones de incendios forestales? • ¿Qué ventajas y limitaciones puede presentar un modelo?

OA 4, Límites, derivadas e Integrales: Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales. **OA Habilidades** **OA a** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA c** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico. **OA e** Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas. **CIENCIAS** **OA Habilidades** **OA c** Describir patrones, tendencias y relaciones entre datos, información y variables. **OA f** Desarrollar y usar modelos basados en evidencias para predecir y explicar mecanismos y fenómenos naturales.	

Tipo de Proyecto Interdisciplinario STEM

- Matemática
- Ciencias
- Tecnología

Producto

Un modelo de propagación del fuego para identificar patrones que permitan definir las mejores estrategias de control del fuego.

Habilidades y actitudes para el siglo XXI

Pensamiento crítico
Pensamiento creativo
Trabajo colaborativo

Recursos

1. Para modelo concreto: maqueta armable y ajustable que permita modelar terrenos e incendios, construida en material no combustible (aluminio).
2. Para modelo abstracto (icónico o gráfico): tablero de cartón con cuadrículas que representa el terreno. Tarjetas celestes o amarillas para representar los drones que vierten agua y realizan quemas, tarjetas rojas para las zonas incendiándose y tarjetas negras para las zonas ya quemadas.

Para revisar estas alternativas, consulte las páginas 13 y 14 del libro que se encuentra en: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.conectastem.cl/conecta/Libro/samples/Libros/

Etapas

- Fase 1: Comprensión del problema. Ayudar a los estudiantes, mediante preguntas y actividades, a descubrir que:
    - Hay patrones en la propagación de incendios.
    - Hay mecanismos que generan propagación.
    - Hay variables de control.
- Fase 2: Construcción de modelo.
- Fase 3: Testeo del modelo por medio de resolución de casos (página 23 del libro que se encuentra en: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.conectastem.cl/conecta/Libro/samples/Libros/
- Fase 4: Conclusiones.
- Fase 5: Presentación de las conclusiones al curso.

Cronograma semanal

Semana 1 (Fase 1)

- Plantear el problema.
- Guiar a los estudiantes con preguntas y actividades de descubrimiento, para que construyan conocimiento sobre los patrones y mecanismos de propagación del fuego, y las posibles variables de control.
- Determinar equipos de trabajo: establecer roles y tareas para cada integrante.

Semana 2 (Fases 2 y 3)

- Construcción del modelo y testeo por medio de casos dados.

Semana 3: (Fases 4 y 5)

- Redacción de conclusiones en informe escrito.
- Presentación de conclusiones al curso.

Evaluación Formativa

Resolución de casos para testeo de modelos.

Evaluación Sumativa

Exposición del proyecto.

Resolución de problemas: ejercicios para transitar de un modelo concreto a uno abstracto.

Difusión Final

Demostración de las conclusiones frente a la comunidad.

Bibliografía
“Clase pública STEM Incendios Forestales. Conectando STEM”. Vol. 1. Roberto Araya. Proyecto Fondef CIAE. En: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.conectastem.cl/conecta/Libro/samples/Libros/ Para información general acerca de los incendios forestales y educación medioambiental: https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.conaf.cl/incendios-forestales/combate-de-incendios-forestales/metodos-de-combate-de-incendios-forestales/ https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.conaf.cl/wp-content/files_mf/1550863101Introduccci%C3%B3n.pdf

Criterios de evaluación

Tanto para las habilidades del siglo XXI de Pensamiento creativo e innovación, Pensamiento crítico y Trabajo colaborativo, como para el Diseño de proyecto y la Presentación del trabajo, referirse a las rúbricas correspondientes en el Anexo.

Proyecto STEM: Pulmones verdes al rescate

Aportando a un país más verde

Resumen del Proyecto

El proyecto ***Pulmones verdes al rescate*** es un trabajo basado en la necesidad de educar según la concepción de la Educación para el Desarrollo Sostenible (EDS), que empodera a las personas para que cambien su manera de pensar y trabajen hacia un futuro sostenible.

Otro aspecto a considerar es que Unesco ha declarado explícitamente que hay un creciente reconocimiento internacional de la EDS como elemento integral de la educación de calidad y facilitadora clave del desarrollo sostenible. Los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) adoptados por la comunidad mundial para los próximos 15 años incluyen la EDS. La meta 4.7 del ODS 4 sobre la educación aborda la EDS y los enfoques relacionados, como la Educación para la Ciudadanía Global. (Se recomienda leer el Segundo compendio de prácticas ejemplares en materia de educación para el desarrollo sostenible [2009]).

En Chile se ha impulsado diversos programas que fomentan la forestación, el cultivo de plantas y el autocultivo de frutas y verduras (como el programa nacional de arborización, https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.conaf.cl/nuestros-bosques/arborizacion/ entre otras iniciativas); ello obedece a la necesidad de generar espacios verdes efectivos y propiciar una cultura de sostenibilidad frente al consumo y la demanda de recursos.

Con estos antecedentes, se busca que los jóvenes profundicen y apliquen sus saberes, habilidades y actitudes en medidas factibles para promover espacios verdes –de acuerdo a sus propios contextos socioculturales y geográficos–, empleando fundamentos científicos y tecnológicos de control y apuntando hacia el ingenio y soluciones sostenibles (soluciones ingenieriles).

Nombre del Proyecto **Pulmones verdes al rescate** **Aportando a un país más verde**
Problema central ¿Cómo promover e implementar iniciativas sostenibles y controladas de fomento de espacios verdes para el consumo y la sostenibilidad ambiental? La avanzada urbanización de las distintas zonas de Chile, la falta de tiempo efectivo en una sociedad de consumo rápido y el creciente problema de desertificación han disminuido sostenidamente las zonas de encuentro verde, la realización de huertos y el fomento del acuocultivo de productos y su cuidado. Por lo tanto, hay que proponer iniciativas para impulsar este tipo de iniciativas en ámbitos locales, junto con una educación sostenible y de cuidado del medio ambiente.

Actualmente hay diversas iniciativas privadas y públicas para este fin; sin embargo, se requiere educar la conciencia verde de la comunidad escolar, como plataforma educativa de una comunidad completa.

Se puede implementar pulmones verdes con ayuda de la tecnología –de acuerdo al contexto local–, a partir de una promoción comprometida y adecuando e ingeniando soluciones de control apropiadas al espacio físico, luego de un diagnóstico de recursos.

La meta de este proyecto es diseñar sistemas verdes (árboles, plantas, cultivos de diversos tipos, entre otros) adaptados al contexto de cada comunidad y empleando medios de control tecnológicos que ellos mismos diseñen.

Propósito

Se espera que los estudiantes empleen sus actitudes, conocimientos y habilidades para concebir diseños asociados a ciencia y tecnología para la educación sostenible: ello implica implementar y promover diseños tecnológicos para implementar recursos vegetacionales de Chile, de acuerdo a las variables propias de su contexto (clima, geografía y disposición de espacio, entre otras).

Objetivos de Aprendizaje	**Preguntas**
QUÍMICA **OA Conocimiento y comprensión** **OA 4** Explicar efectos del cambio climático sobre los ciclos biogeoquímicos y los equilibrios químicos que ocurren en los océanos, la atmósfera, las aguas dulces y los suelos, así como sus consecuencias sobre el bienestar de las personas y el desarrollo sostenible. **OA 6** Evaluar la contribución de la química y sus aplicaciones tecnológicas en el entendimiento, la prevención y mitigación de efectos derivados del cambio climático y la restauración de los sistemas naturales afectados. **CIENCIAS** **OA Habilidades** **OA c** Describir patrones, tendencias y relaciones entre datos, información y variables. **OA f** Desarrollar y usar modelos basados en evidencias para predecir y explicar mecanismos y fenómenos naturales.	• ¿Cómo contribuir a mitigar el cambio climático mediante el fomento de recursos vegetacionales en Chile? • ¿Cómo se relacionan los recursos vegetacionales con el ambiente? • ¿Cómo decidir qué especies vegetales recuperar o emplear para un uso sostenible? • ¿Cuáles son las posibles variables de control para manejar el recurso que se quiere promover, por medio de dispositivos tecnológicos de control? • ¿Cómo podemos controlar las variables usadas para optimizar el proceso? • ¿Qué ventajas y limitaciones puede presentar este proyecto?

EDUCACIÓN TECNOLÓGICA **OA Conocimiento y comprensión** **OA 3** Evaluar las propuestas de soluciones que apunten a resolver necesidades de reducción de efectos perjudiciales relacionados con el uso de recursos energéticos y materiales, considerando aspectos o dilemas éticos, legales, económicos, ambientales y sociales. **MATEMÁTICA** **OA Conocimiento y comprensión** **OA 3, 3° Medio:** Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos de situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponencial y logarítmica de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales. **OA 4, Límites, derivadas e Integrales:** Resolver problemas que involucren crecimiento o decrecimiento, concavidad, puntos máximos, mínimos o de inflexión de una función, a partir del cálculo de la primera y segunda derivada, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales. **OA Habilidades** **OA a** Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios. **OA e** Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema y tomar decisiones fundamentadas.	
Tipo de Proyecto Interdisciplinario STEM	

- Matemática
- Ciencias
- Tecnología

Producto

Diseñar dispositivos tecnológicos para implementar recursos vegetacionales de Chile en contextos locales, analizando cómo establecer estrategias sostenibles.

Habilidades y actitudes para el siglo XXI

Pensamiento crítico

Pensamiento creativo

Trabajo colaborativo

Recursos

1. Para diseños concretos: se sugiere que usen elementos que puedan reutilizarse (como neumáticos viejos, botellas plásticas) y otros materiales de acuerdo a su respectivo diseño, como madera, clavos u otros para construir maceteros, huertas u otros de acuerdo al análisis de contexto del recurso vegetacional a promover.
2. Para el modelo abstracto (diseño de plantillas de control): plantillas de control de variables, usando programas en ambientes digitales, como plantillas Excel, para controlar variables como crecimiento, cantidad de agua usada, valores de pH, entre otros.
3. Otros dispositivos: en virtud del control de variables anexas –como pH, calidad del suelo, granulometría u otros–, pueden necesitar dispositivos extra en el montaje tecnológico y la construcción del dispositivo para conservar el recurso vegetal. (Por ejemplo: si son lechugas o similares y se desea controlar el goteo de agua, cabe incluir un sensor o cuentagotas).

Etapas

- Fase 1: Comprensión del problema. Ayudar a los estudiantes preguntas y actividades, a indagar sobre:
    - Tipos de recursos vegetacionales a trabajar; es decir, seleccionar las plantas, árboles u otros a trabajar en virtud de las variables clima, cuidados y factibilidad.
    - Estudio de factibilidad espacial; supone reconocer el espacio con el cual se puede trabajar, incluso si es dentro o fuera de la escuela, dependiendo del contexto.
    - Recursos materiales disponibles, mapeando los materiales apropiados para el dispositivo, ya sea invernadero, huerta o cultivo hidropónico, entre otros.

    - Determinar las variables de optimización, fijando los recursos que se monitoreará para la sostenibilidad del proyecto (pH, suelos, minerales, entre otros).
- Fase 2: Construcción de los dispositivos: luego de decidir qué tipo de recurso pretenden fomentar, fabrican su dispositivo, usando modelos tipo plano para el diseño concreto.
- Fase 3: Muestreo inicial de variables y control de los dispositivos; es decir, revisar cómo se controlará las variables y si se requiere de otros dispositivos tecnológicos como sensores para este fin, de manera que luego puedan graficar y controlar la efectividad del diseño por medio de planillas.
- Fase 4: Informe de impacto, que incluirá los avances, logros y limitaciones del diseño planteado y ver cómo se podría masificar.
- Fase 5: Presentación de resultados, usando ambientes tecnológicos para mostrar el proceso y los resultados obtenidos a fin de compartirlos con la comunidad escolar y otros, de acuerdo a la disposición y el contexto.

Cronograma semanal

Semana 1 (Fase 1)

- Conseguir la información necesaria para comenzar las plantaciones, y determinar qué recursos vegetales trabajarán.
- Guiar a los estudiantes con preguntas y actividades de descubrimiento, para que analicen la factibilidad de variables como clima, recursos hídricos, espacios a utilizar, recursos materiales con los que se cuenta.
- Determinar la ejecución del trabajo: establecer roles y tareas para cada integrante.

Semana 2 (Fase 2)

- Construir el modelo y elaborar planos para establecer un catastro inicial de recursos disponibles y recursos por obtener.

Semanas 3-4: (Fase 3)

- Determinar el tipo de sensores o dispositivos de control, y construirlos.

Semana 5-7: (Fase 4)

- Muestreo inicial de datos para elaborar el informe.

Semana 8: (Fase 5)

- Compartir los resultados a través de diversos entornos y redes.

Evaluación Formativa
Desarrollo de rúbricas para trabajo colaborativo y diseño de proyectos.
Evaluación Sumativa
Exposición del proyecto.

Difusión Final
Socializar los avances, limitaciones y proyecciones del trabajo por medio de entornos tecnológicos y sociales, y exponer los resultados.

Bibliografía

Tutorial para sembrar:
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=61uSqNHBBhs

Sistema web de bajo costo para monitorear y controlar un invernadero agrícola: Ingeniare. Revista Chilena de Ingeniería, vol. 25 Nº 4, 2017, pp. 599-618:
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://scielo.conicyt.cl/pdf/ingeniare/v25n4/0718-3305-ingeniare-25-04-00599.pdf

Referencias para realizar huertos escolares:
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://huertoescolar2.blogspot.com/2008/09/inicio-huerto-escolar.html

Bibliografía

Arancibia, S. y Mena, J. (2018). *Cálculo 1. Potenciando el pensamiento crítico a través de la matemática*. Cengage Learning.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (1997). Una base de significados en la enseñanza de la matemática avanzada. Serie: *Antologías*, 1, 159-170. Cinvestav.

Cordero, F. (2001). La distinción entre las construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 4(2), 103-128.

Fadel, Ch., Bialik, M., y Trilling, B. (2016). *Educación en cuatro dimensiones: las competencias que los estudiantes necesitan para su realización*. Graphika.

Fraleigh, J. (1997). *Cálculo con Geometría Analítica*. Fondo Editorial Interamericano.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer-Spektrum.

Griffin, P. (2014). *Assessment for Teaching*. Cambridge University Press.

Larmer, J., Mergendoller, J., y Boss, S. (2015). *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*. Association for Supervision and Curriculum Development.

Menares, R. y Montoya, E. (2012). Estudio del espacio de trabajo del Análisis en la formación inicial de profesores de Matemática. *Revista chilena de Educación Matemática*. (6), 1, 193-202.

Montoya Delgadillo, E., Páez Murrillo, R., Vandebrouck, F., & Vivier, L. Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis. International *Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education. 4*, Issue 1, 139-160, 2018.

Montoya, E., Vivier, L., “Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis”, *ZDM Mathematics Education*, 48, 6, 739–754, 2016

Moss, C. & Brookhart, S. (2009). *Advancing formative assessment in every classroom: a guide for instructional leaders*. Association for Supervision and Curriculum Development.

Ramos-Rodríguez, E., & Reyes-Santander, P. (2017). Favoreciendo la reflexión del docente: un Estudio de Clases sobre cálculo integral usando tecnología. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 20(1), 67-85.

Sánchez-Matamoros G., García M., y Llinares S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.

Simmons, G. (2002). *Cálculo y Geometría Analítica*. (2ª edición). McGraw-Hill.

Smith, R. y Minton, R. (2000). *Cálculo.* McGraw-Hill.

Stewart, J. (2006). *Cálculo: conceptos y contextos*. Thomson International.

Stewart, J. Redlin, L. Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo.* Cengage Learning.

Taylor, E. y Wade, T. (2001). *Cálculo diferencial e integral.* Limusa.

Thomas, G. B. (2006). *Cálculo. Una variable*. (11ª edición). Pearson Educación.

Vom Hofe, R. & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a category of subject-matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37, Supplement 1, 225-254.

Weigand, H.-G. (2016). Zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer Perspektive. *Mathematische Semesterberichte*, 63(1), 135-154.

Weigand, H.-G. (2018). The Development of the concept of limit - Aspects and basic mental models. In: E. Bergqvist, M. Österholm, L. Sumpter, & C. Granberg, *Proceedings of the PME 42* (Vol. 4). Umeä: CityPrint i Norr AB., pp. 419-426.

Wiggins, G. & McTighe, J. (2005). *Understanding by design*. Association for Supervision and Curriculum Development.

_______. (2011). *The understanding by design guide to creating high-quality units*. Association for Supervision and Curriculum Development.

Anexo

Anexo 1: Rúbricas para la evaluación del proyecto

Rúbrica para el Trabajo Colaborativo

	El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área	El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades	El proyecto tiene las siguientes fortalezas
Desempeño individual	**Bajo el estándar**	**Acercándose al estándar**	**Cumple el estándar**
1 **Se hace responsable de sí mismo**	• No demuestra preparación, información y disposición para trabajar en equipo. • No usa las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas de proyecto. • No hace la mayoría de las tareas del proyecto o no las completa a tiempo.	• En general demuestra preparación, información y disposición para trabajar con el equipo. • Usa las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas del proyecto, pero de manera consistente. • Realiza algunas tareas pero necesita que se le recuerde al respecto. • Completa la mayoría de las tareas a tiempo. • A veces usa retroalimentación de los otros para mejorar su trabajo.	• Demuestra preparación, información y disposición para trabajar; estando bien informado acerca del tema del proyecto y cita y usa la evidencia para investigar y reflexionar acerca de ideas con el equipo. • Usa sistemáticamente las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas del proyecto. • Realiza las tareas sin que se le tenga que recordar al respecto. • Completa la totalidad de las tareas a tiempo. • Usa la retroalimentación de los otros para mejorar su trabajo.
2 **Ayuda al equipo**	• No ayuda al equipo a resolver problemas; puede generar problemas. • No hace preguntas de sondeo ni expresa ideas o elabora en respuesta a preguntas y discusiones. • No da retroalimentación útil a los otros. • No ofrece ayudar a los otros si estos lo necesitan.	• Coopera con el equipo, pero puede no ser activo en la ayuda para solucionar problemas. • A veces expresa sus ideas claramente, hace preguntas de sondeo y elabora en respuesta a preguntas y discusiones. • Da retroalimentación a otros, pero esto no es siempre útil. • A veces ofrece ayudar a los otros si estos lo necesitan.	• Ayuda al equipo a resolver problemas y manejar los conflictos. • Ayuda a la generación de discusiones efectivas al expresar sus ideas claramente, hacer preguntas de sondeo, asegurarse que todos sean escuchados y al responder de manera reflexiva ante nueva información y perspectivas. • Da retroalimentación efectiva (específica, factible y apoyadora) a los otros para que puedan mejorar su trabajo. • Ofrece ayuda a los otros si es que los necesitan.
3 **Respeta a otros**	• Es irrespetuoso o poco amable con sus compañeros de equipo (puede interrumpir, ignorar las ideas de los otros o herir sentimientos) • No reconoce o respeta otras posturas.	• En general, es educado y amable con sus compañeros de equipo. • En general, reconoce y respeta las posturas de los otros y al estar en desacuerdo, lo expresa de forma diplomática.	• Es educado y amable con sus compañeros de equipo. • Reconoce y respeta las posturas de los otros y al estar en desacuerdo, lo expresa de forma diplomática.

Rúbrica para el Pensamiento Crítico

Oportunidad de pensamiento crítico en las fases del proyecto	Bajo el estándar (El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área)	Acercándose al estándar (El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades)	Cumple el estándar (El proyecto tiene las siguientes fortalezas)
1 **Lanzamiento del proyecto.** **Analiza la pregunta clave e inicia la indagación.**	• Solo ve los aspectos superficiales de la pregunta clave o solo un punto de vista de la misma.	• Identifica algunos aspectos centrales de la pregunta clave, pero puede no ver sus complejidades ni considerar variados puntos de vista. • Realiza preguntas complementarias acerca del tema o acerca de lo que la audiencia o usuarios del producto quieren o necesitan, pero no indaga lo suficiente en ello.	• Demuestra comprensión acerca de los aspectos centrales de la pregunta clave, identificando en detalle lo que se necesita saber para responderla y considerando varios posibles puntos de vista para responderla. • Realiza preguntas complementarias que permiten enfocar o ampliar la indagación, si es que se necesita. • Hace preguntas complementarias para lograr la comprensión acerca de lo que la audiencia o usuarios del producto quieren o necesitan.
2 **Construcción de conocimiento, comprensión y habilidades.** **Recopilar y evaluar información.**	• Es incapaz de integrar la información para responder la pregunta clave; recopila muy poca o demasiada información y esta es irrelevante o viene de muy pocas fuentes. • Acepta la información sin cuestionar su validez ni evaluar su calidad.	• Intenta integrar la información para responder la pregunta clave; pero puede ser muy poca o demasiada información y/o viene de muy pocas fuentes o de algunas irrelevantes. • Comprende que la calidad de la información debe ser considerada pero no aplica este criterio de manera rigurosa.	• Integra suficiente información relevante para responder la pregunta clave. Esta información proviene de múltiples y variadas fuentes. • Evalúa de manera rigurosa la calidad de la información (considera su utilidad, precisión y credibilidad; distingue los hechos de las opiniones; reconoce el sesgo).

Oportunidad de pensamiento crítico en las fases del proyecto	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
3 **Desarrollo y revisión de ideas y productos.** **Uso de evidencia y sus normas de evaluación.**	• Acepta argumentos para la obtención de posibles respuestas a la pregunta clave sin cuestionar si su razonamiento es válido. • Usa la evidencia sin considerar cuán sólida esta es. • Confía en "su instinto" para evaluar y revisar las ideas, prototipos de productos o soluciones a los problemas (no usa las normas de evaluación).	• Reconoce la importancia y necesidad de un razonamiento válido y evidencia sólida, pero no los evalúa de forma cuidadosa al formular respuestas a la pregunta clave. • Evalúa y revisa ideas, prototipos de producto, soluciones a los problemas, basándose en normas incompletas o inválidas.	• Evalúa argumentos para la obtención de posibles respuestas a la pregunta clave considerando si es que el razonamiento es válido y la evidencia es relevante y suficiente. • Justifica la elección de los criterios usados para evaluar las ideas, prototipos de productos o soluciones a los problemas. • Revisa los borradores, diseños y soluciones inadecuadas y explica por qué no se ajustan a las normas.
4 **Presentación de productos y la respuesta a la pregunta clave.** **Justifica sus elecciones, considera alternativas y sus implicancias.**	• Elige un medio para presentar sin considerar las ventajas y desventajas de usar otros medios para presentar un tema o idea en particular. • No es capaz de dar razones válidas o evidencia adecuada para defender elecciones con el fin de responder la pregunta central o crear productos. • No considera ni respuestas alternativas, ni distintos diseños del producto o diferentes puntos de vista para responder a la pregunta clave. • No es capaz de explicar el nuevo conocimiento ganado a través de la realización del proyecto.	• Considera las ventajas y desventajas de usar diferentes medios para presentar un tema o idea en particular, pero no de forma rigurosa. • Explica opciones tomadas al responder la Pregunta clave o la creación de productos, pero algunas razones no son válidas o carecen de evidencia que las apoye. • Entiende que puede haber alternativas de respuestas a la pregunta de manejo o diseños para productos, pero no los considera cuidadosamente. • Puede explicar algunas cosas aprendidas en el proyecto, pero no está del todo claro acerca de nuevos conceptos.	• Evalúa las ventajas y desventajas de usar otros medios para presentar un tema o idea. • Justifica sus elecciones al responder la pregunta central o al crear productos dando razones válidas con evidencia que las respalde. • Reconoce las limitaciones de una sola respuesta a la pregunta central o al diseño del producto (cómo puede no ser completa, certera o perfecta) y considera perspectivas alternativas. •Puede explicar claramente los nuevos aprendizajes adquiridos en el proyecto y cómo estos pueden ser transferidos a otras situaciones o contextos.

Rúbrica de Pensamiento Creativo e Innovación

Oportunidad de creatividad e innovación en distintas fases del proyecto	Bajo el estándar (El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área)	Acercándose al estándar (El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades)	Cumple el estándar (El proyecto tiene las siguientes fortalezas)
1 **Lanzamiento del proyecto.** **Definición del desafío creativo**	• Puede solo “seguir instrucciones” sin comprender el propósito de la innovación o considerar las necesidades e intereses del público objetivo.	• Comprende el propósito de la innovación, pero no considera a cabalidad las necesidades e intereses del público objetivo	• Comprende el propósito de la innovación (¿quién necesita esto? ¿por qué?) • Desarrolla perspicacia acerca de las necesidades e intereses del público objetivo.
2 **Construcción de conocimiento, comprensión y habilidades.** **Identifica fuentes de información**	• Usa solo fuentes de información usuales (página web, libro, artículo). • No ofrece nuevas ideas durante las discusiones.	• Encuentra una o dos fuentes de información que no son las usuales (página web, libro, artículo). • Ofrece nuevas ideas durante las discusiones, pero sus puntos de vista son poco variados.	• Encuentra maneras o lugares inusuales para obtener nueva información (adultos expertos, miembros de la comunidad, empresas, organizaciones, literatura), además de las fuentes usuales (página web, libro, artículo). • Promueve puntos de vista divergentes y creativos durante las discusiones.
3 **Desarrollo y revisión de ideas y productos.** **Generación y selección de ideas.**	• Permanece dentro de los parámetros ya existentes; no usa técnicas para la generación de ideas para el desarrollo de nuevas ideas para la creación de productos. • Selecciona una idea sin evaluar su calidad. • No formula nuevas preguntas ni elabora la idea seleccionada. • No considera ni usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto.	• Desarrolla algunas ideas originales para los productos, utilizando una o dos veces las técnicas de generación de ideas. • Evalúa las ideas antes de seleccionar una, pero no de manera rigurosa. • Formula una o dos preguntas nuevas, pero puede hacer solo pequeñas modificaciones a la idea seleccionada. • Demuestra algo de imaginación al dar forma a las ideas para la elaboración de un producto, pero permanece dentro de límites convencionales. • Considera y usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto, pero no busca esta retroalimentación.	• Usa técnicas para la generación de ideas para el desarrollo de nuevas ideas para la creación de productos. • Evalúa cuidadosamente la calidad de las ideas y selecciona la mejor para darle forma a un producto. • Formula preguntas nuevas y toma distintas perspectivas para elaborar y mejorar la idea seleccionada. • Usa el ingenio y la imaginación y se sale de los límites convencionales al dar forma a las ideas para la elaboración de un producto. • Busca y usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto y así cumplir de una mejor manera con las necesidades del público objetivo.

Oportunidad de creatividad e innovación en distintas fases del proyecto	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
4 Presentación de productos y respuestas a las preguntas centrales. Presentación del trabajo a los usuarios o público objetivo.	• Presenta ideas y productos de forma convencional (presentaciones ppt, cargadas de texto, recitación de notas, falta de elementos de interacción con la audiencia)	• Añade algunos detalles que poseen atractivo visual a los medios utilizados en la presentación. • Intenta incluir elementos en la presentación que la harán más animada y atractiva.	• Crea medios para una presentación atractiva visualmente, evitando las formas convencionales (presentaciones ppt cargadas de texto, recitación de notas, falta de elementos de interacción con la audiencia). • Incluye elementos en la presentación que son especialmente vivaces, llamativos o poderosos y acordes al público objetivo.
5 Originalidad	• Usa modelos, ideas o direccionamientos existentes; no es original o único. • Sigue reglas y convenciones; usa materiales e ideas de maneras típicas.	• Tiene algunas ideas novedosas o considera mejoras, pero algunas de estas ideas son predecibles o convencionales. • Puede tentativamente tratar de desmarcarse de las reglas y convenciones, o encontrar nuevos usos para materiales e ideas comunes.	• Es novedoso, único y sorpresivo; muestra un toque personal. • Puede romper las reglas y convenciones de manera exitosa o usar materiales e ideas comunes de formas nuevas, inteligentes y sorpresivas.
6 Valor	• No es útil o valioso para el público objetivo/usuario. • No funcionaría en el mundo real porque es poco práctico o inviable.	• Es útil y valioso en cierta medida; puede no resolver ciertos aspectos del problema o ajustarse exactamente a la necesidad previamente identificada. • No queda claro si es que el producto sería práctico o viable.	• El producto se percibe como útil y valioso, resuelve el problema ya definido o la necesidad previamente identificada. • Es práctico y viable.
7 Estilo	• Es seguro, común y corriente y, de hecho, es un estilo convencional. • Contiene tres o más elementos que nos son coherentes entre sí, dificultando su comprensión.	• Tiene algunos toques interesantes, pero carece de un estilo distintivo. • Tiene uno o dos elementos que pueden ser excesivos o no coherentes entre sí.	•Está bien diseñado, es llamativo, tiene un estilo distintivo pero adecuado al propósito. • Combina diferentes elementos logrando un todo coherente.

Nota: El término “producto” se usa en esta rúbrica como un término que abarca el resultado del proceso de innovación durante un Proyecto. Un producto puede ser un objeto construido, una propuesta, presentación, solución a un problema, servicio, sistema, obra artística o literaria, un invento, un evento, una mejoría a un producto existente, etc.

Rúbrica de Diseño del Proyecto

	El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área	El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades	El proyecto tiene las siguientes fortalezas
	No presenta las características del Proyecto efectivo	**Necesita más desarrollo**	**Incluye características del proyecto efectivo**
1 **Metas de aprendizaje del estudiante: conocimiento esencial, comprensión y habilidades para alcanzar el éxito**	• Las metas de aprendizaje del estudiante no son claras ni específicas: el proyecto no está enfocado en los estándares. • El proyecto no abarca, evalúa o demuestra el desarrollo de habilidades para el éxito.	•El proyecto se enfoca en los estándares derivados del conocimiento y de la comprensión, pero puede referirse a muy pocas o demasiadas metas o metas sin mucha importancia. •Las habilidades para el éxito están presentes, pero pueden ser demasiadas para ser enseñadas y evaluadas de manera adecuada.	•El proyecto se enfoca en la enseñanza de habilidades y conocimiento importante enfocado en los estudiantes. Estos conocimientos se ajustan a los estándares y representan conocimientos centrales de las asignaturas. •Las habilidades para el éxito se abordan de manera explícita para ser enseñadas y evaluadas, como los son el pensamiento creativo, la colaboración, la creatividad y la gestión del proyecto.
2 **Problema o pregunta desafiante**	•El proyecto no se enfoca en un problema o pregunta central (es más parecido a una unidad con varias tareas); o el problema o pregunta es muy fácil de resolver o de responder para que la existencia del proyecto se justifique. •El problema o pregunta inicial no gira en torno a una pregunta que sea esencial para el proyecto o presenta graves fallas como, por ejemplo: >Tiene una sola y/o simple respuesta. >No es motivante para los estudiantes (suena demasiado compleja o académica, como si viniera de un libro y, por ende, es atractiva solo para el profesor).	•El proyecto se enfoca en un problema o pregunta central, pero el nivel de desafío puede ser inapropiado para los estudiantes a quienes va dirigido. •La pregunta inicial para el proyecto se relaciona con el mismo, pero no captura su problema o pregunta central (puede ser más como una temática más amplia). •La pregunta inicial cumple con algunos de los criterios presentes en la columna de “incluye las características” pero carece de otros.	•El proyecto se enfoca en un problema o pregunta central con un desafío apropiado. •El proyecto se enmarca en una pregunta inicial que es: >Abierta: hay más de una respuesta correcta. >Comprensible e inspiradora para los estudiantes. >Alineada con las metas de aprendizaje. Para responder esta pregunta los estudiantes deberán obtener las habilidades, conocimiento y comprensión adecuados.
3 **Indagación constante**	• El proyecto es más bien una actividad de hacer o construir cosas que un proceso extendido de indagación. No existe un proceso para que los estudiantes generen preguntas que guíen la indagación.	•La indagación es limitada (puede ser breve y ocurrir solo una o dos veces en el proyecto; la búsqueda de información es la tarea principal; no existen preguntas realmente profundas). •Los estudiantes generan preguntas, pero mientras algunas pueden ser cubiertas, otras no son usadas para guiar la indagación y, por ende, no afectan el camino que toma el proyecto.	• La indagación es sostenida a lo largo del tiempo y es rigurosa académicamente (los estudiantes hacen preguntas, buscan e interpretan datos, desarrollan y evalúan soluciones o construyen evidencia para obtener respuestas y generar nuevas preguntas). •A lo largo del proyecto, la indagación está conducida por preguntas generadas por parte de los estudiantes que son fundamentales para el desarrollo del proyecto.

	No presenta las características del Proyecto efectivo	Necesita más desarrollo	Incluye características del proyecto efectivo
4 Autenticidad	• El proyecto se asemeja a un trabajo en clases tradicional; carece de tareas, herramientas y contexto del mundo real. No genera un impacto real en el mundo ni habla de los intereses personales de los estudiantes.	• El proyecto presenta algunas características auténticas, pero estas pueden ser limitadas o ser lejanas a las necesidades del contexto.	• El proyecto presenta un contexto auténtico y tareas y herramientas del mundo real; cumple estándares de calidad, genera un impacto en el mundo y habla sobre las preocupaciones, intereses o identidades personales de los estudiantes.
5 Voz y elección del estudiante	•No se les da oportunidad a los estudiantes para que expresen su voz y tomen decisiones que afecten el contenido o proceso del proyecto; el proyecto está dirigido por el docente. • O bien, se espera que los estudiantes trabajen de manera demasiado independiente sin una guía adecuada por parte del docente y/o que trabajen de esta manera antes de que sean capaces de hacerlo.	• Se les dan pocas oportunidades a los estudiantes para que expresen su voz y tomen decisiones de mediana importancia (decidir cómo dividir tareas dentro del grupo o qué sitio web usar para investigar). • Los estudiantes trabajan, en cierta medida de manera independiente del docente, pero podrían hacer más por sí solos.	• Los estudiantes tienen oportunidades para expresar su voz y tomar decisiones acerca de los temas importantes (temas a investigar, preguntas, textos y recursos usados, gente con quien trabajar, productos a ser creados, uso del tiempo, organización de las tareas). • Los estudiantes tienen oportunidades para tomar responsabilidades significativas y trabajar lo más independientemente del profesor como sea apropiado hacerlo, pero de manera guiada.
6 Reflexión	• Los estudiantes y el docente no participan en conjunto de la reflexión acerca de qué y cómo los estudiantes aprenden acerca del diseño del proyecto y su gestión.	• Los estudiantes y el docente participan en conjunto de algún tipo de reflexión acerca del proyecto y luego de la culminación del mismo, pero no de forma regular o en profundidad.	• Los estudiantes y el docente participan en conjunto de una reflexión profunda y comprensiva tanto durante el proyecto como después de su culminación. Reflexionan también acerca de cómo aprenden los estudiantes, el diseño del proyecto y su gestión.
7 Crítica y revisión	• Los estudiantes obtienen retroalimentación limitada o irregular acerca de sus productos y el trabajo en progreso y esta retroalimentación es solo por parte de él, no de los pares. • No se requiere su utilización o los estudiantes no saben cómo utilizarla para revisar y mejorar su trabajo.	• Se provee a los estudiantes de oportunidades para dar y recibir retroalimentación acerca de la calidad de los productos y del trabajo en progreso, pero este espacio para la retroalimentación puede carecer de estructura o solo existir una vez. • Los estudiantes leen o reciben oralmente la retroalimentación acerca de su trabajo, pero no la usan para revisar y mejorar su trabajo.	• Se provee regular y estructuradamente a los estudiantes de oportunidades para dar y recibir retroalimentación acerca de la calidad de los productos y del trabajo en progreso por parte de los pares, los docentes y de otros fuera de la clase, si la ocasión lo amerita. •Los estudiantes usan la retroalimentación acerca de su trabajo para revisarlo y mejorarlo.
8 Producto	• Los estudiantes no hacen de su producto algo público que se presente a una audiencia o que se ofrezca a la gente más allá de la clase.	• El trabajo de los estudiantes se hace público solo para los compañeros y el docente. • Los estudiantes presentan productos pero no se les pide que expliquen cómo trabajaron ni qué aprendieron.	• El trabajo de los estudiantes se hace público al presentar, mostrar u ofrecerlo a la gente más allá de la clase. • Se les pregunta a los estudiantes que expliquen las razones que justifican sus elecciones, su proceso de indagación, cómo trabajaron, qué aprendieron etc.

Rúbrica de Presentación del Trabajo

	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
	El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área	El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades	El proyecto tiene las siguientes fortalezas
1 **Explicación de las ideas e información**	•No presenta información, argumentos, ideas o hallazgos de forma concisa y lógica; el argumento no contiene evidencia que lo valide; la audiencia no puede seguir la línea de razonamiento. •La selección de información, desarrollo de ideas y el estilo son inapropiados para el propósito, tarea y audiencia (puede ser demasiada o muy poca información o un enfoque erróneo). •No se refiere a perspectivas o puntos de vista alternativos u opuestos.	• Presenta información, argumentos, hallazgos y evidencia de una manera que no siempre es clara, concisa y lógica; la línea de razonamiento es a veces difícil de seguir por parte de la audiencia. • Intenta seleccionar información, desarrollar ideas y usar un estilo apropiados para el propósito, tarea y audiencia, que no son por completo exitosos. • Intenta referirse a perspectivas alternativas u opuestas, pero no de forma completa o clara.	• Presenta información, argumentos, hallazgos y evidencia en forma clara, concisa y lógica; la línea de razonamiento se puede seguir fácilmente por parte de la audiencia. • Selecciona información, desarrolla ideas y usa un estilo apropiado al propósito, la tarea y la audiencia. • Abarca perspectivas alternativas u opuestas de manera clara y acabada.
2 **Organización**	• No cumple los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación. • No incluye una introducción y/o conclusión. • Usa el tiempo de manera poco adecuada; la totalidad de la presentación o parte de ella es muy corta o muy larga.	• Cumple la mayoría de los requerimientos respecto de los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación. • Una introducción y conclusión, pero no son claras ni interesantes. • Generalmente organiza bien el tiempo, pero puede usar demasiado o muy poco tiempo en un tema, material de apoyo o idea.	• Cumple todos los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación. • Incluye una introducción y conclusión que son claras e interesantes. • Organiza bien el tiempo y no hay ninguna parte de la presentación que sea o muy larga o muy corta.
3 **Mirada y lenguaje corporal**	• No mira a la audiencia, lee las notas o láminas. • No usa gestos o movimientos. • Carece de pose y confianza (mueve los dedos, se agacha, se ve nervioso). • Usa ropa inapropiada para la ocasión.	• Mantiene contacto visual con poca frecuencia. Lee las notas o diapositivas la mayor parte del tiempo. • Utiliza algunos gestos o movimientos que no parecen naturales. • Presenta una actitud que demuestra confianza y adecuación a la situación. Solo se observa un poco de inquietud y movimiento nervioso. • Intenta usar una presentación personal adecuada para la ocasión.	• Mantiene contacto visual con la audiencia la mayor parte del tiempo; solo en algunas ocasiones mira las notas o diapositivas. • Utiliza gestos y movimientos naturales. • Presenta una actitud que demuestra confianza y adecuación a la situación. • Posee una presentación personal acorde a la ocasión.

	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
4 **Voz**	• No pronuncia bien o habla demasiado bajo que dificulta la comprensión; frecuentemente usa muletillas (uhh, mmm, entonces, y, como, etc.) no adapta el discurso al contexto y la tarea.	• La mayor parte del tiempo habla de manera clara; utiliza una voz lo suficientemente fuerte para que la audiencia pueda escuchar la mayor parte del tiempo, pero puede hablar ocasionalmente de forma monótona. • Usa muletillas. • Intenta adaptar el discurso al contexto o tarea, pero no es consistente o no tiene éxito en su intento.	• Habla de manera clara y a un ritmo adecuado; ni muy rápido ni muy lento. Habla lo suficientemente fuerte para que todos puedan escuchar; cambia el tono y el ritmo para mantener el interés. • Rara vez usa muletillas • Adapta el discurso al contexto y la tarea. • Domina el registro formal cuando su uso es necesario.
5 **Elementos de ayuda para la presentación**	• No usa elementos de audio, visuales o de medios. • Usa solo uno o pocos elementos visuales, de audio o de medios pero estos no añaden valor a la presentación y pueden incluso distraer.	• Usa elementos de audio, visuales o de medios, pero estos pueden a veces distraer o no añadir valor a la presentación.	• Usa elementos de audio, visuales o de medios bien elaborados para fortalecer la comprensión de los hallazgos, el razonamiento y la evidencia y añadir interés. • Incorpora de forma adecuada y natural a la presentación los elementos visuales, de audio o de medios.
6 **Respuesta a las preguntas de la audiencia**	• No responde a las preguntas por parte de la audiencia (se sale del tema o no comprende las preguntas y no busca explicación o clarificación de las mismas)	• Responde algunas preguntas de la audiencia, pero no siempre de forma clara o completa.	• Responde las preguntas de la audiencia en forma clara y completa. • Busca clarificaciones a las preguntas, admite cuando no sabe o explica cómo encontrar la respuesta cuando es incapaz de dar una respuesta.
7 **Participante en presentaciones de equipo**	• No todos los miembros del grupo participan; solo uno o dos de ellos hablan.	• Todos los miembros del equipo participan, pero no en la misma proporción.	• Todos los miembros del equipo participan por aproximadamente el mismo período de tiempo. • Todos los miembros del equipo son capaces de responder las preguntas sobre el tema como un todo y no solo acerca de su parte de la presentación.