

# Programa de Estudio 4° Medio Matemática

MINISTERIO DE EDUCACIÓN  
GOBIERNO DE CHILE

v  
e  
r  
s  
i  
ó  
n  
-  
w  
e  
b



UNIDAD DE  
CURRÍCULO Y  
EVALUACIÓN

UCE



**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y  
ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN.  
ESTAS ACTIVIDADES ESTÁN  
ORGANIZADAS EN 4 UNIDADES,  
CADA UNIDAD TIENE CUATRO  
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJES Y  
UNA ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN.**

**Querida comunidad educativa:**

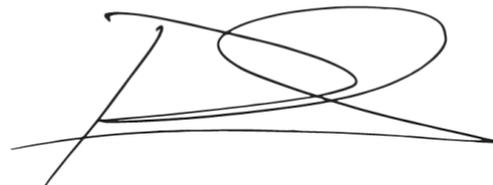
Me es grato saludarles y dirigirme a ustedes para poner en sus manos los Programas de Estudio de las 46 asignaturas del currículum ajustado a las nuevas Bases Curriculares de 3° y 4° año de enseñanza media (Decreto Supremo N°193 de 2019), que inició su vigencia el presente año para 3° medio y el año 2021 para 4° medio, o simultáneamente en ambos niveles si el colegio así lo decidió.

El presente año ha sido particularmente difícil por la situación mundial de pandemia por Coronavirus y el Ministerio de Educación no ha descansado en su afán de entregar herramientas de apoyo para que los estudiantes de Chile se conviertan en ciudadanos que desarrollen la empatía y el respeto, la autonomía y la proactividad, la capacidad para perseverar en torno a metas y, especialmente, la responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

Estos Programas de Estudio han sido elaborados por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación y presentan una propuesta pedagógica y didáctica que apoya el proceso de gestión de los establecimientos educacionales, además de ser una invitación a las comunidades educativas para enfrentar el desafío de preparación, estudio y compromiso con la vocación formadora y con las expectativas de aprendizaje que pueden lograr nuestros estudiantes.

Nos sentimos orgullosos de poner a disposición de los jóvenes de Chile un currículum acorde a los tiempos actuales y que permitirá formar personas integrales y ciudadanos autónomos, críticos y responsables, que desarrollen las habilidades necesarias para seguir aprendiendo a lo largo de sus vidas y que estarán preparados para ser un aporte a la sociedad.

Les saluda cordialmente,



Raúl Figueroa S.  
Ministro de Educación

## **Programa de Estudio Matemática 4° Medio**

Aprobado por Decreto Exento N°496 del 15 de junio de 2020.

Equipo de Desarrollo Curricular  
Unidad de Currículum y Evaluación  
Ministerio de Educación 2021

### **IMPORTANTE**

En el presente documento, se utilizan de manera inclusiva términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor”, “el niño”, “el compañero” y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo) para referirse a hombres y mujeres.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo aludir conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando “o/a”, “los/las” y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

# Índice

|   |     |
|---|-----|
| Presentación .....  | 5   |
| Nociones básicas .....  | 6   |
| Consideraciones generales .....   | 11  |
| Orientaciones para planificar .....   | 16  |
| Orientaciones para evaluar los aprendizajes .....                                   | 17  |
| Estructura del programa .....   | 19  |
| Matemática 4° medio .....   | 21  |
| Propósitos Formativos .....   | 21  |
| Enfoque de la asignatura de Matemática .....  | 21  |
| Orientaciones para el docente .....   | 24  |
| Organización Curricular .....   | 27  |
| Unidad 1: La toma de decisiones en situaciones de incerteza .....                   | 32  |
| Actividad 1: ¿Cómo se distribuyen el éxito y el fracaso? .....                      | 33  |
| Actividad 2: ¿Qué entendemos por estadísticamente normal? .....                     | 40  |
| Actividad 3: Estandarización de distribuciones normales .....                       | 46  |
| Actividad 4: Comparación de la distribución binomial y la distribución normal ..... | 53  |
| Actividad de evaluación .....   | 60  |
| Unidad 2: La toma de decisiones en situaciones financieras y económicas .....       | 68  |
| Actividad 1: Tomar decisiones en contexto de AFP y jubilación .....                 | 69  |
| Actividad 2: Tomar decisiones en contexto de crédito hipotecario .....              | 75  |
| Actividad 3: El refinanciamiento de un crédito hipotecario .....                    | 79  |
| Actividad 4: Tomar decisiones en el contexto de un crédito de consumo .....         | 84  |
| Actividad de evaluación .....   | 88  |
| Unidad 3: Modelamiento matemático para describir y predecir .....                   | 95  |
| Actividad 1: Ley de gravitación universal .....                                     | 96  |
| Actividad 2: Funciones cúbicas para entender fenómenos de la naturaleza .....       | 101 |
| Actividad 3: La rueda de la fortuna .....   | 107 |
| Actividad 4: Movimientos cíclicos y los modelos trigonométricos .....               | 114 |
| Actividad de evaluación .....   | 120 |
| Unidad 4: Geometría con coordenadas .....   | 129 |
| Actividad 1: Costos operacionales e ingresos con rectas .....                       | 130 |

|   |     |
|---|-----|
| Actividad 2: Puntos de encuentro en circunferencias .....                           | 134 |
| Actividad 3: Rectas y circunferencias en el plano cartesiano .....                  | 139 |
| Actividad 4: Seguridad en el trabajo .....  | 143 |
| Actividad de evaluación .....   | 146 |
| Proyectos Interdisciplinarios .....   | 149 |
| Manual de orientación .....   | 149 |
| Proyecto STEM: Selección natural: Entendiendo la evolución a través del juego ..... | 153 |
| Proyecto TP: Usando la estadística para prevenir accidentes de tránsito .....       | 158 |
| Proyecto TP: ¿De qué depende mejorar las jubilaciones en Chile? .....               | 162 |
| Proyecto TP: Optimizando el servicio de despacho de productos .....                 | 165 |
| Bibliografía .....  | 169 |
| Anexos .....  | 171 |

# Presentación

Las Bases Curriculares establecen Objetivos de Aprendizaje (OA) que definen los desempeños que se espera que todos los estudiantes logren en cada asignatura, módulo y nivel de enseñanza. Estos objetivos integran habilidades, conocimientos y actitudes que se consideran relevantes para que los jóvenes alcancen un desarrollo armónico e integral que les permita enfrentar su futuro con las herramientas necesarias y participar de manera activa y responsable en la sociedad.

Las Bases Curriculares son flexibles para adaptarse a las diversas realidades educativas que se derivan de los distintos contextos sociales, económicos, territoriales y religiosos de nuestro país. Estas múltiples realidades dan origen a diferentes aproximaciones curriculares, didácticas, metodológicas y organizacionales, que se expresan en el desarrollo de distintos proyectos educativos, todos válidos mientras permitan el logro de los Objetivos de Aprendizaje. En este contexto, las Bases Curriculares constituyen el referente base para los establecimientos que deseen elaborar programas propios, y por lo tanto, no corresponde que estas prescriban didácticas específicas que limiten la diversidad de enfoques educacionales que pueden expresarse en los establecimientos de nuestro país.

Para aquellos establecimientos que no han optado por programas propios, el Ministerio de Educación suministra estos Programas de Estudio con el fin de facilitar una óptima implementación de las Bases Curriculares. Estos programas constituyen un complemento totalmente coherente y alineado con las Bases Curriculares y una herramienta para apoyar a los docentes en el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de Estudio proponen al profesor una organización de los Objetivos de Aprendizaje con relación al tiempo disponible dentro del año escolar, y constituyen una orientación acerca de cómo secuenciar los objetivos y cómo combinarlos para darles una comprensión profunda y transversal. Se trata de una estimación aproximada y de carácter indicativo que puede ser adaptada por los docentes, de acuerdo a la realidad de sus estudiantes y de su establecimiento.

Asimismo, para facilitar al profesor su quehacer en el aula, se sugiere un conjunto de indicadores de evaluación que dan cuenta de los diversos desempeños de comprensión que demuestran que un alumno ha aprendido en profundidad, transitando desde lo más elemental hasta lo más complejo, y que aluden a los procesos cognitivos de orden superior, las comprensiones profundas o las habilidades que se busca desarrollar transversalmente.

Junto con ello, se proporcionan orientaciones didácticas para cada disciplina y una gama amplia y flexible de actividades de aprendizaje y de evaluación que pueden utilizarse como base para nuevas actividades acordes con las diversas realidades de los establecimientos educacionales. Estas actividades se enmarcan en un modelo pedagógico cuyo enfoque es el de la comprensión profunda y significativa, lo que implica establecer posibles conexiones al interior de cada disciplina y también con otras áreas del conocimiento, con el propósito de facilitar el aprendizaje.

Estas actividades de aprendizaje y de evaluación se enriquecen con sugerencias al docente, recomendaciones de recursos didácticos complementarios y bibliografía para profesores y estudiantes.

En síntesis, se entregan estos Programas de Estudio a los establecimientos educacionales como un apoyo para llevar a cabo su labor de enseñanza.

# Nociones básicas

## OBJETIVOS DE APRENDIZAJE COMO INTEGRACIÓN DE CONOCIMIENTOS, HABILIDADES Y ACTITUDES

Los Objetivos de Aprendizaje definen para cada asignatura o módulo los aprendizajes terminales esperables para cada semestre o año escolar. Se refieren a habilidades, actitudes y conocimientos que han sido seleccionados considerando que entreguen a los estudiantes las herramientas necesarias para su desarrollo integral, que les faciliten una comprensión profunda del mundo que habitan, y que despierten en ellos el interés por continuar estudios superiores y desarrollar sus planes de vida y proyectos personales.

En la formulación de los Objetivos de Aprendizaje se relacionan habilidades, conocimientos y actitudes y, por medio de ellos, se pretende plasmar de manera clara y precisa cuáles son los aprendizajes esenciales que el alumno debe lograr. Se conforma así un currículum centrado en el aprendizaje, que declara explícitamente cuál es el foco del quehacer educativo. Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto de la sala de clases como en la vida cotidiana.

### CONOCIMIENTOS

Los conocimientos de las asignaturas y módulos corresponden a conceptos, redes de conceptos e información sobre hechos, procesos, procedimientos y operaciones que enriquecen la comprensión de los alumnos sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan el saber que han generado por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Se busca que sean esenciales, fundamentales para que los estudiantes construyan nuevos aprendizajes y de alto interés para ellos. Se deben desarrollar de manera integrada con las habilidades, porque son una condición para el progreso de estas y para lograr la comprensión profunda.

### HABILIDADES Y ACTITUDES PARA EL SIGLO XXI

La existencia y el uso de la tecnología en el mundo global, multicultural y en constante cambio, ha determinado nuevos modos de acceso al conocimiento, de aplicación de los aprendizajes y de participación en la sociedad. Estas necesidades exigen competencias particulares, identificadas internacionalmente como Habilidades para el siglo XXI.<sup>1</sup>

Las habilidades para el siglo XXI presentan como foco formativo central la formación integral de los estudiantes dando continuidad a los objetivos de aprendizaje transversales de 1° básico a 2° medio. Como estos, son transversales a todas las asignaturas, y al ser transferibles a otros contextos, se convierten en un aprendizaje para la vida. Se presentan organizadas en torno a cuatro ámbitos: maneras de pensar, maneras de trabajar, herramientas para trabajar y herramientas para vivir en el mundo.

---

<sup>1</sup> El conjunto de habilidades seleccionadas para integrar el currículum de 3° y 4° medio corresponden a una adaptación de distintos modelos (Binkley et al., 2012; Fadel et al., 2016).

## MANERAS DE PENSAR

### Desarrollo de la creatividad y la innovación

Las personas que aprenden a ser creativas poseen habilidades de pensamiento divergente, producción de ideas, fluidez, flexibilidad y originalidad. El pensamiento creativo implica abrirse a diferentes ideas, perspectivas y puntos de vista, ya sea en la exploración personal o en el trabajo en equipo. La enseñanza para la creatividad implica asumir que el pensamiento creativo puede desarrollarse en todas las instancias de aprendizaje y en varios niveles: imitación, variación, combinación, transformación y creación original. Por ello, es importante que los docentes consideren que, para lograr la creación original, es necesario haber desarrollado varias habilidades y que la creatividad también puede enseñarse mediante actividades más acotadas según los diferentes niveles (Fadel et al, 2016).

### Desarrollo del pensamiento crítico

Cuando aprendemos a pensar críticamente, podemos discriminar entre informaciones, declaraciones o argumentos, evaluando su contenido, pertinencia, validez y verosimilitud. El pensamiento crítico permite cuestionar la información, tomar decisiones y emitir juicios, como asimismo reflexionar críticamente acerca de diferentes puntos de vista, tanto de los propios como de los demás, ya sea para defenderlos o contradecirlos sobre la base de evidencias. Contribuye así, además, a la autorreflexión y corrección de errores, y favorece la capacidad de estar abierto a los cambios y de tomar decisiones razonadas. El principal desafío en la enseñanza del pensamiento crítico es la aplicación exitosa de estas habilidades en contextos diferentes de aquellos en que fueron aprendidas (Fadel et al, 2016).

### Desarrollo de la metacognición

El pensamiento metacognitivo se relaciona al concepto de “aprender a aprender”. Se refiere a ser consciente del propio aprendizaje y de los procesos para lograrlo, lo que permite autogestionarlo con autonomía, adaptabilidad y flexibilidad. El proceso de pensar acerca del pensar involucra la reflexión propia sobre la posición actual, fijar los objetivos a futuro, diseñar acciones y estrategias potenciales, monitorear el proceso de aprendizaje y evaluar los resultados. Incluye tanto el conocimiento que se tiene sobre uno mismo como estudiante o pensador, como los factores que influyen en el rendimiento. La reflexión acerca del propio aprendizaje favorece su comunicación, por una parte, y la toma de conciencia de las propias capacidades y debilidades, por otra. Desde esta perspectiva, desarrolla la autoestima, la disciplina, la capacidad de perseverar y la tolerancia a la frustración.

### Desarrollo de Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.
- Pensar con apertura a distintas perspectivas y contextos, asumiendo riesgos y responsabilidades.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Pensar con reflexión propia y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.
- Pensar con conciencia de que los aprendizajes se desarrollan a lo largo de la vida y enriquecen la experiencia.
- Pensar con apertura hacia otros para valorar la comunicación como una forma de relacionarse con diversas personas y culturas, compartiendo ideas que favorezcan el desarrollo de la vida en sociedad.

## MANERAS DE TRABAJAR

### Desarrollo de la comunicación

Aprender a comunicarse ya sea de manera escrita, oral o multimodal, requiere generar estrategias y herramientas que se adecuen a diversas situaciones, propósitos y contextos socioculturales, con el fin de transmitir lo que se desea de manera clara y efectiva. La comunicación permite desarrollar la empatía, la autoconfianza, la valoración de la interculturalidad, así como la adaptabilidad, la creatividad y el rechazo a la discriminación.

### Desarrollo de la colaboración

La colaboración entre personas con diferentes habilidades y perspectivas faculta al grupo para tomar mejores decisiones que las que se tomarían individualmente, permite analizar la realidad desde más ángulos y producir obras más complejas y más completas. Además, el trabajo colaborativo entre pares determina nuevas formas de aprender y de evaluarse a sí mismo y a los demás, lo que permite visibilizar los modos en que se aprende; esto conlleva nuevas maneras de relacionarse en torno al aprendizaje.

La colaboración implica, a su vez, actitudes clave para el aprendizaje en el siglo XXI, como la responsabilidad, la perseverancia, la apertura de mente hacia lo distinto, la aceptación y valoración de las diferencias, la autoestima, la tolerancia a la frustración, el liderazgo y la empatía.

### Desarrollo de Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Trabajar con empatía y respeto en el contexto de la diversidad, eliminando toda expresión de prejuicio y discriminación.
- Trabajar con autonomía y proactividad en trabajos colaborativos e individuales para llevar a cabo eficazmente proyectos de diversa índole.

## HERRAMIENTAS PARA TRABAJAR

### Desarrollo de la alfabetización digital

Aprender a utilizar la tecnología como herramienta de trabajo implica dominar las posibilidades que ofrece y darle un uso creativo e innovador. La alfabetización digital apunta a la resolución de problemas en el marco de la cultura digital que caracteriza al siglo XXI, aprovechando las herramientas que nos dan la programación, el pensamiento computacional, la robótica e internet, entre otros, para crear contenidos digitales, informarnos y vincularnos con los demás. Promueve la autonomía y el trabajo en equipo, la creatividad, la participación en redes de diversa índole, la motivación por ampliar los propios intereses y horizontes culturales, e implica el uso responsable de la tecnología considerando la ciberseguridad y el autocuidado.

### Desarrollo del uso de la información

Usar bien la información se refiere a la eficacia y eficiencia en la búsqueda, el acceso, el procesamiento, la evaluación crítica, el uso creativo y ético, así como la comunicación de la información por medio de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC). Implica formular preguntas, indagar y generar estrategias para seleccionar, organizar y comunicar la información. Tiene siempre en cuenta, además, tanto los aspectos éticos y legales que la regulan como el respeto a los demás y a su privacidad.

### Desarrollo de Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- Valorar las TIC como una oportunidad para informarse, investigar, socializar, comunicarse y participar como ciudadano.
- Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.
- Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

## MANERAS DE VIVIR EN EL MUNDO

### Desarrollo de la ciudadanía local y global

La ciudadanía se refiere a la participación activa del individuo en su contexto, desde una perspectiva política, social, territorial, global, cultural, económica y medioambiental, entre otras dimensiones. La conciencia de ser ciudadano promueve el sentido de pertenencia y la valoración y el ejercicio de los principios democráticos, y también supone asumir sus responsabilidades como ciudadano local y global. En este sentido, ejercitar el respeto a los demás, a su privacidad y a las diferencias valóricas, religiosas y étnicas cobra gran relevancia; se relaciona directamente con una actitud empática, de mentalidad abierta y de adaptabilidad.

### Desarrollo de proyecto de vida y carrera

La construcción y consolidación de un proyecto de vida y de una carrera, oficio u ocupación, requiere conocerse a sí mismo, establecer metas, crear estrategias para conseguirlas, desarrollar la autogestión, actuar con iniciativa y compromiso, ser autónomo para ampliar los aprendizajes, reflexionar críticamente y estar dispuesto a integrar las retroalimentaciones recibidas. Por otra parte, para alcanzar esas metas, se requiere interactuar con los demás de manera flexible, con capacidad para trabajar en equipo, negociar en busca de soluciones y adaptarse a los cambios para poder desenvolverse en distintos roles y contextos. Esto permite el desarrollo de liderazgo, responsabilidad, ejercicio ético del poder y respeto a las diferencias en ideas y valores.

## Desarrollo de la responsabilidad personal y social

La responsabilidad personal consiste en ser conscientes de nuestras acciones y sus consecuencias, cuidar de nosotros mismos de modo integral y respetar los compromisos que adquirimos con los demás, generando confianza en los otros, comunicándonos de una manera asertiva y empática, que acepte los distintos puntos de vista. Asumir la responsabilidad por el bien común participando activamente en el cumplimiento de las necesidades sociales en distintos ámbitos: cultural, político, medioambiental, entre otros.

### Desarrollo de Actitudes

- Perseverar en torno a metas con miras a la construcción de proyectos de vida y al aporte a la sociedad y al país con autodeterminación, autoconfianza y respeto por sí mismo y por los demás.
- Participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político y medioambiental, entre otros.
- Tomar decisiones democráticas, respetando los derechos humanos, la diversidad y la multiculturalidad.
- Asumir responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que ellas tienen sobre sí mismo y los otros.

# Consideraciones generales

Las consideraciones que se presentan a continuación son relevantes para una óptima implementación de los Programas de Estudio, se vinculan estrechamente con los enfoques curriculares, y permiten abordar de mejor manera los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares.

## EL ESTUDIANTE DE 3º y 4º MEDIO

La formación en los niveles de 3° y 4° Medio cumple un rol esencial en su carácter de etapa final del ciclo escolar. Habilita al alumno para conducir su propia vida en forma autónoma, plena, libre y responsable, de modo que pueda desarrollar planes de vida y proyectos personales, continuar su proceso educativo formal mediante la educación superior, o incorporarse a la vida laboral.

El perfil de egreso que establece la ley en sus objetivos generales apunta a formar ciudadanos críticos, creativos y reflexivos, activamente participativos, solidarios y responsables, con conciencia de sus deberes y derechos, y respeto por la diversidad de ideas, formas de vida e intereses. También propicia que estén conscientes de sus fortalezas y debilidades, que sean capaces de evaluar los méritos relativos de distintos puntos de vista al enfrentarse a nuevos escenarios, y de fundamentar adecuadamente sus decisiones y convicciones, basados en la ética y la integridad. Asimismo, aspira a que sean personas con gran capacidad para trabajar en equipo e interactuar en contextos socioculturalmente heterogéneos, relacionándose positivamente con otros, cooperando y resolviendo adecuadamente los conflictos.

De esta forma, tomarán buenas decisiones y establecerán compromisos en forma responsable y solidaria, tanto de modo individual como colaborativo, integrando nuevas ideas y reconociendo que las diferencias ayudan a concretar grandes proyectos.

Para lograr este desarrollo en los estudiantes, es necesario que los docentes conozcan los diversos talentos, necesidades, intereses y preferencias de sus estudiantes y promuevan intencionadamente la autonomía de los alumnos y la autorregulación necesaria para que las actividades de este Programa sean instancias significativas para sus desafíos, intereses y proyectos personales.

## APRENDIZAJE PARA LA COMPRESIÓN

La propuesta metodológica de los Programas de Estudio tiene como propósito el aprendizaje para la comprensión. Entendemos la comprensión como la capacidad de usar el conocimiento de manera flexible, lo que permite a los estudiantes pensar y actuar a partir de lo que saben en distintas situaciones y contextos. La comprensión se puede desarrollar generando oportunidades que permitan al alumno ejercitar habilidades como analizar, explicar, resolver problemas, construir argumentos, justificar, extrapolar, entre otras. La aplicación de estas habilidades y del conocimiento a lo largo del proceso de aprendizaje faculta a los estudiantes a profundizar en el conocimiento, que se torna en evidencia de la comprensión.

La elaboración de los Programas de Estudio se ha realizado en el contexto del paradigma constructivista y bajo el fundamento de dos principios esenciales que regulan y miden la efectividad del aprendizaje: el aprendizaje significativo y el aprendizaje profundo.

### ¿Qué entendemos por aprendizaje significativo y profundo?

Un aprendizaje se dice significativo cuando los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del estudiante. Esto se logra gracias a un esfuerzo deliberado del alumno por relacionar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos y es producto de una implicación afectiva del estudiante; es decir, él quiere aprender aquello que se le presenta, porque lo considera valioso. Para la construcción de este tipo de aprendizaje, se requiere efectuar acciones de mediación en el aula que permitan activar los conocimientos previos y, a su vez, facilitar que dicho aprendizaje adquiera sentido precisamente en la medida en que se integra con otros previamente adquiridos o se relaciona con alguna cuestión o problema que interesa al estudiante.

Un aprendizaje se dice profundo solo si, por un lado, el aprendiz logra dominar, transformar y utilizar los conocimientos adquiridos en la solución de problemas reales y, por otro lado, permanece en el tiempo y se puede transferir a distintos contextos de uso. Para mediar el desarrollo de un aprendizaje de este tipo, es necesario generar escenarios flexibles y graduales que permitan al estudiante usar los conocimientos aplicándolos en situaciones diversas.

### ¿Cómo debe guiar el profesor a sus alumnos para que usen el conocimiento?

El docente debe diseñar actividades de clase desafiantes que induzcan a los estudiantes a aplicar habilidades cognitivas mediante las cuales profundicen en la comprensión de un nuevo conocimiento. Este diseño debe permitir mediar simultáneamente ambos aspectos del aprendizaje, el significativo y el profundo, y asignar al alumno un rol activo dentro del proceso de aprendizaje.

El principio pedagógico constructivista del estudiante activo permite que él desarrolle la capacidad de aprender a aprender. Los alumnos deben llegar a adquirir la autonomía que les permita dirigir sus propios procesos de aprendizaje y convertirse en sus propios mediadores. El concepto clave que surge como herramienta y, a la vez, como propósito de todo proceso de enseñanza-aprendizaje corresponde al pensamiento metacognitivo, entendido como un conjunto de disposiciones mentales de autorregulación que permiten al aprendiz monitorear, planificar y evaluar su propio proceso de aprendizaje.

En esta línea, la formulación de buenas preguntas es una de las herramientas esenciales de mediación para construir un pensamiento profundo.

Cada pregunta hace posible una búsqueda que permite integrar conocimiento y pensamiento; el pensamiento se despliega en sus distintos actos que posibilitan dominar, elaborar y transformar un conocimiento.

## ENFOQUE INTERDISCIPLINARIO Y APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

La integración disciplinaria permite fortalecer conocimientos y habilidades de pensamiento complejo que faculten la comprensión profunda de ellos. Para lograr esto, es necesario que los docentes incorporen en su planificación instancias destinadas a trabajar en conjunto con otras disciplinas. Las Bases Curriculares plantean el Aprendizaje Basado en Proyectos como metodología para favorecer el trabajo colaborativo y el aprendizaje de resolución de problemas.

Un problema real es interdisciplinario. Por este motivo, en los Programas de Estudio de cada asignatura se integra orientaciones concretas y modelos de proyectos, que facilitarán esta tarea a los docentes y que fomentarán el trabajo y la planificación conjunta de algunas actividades entre profesores de diferentes asignaturas.

Se espera que, en las asignaturas electivas de profundización, el docente destine un tiempo para el trabajo en proyectos interdisciplinarios. Para ello, se incluye un modelo de proyecto interdisciplinario por asignatura de profundización.

Existe una serie de elementos esenciales que son requisitos para que el diseño de un proyecto<sup>2</sup> permita maximizar el aprendizaje y la participación de los estudiantes, de manera que aprendan cómo aplicar el conocimiento al mundo real, cómo utilizarlo para resolver problemas, responder preguntas complejas y crear productos de alta calidad. Dichos elementos son:

- **Conocimiento clave, comprensión y habilidades**

El proyecto se enfoca en profundizar en la comprensión del conocimiento interdisciplinario, ya que permite desarrollar a la vez los Objetivos de Aprendizaje y las habilidades del Siglo XXI que se requieren para realizar el proyecto.

- **Desafío, problema o pregunta**

El proyecto se basa en un problema significativo para resolver o una pregunta para responder, en el nivel adecuado de desafío para los alumnos, que se implementa mediante una pregunta de conducción abierta y atractiva.

- **Indagación sostenida**

El proyecto implica un proceso activo y profundo a lo largo del tiempo, en el que los estudiantes generan preguntas, encuentran y utilizan recursos, hacen preguntas adicionales y desarrollan sus propias respuestas.

- **Autenticidad**

El proyecto tiene un contexto del mundo real, utiliza procesos, herramientas y estándares de calidad del mundo real, tiene un impacto real, ya que creará algo que será utilizado o experimentado por otros, y/o está conectado a las propias preocupaciones, intereses e identidades de los alumnos.

---

<sup>2</sup> Adaptado de John Larmer, John Mergendoller, Suzie Boss. *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*, (ASCD 2015).

- **Voz y elección del estudiante**

El proyecto permite a los estudiantes tomar algunas decisiones sobre los productos que crean, cómo funcionan y cómo usan su tiempo, guiados por el docente y dependiendo de su edad y experiencia de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

- **Reflexión**

El proyecto brinda oportunidades para que los alumnos reflexionen sobre qué y cómo están aprendiendo, y sobre el diseño y la implementación del proyecto.

- **Crítica y revisión**

El proyecto incluye procesos de retroalimentación para que los estudiantes den y reciban comentarios sobre su trabajo, con el fin de revisar sus ideas y productos o realizar una investigación adicional.

- **Producto público**

El proyecto requiere que los alumnos demuestren lo que aprenden, creando un producto que se presenta u ofrece a personas que se encuentran más allá del aula.

## CIUDADANÍA DIGITAL

Los avances de la automatización, así como el uso extensivo de las herramientas digitales y de la inteligencia artificial, traerán como consecuencia grandes transformaciones y desafíos en el mundo del trabajo, por lo cual los estudiantes deben contar con herramientas necesarias para enfrentarlos. Los Programas de Estudio promueven que los alumnos empleen tecnologías de información para comunicarse y desarrollar un pensamiento computacional, dando cuenta de sus aprendizajes o de sus creaciones y proyectos, y brindan oportunidades para hacer un uso extensivo de ellas y desarrollar capacidades digitales para que aprendan a desenvolverse de manera responsable, informada, segura, ética, libre y participativa, comprendiendo el impacto de las TIC en la vida personal y el entorno.

## CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR

La contextualización curricular es el proceso de apropiación y desarrollo del currículum en una realidad educativa concreta. Este se lleva a cabo considerando las características particulares del contexto escolar (por ejemplo, el medio en que se sitúa el establecimiento educativo, la cultura, el proyecto educativo institucional de las escuelas y la comunidad escolar, el tipo de formación diferenciada que se imparte –Artística, Humanístico-Científica, Técnico Profesional–, entre otros), lo que posibilita que el proceso educativo adquiera significado para los estudiantes desde sus propias realidades y facilita, así, el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de Estudio consideran una propuesta de diseño de clases, de actividades y de evaluaciones que pueden modificarse, ajustarse y transferirse a diferentes realidades y contextos.

## ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y A LA INCLUSIÓN

En el trabajo pedagógico, es importante que los docentes tomen en cuenta la diversidad entre estudiantes en términos culturales, sociales, étnicos, religiosos, de género, de estilos de aprendizaje y de niveles de conocimiento. Esta diversidad enriquece los escenarios de aprendizaje y está asociada a los siguientes desafíos para los profesores:

- Procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación con el contexto y la realidad de los alumnos.
- Trabajar para que todos alcancen los Objetivos de Aprendizaje señalados en el currículum, acogiendo la diversidad y la inclusión como una oportunidad para desarrollar más y mejores aprendizajes.
- Favorecer y potenciar la diversidad y la inclusión, utilizando el aprendizaje basado en proyectos.
- En el caso de alumnos con necesidades educativas especiales, tanto el conocimiento de los profesores como el apoyo y las recomendaciones de los especialistas que evalúan a dichos estudiantes contribuirán a que todos desarrollen al máximo sus capacidades.
- Generar ambientes de aprendizaje inclusivos, lo que implica que cada estudiante debe sentir seguridad para participar, experimentar y contribuir de forma significativa a la clase. Se recomienda destacar positivamente las características particulares y rechazar toda forma de discriminación, agresividad o violencia.
- Proveer igualdad de oportunidades, asegurando que los alumnos puedan participar por igual en todas las actividades, evitando asociar el trabajo de aula con estereotipos asociados a género, características físicas o cualquier otro tipo de sesgo que provoque discriminación.
- Utilizar materiales, aplicar estrategias didácticas y desarrollar actividades que se adecuen a las singularidades culturales y étnicas de los estudiantes y a sus intereses.
- Promover un trabajo sistemático, con actividades variadas para diferentes estilos de aprendizaje y con ejercitación abundante, procurando que todos tengan acceso a oportunidades de aprendizaje enriquecidas.

Atender a la diversidad de estudiantes, con sus capacidades, contextos y conocimientos previos, no implica tener expectativas más bajas para algunos de ellos. Por el contrario, hay que reconocer los requerimientos personales de cada alumno para que todos alcancen los propósitos de aprendizaje pretendidos. En este sentido, conviene que, al diseñar el trabajo de cada unidad, el docente considere los tiempos, recursos y métodos necesarios para que cada estudiante logre un aprendizaje de calidad. Mientras más experiencia y conocimientos tengan los profesores sobre su asignatura y las estrategias que promueven un aprendizaje profundo, más herramientas tendrán para tomar decisiones pertinentes y oportunas respecto de las necesidades de sus alumnos. Por esta razón, los Programas de Estudio incluyen numerosos Indicadores de Evaluación, observaciones al docente, sugerencias de actividades y de evaluación, entre otros elementos, para apoyar la gestión curricular y pedagógica responsable de todos los estudiantes.

# Orientaciones para planificar

Existen diversos métodos de planificación, caracterizados por énfasis específicos vinculados al enfoque del que provienen. Como una manera de apoyar el trabajo de los docentes, se propone considerar el diseño para la comprensión, relacionado con plantear cuestionamientos activos a los estudiantes, de manera de motivarlos a poner en práctica sus ideas y nuevos conocimientos. En este sentido, y con el propósito de promover el desarrollo de procesos educativos con foco claro y directo en los aprendizajes, se sugiere utilizar la planificación en reversa (Wiggins y McTigue, 1998). Esta mantiene siempre al centro lo que se espera que aprendan los alumnos durante el proceso educativo, en el marco de la comprensión profunda y significativa. De esta manera, la atención se concentra en lo que se espera que logren, tanto al final del proceso de enseñanza y aprendizaje, como durante su desarrollo.

Para la planificación de clases, se considera tres momentos:

## 1. Identificar el Objetivo de Aprendizaje que se quiere alcanzar

Dicho objetivo responde a la pregunta: ¿qué se espera que aprendan? Y se especifica a partir de los Objetivos de Aprendizaje propuestos en las Bases Curriculares y en relación con los intereses, necesidades y características particulares de los estudiantes.

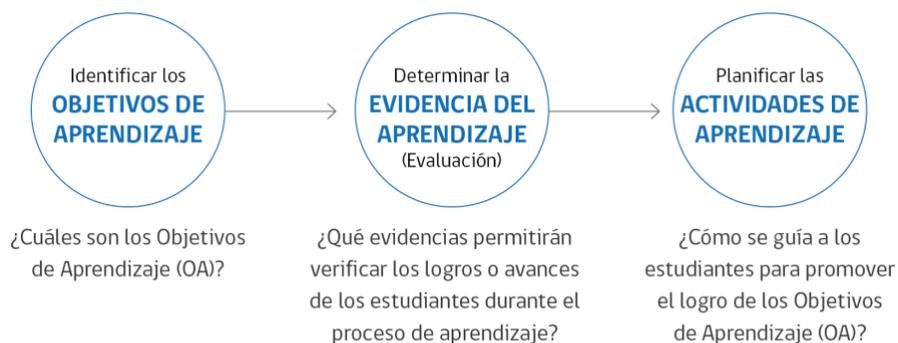
## 2. Determinar evidencias

Teniendo claridad respecto de los aprendizajes que se quiere lograr, hay que preguntarse: ¿qué evidencias permitirán verificar que el conjunto de Objetivos de Aprendizaje se logró? En este sentido, los Indicadores presentados en el Programa resultan de gran ayuda, dado que orientan la toma de decisiones con un sentido formativo.

## 3. Planificar experiencias de aprendizaje

Teniendo en mente los Objetivos de Aprendizajes y la evidencia que ayudará a verificar que se han alcanzado, llega el momento de pensar en las actividades de aprendizaje más apropiadas.

¿Qué experiencias brindarán oportunidades para adquirir los conocimientos, habilidades y actitudes que se necesita? Además de esta elección, es importante verificar que la secuencia de las actividades y estrategias elegidas sean las adecuadas para el logro de los objetivos (Saphier, Haley- Speca y Gower, 2008).



# Orientaciones para evaluar los aprendizajes

La evaluación, como un aspecto intrínseco del proceso de enseñanza-aprendizaje, se plantea en estos programas con un foco pedagógico, al servicio del aprendizaje de los estudiantes. Para que esto ocurra, se plantea recoger evidencias que permitan describir con precisión la diversidad existente en el aula para tomar decisiones pedagógicas y retroalimentar a los alumnos. La evaluación desarrollada con foco pedagógico favorece la motivación de los estudiantes a seguir aprendiendo; asimismo, el desarrollo de la autonomía y la autorregulación potencia la reflexión de los docentes sobre su práctica y facilita la toma de decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que permitan apoyar de mejor manera los aprendizajes.

Para implementar una evaluación con un foco pedagógico, se requiere:

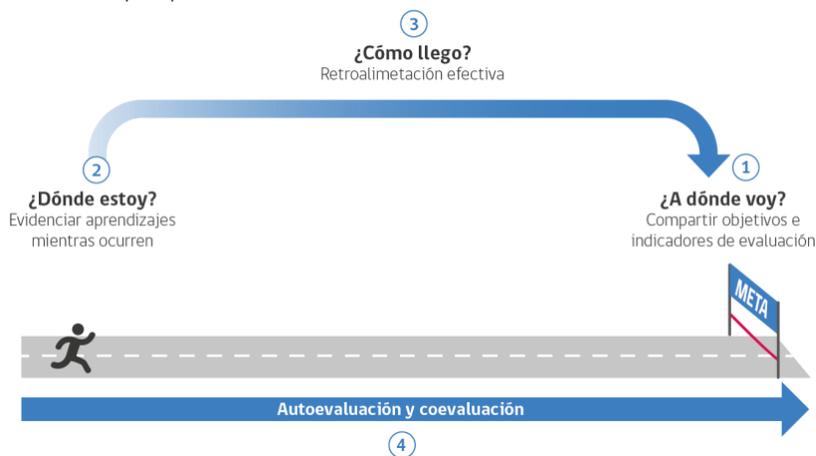
- Diseñar experiencias de evaluación que ayuden a los estudiantes a poner en práctica lo aprendido en situaciones que muestren la relevancia o utilidad de ese aprendizaje.
- Evaluar solamente aquello que los alumnos efectivamente han tenido la oportunidad de aprender mediante las experiencias de aprendizaje mediadas por el profesor.
- Procurar que se utilicen diversas formas de evaluar, que consideren las distintas características, ritmos y formas de aprender, necesidades e intereses de los estudiantes, evitando posibles sesgos y problemas de accesibilidad para ellos.
- Promover que los alumnos tengan una activa participación en los procesos de evaluación; por ejemplo: al elegir temas sobre los cuales les interese realizar una actividad de evaluación o sugerir la forma en que presentarán a otros un producto; participar en proponer los criterios de evaluación; generar experiencias de auto- y coevaluación que les permitan desarrollar su capacidad para reflexionar sobre sus procesos, progresos y logros de aprendizaje.
- Que las evaluaciones sean de la más alta calidad posible; es decir, deben representar de la forma más precisa posible los aprendizajes que se busca evaluar. Además, las evidencias que se levantan y fundamentan las interpretaciones respecto de los procesos, progresos o logros de aprendizajes de los estudiantes, deben ser suficientes como para sostener de forma consistente esas interpretaciones evaluativas.

## EVALUACIÓN

Para certificar los aprendizajes logrados, el profesor puede utilizar diferentes métodos de evaluación sumativa que reflejen los OA. Para esto, se sugiere emplear una variedad de medios y evidencias, como portafolios, registros anecdóticos, proyectos de investigación grupales e individuales, informes, presentaciones y pruebas orales y escritas, entre otros. Los Programas de Estudio proponen un ejemplo de evaluación sumativa por unidad. La forma en que se diseñe este tipo de evaluaciones y el modo en que se registre y comunique la información que se obtiene de ellas (que puede ser con calificaciones) debe permitir que dichas evaluaciones también puedan usarse formativamente para retroalimentar tanto la enseñanza como el aprendizaje.

El uso formativo de la evaluación debiera preponderar en las salas de clases, utilizándose de manera sistemática para reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza, y para tomar decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que busquen promover el progreso del aprendizaje de todos los estudiantes, considerando la diversidad como un aspecto inherente a todas las aulas.

El proceso de evaluación formativa que se propone implica articular el proceso de enseñanza-aprendizaje en función de responder a las siguientes preguntas: ¿A dónde voy? (qué objetivo de aprendizaje espero lograr), ¿Dónde estoy ahora? (cuán cerca o lejos me encuentro de lograr ese aprendizaje) y ¿Qué estrategia o estrategias pueden ayudarme a llegar a donde tengo que ir? (qué pasos tengo que dar para acercarme a ese aprendizaje). Este proceso continuo de establecer un objetivo de aprendizaje, evaluar los niveles actuales y luego trabajar estratégicamente para reducir la distancia entre los dos, es la esencia de la evaluación formativa. Una vez que se alcanza una meta de aprendizaje, se establece una nueva meta y el proceso continúa.



Para promover la motivación para aprender, el nivel de desafío y el nivel de apoyo deben ser los adecuados –en términos de Vygotsky (1978), estar en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes–, para lo cual se requiere que todas las decisiones que tomen los profesores y los propios alumnos se basen en la información o evidencia sobre el aprendizaje recogidas continuamente (Griffin, 2014; Moss & Brookhart, 2009).

# Estructura del programa

## Propósito de la unidad

Resume el objetivo formativo de la unidad, actúa como una guía para el conjunto de actividades y evaluaciones que se diseñan en cada unidad. Se detalla qué se espera que el estudiante comprenda en la unidad, vinculando los contenidos, las habilidades y las actitudes de forma integrada.

## Objetivos de aprendizaje (OA)

Definen los aprendizajes terminales del año para cada asignatura. En cada unidad se explicitan los objetivos de aprendizaje a trabajar.

## Actividades de aprendizaje

El diseño de estas actividades se caracteriza fundamentalmente por movilizar conocimientos, habilidades y actitudes de manera integrada que permitan el desarrollo de una comprensión significativa y profunda de los Objetivos de Aprendizaje. Son una guía para que el profesor o la profesora diseñen sus propias actividades de evaluación.

Programa de Estudio Unidad 1

## UNIDAD 1

### EL USO DE DATOS ESTADÍSTICOS Y DE MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA LA TOMA DE DECISIONES

**PROPÓSITO DE LA UNIDAD**  
En esta unidad los estudiantes realizan interpretaciones de datos de situaciones de incerteza, para construir respuestas en base a las medidas de dispersión o probabilidades condicionales. Los estudiantes toman conciencia sobre la forma de tomar decisiones, considerando el cálculo de medidas estadísticas como una herramienta para fundamentar sus opciones. Algunas de las preguntas que pueden orientar el desarrollo de esta unidad son: ¿cómo interpretar la información para tomar decisiones? y ¿cómo estos datos me permiten apoyar la toma de decisiones?

**OBJETIVOS DE APRENDIZAJE**

**OA2** Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.

**OA3** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

**OA4** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

Programa de Estudio Unidad 1

## ACTIVIDAD 1:

Analizar datos sobre siniestros automovilísticos para tomar decisiones

Duración: 4 horas pedagógicas

**PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD**  
A través del análisis estadístico de datos reales, se busca que los estudiantes generen una campaña de concientización de la población a través de las redes sociales. Para ello, deberán decidir cuál información obtenida publicarán en una red social a partir de los análisis de datos, de tal forma de influir en la ciudadanía a través de un breve mensaje de texto o de la imagen de un gráfico. A lo largo de la actividad, se busca que los estudiantes tomen decisiones justificándolas en la información estadística.

**OBJETIVOS DE APRENDIZAJE**

**OA2** Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.

**OA3** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

**OA4** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**ACTITUDES**

- Responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

**DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD**

**DIAGNÓSTICO DE SINIESTROS DE TRÁNSITO SEGÚN TIPO DE LESIONADOS**  
En 1993 se creó la Comisión Nacional de Seguridad de Tránsito (CONASET) con el objetivo central de prevenir siniestros de tránsito y sus consecuencias, coordinando las labores en materia de seguridad vial de diez ministerios—Interior y Seguridad Pública, Educación, Justicia y Derechos Humanos, Obras Públicas, Salud, Vivienda y Urbanismo, Transportes y Telecomunicaciones, Trabajo y Previsión Social, Secretaría General de Gobierno, y Secretaría General de la Presidencia— y de Carabineros de Chile.

### Indicadores de evaluación

Detallan uno o más desempeños observables, medibles, específicos de los estudiantes que permiten evaluar el conjunto de Objetivos de Aprendizaje de la unidad. Son de carácter sugerido, por lo que el docente puede modificarlos o complementarlos.

### Orientaciones para el docente

Son sugerencias didácticas y disciplinares respecto de cómo desarrollar una actividad.

### Recursos

Se especifican todos los recursos necesarios para el desarrollo de la actividad, incorporando vínculos web, material de consulta y lecturas para el docente.

### Actividades de evaluación sumativa de la unidad

Son propuestas de evaluaciones de cierre de unidad que contemplan los aprendizajes desarrollados a lo largo de ellas. Mantienen una estructura similar a las actividades de aprendizaje.

Programa de Estudio Unidad 1

## ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN:

### OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

**OAZ** Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.

**OAc** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

**OAd** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

### INDICADORES DE EVALUACIÓN

- Identifican el uso de la desviación estándar en situaciones de la vida diaria.
- Comunican la toma de decisiones en situaciones cotidianas en base a la desviación estándar y el cálculo de probabilidades.
- Extraen e interpretan información a partir de una desviación estándar dada.
- Seleccionan y relacionan información que involucra probabilidades condicionales.

### DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN

A continuación, se muestran algunas actividades que pueden ser usadas como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1, estas pueden ser usadas cada una por sí misma o en conjunto. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y tiempo disponible.

- ¿Cómo se calcula la contaminación que hay en una ciudad, y cómo se sabe con antelación? Mediante estaciones meteorológicas, también conocidas como estaciones de seguimiento de contaminación o estaciones remotas de medición de la calidad del aire.

#### NIVELES DE LOGRO

| INDICADORES DE EVALUACIÓN  | COMPLETAMENTE LOGRADO | SE OBSERVAN ASPECTOS ESPECÍFICOS QUE PUEDEN MEJORAR | NO LOGRADO POR AUSENCIA O NO SE PUEDE ENTENDER NADA |
|--|-----------------------|---|---|
| Identificar el uso de la desviación estándar en situaciones de la vida diaria.   |                       |   |   |
| Comunicar la toma de decisiones en situaciones cotidianas en base a la desviación estándar y el cálculo de probabilidades. |                       |   |   |
| Extraer e interpretar información a partir de una desviación estándar dada.  |                       |   |   |

# Matemática 4° medio

## Propósitos Formativos

La asignatura de Matemática busca que los estudiantes continúen desarrollando sus habilidades de modelar el mundo matemáticamente, resolver problemas en diferentes contextos, representar para expresar ideas matemáticas, comunicar y argumentar, de modo de favorecer su tránsito al mundo laboral y profesional y promover que contribuyan a la comunidad local, nacional y global. La asignatura provee distintos espacios para que profundicen y permite hacer matemática para contribuir positivamente a su autoestima y al concepto que se están formando acerca de sus propias capacidades.

Para ello, se espera que trabajen colaborativamente en el modelamiento matemático de situaciones para tomar decisiones fundamentadas, tanto en problemas de la disciplina como de carácter interdisciplinario y del ámbito social, medioambiental o económico. Así podrán integrar las habilidades de representar, modelar, argumentar, comunicar y resolver problemas, con habilidades tecnológicas como el uso pertinente de herramientas digitales. Por otra parte, podrán entender la matemática como una actividad en desarrollo en la que se puede participar activamente y que es significativa para el proyecto personal y la vida individual y ciudadana.

## Enfoque de la asignatura de Matemática

Matemática contribuye a que los alumnos logren las metas generales del currículum de Enseñanza Media, en términos de habilidades contemporáneas, formación de personas y virtudes ciudadanas. Su propósito central es que desarrollen el pensamiento matemático, estadístico y computacional, distante del retener información extensa en la memoria y de un exceso de rutinas de cálculo.

La asignatura procura focalizarse en la actividad matemática, en que los estudiantes desarrollen la claridad conceptual, en fomentar la actividad colaborativa –que permite aprender de la propia comunicación y del debate–, en que usen con frecuencia las tecnologías digitales (que liberan en alguna medida de las rutinas de cálculo) y en que empleen múltiples representaciones, con o sin tecnologías digitales.

A continuación, se presenta las principales definiciones conceptuales y didácticas en que se sustentan tanto la asignatura del Plan de Común de Formación General, Matemática, como las asignaturas de profundización del Plan Diferenciado Humanístico-Científico.

## Proceso de aprendizaje

---

El conocimiento matemático, su rigurosidad y el incremento de la capacidad para usarlo tienen profundas e importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. Debido a ello, el entorno social valora ese conocimiento y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. El proceso de aprender matemática, por lo tanto, interviene en la capacidad de las personas para percibirse como seres autónomos y valiosos en la sociedad. La calidad, pertinencia y amplitud de dicho conocimiento incide en las posibilidades y la calidad de vida de las personas y en el potencial desarrollo del país.

Aprender matemática es, primordialmente, participar en la actividad matemática, que los estudiantes puedan plantearse ante problemas y tratar de resolverlos por sí mismos. El aprendizaje de la matemática se genera de forma progresiva, relacionada y con un aumento creciente de complejidad conceptual y procedimental, y no únicamente memorizando definiciones y algoritmos. En 3° y 4° medio, esto exige aplicar simultáneamente conocimientos y procedimientos propios de aritmética, álgebra, geometría, estadística o probabilidades, para resolver un problema o modelar un fenómeno de la disciplina, de otra área del conocimiento o de la vida cotidiana.

## Desarrollo del pensamiento racional

---

Entendida como construcción cultural, la matemática tiene importantes consecuencias en el aprendizaje y la educación en general, que se originan en sus aportes indiscutibles al desarrollo del pensamiento, y en las estrategias y razonamientos que ofrece para actuar en el entorno científico, social y natural. La racionalidad de esta disciplina es inseparable de toda actividad que se relacione con ella, como formular conjeturas, procedimientos, argumentos o alguna de las diversas formas de verificarlos, o modelar matemáticamente situaciones y construir el lenguaje disciplinar. Por su parte, la estadística provee maneras de pensar y de trabajar para tomar decisiones apropiadas en condiciones de incerteza, lo que la hace necesaria para enfrentar múltiples situaciones del ámbito laboral, disciplinario y del diario vivir.

## Modelamiento matemático

---

El modelamiento matemático es el proceso que busca integrar la resolución de problemas, la argumentación, el razonamiento matemático y estadístico, la representación y el estudio de fenómenos cotidianos, y problemas propios de la disciplina o de otras áreas del conocimiento y la cultura. El escenario natural para el modelamiento matemático implica que los alumnos colaboren entre sí, pues juntos tienen mayores posibilidades de asir la complejidad de algunas situaciones que interesa considerar. De esta manera, la discusión y la reflexión colectiva ayudan a construir conocimiento; cada cual puede enriquecerse con las opiniones de sus pares, aprender a argumentar, a convencer con argumentos fundados y a validar los avances. Todo ello incide en el aprendizaje de diversas disciplinas, y también en el desarrollo de virtudes ciudadanas.

## Problemas rutinarios y no rutinarios

---

Aprender matemática implica aplicar conocimientos y procedimientos, y elaborar estrategias para abordar los problemas propios de la disciplina o de la vida cotidiana. En ese sentido, se busca profundizar en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios como una oportunidad de aprendizaje clave en esta disciplina. Se propone avanzar en el tipo de situaciones en las cuales los estudiantes resuelven problemas, formulan posibles explicaciones o conjeturas, y en la habilidad de argumentar. Un aprendizaje central de la matemática consiste en justificar en términos disciplinares; por ende, se espera que –en esta etapa de su vida escolar– los alumnos experimenten cómo formular conjeturas y justificarlas o refutarlas.

## Metacognición

---

La metacognición juega un rol importante dentro de la matemática. La disciplina se aprende “haciendo matemática”, reflexionando acerca de lo hecho y confrontando la actuación propia con el conocimiento construido y sistematizado anteriormente. Por ello, están imbricadas en toda tarea matemática las habilidades de razonar, representar, modelar matemáticamente, argumentar y comunicar, y resolver problemas. Además, su desarrollo permite alcanzar niveles de abstracción y demostración cada vez más complejos y que suelen requerir de una aplicación rigurosa del lenguaje matemático. El caso de la estadística es muy similar, pero agrega una componente relativa a los datos con los cuales se trabaja, los que son siempre contextualizados.

## Aprendizaje Basado en Proyectos y Resolución de Problemas

---

Toda asignatura ofrece oportunidades para que los estudiantes aborden problemas vinculados a su vida cotidiana. El Aprendizaje Basado en Proyectos promueve que se organicen durante un periodo extendido de tiempo en torno a un objetivo basado en una pregunta compleja, problema, desafío o necesidad –normalmente surgida desde sus propias inquietudes– que pueden abordar desde diferentes perspectivas y áreas del conocimiento, fomentando la interdisciplinariedad. El proyecto culmina con la elaboración de un producto o con la presentación pública de los resultados. En el Aprendizaje Basado en Problemas, en cambio, se parte de la base de preguntas, problemas y necesidades cotidianas sobre los cuales los estudiantes investigan y proponen soluciones.

En el caso de Matemática, estas metodologías permiten promover situaciones de aprendizaje desafiantes, pues para desarrollarlos es necesario que se resuelva –de manera colaborativa e incorporando las tecnologías digitales– problemas reales que exigen habilidades, conocimientos y actitudes en sus distintas etapas de diseño, ejecución y comunicación.

## Ciudadanía digital

---

Las habilidades de alfabetización digital y uso de tecnologías que promueven las Bases Curriculares de 3° y 4° medio –como parte de las Habilidades para el siglo XXI– son fundamentales para que los alumnos trabajen en instancias de colaboración, comunicación, creación e innovación, mediante el uso de las TIC. También contribuyen a desarrollar la capacidad de utilizarlas con criterio, prudencia y responsabilidad.

Esta asignatura fomenta que los estudiantes usen las tecnologías digitales –por medio de software y aplicaciones digitales– para alcanzar diferentes niveles de comprensión y aplicación de los conocimientos y procedimientos, al modelar y resolver problemas propios de la disciplina o relacionados con otras asignaturas, o bien de la vida cotidiana. Los software y las aplicaciones digitales especialmente diseñados para aprender Matemática –como procesadores simbólicos o de geometría dinámica, simuladores, *apps*, o aquellos especialmente diseñados para el análisis estadístico, algebraico o geométrico (de los cuales hay versiones de uso libre y gratuito)– facilitan el análisis y la visualización de los conceptos o procedimientos en estudio, agilizan el testeo de conjeturas por la vía de comprobar una gran cantidad de casos particulares, y permiten desplazar la atención desde las rutinas de cálculo hacia la comprensión y resolución de un problema que se quiere modelar y resolver.

## Orientaciones para el docente

### Orientaciones didácticas

---

Docentes e investigadores han desarrollado variados lineamientos didácticos y diversas metodologías de enseñanza a fin de que la matemática se entienda de modo más profundo. La literatura indica que, en general, el éxito es posible con cualquiera de estas formas metodológicas y que la clave está en plantear situaciones de aprendizaje que generen un diálogo y una discusión en el ámbito de datos, representaciones y variaciones de estos.

Desde esta perspectiva, el profesor debe promover que los alumnos den sentido a los contenidos matemáticos y, sobre todo, a las respuestas según su propio contexto. Asimismo, se espera que favorezca que los jóvenes interpreten los resultados más que repetir o mecanizar algoritmos, fórmulas y definiciones. Para esto, se tiene que establecer conexiones entre la situación, los conceptos matemáticos involucrados, las formas de representar, las variaciones posibles y sus significados en las respuestas.

Diversas investigaciones muestran que hay que emplear varios tipos de representaciones, como la recta numérica para expresar ideas sobre la operatoria, el plano cartesiano para expresar cambios y movimientos, tablas para ordenar datos, figuras geométricas para expresar propiedades geométricas, numéricas o algebraicas. Se las debe emplear de manera articulada, lo que demuestra que entienden mejor lo que están aprendiendo y les permite explicar de manera visual el proceso para resolver un problema. También se puede verificar si un estudiante conoce un concepto cuando transita de un tipo

de representación a otra, lo que incluye ir del lenguaje natural al simbólico o de un lenguaje pictórico a uno simbólico y viceversa.

Aunque toda materia matemática debe presentarse de manera contextualizada, conviene insistir en que hay que modelar las situaciones y, preferentemente, usar aquellas que son significativas para los estudiantes. Para esto, ellos tienen que elegir las actividades y el docente debe ofrecer alternativas como las que este Programa incluye. Para elegir o modificar alguna de las actividades, el profesor debe centrarse en el interés que provoquen en cada contexto escolar, a fin de motivar al curso a trabajar en dichas actividades.

Los jóvenes también tienen que poder elegir con qué herramientas trabajar, pues las habilidades argumentativas y comunicativas se pueden apoyar en un entorno de tecnologías digitales; además, si usan programas o aplicaciones se les hace más fácil comprender y desarrollan la comunicación entre pares.

La asignatura de Matemática de la Formación General Común de 4° Medio pretende que sigan desarrollando su capacidad de análisis, estudio y resolución presente y futura para favorecer su tránsito al mundo laboral y profesional, y promover que ayuden a la comunidad local, nacional y global.

## Orientaciones para la evaluación

---

Las tareas laborales y académicas tienen hoy un carácter colaborativo; además, si se requiere algún cómputo que se puede hacer con ayuda digital, se recurre sin reparos a ella. En las actividades de evaluación, se sugiere ofrecer a los alumnos que sean libres de usar calculadoras o programas que faciliten los cálculos. También pueden trabajar en pares o grupos de hasta 4 integrantes, en cuyo caso el profesor y los mismos jóvenes monitorean la distribución de tareas y fechas de entrega.

Las evaluaciones forman parte del proceso de aprendizaje y se debe dar alternativas al respecto según el contexto de la clase. Dichas evaluaciones incluyen diversos ejercicios, tareas y actividades entre los cuales los alumnos podrían elegir o se pueden emplear para armar una evaluación. Tienen un carácter de orientación y apoyo al aprendizaje; no son medidas para determinar capacidades, pero permiten obtener información sobre los progresos, la comprensión y el aprendizaje de los contenidos y las habilidades. Es importante entregar pautas de evaluación y retroalimentar a los jóvenes para que puedan mejorar su aprendizaje e incluso cambiar sus calificaciones.

Hay varias alternativas disponibles para evaluar:

- *Proyectos* (de grupos o individuales): De duración variable, sirven para resolver problemas complejos, efectuar una investigación guiada o modelar un problema real. Requieren de objetivos claros, acordados previamente, y de resultados abiertos. Es la forma ideal para conectar diferentes áreas del conocimiento.
- *Diario de vida matemático*: Cuaderno o carpeta en que el estudiante desarrolla estrategias personales, exploraciones, definiciones propias o descubrimientos. El profesor puede orientar su elaboración y verificar si comprenden los conceptos que usan.

- *Portafolio*: Selección periódica de evidencias (problemas resueltos, trabajos, apuntes, en un dossier o una carpeta) recogidas en un período determinado, y que responde a uno o más Objetivos de Aprendizaje. Permiten demostrar aprendizaje y deben incluir justificación y reflexión. El estudiante tiene un rol activo en su evaluación.
- *Presentación matemática* de la resolución de un problema: Indica el proceso y los procedimientos usados. Para evaluar, se aplica criterios o indicadores como dominio del tema, uso de materiales de apoyo, uso del lenguaje. Los estudiantes deben conocer tales criterios y, eventualmente, el docente puede acordarlos con ellos.
- *Entrevista individual*: Mientras el curso trabaja en una tarea, el profesor dialoga con uno o más estudiantes de un mismo nivel de desempeño acerca de un concepto, un desafío o una pregunta relacionada con el tema abordado en la clase.
- *Actividad autoevaluable*: Al finalizar un tema o unidad, el profesor da a sus estudiantes la oportunidad de trabajar con un material que les permita autocorregirse (por ejemplo: hoja de actividades con las respuestas al reverso). A partir de los resultados, pueden verificar su avance o aquello que deben reforzar, corregir su tarea con ayuda de compañeros, completar su trabajo con recursos que estén a su alcance –como cuaderno, libros, diccionarios–, anotar sus dudas y, en última instancia, pedir ayuda al docente.

## Orientaciones para contextualización

---

La asignatura de Matemática ofrece a los alumnos oportunidades de aprendizaje contextualizadas tanto en la matemática misma como en diferentes contextos, significativos e interdisciplinarios que, a su vez, les permiten sistematizar o aplicar los conocimientos y procedimientos aprendidos, y también idear y poner en práctica sus propias maneras de abordar tales fenómenos y problemas.

## Organización Curricular

Las Bases Curriculares de las asignaturas de profundización de Matemática presentan objetivos de aprendizaje de dos naturalezas: unos de habilidades<sup>3</sup>, comunes a todas las asignaturas científicas del nivel, y otros de objetivos enfocados en el conocimiento y la comprensión. Ambos tipos de objetivo se entrelazan en el proceso de enseñanza-aprendizaje, junto con las actitudes propuestas desde el marco de Habilidades para el siglo XXI.

### Objetivos de Aprendizaje para 4° medio

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

Habilidades

#### Resolver problemas

- a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.
- b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

#### Argumentar y Comunicar

- c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.
- d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

#### Modelar

- e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
- f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

#### Representar

- g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.
- h. Evaluar diferentes representaciones, de acuerdo a su pertinencia con el problema a solucionar.

<sup>3</sup> No es necesario seguir un orden lineal al trabajar con los Objetivos de Aprendizaje y cada uno de ellos puede ser trabajado de manera relacionada o independiente.

### Habilidades digitales

- i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.
- j. Desarrollar un trabajo colaborativo en línea para discusión y resolución de tareas matemáticas, usando herramientas electrónicas de productividad, entornos virtuales y redes sociales.
- k. Analizar y evaluar el impacto de las tecnologías digitales en contextos sociales, económicos y culturales.
- l. Conocer tanto los derechos propios como los de los otros, y aplicar estrategias de protección de la información en ambientes digitales.

### Objetivos de Aprendizaje para 4° Medio

Se espera que los alumnos sean capaces de:

#### Conocimiento y comprensión

1. Fundamentar decisiones en el ámbito financiero y económico personal o comunitario, a partir de modelos que consideren porcentajes, tasas de interés e índices económicos.
2. Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.
3. Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencias de exponente entero y trigonométricas  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$ , de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.
4. Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

## Visión global del año

| UNIDAD 1  | UNIDAD 2   | UNIDAD 3  | UNIDAD 4  |
|---|--|---|---|
| La toma de decisiones en situaciones de incerteza   | La toma de decisiones en situaciones financieras y económicas  | Modelamiento matemático para describir y predecir   | Geometría con coordenadas   |
| <b>Objetivos de Aprendizaje</b>   | <b>Objetivos de Aprendizaje</b>  | <b>Objetivos de Aprendizaje</b>   | <b>Objetivos de Aprendizaje</b>   |
| <p><b>OA 2:</b> Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.</p> <p><b>OA c.</b> Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.</p> <p><b>OA f.</b> Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.</p> | <p><b>OA 1:</b> Fundamentar decisiones en el ámbito financiero y económico personal o comunitario, a partir de modelos que consideren tasas de interés e índices económicos.</p> <p><b>OA d.</b> Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p><b>OA f.</b> Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.</p> | <p><b>OA 3:</b> Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencia de exponente entero y trigonométricas <math>\text{sen}(x)</math> y <math>\text{cos}(x)</math>, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.</p> <p><b>OA e.</b> Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.</p> <p><b>OA f.</b> Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.</p> | <p><b>OA 4:</b> Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.</p> <p><b>OA d.</b> Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p><b>OA e.</b> Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.</p> |

| Actitudes  | Actitudes   | Actitudes  | Actitudes   |
|--|---|--|---|
| <p>Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.</p> <p>Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.</p> | <p>Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.</p> <p>Responsabilidad por las propias acciones y decisiones con consciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.</p> | <p>Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.</p> <p>Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.</p> | <p>Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.</p> <p>Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.</p> |
| Tiempo estimado:<br>12 semanas   | Tiempo estimado:<br>10 semanas  | Tiempo estimado:<br>9 semanas  | Tiempo estimado:<br>7 semanas   |

# Unidad 1

# Unidad 1: La toma de decisiones en situaciones de incerteza

## Propósito

Los estudiantes valorarán el uso de estadísticas y modelos probabilísticos para tomar decisiones en situaciones de incerteza. Identificarán dos modelos probabilísticos, la distribución binomial y normal, y entenderán que son herramientas que permiten comprender cómo se distribuyen los datos en situaciones dicotómicas o de pruebas estandarizadas. El foco se encuentra en las observaciones que se puede hacer sobre estos modelos y cómo sacar conclusiones a partir de gráficos y datos dados. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿Cómo se puede tomar decisiones a partir de los modelos probabilísticos? ¿Cómo explicar una toma de decisión según datos estadísticos?

## Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

**OA c.** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

## Actividad 1: ¿Cómo se distribuyen el éxito y el fracaso?

### PROPÓSITO

Los estudiantes establecen un modelo probabilístico binomial en dos situaciones y ven cómo, a partir de casos particulares y mediante la experimentación, se puede avanzar hacia establecer un modelo que permite hacer predicciones y tomar decisiones futuras con fundamentos estadísticos. Para esto, deben organizar información y ser proactivos para buscar soluciones; asimismo, tienen que recordar y profundizar temas como el aparato de Galton, que trabajaron en 1° medio.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

**OA c.** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

### Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

**Duración:** 9 horas pedagógicas

### DESARROLLO

#### TABLA DE GALTON

1. Construye un aparato de Galton o utiliza una versión digital para realizar el experimento aleatorio.
  - a. ¿Cuál es el camino recorrido por uno de los objetos?
  - b. ¿Cómo será la distribución de los datos en experimentos de este tipo?
  - c. ¿Cómo se relacionan los caminos con las respuestas de un experimento dicotómico?
  - d. ¿Qué relación tienen las divisiones del aparato y la cantidad de fichas que se deja caer con el experimento?

2. Prueba con otros aparatos de Galton: se puede utilizar alfileres, un tablero en plumavit y cajas de fósforos, o un geoplano o un recurso digital, como muestra la figura.

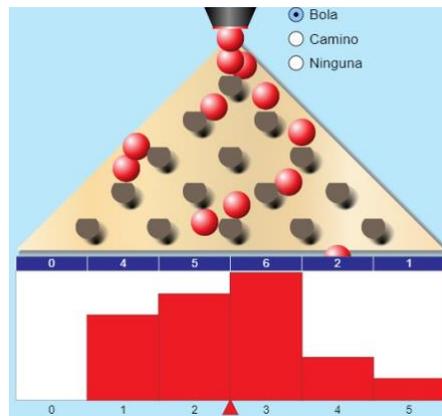
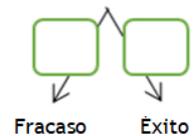


Fig. 1: Aparato de Galton en recurso digital.

Extraído de

<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://phet.colorado.edu/en/simulations/category/math>

3. Configura el aparato de Galton con probabilidad 0,5 y 5 filas, realiza varias pruebas, observa dónde caen las fichas y mira la distribución en las diferentes casillas.
- ¿Todas las casillas se llenan con la misma cantidad de fichas?
  - ¿Cómo se distribuyen las fichas en las casillas?
4. Piensa en una ficha. Si toma el camino a tu izquierda, se considerará un fracaso y si toma el camino a tu derecha, se considerará un éxito.
- En un desvío cualquiera, ¿cuál es la probabilidad de obtener un éxito?
  - ¿Y cuál es la probabilidad de obtener un fracaso?
5. Si una ficha sigue siempre el camino de tu izquierda, en las 5 filas:
- ¿Cuántos fracasos ocurren?
  - ¿Cuántos éxitos ocurren?
6. Por el contrario, si la ficha sigue solamente el camino de tu derecha:
- ¿Cuántos éxitos ocurren?
  - ¿Cuántos fracasos ocurren?
7. Determina la cantidad de éxitos y fracasos cuando la ficha cae en algunas de las casillas intermedias.



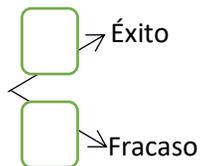
8. Si numeras las casillas donde caen las fichas desde  $X = 0, 1, 2, 3, 4$  y  $5$ , de izquierda a derecha, con 5 filas:
  - a. ¿De cuántas maneras se puede llegar a  $X = 0$ ?
  - b. ¿De cuántas maneras se puede llegar a  $X = 1$ ?
  - c. Responde la pregunta anterior hasta  $X = 5$ . Señala cómo la combinatoria puede aportar a realizar los conteos pedidos. Relaciona estas respuestas con las obtenidas anteriormente.
  - d. ¿Cuántos caminos posibles se puede observar? Considera todos los caminos posibles.
9. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha siga un camino específico? Argumenta si los sucesos asociados a seguir un camino son o no equiprobables.
10. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha llegue a una casilla en específico?
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha llegue a la casilla 0,  $P(X = 0)$ ?
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que una ficha llegue a la casilla 1,  $P(X = 1)$ ?
  - c. Repite la pregunta anterior hasta llegar a la casilla 5,  $P(X = 5)$ .
  - d. Si estás usando el recurso digital, simula el lanzamiento de la ficha al menos 500 veces y compara la probabilidad experimental con la probabilidad teórica que obtuviste recién.
11. ¿Cuál es la distribución de las fichas en las distintas casillas? ¿Cómo es la distribución de probabilidad de las fichas en este experimento aleatorio?
12. Expresa de forma general la probabilidad de que una ficha llegue a una de las posibles casillas.
13. Inventa una situación en contexto que pueda ser simulada por este experimento binomial.

### UNA PRUEBA DE SELECCIÓN

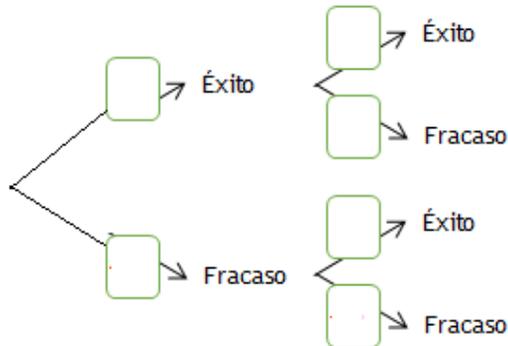
Muchas pruebas estandarizadas son de selección múltiple. Por ejemplo, en una prueba de 80 preguntas de 5 alternativas cada una, el azar puede estar presente si el estudiante no tiene certeza de cómo responder correctamente cada pregunta. En este caso, al estudiante le debería interesar la pregunta ¿Qué tan probable es que un estudiante respondiese cierta cantidad de preguntas al azar y tuviese varias correctas? Contesta las siguientes preguntas con un compañero y averigüen qué tan probable es que una persona que no estudió lo suficiente y recurriera mucho al azar, obtuviese un buen puntaje en esa prueba.

1. Supongan que responden una pregunta al azar.
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de acertar? es decir, ¿de qué sea éxito?
  - b. Considerando que son 5 alternativas, ¿son todas igualmente probables?
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de no acertar a la respuesta correcta? es decir, ¿de qué sea fracaso?

- d. Completen el esquema, anotando los valores de las probabilidades correspondientes en los recuadros.



2. Consideren el caso de responder una pregunta al azar. Se tienen entonces los sucesos:
- A: Obtener 0 respuestas correctas (o un fracaso)
- B: Obtener 1 respuesta correcta (o un éxito)
- O bien:  $A = \{0\}$ ;  $B = \{1\}$
3. La variable aleatoria  $X$  representa el número de éxitos en el experimento. ¿Cuáles son las probabilidades de  $P(X = 0)$ ;  $P(X=1)$ ?
4. Ahora consideren el caso de responder al azar dos preguntas. Conjeturen: ¿será igualmente probable obtener una respuesta correcta que en el caso anterior?
5. Completen el diagrama, luego definan los sucesos  $C$ ,  $D$  y  $E$  y determinen qué probabilidades hay de que ocurran ninguno, uno o dos aciertos en la prueba, respectivamente, si se responde dos preguntas al azar:



$$C = \{(,)\}$$

$$D = \{(,), (,)\}$$

$$E = \{(,)\}$$

6. ¿Cuántas formas tienen de combinar los éxitos y los fracasos? Observen el diagrama y respondan:
- ¿De cuántas maneras se puede combinar dos fracasos o cero éxitos?
  - ¿De cuántas maneras se puede combinar un éxito y un fracaso?
  - ¿De cuántas maneras se puede combinar dos éxitos?

7. Usando las combinaciones anteriores y las probabilidades escritas como potencia, busquen un modo de expresar la probabilidad de responder  $k$  preguntas correctas  $P(X = k)$ , si se responde 2 preguntas al azar.
8. Para poner a prueba su modelo anterior, consideren el caso de responder al azar 3 preguntas.
  - a. Háganlo paso a paso: diagrama de árbol, definiendo los sucesos con 0, 1, 2 y 3 aciertos, y determinando las probabilidades.
  - b. Reemplacen datos en el modelo que determinaron y contrasten con los resultados anteriores.
  - c. Si es necesario, ajusten su modelo. Compárenlo con los de sus compañeros.
9. Si es necesario, hagan todo de nuevo con el caso de responder al azar 4 preguntas. Comprueben la validez de su modelo, luego de hacerlo todo paso a paso.
10. ¿Qué aporta el modelo encontrado?
  - a. ¿Cómo pueden usarlo para predecir qué ocurre al responder cada vez más preguntas al azar?
  - b. ¿Da lo mismo responder al azar 30 preguntas y esperar tener 20 correctas, que responder 20 preguntas al azar y esperar tenerlas todas correctas?
11. Usen el modelo para estimar cuánto vale la pena responder al azar para confiar en tener buenos resultados.

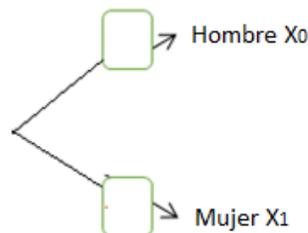
## MUJER O VARÓN

Suponiendo que la probabilidad de que una pareja tenga un hijo varón sea la misma que tener una hija:

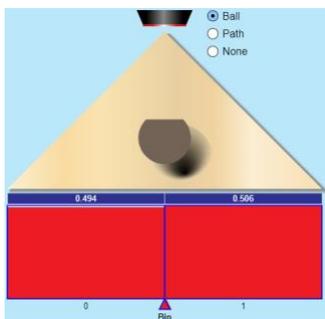
- a. Simula en el aparato de Galton la situación de estar esperando un hijo y no conocer su sexo.

Designa como  $A$  el suceso de tener un hijo hombre y  $B$  el de tener una mujer. Considera  $A = \{0\}$ ;  $B = \{1\}$

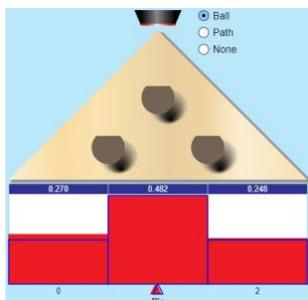
- b. Completa el diagrama de árbol con las probabilidades frecuenciales, al repetir el experimento 500 veces.



- c. Marca la opción que muestra la distribución ideal y compárala con la anterior. Completa el diagrama de árbol con las probabilidades teóricas.



- d. Calcula la probabilidad de que una familia con 6 hijos tenga 2 varones.  
 e. Ahora considera que la familia planifica tener dos hijos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean mujeres o que ambos sean hombres? ¿O que sea un hombre y una mujer (no importa el orden)?



- f. Sigue la estrategia de completar el diagrama de árbol; luego simula el experimento 500 veces para contrastar la probabilidad frecuencial con la teórica.  
 g. Usa la expresión  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$  para determinar la probabilidad de:
- tener una hija al tener 1 hijo ( $k = 1; n = 1; p = 0,5$ )
  - de tener 1 hija al tener 2 hijos ( $k = 1; n = 2; p = 0,5$ )
  - de tener 2 hijas al tener 2 hijos ( $k = 2; n = 2; p = 0,5$ )
  - Compara los resultados anteriores con los de usar la fórmula

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

- Compara tus respuestas con tus compañeros y determinen qué parámetro marca la diferencia entre usar una fórmula completa o una reducción de ella.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. La distribución de probabilidad binomial aporta con un nuevo modelo predictivo de probabilidad que permite estudiar problemas que el modelo de Laplace no puede modelar; por este motivo, es importante que los alumnos diferencien entre los sucesos elementales equiprobables y los que no lo son.
2. Se sugiere iniciar modelando un experimento aleatorio, dicotómico, con probabilidad 0,5. Esto permite comprender por qué, a medida que aumentan las repeticiones del experimento, no se puede usar el modelo de Laplace; por ejemplo: notan que cada casilla en la que pueden caer las fichas tendrá probabilidades distintas a medida que haya más filas. También es interesante que perciban la simetría que hay en las probabilidades de las casillas.
3. Discutan la cantidad de caminos posibles y las probabilidades, a partir de una situación de 5 filas y 5 caminos posibles, de un total de 32, que la ficha puede seguir para llegar a la casilla  $X_1$ . El 32 es sin restricciones de éxitos, considera cualquier camino posible; eso significa que tuvo solo un éxito en cada uno de esos 5 caminos y el resto fueron fracasos. Pero en cada desvío había dos opciones igualmente probables. La probabilidad de caer en la casilla  $X_1$  es  $\frac{5}{32}$ ; en cambio la probabilidad en cada desvío es  $\frac{1}{2}$ .
4. Se sugiere usar el diagrama de árbol para determinar las probabilidades y para que definan los sucesos de estudio. Utilícelo para analizar cómo el hecho de que los sucesos sean independientes permite calcular sumas y productos de forma simple, usando las ramas del árbol.
5. Cabe notar que la fórmula  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k$  se aplica solamente para el caso especial de  $p = q = 0,5$ . Para el caso general, se utiliza  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ .
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Interpretan datos de un experimento aleatorio dicotómico como la base del modelo binomial.
  - Comparan la probabilidad de una variable aleatoria y la frecuencia relativa de un suceso en un experimento aleatorio.
  - Evalúan las diferentes posibilidades en un experimento aleatorio y determinan su probabilidad.
  - Elaboran diagramas de árboles para representar las probabilidades de los diferentes sucesos de un experimento.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Simulación del aparato de Galton:  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability\\_es.html](https://www.curriculumnacional.cl/link/https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_es.html)

## Actividad 2: ¿Qué entendemos por estadísticamente normal?

### PROPÓSITO

Los estudiantes valoran la distribución normal como una herramienta que permite comprender cómo distribuyen los datos y cómo esta distribución permite tomar decisiones fundamentadas. Comparan modelos, calculan probabilidades y analizan críticamente los datos de la población o de una muestra, para comprender fenómenos en el área de la física, la biología y la psicología. Enfrentan los temas presentados (tallas de recién nacidos y coeficiente intelectual) desde la ética y el respeto por la privacidad de las personas.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2:** Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

**OA c.** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

### Actitudes

- Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

**Duración:** 9 horas pedagógicas

### DESARROLLO

#### TALLA DE RECIÉN NACIDOS

1. Observa el histograma de la Figura 1. Corresponde a la frecuencia de las tallas de 1 000 recién nacidos y se generó de forma aleatoria, siguiendo las normas de la OMS, una vez completadas las 40 semanas de gestación.

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Ciencias para la  
Ciudadanía**  
OA c, 3° y 4° medio

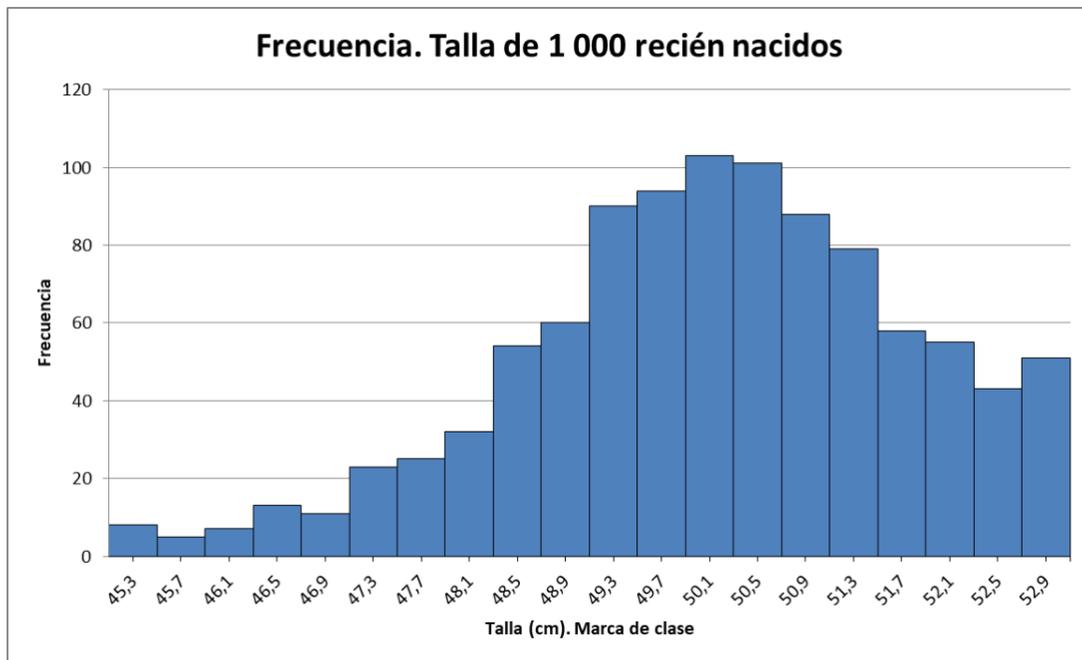


Fig. 1: Histograma de frecuencias de tallas de 1 000 recién nacidos.

1. Describe la forma de la gráfica.
  - a. ¿Cómo dirías que se distribuyen aproximadamente los datos?
  - b. ¿Hay simetría en la distribución de los datos con respecto al centro?
  - c. ¿Hay simetría en la distribución de los datos con respecto a la barra más alta (clase de mayor frecuencia)?
2. Describe una forma de comprobar la simetría y da algunos ejemplos específicos.
  - d. ¿En qué clases se distribuyen las tallas de menor frecuencia?
  - e. ¿En qué clases se distribuyen las tallas de mayor frecuencia?
3. En la Figura 2 se ha agregado el polígono de frecuencias al histograma anterior.
  - a. En la parte más alta de la curva, ¿qué información se puede extraer: las tallas mayores o las más frecuentes?
  - b. ¿Qué forma tiene el polígono de frecuencias?

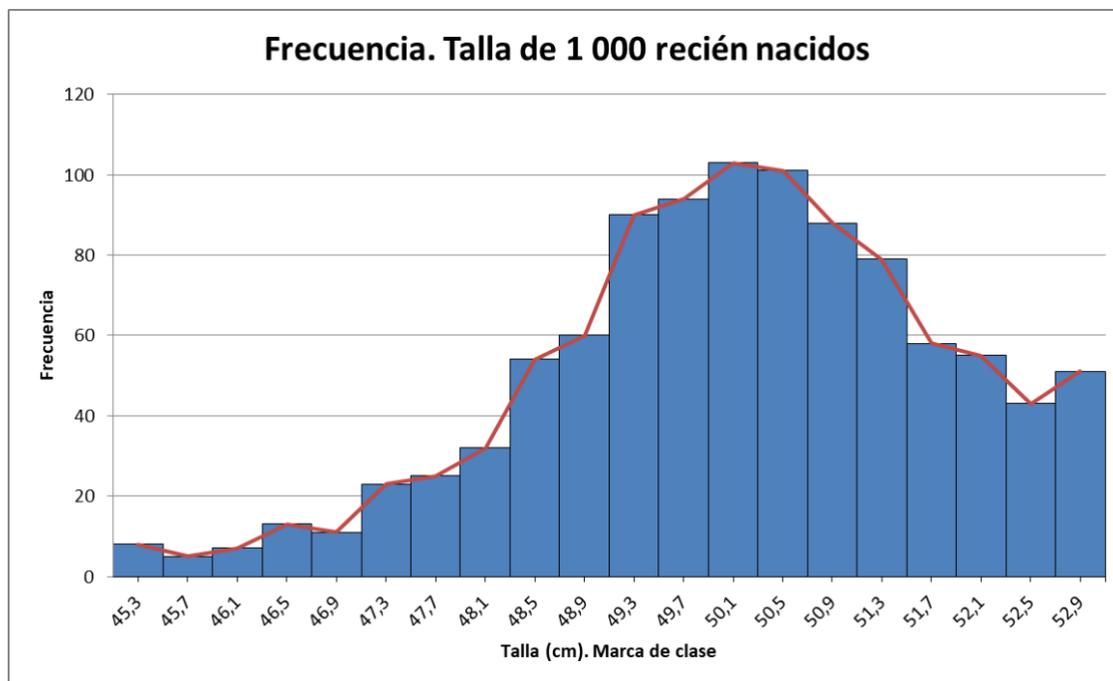


Fig. 2: Histograma y polígono de frecuencias de tallas de 1 000 recién nacidos.

4. Dada la manera en que se distribuyen los datos, cuyo gráfico se aproxima a la forma de una campana (campana de Gauss), se puede afirmar que se aproximan a una distribución normal. La Figura 3 muestra la curva de la distribución normal de los datos obtenida teóricamente.
- Compara la distribución teórica con la empírica. Señala semejanzas y diferencias.
  - Indica en qué casos la talla de un recién nacido se encuentra dentro de los parámetros normales respecto de los demás recién nacidos y en qué casos se aleja.

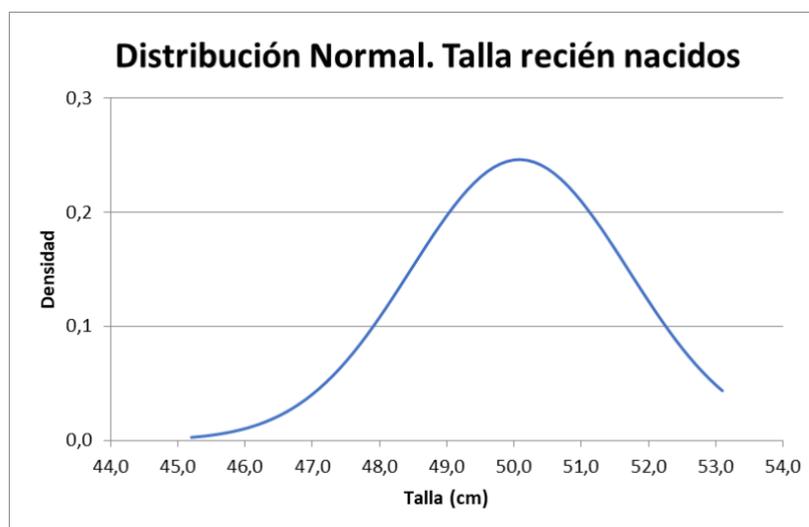


Fig. 3: Distribución normal de tallas de 1 000 recién nacidos.

5. En la Figura 3, marca las medidas de tendencia central con líneas verticales de distintos colores.
  - a. ¿En qué intervalo crees que se encuentra la moda? ¿Por qué? ¿Necesitarías más información?
  - b. ¿En qué intervalo crees que se encuentra la mediana? ¿Por qué? Averigua si se puede determinar la mediana solo con los datos del gráfico.
  - c. ¿En qué intervalo crees que se encuentra el promedio? ¿Qué harías para encontrarlo?
6. Sabiendo que el promedio  $\bar{x}$  es de 49,44 cm y la desviación estándar  $\sigma$  es de 1,73 cm, indica una interpretación de estas medidas en este contexto. En el mismo gráfico, marca  $\bar{x} - \sigma$ ,  $\bar{x} + \sigma$ ,  $\bar{x} - 2\sigma$ ,  $\bar{x} + 2\sigma$  en el eje horizontal.
  - a. ¿Qué interpretación tiene el intervalo  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$  en el contexto?
  - b. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de los datos se encuentra en este intervalo?
  - c. ¿Qué interpretación tiene el intervalo  $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$  en el contexto?
  - d. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de los datos se encuentra en este intervalo?
7. Supón que cada recién nacido puede ser elegido al azar desde una base de datos con sus nombres o RUN.
  - a. Aproximadamente, ¿cuál es la probabilidad de que un recién nacido elegido al azar tenga una talla entre 46,86 cm y 53,5 cm?
  - b. Aproximadamente, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una talla entre 48,52 cm y 51,84 cm?
  - c. Aproximadamente, ¿cuál es la probabilidad de que tenga una talla de 50 cm?

### PRUEBA DE CI

1. Observa el siguiente histograma:

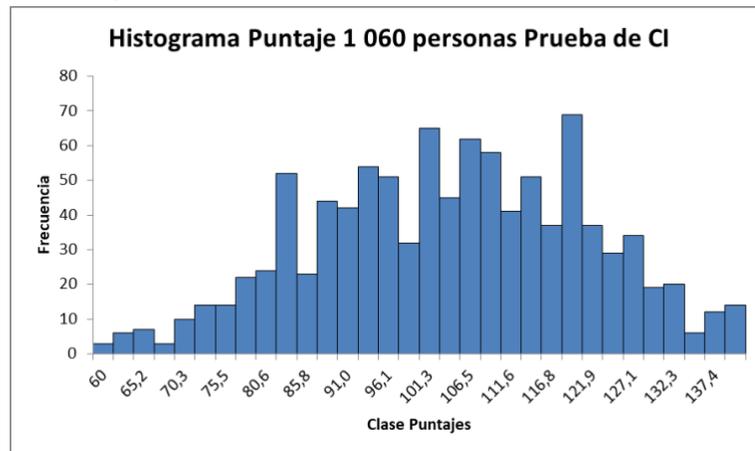


Fig. 4: Histograma con el puntaje de CI de 1060 personas.

- a. Describe la forma del gráfico. Indica si observas simetrías.
- b. ¿En qué intervalos están las mayores frecuencias y en cuáles las menores?
- c. ¿Cómo crees que sería la forma de un histograma con 1 millón de datos? Bosquéjalo.

2. En el caso del CI se puede considerar la siguiente información: el promedio es  $\mu = 100$  y la desviación estándar de  $\sigma = 16$ . Además, se asume que los puntajes tienen una distribución normal.
- a. Usando la Figura 5 de referente, determina los puntajes de corte en cada uno de los intervalos  $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ ,  $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ ,  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ .

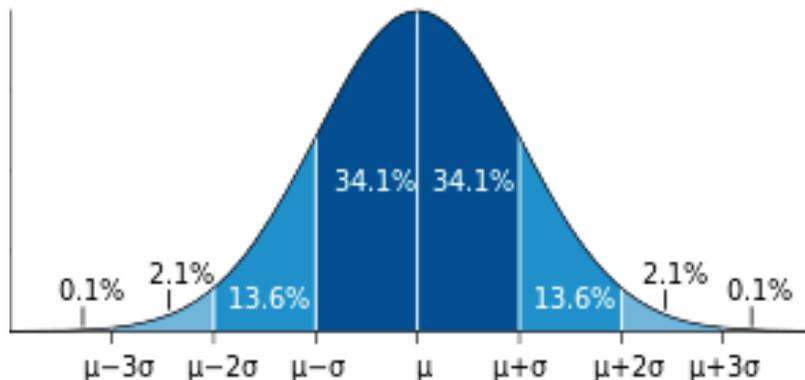


Fig. 5: Medición estándar. Distribución normal.

Extraído de

[https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n\\_normal](https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikipedia.org/wiki/Distribuci%C3%B3n_normal)

- b. Determina la probabilidad de que una persona elegida al azar rinda la prueba y se clasifique entre 95 y 100.
- c. Repite lo mismo para algunos intervalos de las clasificaciones de CI que te interesen.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. La distribución normal se presenta en esta oportunidad de forma experimental, sin llegar al cálculo de probabilidades de forma teórica; más bien, se estima los valores desde la gráfica. La intención es que distingan cómo se distribuyen los datos y que le den sentido a la curva normal, con la forma de la campana de Gauss.
2. Si es posible, acceda a una página web con datos confiables para que los alumnos generen en Excel sus propios gráficos y usen las herramientas del programa para determinar las medidas de tendencia central y desviación estándar.
3. Sabiendo que, al aumentar la cantidad de datos, la gráfica tomaría la forma estable conocida como la curva que describe los datos de una distribución normal, permita que puedan concluir que se puede llegar a esta forma, al comparar dos gráficos desde su bosquejo.
4. Se sugiere discutir sobre la posibilidad de determinar probabilidades puntuales para un valor específico, en distribuciones normales. Dado que es imposible, tienen que concluir que solo se puede calcular la probabilidad de intervalos.

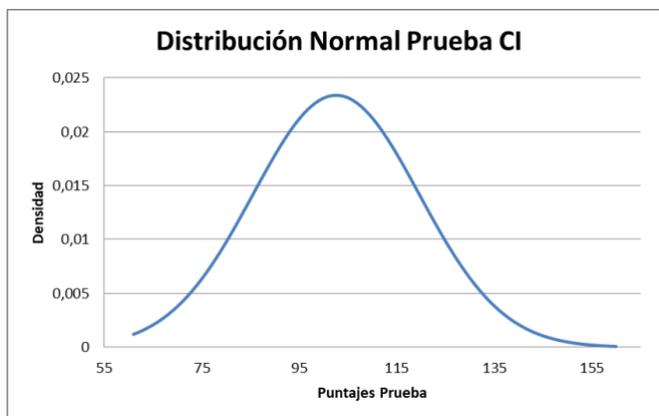


Fig. 6: Distribución normal prueba CI.

5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Interpretan datos de un experimento aleatorio dicotómico como la base del modelo binomial.
  - Evalúan los alcances y límites de un argumento estadístico o probabilístico antes de tomar una decisión.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Cómo hacer un histograma y un polígono de frecuencias superpuesto en una planilla de cálculo  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=-LoRmA1ZBeA>
- Cómo activar herramienta en una planilla de cálculo para análisis de datos y cómo hacer curva normal  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=f6\\_sNK2jw\\_I](https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=f6_sNK2jw_I)

## Actividad 3: Estandarización de distribuciones normales

### PROPÓSITO

Los estudiantes reconocen el término “normal” desde una mirada estadística y admiten que sirve para analizar conjuntos de datos y juzgar el comportamiento de uno o de un grupo de ellos, en comparación con el resto. Se espera que comprendan el uso de la desviación estándar y cómo tomar decisiones a partir de ella, que utilicen la tabla probabilística y eviten cálculos tediosos. Igual que en la actividad anterior, se espera una actitud de respeto hacia la privacidad de los compañeros, sectores y culturas.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2:** Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

**OA c.** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

### Actitudes

- Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

**Duración:** 9 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### ESTATURA DE RECIÉN NACIDOS

- En un Centro de Salud Familiar, se tiene registro de todos los niños a los que se ha atendido durante el primer semestre. Los siguientes datos corresponden al registro de la longitud (en centímetros) de todos los bebés de 6 meses controlados en ese periodo.

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Ciencias para la  
Ciudadanía**  
OA c, 3° y 4° medio

59cm ; 60cm ; 62cm ; 63cm ; 65cm ; 65cm ; 66cm ; 67cm ; 67cm ; 68 cm ; 70cm ; 72cm

- a. Completa la tabla y calcula el promedio y la desviación estándar de las 12 estaturas.

Tabla 1: Registro de estaturas y detalle del cálculo de la desviación estándar

| $n$      | $x_n$ | $x_n - \bar{x}$ | $(x_n - \bar{x})^2$ |
|----------|-------|-----------------|---------------------|
| 1        | 59    |                 |                     |
| 2        | 60    |                 |                     |
| 3        | 62    |                 |                     |
| 4        |       |                 |                     |
| 5        |       |                 |                     |
| 6        |       |                 |                     |
| 7        |       |                 |                     |
| 8        |       |                 |                     |
| 9        |       |                 |                     |
| 10       |       |                 |                     |
| 11       |       |                 |                     |
| 12       |       |                 |                     |
| Promedio |       |                 |                     |

$$S_x \approx \underline{\hspace{2cm}}$$

- b. ¿Cómo se interpreta el promedio y la desviación estándar en este contexto?
- c. Puedes usar la herramienta “Análisis de datos” de una planilla electrónica para calcular más rápido.
2. Respecto de la Figura 1 a continuación, responde:
- ¿Qué representan los puntos azules?
  - ¿Qué representa la línea vertical roja?
  - ¿Qué representa la línea vertical naranja?
  - ¿Qué representa las líneas horizontales verdes?

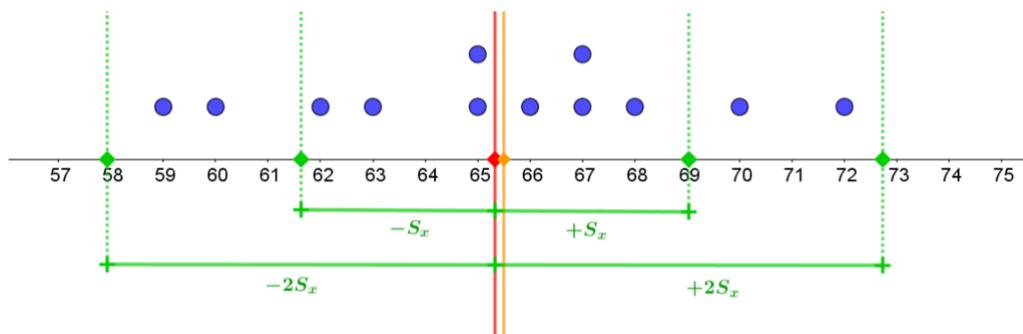


Fig. 1: Representación de las estaturas mediante diagrama de puntos.

3. Para interpretar el gráfico anterior, responde:
- ¿Qué información se puede obtener calculando  $65,33 + 3,9 = 69,23$  y  $65,33 - 3,9 = 61,43$ ?
  - ¿Qué datos se encuentran en el intervalo  $(61,43; 69,23)$ ? ¿Qué porcentaje del total de datos representan?
  - ¿Es correcto afirmar que 8 de los 12 niños controlados tienen una estatura entre 61,43 cm y 69,23 cm?
  - ¿Qué puedes afirmar sobre la diferencia entre la estatura máxima y la mínima?
  - ¿Qué puedes afirmar sobre la cantidad de datos que se encuentran a dos desviaciones estándar o menos del promedio?
  - ¿Qué distribución crees que responde a los datos graficados? Conjetura una respuesta, aunque los datos sean pocos, y justifica.

### ¿CÓMO DESCRIBIMOS LA NORMALIDAD?

- Visita la página web DataChile (<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.datachile.io/>) y extrae datos de algún tema que te interese: economía, educación, vivienda, demografía, salud, educación cívica.
  - Haz un histograma para observar la distribución de los datos.
  - Marca el polígono de frecuencias en el mismo gráfico. Describe la forma de la curva.
- Determina el promedio, la mediana y la desviación estándar para esos datos, utilizando una planilla electrónica.
  - Interpreta cada estadístico en relación con el contexto estudiado.
  - Compara los valores de la media y la mediana y señala una interpretación posible.
  - Marca en el histograma, con distintos colores, el promedio, la mediana y los intervalos  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$  y  $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$
  - Argumenta si se puede asegurar o no que la distribución de estos datos corresponde a una distribución normal o es asimétrica.
- Determina la cantidad de datos que se encuentran en el intervalo  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$  y el porcentaje de dichos datos respecto del total.
  - ¿Cómo se relaciona con el porcentaje de datos que se encuentran a una desviación estándar de la media que se describe en una distribución de datos normal?
  - Determina la cantidad de datos que se encuentran en el intervalo  $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$  y el porcentaje de dichos datos respecto del total.
  - ¿Cómo se relaciona con el porcentaje de datos que se encuentran a una desviación estándar de la media que se describe en una distribución de datos normal?

4. Sobre los aportes de la desviación estándar:
  - a. Señala al menos una interpretación que se puede dar de  $\sigma$  sobre un conjunto de datos.
  - b. Indica cómo se usa para determinar si un dato específico está dentro de los márgenes de normalidad respecto de los demás datos de un mismo estudio (o experimento).
  - c. ¿Qué se considera normal en el contexto seleccionado?

### UTILIZACIÓN DE LA TABLA PROBABILÍSTICA PARA Z

1. Observa la Figura 2. ¿Qué tipo de distribución tienen los datos de esta población?
  - a. ¿Cuál es la media? ¿Cuál es la desviación estándar?
  - b. ¿Puedes inferir el valor de la mediana y la moda? ¿Cuáles deberían ser?
  - c. ¿Cuál es el área total bajo la curva? ¿Cómo se relaciona con las probabilidades de los datos?
  - d. Porcentualmente, ¿cuántos datos se encuentran a 1, 2 o 3 desviaciones estándar de la media?
  - e. Relaciona la respuesta anterior con la probabilidad de que un dato de esta población tomado al azar se encuentre entre  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ , entre  $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$  y entre  $(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$ .

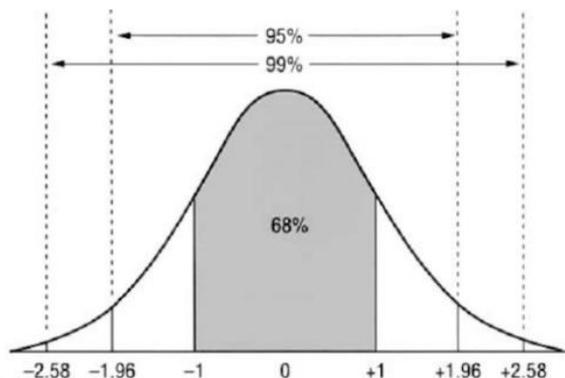


Fig. 2: Distribución normal estándar.

2. En internet<sup>4</sup> puedes encontrar una lista de las probabilidades asociadas con los intervalos desde la media ( $z = 0,00$ ) hasta un valor específico de  $z$ . Se puede hallar las probabilidades de otros intervalos usando las entradas de la tabla y las operaciones de adición y sustracción, de acuerdo a las propiedades de las probabilidades.

Por ejemplo:

$$P(0 < z < 1,52) = 0,4357$$

Esto quiere decir que la probabilidad de tomar al azar un dato de la población distribuida normalmente que se encuentre entre 0 y 1,52, es 0,4357.

<sup>4</sup> Por ejemplo: <https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.slideshare.net/josejoaquinmunoz/tablas-de-distribucion-normal-con-la-probabilidad-definitiva-con-todos-los-valores-de-z>

La Figura 3 muestra cómo usar la tabla de probabilidades:

| Z   | 0      | 0.01   | 0.02   |
|-----|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 |

Fig. 3: Parte de la tabla de probabilidades de la distribución normal estándar.

- Determina  $P(0 < z < 0,91)$ . ¿Qué interpretación tiene el resultado?
  - Determina  $P(-1 < z < 0,91)$ . ¿Cómo se debe usar la tabla en este caso? ¿Qué propiedades de las probabilidades te permiten llegar a la respuesta?
  - Determina  $P(-2 < z < -1,1)$ . ¿Qué interpretación tiene el resultado?
  - Determina  $P(z < -1,1)$ . ¿Qué interpretación tiene el resultado?
  - Determina  $P(-2 < z)$ . ¿Qué interpretación tiene el resultado?
- Volviendo al caso de las estaturas de los recién nacidos.
    - Recuerda cuál es el valor de  $\bar{x}$  y  $\sigma$ .
    - Recuerda también que se podía obtener ciertas probabilidades aproximadas de valores  $x$ . Por ejemplo:

$$P(47,8 < x < 51,2) \text{ y } P(46 < x < 53)$$

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se espera que analicen los aportes de la media y la desviación estándar para caracterizar una población con distribución normal. Ya han estudiado antes estas medidas, de tendencia central y de dispersión respectivamente, en distribuciones de datos no necesariamente normales.
2. Se propone un análisis con una cantidad muy limitada de datos, 12 estaturas, para que luego analicen 650 estaturas. Con esto, se espera que perciban que, a mayor cantidad de datos, más evidente es la aproximación a la curva normal y que, por ser datos empíricos, hay pequeñas variantes respecto de la definición. Por ejemplo: en este caso la media se acerca mucho a la mediana, pero no son iguales. Además, la cantidad de datos alejados una desviación estándar de la media (cantidad de datos en el intervalo  $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ ) no es exactamente 68%, sino una cantidad próxima. Lo mismo ocurre con los 12 datos en el intervalo a dos desviaciones estándar de la media; en ese caso, el 100% de los datos pertenece a ese intervalo, a diferencia del 95% esperado.
3. Se sugiere que examinen qué representa una distribución normal estándar, junto con el valor de su media, moda, mediana, desviación estándar, y los intervalos a una o dos desviaciones estándar de la media. Se profundiza en el cálculo de probabilidades de un dato  $z$  cualquiera, que cumpla con una condición dada –por ejemplo:  $P(a < z < b)$ –, usando el puntaje  $z$  y la tabla de probabilidades.
4. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Utilizan la tabla de probabilidades para determinar la probabilidad de tomar, en forma aleatoria, un dato de una población distribuida normalmente.
  - Evalúan la pertinencia de usar modelos binomial o normal para interpretar situaciones de incerteza.
  - Evalúan los alcances y límites de un argumento estadístico o probabilístico antes de tomar una decisión.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios sugeridos para estudiantes y profesores:*

- ¿Qué es la desviación estándar?  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/data-concepts/what-is-the-standard-deviation/>
- Tabla de distribución normal Z  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://matepedia-estadistica.blogspot.com/2016/01/tabla-de-distribucion-normal.html>
- Distribución normal: ¿Es tan frecuente como parece?  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0034-98872012000400021](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-98872012000400021)
- Normal, simetría o asimetría  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://facilestadistica.wixsite.com/estadisticafacil/single-post/2014/08/24/Estad%C3%ADstica-Descriptiva-III-Medidas-de-Forma-y-Medidas-de-Concentraci%C3%B3n>
- Datos públicos de Chile  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.datachile.io/>

## Actividad 4: Comparación de la distribución binomial y la distribución normal

### PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden cómo se desarrolla la distribución binomial a partir de una representación esquemática como árbol de probabilidades, tabla de Galton y paseos al azar. Reconocen el significado de cada parte de la fórmula de Bernoulli y las diferencias entre la distribución binomial y la normal. Deben ser perseverantes y proactivos para encontrar explicaciones y fundamentar sus respuestas, ya sea formulando nuevos esquemas o evaluando las representaciones dadas.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

**OA c.** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

### Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1. Considera que la variable aleatoria es  $X = k$  (sellos). Las siguientes representaciones muestran que hay solamente 1 camino para los extremos  $X = 0$  y  $X = 4$ . Para  $X = 1$  y  $X = 3$  hay 4 caminos y para  $X = 2$  hay 6 caminos.

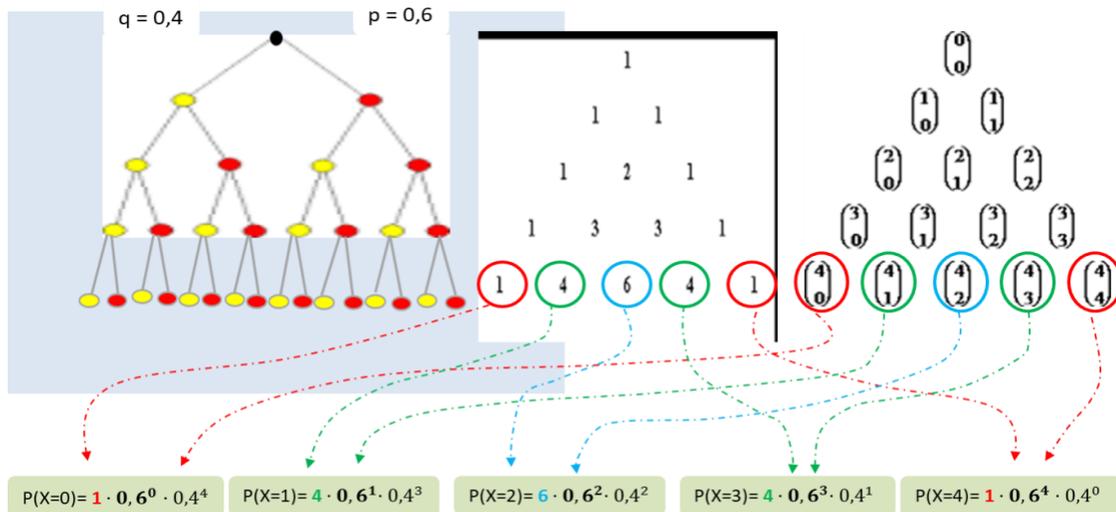


Fig. 1: Representaciones de una situación binomial con paseo al azar, triángulo de Pascal y coeficientes binomiales.

En general, las situaciones que se representa son con  $n$  repeticiones y se elige  $k$ , que puede ser caras - sellos, derecha -izquierda, éxitos-fracasos, sí-no u otras posibilidades binomiales.

- a. Determina el número de caminos en los tres casos.
  - b. Identifica similitudes y diferencias en la forma de escribir las representaciones.
  - c. Comenta las tres representaciones con un compañero y explica cada una de ellas.
  - d. Explica la forma de encontrar  $P(X = 3)$
2. Dicta a tu compañero la fórmula de Bernouilli: Para  $n$  repeticiones, con valor de la variable aleatoria  $X = k$  y  $q = 1 - p$ , se determina como  $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ .
    - a. Explica cada parte de la fórmula:  $\binom{n}{k}$  (elección);  $p^k$  (posición);  $(1 - p)^{n-k}$  (complemento).
    - b. ¿Qué pasa si consideras  $p = 0,5$ ? ¿En qué casos se recomienda utilizar este valor?
    - c. Con  $p = 0,5$ , determina  $P(X = k)$  para valores de  $n$  y  $k$  que elijas, y explica tu elección y experimento a tu compañero.

3. El siguiente esquema muestra cómo se puede aplicar la fórmula de Bernoulli en situaciones diarias o del ámbito laboral mediante las distribuciones normales.

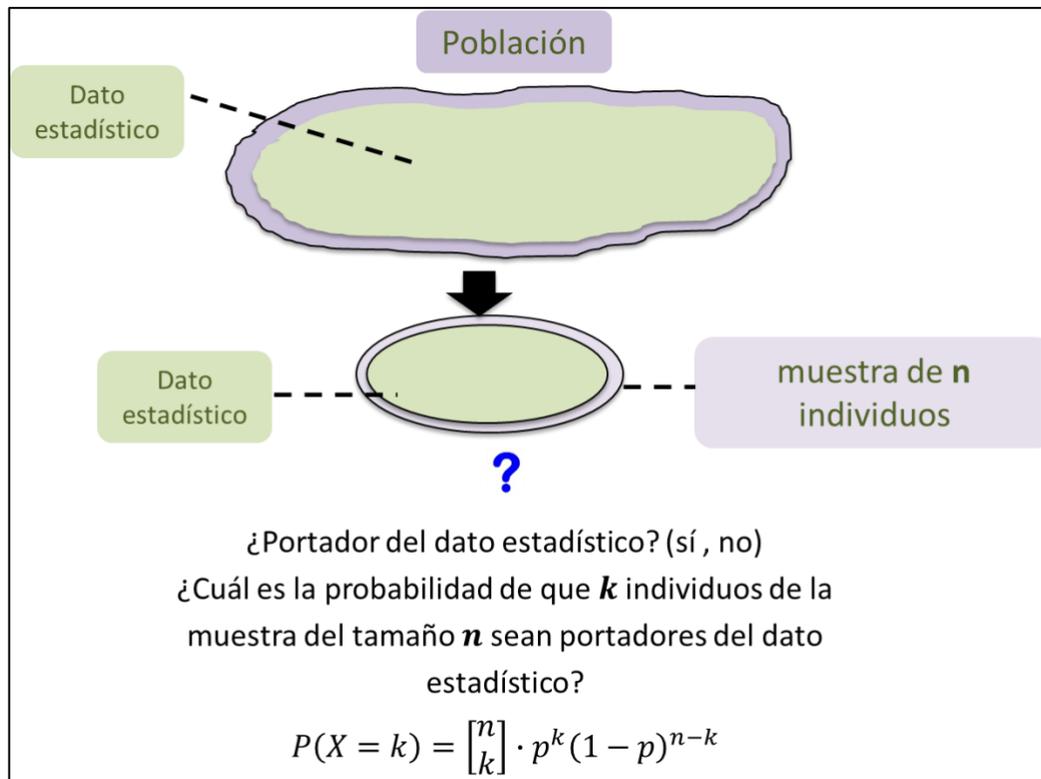


Fig. 2: Principio de situación de incerteza.

- Explica a tu compañero lo que entiendes de este esquema.
- Crea un ejemplo de pregunta que puedas responder utilizando este esquema, sin aplicar la fórmula.
- Si es posible, encuentra datos confiables en la web, sobre la situación que propusiste para aplicar una vez la fórmula de Bernoulli y responder a una pregunta.

4. Discute con tus compañeros sobre las siguientes alternativas para la pregunta: ¿Cuál de los cinco histogramas corresponde a una distribución binomial con  $n = 5$  y  $p = 0,5$ ?

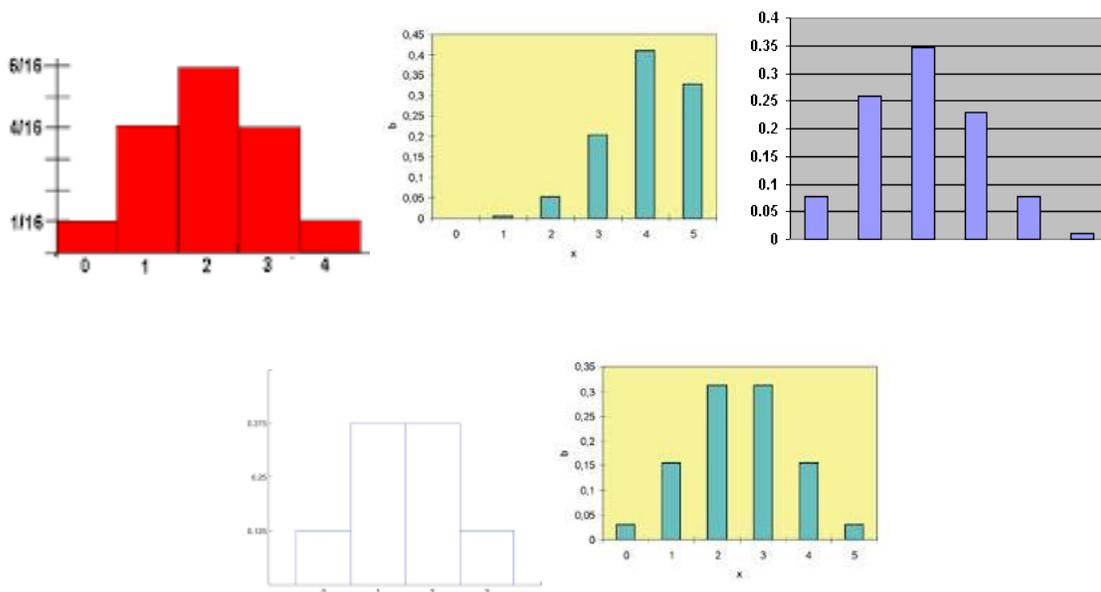


Fig. 3: Histogramas de distribuciones binomiales.

5. La siguiente es una situación binomial creada para efectos educativos: En el tranque de un piscicultor, el 40% de los peces no tiene la medida adecuada para venderlos. Con una red se puede sacar 6 peces. Se define una variable aleatoria  $X$  que representa el número de los peces que no tienen la medida adecuada. El histograma muestra la distribución de la variable aleatoria  $X$ .

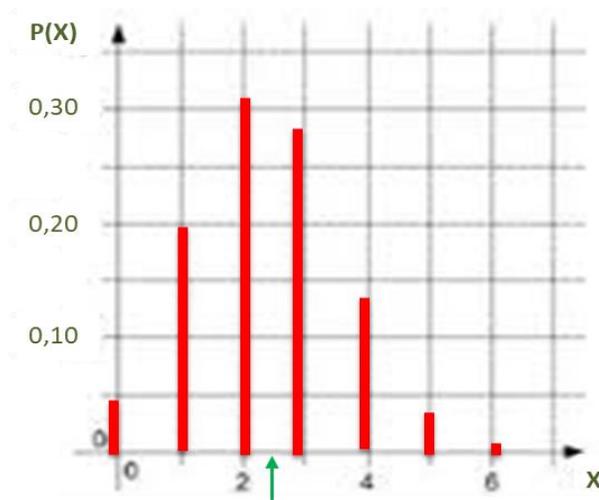


Fig. 4: Histograma del piscicultor

- a. Explica cada uno de los siguientes cálculos:
- $E(X) = n \cdot p = 6 \cdot 0,4 = 2,4 = \mu$
  - $V(X) = n \cdot p \cdot q = 6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 1,44$
  - $\sigma = \sqrt{1,44} = 1,2$

- b. Ubica en la flecha verde el valor que corresponde, ¿te imaginas que es una balanza? ¿Qué significa esa flecha/valor para los resultados?
  - c. Construye esquemas que te permitan responder las siguientes preguntas:
    - ¿Cuál es la probabilidad de encontrar valores tales que  $X = 4$ ?
    - ¿Cuál es la probabilidad de encontrar valores tales que  $X \leq 2$ ?
    - ¿Cómo te ayudó la fórmula de Bernouilli en este problema?
  - d. ¿Cómo interpretas estos resultados según el contexto del problema?
  - e. ¿Qué consejos le darías a un compañero para que pudiera comprender mejor tus soluciones?
6. Escribe un listado de las palabras clave que te permiten describir la distribución binomial.

### DISTRIBUCIÓN NORMAL

1. Clasifica las siguientes situaciones en variables continuas y discretas: número de días nublados, peso de recién nacidos, lluvia caída anualmente en una región, cantidad de portadores de daltonismo, números formados por un programa, la temperatura de agua en un lago.
  - a. ¿Cómo identificas las variables continuas?
  - b. Explica qué es una variable discreta a tu compañero, con un ejemplo diferente a los mostrados anteriormente.
  - c. Identifica si las situaciones binomiales vistas antes son discretas o continuas y explica por qué lo son.
2. Observa las siguientes distribuciones binomiales.

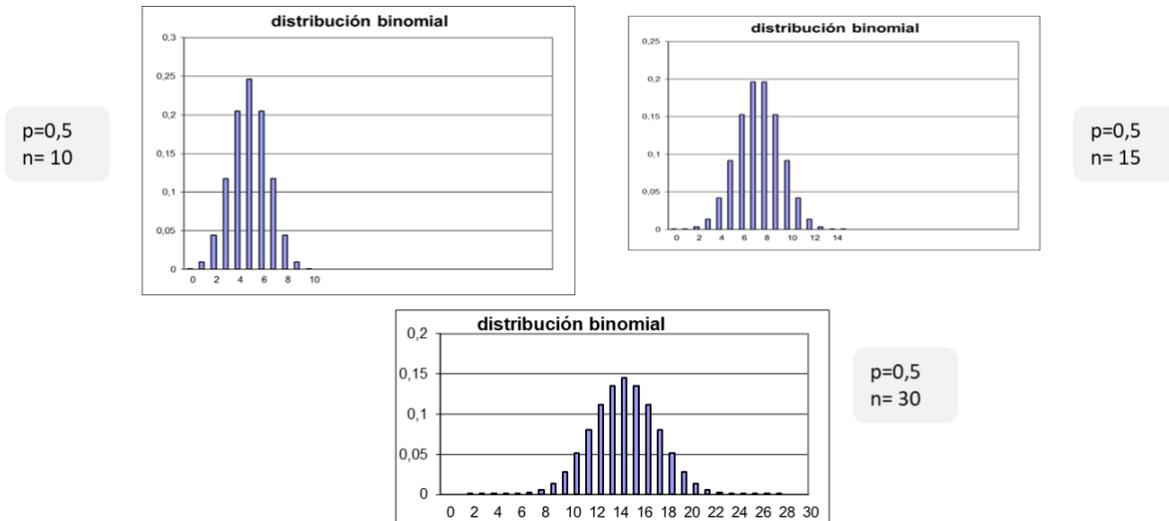


Fig. 5: Secuencia de histogramas binomiales simétricos que muestran el traslado de  $\mu$  y el cambio de las alturas.

- a. ¿Qué sucede con el histograma cuando el  $n$  crece? Anota tu explicación en tu cuaderno y compara con lo que propone tu compañero.
- b. ¿Puedes hacer una relación entre la variable aleatoria y la discreta? ¿De qué forma?
- c. ¿Qué relación crees que hay entre el valor esperado, la desviación estándar y el promedio? Argumenta.

3. La siguiente situación considera datos reales, pero se creó con fines educativos. La estatura de párvulos de una generación está distribuida normalmente con el valor esperado  $\mu = 90\text{cm}$  y la desviación estándar  $\sigma = 8\text{cm}$ . Responde las siguientes preguntas: ¿Cuál es el porcentaje de los párvulos que tienen una estatura de 87 cm como máximo? ¿Cuál es el porcentaje de los que tienen una estatura de 86 cm como mínimo y 96 cm como máximo?
  - a. ¿Puedes responder estas preguntas con lo que aprendiste? Explica a tu compañero cómo se pueden contestar.
  - b. ¿Qué conocimientos o fórmulas te sirven para responder?
  - c. Explica cómo proceder en estos casos.
  - d. ¿Por qué es tan importante hablar de máximos o mínimos?
4. Crea un listado con tus conocimientos sobre la distribución normal y compara con la distribución binomial.
5. En grupos, creen un afiche con gráficos y situaciones que muestren las diferencias entre la distribución normal y la binomial.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Imaginar que el valor esperado es justamente el valor que está en el centro de la balanza, permite estructurar los datos y hacer una relación esquemática con la desviación estándar como la que se muestra en la imagen:

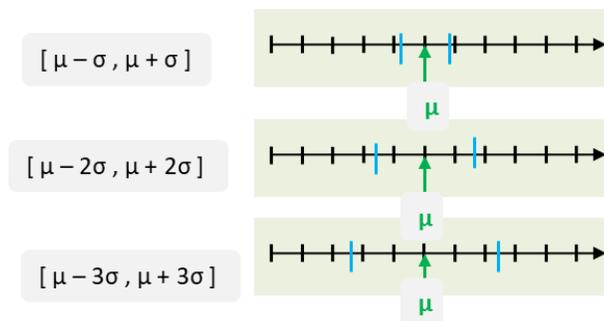


Fig. 6: Representación de los intervalos simétricos alrededor de  $\mu$  con  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$ .

2. Se sugiere explicar el esquema de la Figura 2 junto con los jóvenes y mencionar que una situación binomial en la cual se conocen los datos poblacionales, se puede reflejar en una muestra de  $n$  individuos. Además, se puede saber cuál es la probabilidad de que  $k$  individuos dentro de esa muestra sean portadores del dato preguntado.
3. Se puede interpretar las representaciones de  $n$  repeticiones de un experimento aleatorio del tipo Bernoulli, como un paseo al azar con  $n$  bifurcaciones.
4. Se sugiere el siguiente indicador para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Evalúan la pertinencia de usar modelos binomial o normal para interpretar situaciones de incerteza.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Modelo de balanza para el valor esperado  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://unamatematicaseltigre.blogspot.com/2012/10/que-es-un-valor-esperado-y-como-se.html>

## Actividad de evaluación

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.

**OA c.** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

### Indicadores de evaluación

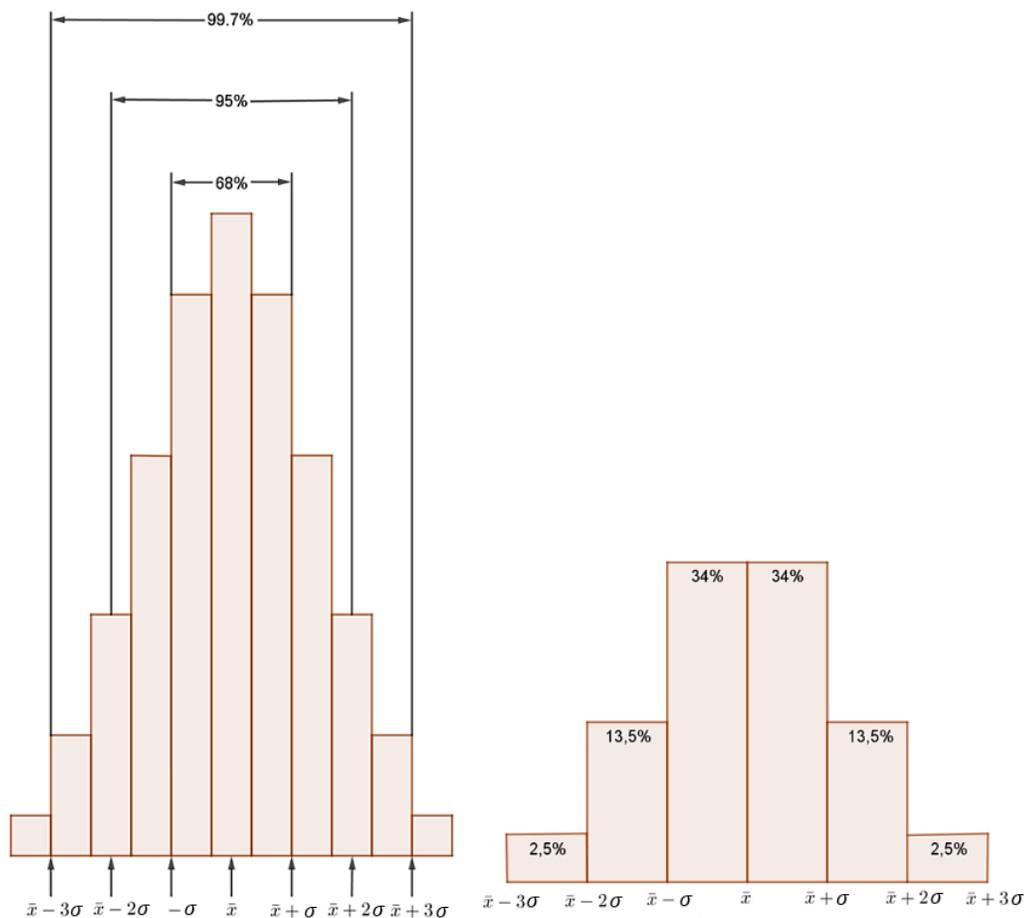
- Evalúan las diferentes posibilidades en un experimento aleatorio y determinan su probabilidad.
- Evalúan los alcances y límites de un argumento estadístico o probabilístico antes de tomar una decisión.
- Evalúan la pertinencia de usar modelos binomial o normal para interpretar situaciones de incerteza.

**Duración:** 3 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades o tareas para evaluaciones de la unidad 1, cada una por sí misma o en conjunto. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible.

1. Cierta máquina fabrica resistencias eléctricas que tienen una media de 40 ohm y una desviación estándar de 2 ohm. Suponiendo que la medida de la resistencia sigue una distribución normal y que se puede medir con cualquier grado de precisión, responde lo siguiente:
  - a. ¿Cuál es la probabilidad de que una resistencia tenga una medida que exceda 43 ohm?
  - b. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una medida inferior a 35 ohm?
  - c. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una medida de entre 38 y 42 ohm?
  - d. ¿Qué porcentaje de resistencias tendrá más de 45 ohm?
  - e. ¿Qué porcentaje de resistencias tendrá menos de 30 ohm?
  - f. ¿Qué porcentaje de resistencias tendrá entre 30 y 50 ohm?
  - g. ¿Qué porcentaje de resistencias tendrá menos de 30 o más de 50 ohm?

2. En la Figura 1 se muestra una distribución de datos aproximadamente normal, en la que se destaca los intervalos de 1, 2 y 3 desviaciones estándar.



- Los porcentajes señalados no necesariamente son exactos, pues los datos son empíricos, pero sí deben ser cercanos y será más evidente a medida que se incluya más datos de la muestra. Determina la veracidad de la siguiente frase: Si la distribución es aproximadamente normal, será casi simétrica y la media será muy cercana a la mediana.
- Usando los puntajes de una prueba de 100 puntos de 50 estudiantes (Tabla 2), se desea saber si están normalmente distribuidos.

Tabla 1: Puntajes de 50 estudiantes obtenidos en una prueba.

| $n$ | Puntaje |
|-----|---------|-----|---------|-----|---------|-----|---------|-----|---------|
| 1   | 60      | 11  | 70      | 21  | 72      | 31  | 44      | 41  | 90      |
| 2   | 58      | 12  | 72      | 22  | 88      | 32  | 80      | 42  | 63      |
| 3   | 70      | 13  | 95      | 23  | 78      | 33  | 68      | 43  | 82      |
| 4   | 72      | 14  | 74      | 24  | 94      | 34  | 39      | 44  | 76      |
| 5   | 47      | 15  | 70      | 25  | 67      | 35  | 55      | 45  | 77      |
| 6   | 64      | 16  | 86      | 26  | 74      | 36  | 91      | 46  | 68      |
| 7   | 64      | 17  | 88      | 27  | 89      | 37  | 98      | 47  | 83      |
| 8   | 77      | 18  | 72      | 28  | 92      | 38  | 90      | 48  | 78      |
| 9   | 82      | 19  | 58      | 29  | 66      | 39  | 85      | 49  | 86      |
| 10  | 95      | 20  | 50      | 30  | 77      | 40  | 75      | 50  | 97      |

- c. Construye un histograma de frecuencias, definiendo intervalos (clases) adecuados.
  - d. Encuentra  $\bar{x}$  y  $\sigma$  de los 50 datos.
  - e. Indica cuál es el intervalo que se encuentra a 1 desviación estándar de la media ( $\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma$ ). (Una desviación estándar bajo la media y una desviación estándar sobre la media).
  - f. Indica cuántos puntajes de la prueba se encuentran en este intervalo.
  - g. Repite c. y d. para el intervalo que se encuentra a 2 desviaciones estándar de la media ( $\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma$ ).
  - h. Los porcentajes encontrados, ¿están razonablemente cercanos a los establecidos en una distribución normal, de acuerdo al refinamiento de la regla empírica?
  - i. Combina la respuesta de f. y el gráfico histograma para concluir sobre la normalidad de la distribución de los puntajes de 50 estudiantes en una prueba.
3. Si un estudiante respondía una pregunta al azar en una prueba, tenía un 20% de probabilidades de acertar, debido a que cada pregunta incluía cinco alternativas.
    - a. Si se asume que todas las preguntas efectivamente contestadas por un alumno fueron correctas, omitiendo el resto, ¿cuántas respuestas correctas debería haber tenido para obtener 850, 700, 600, 500 o 450 puntos, respectivamente?

| Puntaje Corregido | Puntaje Estándar |
|-------------------|------------------|
| 75                | 850              |
| 62                | 701              |
| 36                | 601              |
| 12                | 503              |
| 6                 | 450              |

Tabla 2: Puntajes Prueba

- b. Considerando la tabla anterior, ¿es correcto afirmar que un estudiante debía responder correctamente 36 de las 75 preguntas para obtener 600 puntos?
- c. Considerando que el 50% del universo se ubicó por debajo de los 500 puntos, ¿es correcto afirmar que el número de respuestas correctas necesarias para obtener 500 puntos era 12?
4. Finalmente, en la siguiente tabla se aprecia comparativamente el número de respuestas al azar que debían estar correctas en la prueba del Proceso de Admisión 2015 para obtener el mismo puntaje que en la prueba 2014. Para el cálculo, se consideró un 20% de probabilidades de acertar.

| Proceso de Admisión | Correctas | Al azar | Al azar correctas | Puntaje sin respuestas al azar | Puntaje con respuestas al azar |
|---------------------|-----------|---------|-------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 2014                | 12        | -       | -                 | 503                            | 503                            |
| 2015                | 12        | 40      | 8                 | 405                            | 503                            |

Tabla 3: Número de respuestas al azar que debían estar correctas en la prueba de Matemática del Proceso de Admisión 2015 para obtener el mismo puntaje que en la prueba 2014

- a. ¿Por qué el puntaje de Matemática 2014 fue el mismo con respuestas al azar y sin respuestas al azar? Justifica tu respuesta.
- b. ¿Por qué responder 40 preguntas al azar el año 2015 implicaba obtener 8 preguntas correctas adicionalmente? Justifica tu respuesta.
- c. Considerando las conclusiones anteriores, ¿influyó el azar en el puntaje final? Justifica tu respuesta.
5. Las instituciones relacionadas con el Servicio Meteorológico en Chile, al igual que en otras partes del mundo, tienen registros históricos de variables como precipitaciones, temperaturas y radiación, entre otras. Ello permite, por ejemplo, confirmar efectos climáticos debido a la presencia de las corrientes de “El Niño” o “La Niña”, o identificar las consecuencias del cambio climático. Una de las variables que se puede modelar es la temperatura media diaria, en uno o varios años.

A continuación, se muestra el registro de temperaturas medias diarias del año 2016 en Santiago<sup>5</sup>.

| Día | Meses |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|     | Ene   | Feb  | Mar  | Abr  | May  | Jun  | Jul  | Ago  | Sep  | Oct  | Nov  | Dic  |
| 1   | 20,9  | 21,2 | 21,6 | 17,3 | 14,5 | 11   | 10,4 | 8,5  | 8,2  | 14,6 | 13,2 | 20,3 |
| 2   | 20,2  | 19,5 | 21,5 | 17,2 | 16,9 | 9,5  | 7,6  | 10,3 | 7,2  | 16,5 | 16,8 | 21,3 |
| 3   | 19,7  | 21,1 | 19,7 | 14,2 | 16,9 | 9    | 9,1  | 9,4  | 8,9  | 15,5 | 20,4 | 19,3 |
| 4   | 21,9  | 20,8 | 20,9 | 16,8 | 15,6 | 10,1 | 7,3  | 9,9  | 9,2  | 16,5 | 22,6 | 16,8 |
| 5   | 22,9  | 20,9 | 19,3 | 15,2 | 14   | 7,9  | 7,4  | 9,5  | 10,3 | 17,2 | 21,2 | 19,1 |
| 6   | 22,5  | 20,8 | 17,8 | 15,6 | 12,3 | 6,6  | 7,2  | 9,3  | 12,5 | 16,6 | 20,6 | 19,9 |
| 7   | 20,8  | 19,6 | 16,4 | 14,9 | 13,2 | 6,6  | 8,1  | 11,6 | 14,6 | 16,3 | 21,8 | 18,4 |
| 8   | 19,8  | 20,8 | 18,8 | 14,4 | 13,9 | 8,3  | 6,2  | 10   | 16   | 16,8 | 20,4 | 18,1 |
| 9   | 21,5  | 22,3 | 21,3 | 13   | 13,6 | 7,6  | 9,1  | 11,5 | 16,9 | 16,7 | 20,8 | 14,1 |
| 10  | 20,8  | 20,6 | 20,1 | 13,8 | 13,2 | 8,8  | 8    | 11,2 | 14,8 | 16,7 | 21,2 | 19,1 |
| 11  | 18,4  | 20,2 | 19,6 | 15,2 | 12,9 | 8,8  | 9,8  | 12,8 | 13,3 | 17,3 | 20,3 | 21,9 |
| 12  | 18,8  | 19,5 | 17,9 | 14,4 | 11,2 | 11,9 | 8,1  | 11,8 | 11,5 | 15,9 | 18   | 22,3 |
| 13  | 21    | 21,1 | 19,8 | 12,9 | 13,5 | 11,4 | 9,7  | 14,6 | 11,7 | 16,8 | 17   | 24,1 |
| 14  | 19,7  | 22,7 | 21,2 | 15,1 | 12,7 | 9,5  | 9,1  | 13,2 | 11,5 | 15,8 | 17,5 | 24,7 |
| 15  | 21,9  | 22,5 | 21   | 15,2 | 12,3 | 9,3  | 6,9  | 16,1 | 12,8 | 14,3 | 19   | 21,6 |
| 16  | 23,7  | 18   | 19,5 | 16,9 | 14,5 | 9,2  | 8,4  | 13   | 14,2 | 11,9 | 20,2 | 20,1 |
| 17  | 25    | 19,7 | 17,1 | 13,3 | 14,2 | 9,8  | 8,2  | 12,4 | 13,5 | 11,3 | 23   | 18,9 |
| 18  | 23,3  | 20,5 | 18,5 | 13,5 | 11   | 8,9  | 8    | 8,6  | 15,3 | 10,2 | 21,2 | 21,9 |
| 19  | 22,2  | 22,8 | 17,9 | 13,2 | 12   | 7,2  | 8,8  | 8    | 17,3 | 11,4 | 19   | 23   |
| 20  | 23,6  | 22,8 | 17,8 | 13,6 | 13,6 | 8    | 11,2 | 7,8  | 18,4 | 14,5 | 16   | 19,6 |
| 21  | 21    | 21,8 | 18   | 14,8 | 11,9 | 9    | 10,8 | 10,2 | 17,3 | 17   | 16,8 | 20,6 |
| 22  | 22,2  | 22,6 | 19,7 | 13,7 | 10,1 | 8,4  | 11,7 | 12,5 | 17,8 | 13   | 17,4 | 20,8 |
| 23  | 20,2  | 22,9 | 16,9 | 13,5 | 13,6 | 8,1  | 11,5 | 9,8  | 17,1 | 14,1 | 16,4 | 20,6 |
| 24  | 18,7  | 23,2 | 17,2 | 9,9  | 10,9 | 7,6  | 10,4 | 11,1 | 15,4 | 14   | 20,4 | 19   |
| 25  | 18,6  | 21,8 | 19,4 | 8,3  | 10,7 | 7    | 10,3 | 11,5 | 14,2 | 16,2 | 16,5 | 17,1 |
| 26  | 19,2  | 19,6 | 16,6 | 10,1 | 9,6  | 7,3  | 8,7  | 11,2 | 15,3 | 19,8 | 17,6 | 16,9 |
| 27  | 20,6  | 21   | 17,3 | 13,3 | 12,4 | 9,3  | 12,9 | 10,8 | 15,7 | 20,4 | 17,6 | 21,3 |
| 28  | 22,4  | 21,5 | 16,4 | 14   | 10   | 11,1 | 11,3 | 11,9 | 13,5 | 15   | 21,6 | 22,5 |
| 29  | 20,1  | 21,2 | 14,8 | 15,3 | 12   | 7,6  | 10,9 | 11,4 | 13,5 | 18,8 | 23,1 | 19,1 |
| 30  | 22,8  |      | 15,9 | 14,9 | 12,1 | 8,8  | 9,4  | 12,9 | 14,4 | 17,2 | 19,8 | 19,7 |
| 31  | 22,4  |      | 18,3 |      | 11,4 |      | 11,2 | 11,2 |      | 14,3 |      | 19,4 |

Tabla 4: Registro de temperaturas medias diarias del año 2016 en Santiago.

- Con la información de la tabla, construye un histograma con una planilla de cálculo. Usa la herramienta “Análisis de datos” incluida y la opción “Histograma”. Considera como marcas de clase o puntos medios de los intervalos: 5, 10, 18, 23, 25.
- Conjetura sobre la tendencia de estos datos.

<sup>5</sup>Datos registrados por la estación meteorológica de Quinta Normal. Fuente: Dirección Meteorológica de Chile. <https://www.curriculnacional.cl/link/http://www.meteochile.cl>

- c. Agrega una línea de tendencia a partir de las frecuencias relativas obtenidas. Explica qué forma sigue esta tendencia, ¿coincide ella con tu conjetura?
- d. Observa el siguiente gráfico, que muestra la distribución de temperaturas medias desde el año 2006 hasta 2016.

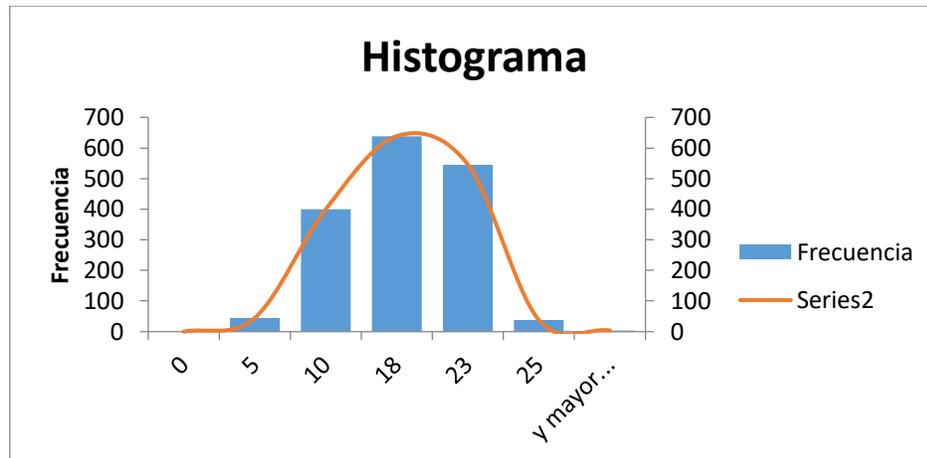


Fig. 2: Elaboración propia a partir de los datos registrados por la estación meteorológica de Quinta Normal. Fuente: Dirección Meteorológica de Chile. <https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.meteochile.cl>

- e. Comparando el gráfico que hiciste con las temperaturas de 2016 y el gráfico anterior con temperaturas medias de 10 años, ¿qué puedes decir al respecto? ¿Cómo es la nueva distribución?
- f. ¿Qué sucederá con las temperaturas medias, considerando 20 o 30 años de registro? Concluye respecto de la distribución de las temperaturas medias diarias.

## PAUTA DE EVALUACIÓN

| Criterios de evaluación  | Niveles de logros     |  |  |
|--|-----------------------|--|--|
|  | Completamente logrado | Se observa aspectos específicos que pueden mejorar | No logrado por ausencia o no se puede entender en absoluto |
| Determinan la probabilidad de intervalos dentro de una distribución normal, utilizando la tabla probabilística para Z. |                       |  |  |
| Determinan porcentajes de situaciones, basándose en el cálculo de las probabilidades.                                  |                       |  |  |
| Evalúan la veracidad de proposiciones, usando el concepto de distribución normal.                                      |                       |  |  |
| Determinan si los datos corresponden a una distribución normal.  |                       |  |  |
| Determinan el promedio y la desviación estándar.   |                       |  |  |
| Representan datos e información sobre el contexto, utilizando histogramas.   |                       |  |  |
| Conjeturan sobre la tendencia de los datos, empleando un histograma.   |                       |  |  |
| Describen la tendencia de los datos, usando la distribución normal o aproximaciones de ella.                           |                       |  |  |

# Unidad 2

## Unidad 2: La toma de decisiones en situaciones financieras y económicas

### Propósitos

Los estudiantes podrán utilizar sus conocimientos del eje de números para tomar decisiones fundamentadas en el ámbito de situaciones financieras y económicas. Las situaciones a las que se verán enfrentados abarcan desde créditos hipotecarios, refinanciamiento de créditos hasta pensiones y las administradoras de pensiones. La unidad ofrece estas situaciones para poner en discusión y comentar la toma de decisiones en diferentes niveles, pero también para abrir posibilidades de debatir otros temas que les interesen. Se los puede orientar a partir de las siguientes preguntas: ¿Cómo tomar las mejores decisiones frente a un crédito? ¿Por qué un crédito puede ser riesgoso? ¿Cómo entendemos los índices financieros?

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 1.** Fundamentar decisiones en el ámbito financiero y económico personal o comunitario, a partir de modelos que consideren tasas de interés e índices económicos.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

## Actividad 1: Tomar decisiones en contexto de AFP y jubilación

### PROPÓSITO

Los estudiantes aplican los conocimientos matemáticos aprendidos hasta 2° medio en contextos del ámbito financiero. Toman decisiones fundamentadas luego de interpretar los datos numéricos en función del contexto; en este caso, las pensiones y las Administradoras de Fondos de Pensiones (AFP). Para esto, el trabajo debe incluir, por un lado, lo que creen los jóvenes y situaciones personales referentes al crédito y, por otro lado, una actitud responsable al tomar decisiones con conciencia de las implicaciones que pueden tener para uno mismo o un grupo familiar.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 1.** Fundamentar decisiones en el ámbito financiero y económico personal o comunitario, a partir de modelos que consideren tasas de interés e índices económicos.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

### Actitudes

- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

**Duración:** 9 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### LAS PENSIONES Y LA JUBILACIÓN

El sistema de pensiones administra y gestiona los fondos que se transformarán en las jubilaciones. Una persona tiene derecho a pensión de vejez si cumple los siguientes requisitos:

- Estar afiliado a alguna AFP
  - Tener a lo menos 65 años, en el caso de los hombres, y 60 años en el caso de las mujeres.
1. Las cotizaciones previsionales que recauda la AFP tienen por objeto financiar las pensiones de vejez, invalidez y sobrevivencia del afiliado. Representan un porcentaje de la remuneración o renta imponible que percibe el trabajador mensualmente, con un límite máximo de remuneración de 78,3 UF (año 2018) y con el reajuste que se indica más adelante.

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Educación Ciudadana**  
OA b, 3° y 4° medio

- ¿Cuál es el monto máximo (renta bruta) imponible para cotizar en una AFP?
  - Si el 10% del sueldo bruto se destina a financiar la futura pensión, ¿cuál es la cotización mensual que realiza una persona cuyo sueldo es \$288 000? ¿Cuál es la diferencia de salario con la persona que cotiza 78,3 UF mensualmente?
  - Si el 1,53% del aporte mensual cubre la prima del Seguro de Invalidez y Sobrevivencia (SIS), el descuento realizado, ¿es el mismo para cualquier persona?
  - Los trabajadores que desempeñen labores que aceleran el desgaste físico, intelectual o psíquico deben efectuar una cotización adicional de un 2% y, a su vez, los empleadores deben entregar un aporte de igual porcentaje. ¿En qué porcentaje aumenta la cotización mensual para estas personas?
  - Si la comisión mensual que cobran las instituciones financieras de pensiones varía del 0,77% al 1,44% ¿entre qué valores varía la comisión?
  - Si Rayén trabaja como dependiente y está afiliado a la AFP “La mejor Pensión” que le descuenta un 12,5% de su sueldo bruto mensual, ¿qué decisiones puede tomar para tener un descuento menor de cotizaciones? ¿Puede decidir dejar de pertenecer a una AFP siendo dependiente? ¿Puede decidir cotizar por un porcentaje menor; por ejemplo, un 7%?
- Si una persona que trabaja de forma dependiente percibe una remuneración imponible de \$470 000:
    - ¿Es correcto decir que la comisión y el seguro de invalidez corresponde a \$10 810?
    - ¿Es correcto decir que el descuento realizado mensualmente corresponde a \$57 810?
    - Si la persona realiza labores que aceleran su desgaste físico o intelectual, ¿en cuánto aumenta su cotización?
    - ¿Puede decidir si cancela o no el SIS mensualmente? Explica.
  - ¿Qué es el fondo de pensiones? Es un patrimonio constituido por todas las cotizaciones obligatorias y voluntarias que efectúan los trabajadores, más los depósitos de ahorro voluntario, el aporte adicional, las inversiones y sus rentabilidades, deducidas las comisiones de la AFP.

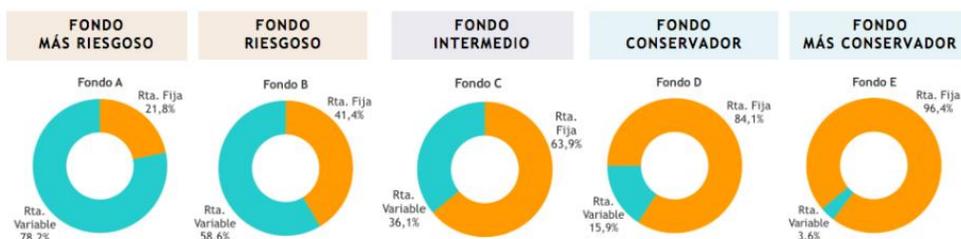


Fig. 1: Fondos de pensiones de una AFP

Los fondos más riesgosos presentan mayor rentabilidad y los conservadores, menor rentabilidad, por ejemplo:

- Fondo A Más Riesgoso: 4,79%
- Fondo B Riesgoso: 4,62%
- Fondo C Intermedio: 4,60%

- Fondo D Conservador: 4,08%
- Fondo E Más Conservador: 3,57%

Averigua en una administradora de fondo de pensiones los tipos de fondos que tienen y responde:

- a. ¿Qué significa que los fondos riesgosos invierten mayor porcentaje en renta variable?
  - b. ¿Influye la edad de la persona para cotizar en un fondo u otro?
  - c. Una persona dependiente cuya renta imponible es de \$870 000 recibiría una pensión líquida aproximadamente de \$360 000, después de cotizar 40 años aproximadamente. Si la persona realiza, además, por el mismo tiempo, un APV (Ahorro Previsional Voluntario) mensual de \$20 000, la pensión líquida aumentaría aproximadamente a \$512 000. Por ende, ¿en qué porcentaje se ve incrementada la pensión líquida?
4. ¿En qué fondo conviene invertir el APV para tener mayor rentabilidad a corto y largo plazo? Si la diferencia porcentual de rentabilidad entre el Fondo A y el Fondo E corresponde solamente al 1,22%, ¿qué otros factores deben considerarse para tomar una buena decisión al invertir en un fondo u otro?

Lean en grupos la siguiente tabla de indicadores previsionales o consigan una de una página confiable o visiten una AFP para obtener esta información.

## Indicadores Previsionales

Para Cotizaciones a Pagar en Junio 2019 (Remuneraciones Mayo 2019)



| VALOR UF            |              |
|---------------------|--------------|
| al 31 de Mayo 2019  | \$ 27.762,55 |
| al 30 de Abril 2019 | \$ 27.662,17 |

| VALOR     | UTM       | UTA        |
|-----------|-----------|------------|
| Mayo 2019 | \$ 48.595 | \$ 583.140 |

| RENTAS TOPES IMPONIBLES                 |              |
|---|--------------|
| Para afiliados a una AFP (79,2 UF):     | \$ 2.198.794 |
| Para afiliados al IPS (ex INP) (60 UF): | \$ 1.659.730 |
| Para Seguro de Cesantía (118,9 UF):     | \$ 3.300.967 |

| RENTAS MÍNIMAS IMPONIBLES            |            |
|--------------------------------------|------------|
| Trab. Dependientes e Independientes: | \$ 301.000 |
| Menores de 18 y Mayores de 65:       | \$ 224.704 |
| Trabajadores de Casa Particular:     | \$ 301.000 |
| Para fines no remuneracionales:      | \$ 194.164 |

| AHORRO PREVISIONAL VOLUNTARIO (APV) |               |
|-------------------------------------|---------------|
| Tope Mensual (50 UF):               | \$ 1.388.128  |
| Tope Anual (600 UF):                | \$ 16.657.530 |

| DEPÓSITO CONVENIDO   |               |
|----------------------|---------------|
| Tope Anual (900 UF): | \$ 24.986.295 |

| TIPO CONTRATO (*)                            | SEGURO DE CESANTÍA (AFC) |            |
|--|--------------------------|------------|
|  | FINANCIAMIENTO           |            |
|  | EMPLEADOR                | TRABAJADOR |
| Contrato Plazo Indefinido                    | 2,4% R.I.                | 0,6% R.I.  |
| Contrato Plazo Fijo                          | 3,0% R.I.                | -          |
| Contrato Plazo Indefinido 11 años o más (**) | 0,8% R.I.                | -          |

(\*) No aplica para Trabajador de Casa Particular.

(\*\*) Para mayor información. [Click Aquí](#)

| AFP       | TASA COTIZACIÓN OBLIGATORIO AFP |             |                |
|-----------|---------------------------------|-------------|----------------|
|           | TASA AFP TRABAJADORES           |             |                |
|           | DEPENDIENTES                    |             | INDEPENDIENTES |
|           | TASA AFP                        | SIS (1) (2) | TASA AFP (3)   |
| Capital   | 11,44%                          | 1,53%       | 12,97%         |
| Cuprum    | 11,44%                          | 1,53%       | 12,97%         |
| Habitat   | 11,27%                          | 1,53%       | 12,80%         |
| PlanVital | 11,16%                          | 1,53%       | 12,69%         |
| ProVida   | 11,45%                          | 1,53%       | 12,98%         |
| Modelo    | 10,77%                          | 1,53%       | 12,30%         |

1) Esta cotización es de cargo del Empleador.

2) SIS no aplica para trabajador dependiente pensionado.

3) Esta tasa incluye el SIS, que es de cargo del trabajador.

| TRAMO | ASIGNACIÓN FAMILIAR |                                   |
|-------|---------------------|-----------------------------------|
|       | MONTO               | REQUISITO DE RENTA                |
| 1 (A) | \$ 12.364           | Renta < ó = \$ 315.841            |
| 2 (B) | \$ 7.587            | Renta > \$ 315.841 < = \$ 461.320 |
| 3 (C) | \$ 2.398            | Renta > \$ 461.320 < = \$ 719.502 |
| 4 (D) | -                   | Renta > \$ 719.502                |

| COTIZACIÓN PARA TRABAJOS PESADOS (*) |                   |                |            |
|--------------------------------------|-------------------|----------------|------------|
| CALIFICACIÓN                         | PUESTO DE TRABAJO | FINANCIAMIENTO |            |
|                                      |                   | EMPLEADOR      | TRABAJADOR |
| Trabajo pesado                       | 4%                | 2% R.I.        | 2% R.I.    |
| Trabajo menos pesado                 | 2%                | 1% R.I.        | 1% R.I.    |

(\*) Ver listado en Superintendencia de Pensiones. [Haz Click aquí](#)Fig. 2: Información extraída de <https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.previred.cl/>

- ¿Cuál es la renta mínima imponible que debe cotizar un trabajador dependiente de una empresa? ¿Y la de una persona que realiza labores en una casa particular?
- ¿Cuáles son los montos mínimo y máximo que puede ahorrar una persona en APV, mensual y anualmente?
- ¿Cuánto se descuenta a una persona que tiene un contrato de enero a diciembre del presente año para el Seguro de Cesantía (AFC)? ¿Cuánto a una persona que tiene un contrato indefinido?
- ¿Cuánto percibe por asignación familiar una persona que tiene dos hijos y cuya renta mensual es de \$450 000? ¿Y una que tiene una renta mensual de \$680 000? ¿Y una que gana el sueldo mínimo?

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Sugiera a los jóvenes que justifiquen sus respuestas y analicen las condiciones del sistema de pensiones. Por ejemplo: pueden señalar que todos los años se revisa el tope imponible mensual con relación a la variación positiva que experimente el Índice de Remuneraciones Reales determinado por el INE (Instituto Nacional de Estadísticas). El tope imponible para el año 2018, en el caso de la AFP, aumentó de UF 75,7 a UF 78,3. Este aporte se calcula como el 10% de la renta imponible del trabajador, con un tope de UF 78,3 (valor que puede variar en el transcurso del tiempo); es decir, aunque la renta sea superior a este monto, el ahorro obligatorio del trabajador será como máximo de UF 7,83 mensuales.
2. Los estudiantes pueden concluir que el Seguro de Invalidez y Supervivencia es un porcentaje de la renta imponible de un trabajador, cuyo objetivo es pagarle pensión en caso de invalidez o a su familia en caso de fallecimiento (supervivencia). El porcentaje mensual del seguro es 1,53% de la renta imponible. Si el trabajador es dependiente de un empleador, este debe financiar el SIS del trabajador, con la excepción de los afiliados dependientes que se encuentren percibiendo el subsidio previsional a los trabajadores jóvenes.
3. La actividad puede variar, calculando diferentes porcentajes correspondientes al 10%, 0,77%, 1,53%, 1,44%, etc. de un valor dado. También se les puede pedir que completen una tabla como la siguiente con los descuentos que hacen las AFP a personas con contrato dependiente y a personas que cotizan de forma independiente y con distintos ingresos.

| Ingreso\AFP | Tipo contrato | Capital | Cuprum | Habitat | Planvital | Provida | Modelo |
|-------------|---------------|---------|--------|---------|-----------|---------|--------|
| \$288 000   | Dependiente   |         |        |         |           |         |        |
| \$350 000   | Dependiente   |         |        |         |           |         |        |
| \$480 000   | Independiente |         |        |         |           |         |        |
| \$500 000   | Dependiente   |         |        |         |           |         |        |
| \$650 000   | Dependiente   |         |        |         |           |         |        |
| \$800 000   | Independiente |         |        |         |           |         |        |

4. Se sugiere indicar que los multifondos se refieren al porcentaje del ahorro del trabajador que está invertido en instrumentos de renta variable. Que sean de renta variable significa que están más expuestos a los vaivenes del mercado, por lo que pueden experimentar pérdidas mayores, como también ganancias más altas. El fondo A es el más riesgoso, porque es el que más invierte en este tipo de instrumentos. En cambio, el E es el que menos proporción invierte en mecanismos de renta variable.
5. Proporcione ejemplos concretos para que los estudiantes argumenten sobre la influencia de la edad, ya que se recomienda, a quienes recién comienzan a trabajar, que apuesten por los fondos más riesgosos, pues pueden optar a mayores ganancias y, de existir pérdidas, cuentan con muchos años para recuperarse. Por el contrario, a una persona que está cercana a pensionarse le conviene optar por los fondos menos riesgosos, que tiene ganancias más pequeñas, pero seguras y con bajo riesgo de sufrir pérdidas.

6. Como alternativa de actividad, se puede pedir al curso que se informen sobre una serie de condiciones de diferentes AFP y lo compartan. Los puede orientar con preguntas como: ¿Cómo afiliarse a una AFP que resulte conveniente? ¿Qué condiciones hay que considerar para evitar grandes pérdidas o asegurar ganancias al pertenecer a cierto fondo de pensión? ¿Existirá una AFP más rentable que otras?, ¿cuál? Que una AFP sea la más rentable en el Fondo A, ¿significa que también lo es en los otros fondos? ¿Cuándo se obtiene mayores beneficios al pertenecer a un fondo con mayor rentabilidad y mayor riesgo? ¿Cuáles sería las opciones más convenientes para las cotizaciones obligatorias y para el APV en estos momentos?
7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Interpretan información del ámbito financiero y económico personal o comunitario, que involucra porcentajes, tasas de interés o índices económicos.
  - Evalúan diferentes posibilidades de cotizaciones, utilizando porcentajes, tasas de interés o índices económicos para tomar una decisión fundamentada.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Información sobre el impuesto de segunda categoría  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sii.cl/valores\\_y\\_fechas/impuesto\\_2da\\_categoria/impuesto2018.htm](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sii.cl/valores_y_fechas/impuesto_2da_categoria/impuesto2018.htm)
- Página con indicadores previsionales  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.previred.com/web/previred/indicadores-previsionales>

## Actividad 2: Tomar decisiones en contexto de crédito hipotecario

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan y apliquen los diferentes conocimientos matemáticos involucrados en un crédito hipotecario. El foco está en analizar las condiciones propias de un crédito hipotecario y tomar decisiones fundamentadas en el ámbito de situaciones financieras y económicas. Para esto, las actitudes deben reflejar la flexibilidad de pensamiento para cambiar puntos de vista y creencias relacionados con el ámbito financiero, y responsabilidad con el manejo de los datos y su significado para las familias y las personas.

### Objetivos de Aprendizaje

- OA 1.** Fundamentar decisiones en el ámbito financiero y económico personal o comunitario, a partir de modelos que consideren tasas de interés e índices económicos.
- OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
- OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

### Actitudes

- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Responsabilidad por las propias acciones y decisiones con consciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

**Duración:** 9 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### CRÉDITO HIPOTECARIO

Todo crédito hipotecario es el producto financiero otorgado por bancos o instituciones financieras que permite comprar, mediante un préstamo a corto o largo plazo (de 10 a 30 años), un inmueble que se desea adquirir (principalmente viviendas). El inmueble queda en garantía hipotecaria a favor de la entidad financiera que otorga el préstamo hasta que se pague o cancele.

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Educación Ciudadana**  
OA b, 3° y 4° medio

1. Javier tiene una renta líquida de \$825 000 pesos aproximadamente y desea postular a un crédito hipotecario para optar a un departamento cuyo valor es UF 1 200. Ha ahorrado \$2 650 000 para pagar el 10% que se exige al postular a un crédito hipotecario.

- a. Si las instituciones financieras otorgan créditos de hasta un 90% del valor de la propiedad, lo ahorrado por Javier, ¿es suficiente para cubrir el 10% restante del valor de la propiedad? Justifica.
- b. Considerando la información de la tabla siguiente, ¿debería solicitar el crédito hipotecario a 20 años o tiene que tomar otra decisión? Justifica tu respuesta.

| Años | Tasa (%) | Dividendo (UF) | Seguros     |                  | CAE (%) | Costo final (\$) | Total mensual |                |
|------|----------|----------------|-------------|------------------|---------|------------------|---------------|----------------|
|      |          |                | Desgravamen | Incendio y Sismo |         |                  | (UF)          | (\$)           |
| 8    | 4,41     | 13,322         | 0,30        | 0,20             | 4,50    | 36.478.782       | 13,829        | <b>379.987</b> |
| 10   | 4,4      | 11,100         | 0,30        | 0,20             | 4,49    | 38.271.195       | 11,607        | <b>318.927</b> |
| 12   | 4,4      | 9,632          | 0,30        | 0,20             | 4,49    | 40.114.008       | 10,138        | <b>278.570</b> |
| 15   | 4,45     | 8,204          | 0,30        | 0,20             | 4,54    | 43.081.500       | 8,710         | <b>239.342</b> |
| 20   | 4,45     | 6,778          | 0,30        | 0,20             | 4,54    | 48.040.793       | 7,285         | <b>200.170</b> |
| 25   | 4,45     | 5,950          | 0,30        | 0,20             | 4,54    | 53.225.095       | 6,457         | <b>177.417</b> |
| 30   | 4,45     | 5,420          | 0,30        | 0,20             | 4,54    | 58.624.834       | 5,926         | <b>162.847</b> |

Tabla 1: Información sobre opciones de un crédito en una entidad financiera.

- c. ¿Es correcto afirmar que la mejor decisión de Javier sería solicitar un crédito hipotecario por 25 años? Argumenta.
- d. Asumiendo que logra reunir el dinero para pagar el 10% del valor de la propiedad, ¿es correcto afirmar que el dividendo a pagar siempre será \$206 250, independientemente de la cantidad de años del crédito? Justifica tu respuesta.
2. Javier decidió analizar las condiciones de su crédito en otra institución financiera con un dividendo de 7,69 UF.

| TU DIVIDENDO                      |  | CAE            |
|-----------------------------------|--|----------------|
| <b>\$210.851</b>                  |  | <b>5,89%</b>   |
| - Monto Crédito Hipotecario       |  | 960 UF         |
| - Monto Crédito Complementario    |  | 120 UF         |
| - Cuota Crédito Hipotecario       |  | 6,59 UF        |
| - Cuota Crédito Complementario    |  | 0,82 UF        |
| - Cuota Seguros Asociados         |  | 0,27 UF        |
| <b>- Dividendo Total Mensual</b>  |  | <b>7,69 UF</b> |
| - Tasa Crédito Hipotecario        |  | 5,62%          |
| - Tasa Crédito Complementario     |  | 5,62%          |
| - Estimación Gastos Operacionales |  | 22,44 UF       |

Fig. 1: Simulador de crédito en una institución financiera.

Ingresó los datos al simulador y obtuvo la siguiente información:

• MODIFICA TU RESULTADO

Moneda  UF  Pesos

Valor Propiedad ?  % a Financiar ?  Monto del Crédito ?  Plazo (años) ?

Tipo de Vivienda : Departamento Antigüedad : Nueva DFL2 : Si

Fig. 2: Simulación de crédito en una institución financiera.

- ¿Qué información relevante entrega este simulador respecto de la tabla de la actividad anterior?
- Averigua que es el CAE.
- Si el CAE correspondiera al 5,89%, entonces, ¿la tasa de interés mensual del crédito es 0,49%? Justifica.
- ¿Es correcto afirmar que el dividendo mensual a pagar es \$210 851 durante 20 años? ¿O aumenta el dividendo a pagar mes a mes? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál sería el beneficio de pagar los gastos operacionales al contado y no incluirlos en los 20 años solicitados por el crédito hipotecario?
- ¿Es obligación incorporar el pago de los seguros en el crédito hipotecario o se los puede pagar anualmente y, así, disminuir el dividendo a pagar?

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere orientarlos para que justifiquen sus respuestas y analicen las condiciones del contexto financiero. Por ejemplo:
  - Al calcular el 10% del valor de la propiedad, deberán investigar el valor de la UF en ese día y justificar las implicancias de dicho valor que aumenta día a día.
  - Al ingresar los datos al “simulador rápido”, deberían responder primero que Javier no puede optar a un crédito hipotecario a 20 años plazo. Luego pueden plantear que podría solicitar un crédito a 21 años plazo o más (máximo 30 años). Y también pueden reflexionar en torno a que habría que calcular la diferencia de intereses que se paga respecto de un crédito hipotecario según si es a 21, 25 o 30 años plazo.
  - Sobre esa base, deberían justificar que Javier podría solicitar un crédito hipotecario a 21 años plazo, siempre y cuando la institución financiera lo permita, pues algunas instituciones financieras tienen plazos establecidos para otorgar dichos préstamos.
  - Deberían comprender que el dividendo a pagar aumenta mes a mes, dado que el valor de la UF aumenta día a día.

2. Conviene guiarlos para que identifiquen las variables (seguros, remuneración, ahorro para el 10%, seguros, tasa interés, entre otros), cómo se relacionan para que una institución financiera apruebe un crédito hipotecario y qué derechos posee todo consumidor al realizar este tipo de trámites financieros. Específicamente, los alumnos deberían comprender que:
  - Es importante evaluar los costos de un crédito hipotecario en dos o más instituciones financieras y solicitar la mayor información posible para tomar una decisión informada, fundamentada económicamente y en favor del bien personal y familiar.
  - La tasa de interés del crédito hipotecario no se calcula dividiendo el CAE por 12 meses.
  - El valor de la UF aumenta día a día; por ende, el dividendo a pagar aumentará mes a mes mientras dure el crédito hipotecario.
  - Los gastos operacionales y los seguros asociados a un crédito hipotecario pueden incluirse o no en el crédito hipotecario. Si no se incorpora los gastos operacionales, hay que pagarlos de una vez al momento de aprobarse el crédito, y se debe cancelar anualmente los seguros asociados al crédito hipotecario para no perder la cobertura correspondiente.
  - Conviene comparar el monto total que se terminará pagando por la propiedad una vez cancelado el crédito (considerando el valor de UF actual o el valor del dividendo actual y el plazo otorgado por la institución bancaria) versus la opción de comprarla al contado.
  
3. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Evalúan diferentes posibilidades de créditos, utilizando porcentajes, tasas de interés o índices económicos para tomar una decisión fundamentada.
  - Ajustan modelos que involucran porcentajes, tasas de interés o índices económicos para determinar las mejores posibilidades de una situación del ámbito financiero y económico.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Ministerio de Vivienda y Urbanismo  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.minvu.cl/>
- Servicio Nacional de Consumidor, Sernac  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sernac.cl/portal/617/w3-channel.html>
- Servicio de Impuestos Internos, SII  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sii.cl/valores\\_y\\_fechas/uf/uf2018.htm](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sii.cl/valores_y_fechas/uf/uf2018.htm)

### Actividad 3: El refinanciamiento de un crédito hipotecario

#### PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden y aplican los diferentes conocimientos matemáticos involucrados en un crédito hipotecario. El foco está en que analicen en qué condiciones financieras se puede refinanciar un crédito hipotecario y tomar decisiones fundamentadas al respecto. Igual que en la actividad anterior, se promueve la flexibilidad de pensamiento para cambiar puntos de vista y creencias relacionados con el ámbito financiero, y la responsabilidad con el manejo de los datos y el significado que tienen para las familias y las personas.

#### Objetivos de Aprendizaje

**OA 1.** Fundamentar decisiones en el ámbito financiero y económico personal o comunitario, a partir de modelos que consideren tasas de interés e índices económicos.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

#### Actitudes

- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Responsabilidad por las propias acciones y decisiones con consciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

### DESARROLLO

#### REFINANCIAMIENTO DE UN CRÉDITO HIPOTECARIO

1. Fernanda está analizando las diferentes características de un crédito hipotecario y considera importante aclarar con el ejecutivo las siguientes interrogantes:
  - a. Si el dividendo es “fijo y conocido”, ¿quiere decir que el monto del dividendo es fijo o que el monto en UF es fijo?
  - b. Si la tasa de interés es fija por todo el crédito, ¿existe la tasa de interés variable? ¿Cuáles podrían ser los beneficios?
  - c. Si el crédito otorga “meses de gracia”, ¿en cuánto aumentaría aproximadamente el costo total del crédito hipotecario?
2. ¿Qué implica prepagar el crédito hipotecario? Fernanda ingresa información a un simulador hipotecario y obtiene lo siguiente:

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Educación Ciudadana**  
OA b, 3° y 4° medio



### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere orientarlos para que justifiquen sus respuestas y analicen las condiciones del contexto financiero; por ejemplo: deben concluir que el monto del dividendo es fijo, pero que el dividendo será variable dependiendo del valor de la UF. También pueden identificar la cantidad de años o meses en que el dividendo es fijo (en este caso, 5 años o 60 meses) y tener en cuenta que al mes 61 puede aumentar o disminuir, dependiendo de la evolución del mercado en ese instante.
2. Conviene iniciar una discusión para que concluyan que la tasa variable es menor que la fija, pues existe un mayor riesgo y solo es recomendable si el grupo familiar de Fernanda tiene la expectativa razonable de que sus ingresos aumenten en el futuro para asumir un posible incremento del dividendo. Podrían revisar la tendencia de las tasas durante los últimos cinco años para que tengan una idea más aproximada de cómo será dicha tasa en los próximos años y puedan decidir cuál sería la tasa más apropiada a considerar para el crédito, según el contexto que están analizando.
3. Discutir sobre la conveniencia de contratar meses de gracia simplemente porque se los ofrezcan, esta decisión debe hacerse en base a las necesidades reales. Puede ser una buena o mala decisión, dependiendo de las necesidades de Fernanda y su familia (cliente) y la información que manejen. Los meses de gracia permiten postergar el pago de cuotas por el plazo que acuerden las partes, pero ello tiene un costo para el cliente.
4. Cabe hacer notar que, en cuanto se contrata un crédito, comienzan a correr los intereses; si no se paga la primera cuota, estos intereses se suman al capital adeudado y sobre este nuevo monto se cobrará los intereses del mes siguiente. Esto sucede tantas veces como meses de gracia se haya contratado, y determina el total adeudado por el cliente. Cuando llegue el momento de pagar la primera cuota, ya deberá un monto superior al contratado, por haber acordado con la entidad meses de gracia.
5. Se sugiere hacer notar a los jóvenes que el cliente es la única persona que puede decidir si es una buena o mala alternativa. Es una buena decisión cuando el cliente realmente lo necesita, cuando la decisión es informada y se adapta a sus necesidades; pero si no tomó una decisión informada y desconocía los costos de cada parte del contrato, enfrenta una situación que puede no convenirle, porque no tiene certeza respecto de los costos que tiene la operación.
6. Puede solicitarles, por ejemplo, que calculen los costos que involucra contratar un crédito hipotecario de 1200 UF a 20 años plazo, con 3, 6 y 12 meses de gracia y con una tasa anual del 4,02%. Ellos podrían crear una tabla como la siguiente y analizar los costos que conlleva tomar meses de gracia. Cabe notar que en bancos se usa la coma para anotar cantidades de dinero.

| Meses de gracia | Valor Cuota (Mensual) | Costo final del crédito en UF | Costo final del crédito en \$ | Costo meses de gracia |
|-----------------|-----------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------|
| Sin meses       | \$186 094             | 1 615,34 UF                   | 44 312 168,414                | -----                 |
| 3 meses         | \$187 896             | 1 631,67 UF                   | 44 760 134,607                | \$447 966             |
| 6 meses         | \$189 720             | 1 648,29 UF                   | 45 216 056,109                | \$903 888             |
| 12 meses        | \$193 416             | 1 682,00 UF                   | 46 140 792,200                | \$1 828 624           |

Valor UF del día de la simulación: \$27 432,10.

7. Los estudiantes pueden argumentar que el prepago de un crédito hipotecario es un derecho que tiene Fernanda como cliente. Antes de hacerlo, conviene que lea detalladamente las condiciones y el procedimiento de prepago al firmar la escritura. El crédito hipotecario podrá prepagarse de forma anticipada parcial o totalmente antes de la fecha de vencimiento que se pactó antes con el banco. Según lo pactado en la escritura, en el prepago parcial del crédito hipotecario podrá decidir entre reducir el valor del dividendo o reducir el plazo (si la entidad le ofrece esa alternativa).
8. Después del prepago, la entidad debe realizar las gestiones para alzar los gravámenes que están constituidos sobre la propiedad, incluido el ingreso de la escritura de alzamiento en el Conservador de Bienes Raíces. Los gastos generados por el otorgamiento de la escritura pública de alzamiento y de ingreso para inscribirla en el Conservador de Bienes Raíces no son responsabilidad de Fernanda y su grupo familiar, sino de cargo y costo de la entidad que otorgó el crédito. Los estudiantes también pueden considerar que prepagar el crédito hipotecario otorgará algunas ventajas a Fernanda, como: no tener que cubrir mensualmente el dividendo, por lo que podrá disponer de esa parte de su salario mensual para otros gastos; ahorrar el pago de intereses y aumentar su patrimonio; además, al eliminar la deuda, le será más sencillo obtener otro préstamo si lo necesita. Conviene que Fernanda realice los pagos anticipados durante los 5 o hasta 8 primeros años de la hipoteca, ya que es el período de tiempo en que se paga más intereses y se aporta menos al capital.
9. Se sugiere orientarlos para que identifiquen por qué se necesitaría refinanciar un crédito hipotecario; por ejemplo: querer mejorar la tasa del crédito hipotecario, necesitar más tiempo para saldarlo, no tener suficientes ingresos para pagar la cuota acordada con el banco, entre otras razones. Los alumnos podrían considerar que refinanciar un crédito hipotecario es mejor para Fernanda, porque ella tomó un crédito con una tasa más alta (3,5%) que la que ofrece el banco actualmente (2,5%) y le quedan por lo menos 15 años para saldar la deuda. Si la rebaja de tasa es un punto porcentual, implicará que Fernanda pague un dividendo mensual más bajo.

10. El profesor podría preguntarles qué significa que la tasa sea más baja, para que concluyan que ello implica que cada peso valga menos, que el precio del dinero en el tiempo es más bajo y, por tanto, los créditos que otorgan las instituciones financieras deberían ser más baratos, y que la rebaja en la tasa de interés está enfocada, principalmente, en darle dinamismo a la economía.
11. Los alumnos también podrían notar que, si se refinancia el crédito hipotecario, Fernanda incurrirá en gastos como tasación y reinscripción en el Conservador de Bienes Raíces, aunque ello es más barato que los impuestos que canceló al momento de acceder al crédito hipotecario, porque el impuesto al crédito ya fue cancelado. Es importante señalar que se debe incurrir en gastos operacionales asociados al refinanciamiento.
12. Es fundamental que comprendan que siempre es mejor evaluar los costos de refinanciar un crédito hipotecario en dos o más instituciones financieras, y solicitar la mayor información posible para tomar una decisión informada, fundamentada económicamente y en favor del bien personal y familiar.
13. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Evalúan diferentes posibilidades de créditos, utilizando porcentajes, tasas de interés o índices económicos para tomar una decisión fundamentada.
  - Ajustan modelos que involucran porcentajes, tasas de interés o índices económicos para determinar las mejores posibilidades de una situación del ámbito financiero y económico.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Ministerio de Vivienda y Urbanismo  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.minvu.cl/>
- Servicio Nacional del Consumidor, Sernac  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sernac.cl/portal/617/w3-channel.html>
- Servicio de Impuestos Internos, SII  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sii.cl/valores\\_y\\_fechas/uf/uf2018.htm](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.sii.cl/valores_y_fechas/uf/uf2018.htm)
- Información sobre créditos hipotecarios  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.clientebancario.cl/clientebancario/credito-hipotecario.html>

## Actividad 4: Tomar decisiones en el contexto de un crédito de consumo

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan y apliquen los diferentes conocimientos matemáticos involucrados en adquirir un crédito de consumo. Deben modelar un crédito de consumo en el contexto del hogar y el ahorro de energía térmica. El foco de la tarea está en que analicen las condiciones propias de un crédito y tomen decisiones fundamentadas en el ámbito de situaciones financieras y económicas. Todo lo anterior, con flexibilidad de pensamiento para cambiar puntos de vista y creencias relacionados con el crédito de consumo, y responsabilidad con el manejo de los datos y su significado para las familias y las personas.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 1.** Fundamentar decisiones en el ámbito financiero y económico personal o comunitario, a partir de modelos que consideren tasas de interés e índices económicos.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

### Actitudes

- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Responsabilidad por las propias acciones y decisiones con consciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

**Duración:** 3 horas pedagógicas



- a. Conjetura, sin hacer un cálculo detallado, ¿cuál será el plan con el menor gasto en intereses?
- b. En la tabla se muestra el plan de financiamiento de la inversión con la variante de amortizar la deuda de \$1 200 000 en 4 cuotas mensuales ¿cuál es el gasto total, incluyendo los intereses?

| Deuda inicial | Intereses por periodo | Cuota sin intereses | Cuota con intereses | Deuda final |
|---------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-------------|
| 1 200 000     | 72 000                | 300 000             | 372 000             | 900 000     |
| 900 000       | 54 000                | 300 000             | 354 000             | 600 000     |
| 600 000       | 36 000                | 300 000             | 336 000             | 300 000     |
| 300 000       | 18 000                | 300 000             | 318 000             | 0           |
| total         | 180 000               | 1 200 000           | 1 380 000           |             |

Fig. 3: Plan de financiamiento de la inversión.

- c. Elabora, como en el ejemplo, un plan de amortización de la deuda de \$ 1 200 000 en la variante de 6 cuotas.

**Elaborar planes de financiamiento en tablas (2)**

**Actividad:** Elaboran un plan de financiamiento del crédito 6 cuotas mensuales

| Deuda inicial | Intereses por periodo | Cuota sin intereses | Cuota con intereses | Deuda final |
|---------------|-----------------------|---------------------|---------------------|-------------|
| 1 200 000     |                       |                     |                     |             |
|               |                       |                     |                     |             |
|               |                       |                     |                     |             |
|               |                       |                     |                     |             |
|               |                       |                     |                     |             |
|               |                       |                     |                     |             |
| total         |                       |                     |                     |             |

- d. Comparando las dos tablas de amortización, verifica o rechaza la conjetura realizada en el punto a.
- e. Explica tu decisión de crédito de consumo y comparte con tus compañeros tu postura sobre este crédito y las conveniencias para el hogar.
- f. Si fueras una persona que trabaja en el banco, ¿recomendarías este crédito de consumo? Convince a tu compañero de sus ventajas. Advierte también si hubiera alguna desventaja.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere orientarlos para que justifiquen sus respuestas y analicen las condiciones del contexto financiero. Pueden asumir posiciones a favor y en contra del crédito de consumo por medio de un juego de roles y averiguar en bancos de la ciudad las tasas y condiciones para el crédito de consumo.
2. Conviene que discutan sobre el acceso a los créditos de consumo y las formas de pago disponibles en el mercado, en términos del porcentaje y de las variaciones que se pueda aplicar.
3. Se recomienda simular varias formas de pago y reflejar los gastos según la familia de cada estudiante o inventarse ingresos y egresos de una familia ideal al inicio de la actividad – tanto en forma manual como con calculadora sencilla– para que puedan observar lo que ocurre mes a mes con la deuda y con los gastos que tendría una familia. Después se puede formular la ecuación para cada familia y destacar que no todos los casos de la clase (que podrían ser ficticios) son iguales y que la toma de decisión fundamentada dependerá de varios factores y variables.
4. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Evalúan diferentes posibilidades de créditos, utilizando porcentajes, tasas de interés o índices económicos para tomar una decisión fundamentada.
  - Ajustan modelos que involucran porcentajes, tasas de interés o índices económicos para determinar las mejores posibilidades de una situación del ámbito financiero y económico.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Consejos para tomar el crédito de consumo, Sernac  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sernac.cl/portal/607/w3-article-1546.html>
- Definiciones del crédito de consumo, Sernac  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sernac.cl/portal/607/w3-propertyvalue-15049.html>
- Reportaje sobre los créditos de consumo en Chile  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://ciperchile.cl/2019/10/28/maldita-tarjeta-creditos-y-deudas-en-el-ojo-del-estallido-social-que-remece-a-chile/>

## Actividad de evaluación

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 1.** Fundamentar decisiones en el ámbito financiero y económico personal o comunitario, a partir de modelos que consideren tasas de interés e índices económicos.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

### Indicadores de evaluación

- Interpretan información del ámbito financiero y económico personal o comunitario, que involucra porcentajes, tasas de interés o índices económicos.
- Evalúan diferentes posibilidades de créditos, utilizando porcentajes, tasas de interés o índices económicos para tomar una decisión fundamentada.
- Ajustan modelos que involucran porcentajes, tasas de interés o índices económicos para determinar las mejores posibilidades de una situación del ámbito financiero y económico.

**Duración:** 3 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 2, cada una por sí misma o en conjunto. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible.

1. Si la ejecutiva de cuentas señala a Francisca que una persona no debería endeudarse en más del 25% de su sueldo líquido, considera un sueldo líquido ideal para Francisca y determina el sueldo bruto aproximado.
  - Sueldo bruto – (Cotización Previsional en la AFP o INP + Cotización Voluntaria y Cuenta de Ahorro AFP + Cotización Salud en Fonasa o Isapre + Otros Descuentos) = Sueldo líquido.
  - Otros no imponibles: locomoción y alimentación.
  - Otros imponibles: bonos, horas extra, gratificaciones, etc.
  - Descuentos obligatorios AFP: ([10% + % comisión] AFP + Isapre) del sueldo imponible.

| AFP       | Comisión |
|-----------|----------|
| Capital   | 1,44     |
| Cuprum    | 1,48     |
| Habitat   | 1,27     |
| Modelo    | 0,77     |
| Planvital | 0,41     |
| Provida   | 1,45     |

Tabla 1: Comisión de AFP.

- Descuentos obligatorios Isapre o Fonasa: 7% del sueldo imponible.
- Otros descuentos: ahorro previsional voluntario, seguro de cesantía, etc.

Si Francisca toma el crédito y se endeuda por el máximo permitido, ¿con cuánto dinero vive al mes?

2. Francisca cumplió dos años en su trabajo y quiere comprar un auto. Logró ahorrar \$3 350 000 y está cotizando un crédito de consumo a 4 años por \$3 000 000. A continuación, se muestra 3 simulaciones entregadas por una institución bancaria, donde varían los tipos de seguros a incorporar.

| Simulación 1  |                                      |                            |                     |
|---|--------------------------------------|----------------------------|---------------------|
|  <b>\$3.000.000 en 48 cuotas</b> <a href="#">(Ver Detalle del crédito)</a> |                                      | <b>Detalle del crédito</b> |                     |
| Valor de la cuota   | <b>\$110.406</b>                     | Monto total del crédito    | <b>\$ 3.465.105</b> |
| CAE ⓘ   | <b>30,89%</b>                        | Monto líquido              | <b>\$ 3.000.000</b> |
| Tasa interés mensual*   | <b>1,86%</b>                         | Impuesto                   | <b>\$ 27.721</b>    |
| Costo total del crédito ⓘ   | <b>\$5.299.460</b>                   | Desgravamen + Vida         | <b>\$ 435.444</b>   |
| Seguro incluido   | <a href="#">Desgravamen + Vida</a> ⓘ | Gastos Notariales          | <b>\$ 1.940</b>     |
| Primer vencimiento  | <b>17-08-2018</b>                    |                            |                     |

 **Desgravamen + Vida**  
 Cubre el 100% del saldo de la deuda en caso de fallecimiento del deudor y además entrega indemnización a tus beneficiarios de hasta 400 UF en caso de muerte del titular de la deuda.

Fig. 1: Simulación 1.

| Simulación 2  |  |                            |                     |
|---|--|----------------------------|---------------------|
|  <b>\$3.000.000 en 48 cuotas</b> <a href="#">(Ver Detalle del crédito)</a> |  | <b>Detalle del crédito</b> |                     |
| Valor de la cuota   | <b>\$106.217</b>                         | Monto total del crédito    | <b>\$ 3.333.637</b> |
| CAE ⓘ   | <b>28,53%</b>                            | Monto líquido              | <b>\$ 3.000.000</b> |
| Tasa interés mensual*   | <b>1,86%</b>                             | Impuesto                   | <b>\$ 26.669</b>    |
| Costo total del crédito ⓘ   | <b>\$5.098.404</b>                       | Desgravamen + Cesantía     | <b>\$ 305.028</b>   |
| Seguro incluido   | <a href="#">Desgravamen + Cesantía</a> ⓘ | Gastos Notariales          | <b>\$ 1.940</b>     |
| Primer vencimiento  | <b>17-08-2018</b>                        |                            |                     |

 **Desgravamen**  
 Cubre el 100% del saldo de la deuda en caso de fallecimiento del deudor.

Fig. 2: Simulación 2.

| Simulación 3   |                               |                            |
|--|-------------------------------|----------------------------|
|  <b>\$3.000.000 en 48 cuotas</b> <a href="#">(Ver Detalle del crédito)</a>  |                               |                            |
| Valor de la cuota  | \$99.582                      | <b>Detalle del crédito</b> |
| CAE ⓘ  | 24,69%                        | Monto total del crédito    |
| Tasa interés mensual*  | 1,86%                         | Monto líquido              |
| Costo total del crédito ⓘ  | \$4.779.907                   | Impuesto                   |
| Seguro incluido  | <a href="#">Desgravamen</a> ⓘ | Desgravamen                |
| Primer vencimiento   | 17-08-2018                    | Gastos Notariales          |
|  |                               | \$ 3.125.393               |
|  |                               | \$ 3.000.000               |
|  |                               | \$ 25.003                  |
|  |                               | \$ 98.450                  |
|  |                               | \$ 1.940                   |
| <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px; background-color: #e6f2e6;">  <b>Desgravamen + Cesantía</b><br/>           Cubre el 100% del saldo de la deuda en caso de fallecimiento del deudor y además cubre hasta 3 cuotas en caso de desempleo involuntario o incapacidad temporal.         </div> |                               |                            |

Fig. 3: Simulación 3.

- ¿Es correcto afirmar que, en este caso, el impuesto que recauda el fisco por solicitar el crédito de consumo es aproximadamente el 0,008%? ¿Es correcto afirmar que el impuesto a pagar se calcula respecto del costo total del crédito? Averigua cómo y cuánto recauda el fisco por estas transacciones.
- Considerando la información de las simulaciones de crédito vistas, ¿cuál sería el valor de la cuota a pagar por un crédito de \$3 000 000 en 48 cuotas, incluyendo solamente el seguro de cesantía?
- Considerando las simulaciones del crédito de consumo por 3 millones de pesos en 48 cuotas, ¿cuál es la opción más conveniente si se tiene un sueldo bruto de \$800 000, de \$1 200 000 o de \$2 400 000? Justifica tu respuesta y elabora una tabla con tus propios cálculos de cada situación.

3. Luego de comprar el auto, Francisca piensa que asegurar su auto es proteger su inversión y evalúa las siguientes propuestas de seguro automotriz:

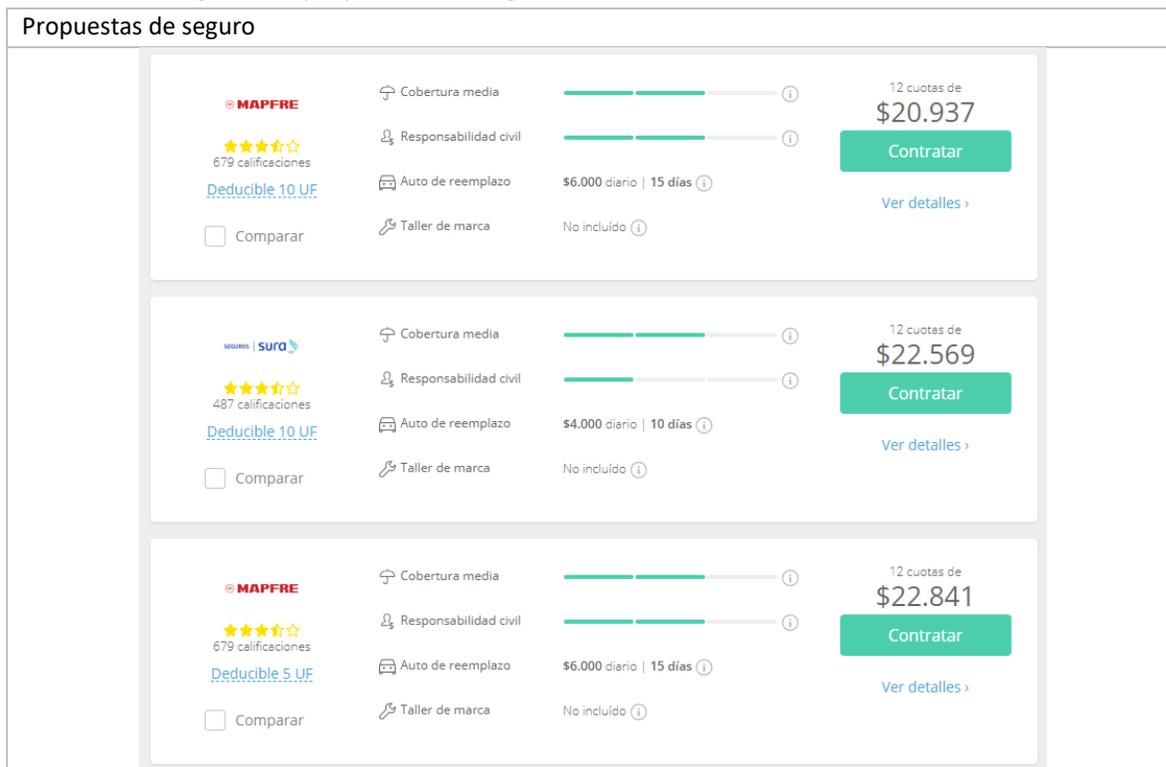


Fig. 4: Simulaciones de seguro automotriz.

Considerando los deducibles, las coberturas y el monto mensual a pagar, ¿qué seguro podría contratar Francisca? ¿Debería continuar cotizando otros seguros o no debería contratar un seguro de autos? Justifica tu respuesta, utilizando tablas o graficas con los resultados.

4. Marcia y Mateo son ejecutivos de una empresa automotora y han decidido crear un archivo en una planilla de cálculo que les permita calcular rápidamente los montos de un crédito, considerando las siguientes variables:
- Acreditar renta líquida mensual
  - Valor del auto o camioneta
  - Monto del pie que entrega el comprador
  - Tasa de interés del crédito y número de cuotas del crédito
    - CAE crédito a 24 meses: 17,83%
    - CAE crédito a 36 meses: 17,26%
    - CAE crédito a 48 meses: 18,58%
  - Seguros asociados que desee adquirir el comprador
    - Seguro desgravamen: \$102 500
    - Seguro de cesantía: \$234 700
    - Seguro de vida: \$317 500
  - Permiso de circulación y patente del auto usado/nuevo
  - Gastos operacionales de la compra del auto

Auto nuevo: no hay costo asociado a transferencia.

Auto usado: 1,5% del valor del vehículo.

Inscripción en el Registro Civil: \$21 330.

Notaría: \$7 000 - \$15 000

5. Considerando los datos y resultados anteriores:
- Crea una planilla electrónica de cálculo que permita a Marcia y Mateo obtener el valor cuota de cualquier auto (usado o nuevo) a 24, 36 o 48 meses plazo, respectivamente.
  - Leonardo quiere adquirir un auto usado que vale \$6 990 000, solicitando un crédito automotriz en 36 cuotas. ¿Qué renta líquida debe acreditar para que Marcia y Mateo puedan otorgar el crédito? Justifica tu respuesta.
  - Patricia logró ahorrar \$1 500 000 para comprar un auto nuevo que vale \$9 590 000. Si la renta líquida de Patricia es de \$677 568 pesos, ¿es más conveniente que pida un crédito en 36 o en 48 cuotas? Justifica tu respuesta.
  - Marcia y Mateo se enteran de que, por el mes de noviembre, la venta de autos nuevos tiene un 5% de descuento en el valor comercial y un 10% de descuento en la tasa de interés en créditos de 48 cuotas.
    - ¿Cuál sería el valor cuota a pagar por un auto que vale \$9 990 000 y se pagará con un crédito en 48 cuotas?
    - ¿Cuál es la renta mínima que debería acreditar una persona para acceder a dicho descuento y obtener el crédito automotriz para comprar el auto?

## PAUTA DE EVALUACIÓN

| Criterios de evaluación  | Niveles de logros     |  |  |
|--|-----------------------|--|--|
|  | Completamente logrado | Se observa aspectos específicos que pueden mejorar | No logrado por ausencia o no se puede entender en absoluto |
| Calculan porcentajes, cantidades asociadas al porcentaje y totales en el contexto financiero y económico.          |                       |  |  |
| Fundamentan decisiones según las condiciones y cálculos numéricos.   |                       |  |  |
| Evalúan situaciones de crédito y comparan para tomar decisiones.   |                       |  |  |
| Interpretan información bancaria relacionada con créditos y simulaciones de créditos.                              |                       |  |  |
| Simulan situaciones de crédito y proponen elegir un crédito, basándose en ventajas y desventajas de la simulación. |                       |  |  |
| Varían el contexto inicial de un crédito y las condiciones para proyectar una situación de pago.                   |                       |  |  |
| Elaboran tablas o gráficos para organizar y proyectar los gastos relacionados con un crédito.                      |                       |  |  |

# Unidad 3

## Unidad 3: Modelamiento matemático para describir y predecir

### Propósito

Los estudiantes inician un proceso de modelación, primero con situaciones descritas por funciones potencias o funciones trigonométricas, y luego varían o ajustan el modelo según diferentes contextos. El centro de esta unidad está en las nociones de crecimiento, decrecimiento y periodicidad. Las preguntas orientadoras son: ¿Cómo identificar situaciones que son de crecimiento o decrecimiento? ¿Cómo identificar características clave de una situación periódica?

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 3.** Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencia de exponente entero y trigonométricas  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ , de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.

**OA e.** Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

## Actividad 1: Ley de gravitación universal

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes identifiquen cómo una expresión proveniente de la Física responde a un modelo matemático de función potencia con exponente negativo. Analizarán relaciones de interdependencia, fijando algunos parámetros y variando otros, y también compararán la función afín con la potencia de exponente -2.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 3.** Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencia de exponente entero y trigonométricas  $\text{sen}(x)$  y  $\text{cos}(x)$ , de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

### Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

## DESARROLLO

## UN MODELO PARA LA ATRACCIÓN UNIVERSAL

Piensa en el universo. ¿Sabías que todos los cuerpos en él, incluidos nosotros, se atraen unos a otros? Esta atracción universal es la fuerza de gravitación universal, formulada por Newton. La ley señala que *todos los cuerpos del universo se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa*. Se puede expresar matemáticamente como:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

donde  $M$  y  $m$  son las masas de los cuerpos que interactúan,  $r$  es la distancia de separación entre los cuerpos y  $G$  es la constante de gravitación universal, cuyo valor en unidades del Sistema Internacional es:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} N \cdot \frac{m^2}{kg^2}$$

La expresión enunciada sirve únicamente para masas puntuales y cuerpos esféricos, ya que se comportan como si toda su masa se concentrara en su centro, por lo que la distancia se mide desde sus centros.

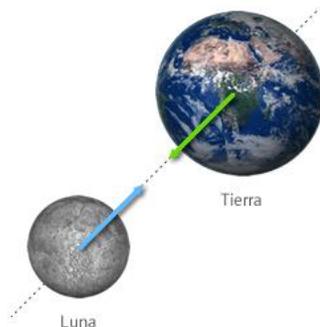


Fig. 1: Imagen extraída de <https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.fisicalab.com/apartado/fuerza-gravitatoria#contenidos>

1. Consideren la expresión que determina la fuerza de gravitación universal entre dos cuerpos:

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$$

- a. ¿Cómo interpretarían la frase *Todos los cuerpos del universo se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas*?
- b. ¿En qué cantidades se ve reflejada esta relación de proporcionalidad directa?
- c. Si aumenta el producto entre las masas, ¿cómo varía el valor de la fuerza de gravitación universal?

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Ciencias para la  
Ciudadanía**  
OA d, 3° y 4° medio

Formen grupos según la cantidad de computadores disponibles y, usando el recurso digital laboratorio de fuerza de gravedad (<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://phet.colorado.edu/es/>), separen los cuerpos libremente y midan con la regla la distancia entre sus centros.

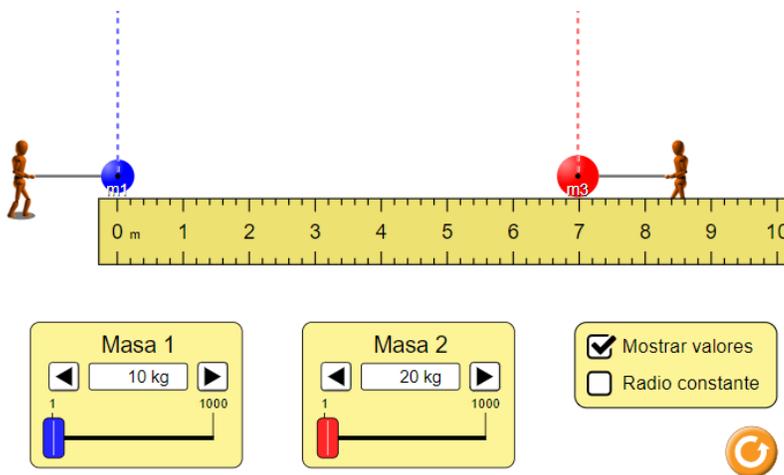


Fig. 2: Recurso digital: Laboratorio de fuerza de gravedad.  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://phet.colorado.edu/es/>

- Dejando fija la distancia, varíen las masas y completen la tabla con la fuerza de gravitación universal que se obtiene en cada caso.

Tabla 1: Relación entre el producto de las masas y la fuerza de gravitación universal

|             |  |  |  |  |  |  |
|-------------|--|--|--|--|--|--|
| $M$         |  |  |  |  |  |  |
| $m$         |  |  |  |  |  |  |
| $M \cdot m$ |  |  |  |  |  |  |
| $F$         |  |  |  |  |  |  |

- En un plano cartesiano, ingresen los puntos determinados por  $(M \cdot m, F)$ .
  - ¿Cómo varía  $F$  en función del producto de las masas?
  - ¿Cómo es la forma de la gráfica?
  - ¿Conocen alguna función que responda a esta relación de crecimiento?
  - ¿Cómo se vincula este modelo con lo dicho por Newton sobre la relación de proporcionalidad directa?
- Ahora presten atención a la última frase de la ley formulada por Newton: *...se atraen con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.* ¿Qué sentido le dan a esta frase?
- En el recurso digital Laboratorio de fuerza de gravedad, establezcan un valor fijo para las dos masas. Determinen el producto de ellas, que ahora será constante.

- a. Variando la distancia entre los cuerpos, medida desde sus centros, completen la tabla con algunos valores y determinando a la vez la fuerza de gravitación universal.

Tabla 2: Relación entre la distancia al cuadrado de las masas y la fuerza de gravitación universal

|       |  |  |  |  |  |  |
|-------|--|--|--|--|--|--|
| $r$   |  |  |  |  |  |  |
| $r^2$ |  |  |  |  |  |  |
| $F$   |  |  |  |  |  |  |

- b. En un plano cartesiano, ingresen los puntos determinados por  $(r^2, F)$ . ¿Cómo varía  $F$  en función de la distancia de los cuerpos al cuadrado?
- c. ¿Cómo es la forma de la gráfica?
- d. ¿Conocen alguna función que responda a esta relación de crecimiento?
6. Tracen una línea que mejor aproxime la relación entre los puntos marcados.
- a. ¿Cómo se vincula este modelo con lo dicho por Newton sobre la relación de proporcionalidad inversa?
- b. Comparen su gráfica con otros grupos y señalen si hay diferencias al considerar otro producto de las dos masas. Destaquen también las semejanzas entre los modelos obtenidos.
- c. ¿Cómo varía la fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos a medida que crece o decrece la distancia entre ellos?
- d. ¿Qué ocurriría con  $F$  en términos matemáticos si  $r = 0$ ?
- e. ¿Cómo se interpreta en el contexto que  $r = 0$ ?
7. Comparen las restricciones de los valores que puede tomar la variable  $r$  sin contexto y considerando el contexto del problema.
8. Comparen el modelo de la fuerza de atracción gravitacional cuando se fija el valor de la distancia entre los cuerpos y varía el producto de las masas, respecto del modelo cuando se fija el producto de las masas de los cuerpos y varía la distancia entre ellos.
- a. ¿Cómo varía  $F$  en cada caso?
- b. ¿Cambian en cada caso los valores que puede tomar  $F$ ? ¿Qué ocurre con el recorrido en cada caso?
- c. ¿Cómo son los modelos matemáticos de crecimiento descritos en cada caso?
- d. ¿Qué relación hay entre el exponente de la variable usada en las situaciones de la Tabla 1 y la Tabla 2, con el modelo obtenido?

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. La expresión matemática que permite determinar la fuerza de gravitación universal posee cuatro cantidades variables: la fuerza de gravitación, la masa de un cuerpo, la masa de un segundo cuerpo y la distancia entre ellos medida desde sus centros. Además, una constante, la constante de gravitación universal. La variable dependiente es la fuerza. Para efectos de este estudio, se usará pares de variables, fijando los valores de las otras.

2. Se sugiere analizar la expresión algebraica con el curso, considerando como variables la fuerza de gravitación universal y el producto de las masas de dos cuerpos que interactúan. Es importante saber que la variable será el producto de las dos masas, transformando estas dos cantidades variables ( $M$  y  $m$ ) en solo una a estudiar: el producto de ellas.
3. El “laboratorio de gravedad” es un laboratorio ficticio, debido a la muy baja magnitud de las fuerzas de gravedad que actúan entre las masas de cuerpos que están en consideración (en el ejemplo:  $0,000000000275N$ ). La unidad de “1N (Newton)” representa aproximadamente la fuerza con la cual la Tierra atrae una masa de 100g. Se recomienda expresar estas magnitudes con potencias de 10 ( $0,000\ 000\ 000\ 275N = 2,75 \cdot 10^{-10}N$ ). El laboratorio de gravedad sirve para descubrir la siguiente ley: la fuerza de gravedad es proporcional al producto de las masas que se atraen y, a la vez, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.
4. Se recomienda comparar los dos casos obtenidos del modelo de gravitación: la función potencia de exponente 1, cuando  $r$  es constante, y la función potencia de exponente -2, cuando el producto de las masas es constante. Se espera que los jóvenes entiendan que un mismo modelo de función potencia es aplicable a diversos casos, en tanto el exponente cambia de valor.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Interpretan información, utilizando modelos que involucran funciones potencia y trigonométricas para deducir resultados.
  - Varían parámetros de modelos existentes que involucran funciones potencia y trigonométricas para comparar resultados.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Laboratorio de fuerza de gravedad  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/https://phet.colorado.edu/sims/html/gravity-force-lab/latest/gravity-force-lab\\_es.html](https://www.curriculumnacional.cl/link/https://phet.colorado.edu/sims/html/gravity-force-lab/latest/gravity-force-lab_es.html)
- Orientaciones para el estudio inicial de la fuerza de gravitación universal  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.fisicalab.com/apartado/fuerza-gravitatoria#contenidos>

## Actividad 2: Funciones cúbicas para entender fenómenos de la naturaleza

### PROPÓSITO

Se identifica dos contextos en los que la función cúbica es una herramienta modeladora que permite aproximar valores experimentales a una expresión –primero gráfica y luego algebraica– que entrega los elementos necesarios para predecir otros datos que no se obtuvieron mediante la experimentación. En ambos casos, se usa recursos digitales para ayudar a los alumnos a descubrir las funciones a fin de acceder a más datos.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 3.** Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencia de exponente entero y trigonométricas  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ , de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

### Actitudes

- Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### CULTIVO DE PAPAS

- Lee con tus compañeros de grupo el siguiente texto: “En el territorio nacional hay alrededor de 221 variedades de papas. ¿Cuántas conoces o has probado? Su presencia en la mesa chilena es recurrente, dado que son bajas en grasas y son una fuente de energía natural por ser ricas en almidón. Además, contienen vitaminas B y C y minerales (calcio, potasio, magnesio, hierro), que resultan esenciales.

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Ciencias para la  
Ciudadanía**  
OA c, 3° y 4° medio

Se las puede cultivar en gran parte del territorio, pero su producción se encuentra determinada por la interacción de múltiples factores, como el clima, el suelo y la disponibilidad de los nutrientes, entre otros factores. Dado que los nutrientes no necesariamente estarán disponibles ni en la

cantidad ni en el momento en que más lo requieren los cultivos, la fertilización se vuelve fundamental. El nutriente más deficiente siempre limitará la productividad. En ese contexto, un nutriente que en muchas ocasiones no se aplica es el calcio, o se aplica en dosis y momentos no óptimos para la papa.

Los alcances de la agroindustria en las mejoras de los cultivos son múltiples, en particular respecto de la papa. Una investigación hecha en invernadero permitió determinar las curvas de absorción de la cantidad de nutrientes acumulada en las hojas de la planta de papa, en cada fase de crecimiento. Se trasplantó las semillas *in vitro* a los 14 días, y cada 7 días se realizaba el análisis de absorción. Se usó 1 180 g/1 000 l de nitrato de calcio para preparar la solución que se aplicó a lo largo de la experimentación.

- Anota en tu cuaderno la información que te parece importante conocer sobre la papa.
  - Clasifica esta información en datos específicos que te pueden servir para resolver un problema en matemática y en datos que te pueden servir para la salud.
2. En cuanto al proceso de absorción del calcio, se recolectó la información presente en la tabla, desde el periodo de trasplante hasta el día 70:

Tabla 1: Absorción de calcio por día en la hoja de la planta de papa

| Días                                     | 14     | 21     | 28      | 35      | 42      | 49      | 56       | 63       | 70     |
|--|--------|--------|---------|---------|---------|---------|----------|----------|--------|
| Cantidad de calcio acumulado (mg/planta) | 1,7012 | 7,7418 | 12,6102 | 25,5825 | 46,9345 | 79,9423 | 110,8819 | 183,0291 | 222,66 |

- En una planilla de cálculo, ingresa los datos anteriores y crea una tabla de dos columnas. La primera serán los días y la segunda, la cantidad de calcio acumulado.
  - Inserta un “Gráfico de dispersión solo con marcadores” y describe su forma de manera general.
  - Intenta relacionarla con alguna forma gráfica de otras funciones que ya conozcas, ¿a qué función crees que se aproxima más esta curva?
- Para poner a prueba tu conjetura, haz clic en “Agregar línea de tendencia” sobre los puntos del gráfico (con el botón derecho del mouse).
  - De las opciones listadas en la ventana emergente, elige la que tenga un dibujo más parecido a la forma del gráfico anterior, luego cierra la ventana.
  - ¿Mantienes tu conjetura?



Fig. 1: Opciones disponibles de línea de tendencia en una planilla de cálculo.

- Puedes probar con otras opciones hasta encontrar la mejor aproximación de la curva que pasa por los puntos de la tabla.

- d. ¿Por qué crees que la curva no pasa exactamente por cada uno de los puntos? ¿Influye esto en la curva que elegiste para representar adecuadamente la relación entre las variables del problema?
5. ¿Qué significado le atribuyes a los puntos que ahora han aparecido (sobre la curva) que no estaban inicialmente en la tabla? ¿Hay vacíos en la curva?
6. La mejor aproximación es la línea de tendencia potencial; sin embargo, no queda claro a qué función potencia se refiere.
  - a. Haz clic sobre la curva (con el botón derecho del mouse) y elige la opción “Formato de línea de tendencia”.
  - b. Casi al pie de la ventana aparece la opción “Presentar ecuación en el gráfico”. Márcala y cierra la ventana. ¿Qué función apareció?

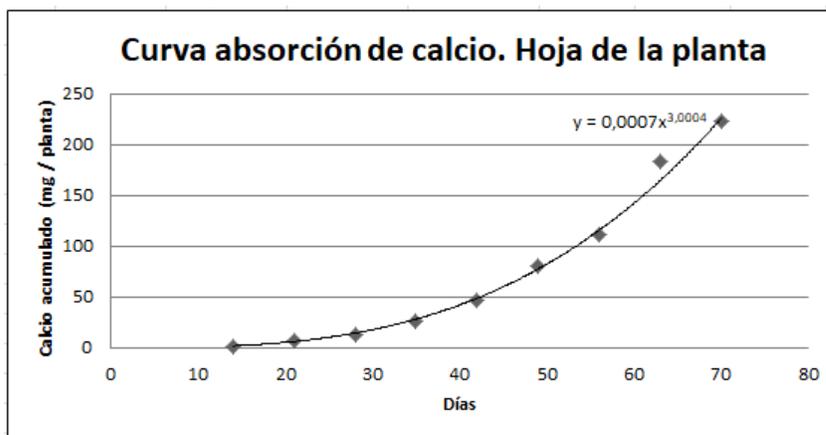


Fig. 2: Gráfico en una planilla de cálculo con línea de tendencia y ecuación.

7. Dada la forma algebraica de la función que mejor modela los datos de la tabla:
  - a. ¿Cuál podría ser una mejor aproximación de esta función, usando una función potencia?; ¿cuál sería el exponente?
  - b. Describe una ventaja que implique aproximar el modelo dado en una planilla de cálculo, a un modelo de función potencia cúbica.
8. Para esta función, ¿cuáles son las restricciones en relación con el contexto estudiado?
  - a. ¿Pueden  $x$  y  $f(x)$  tomar cualquier valor? ¿De qué depende?
  - b. Utiliza la forma algebraica o la forma gráfica de esta función para predecir algunos valores de absorción de calcio en los días en que no se tomó muestras.
9. ¿Entre qué periodos (días) es más rápida la absorción de calcio? ¿En qué periodos es más lenta?
10. ¿Qué representación de la función –tabla de datos, gráfico o expresión algebraica– te permite responder de forma más simple o directa la pregunta anterior?

## NUEVAS FUENTES DE ENERGÍA

Lean en grupo la siguiente información y trabajen en conjunto las preguntas asociadas al tema: “Una vez aceptada en la comunidad científica la teoría de la curva de Hubbert, es indispensable esforzarse aún más por establecer nuevas fuentes de energía o aprovechar de forma óptima las ya existentes. En

este contexto, la energía eólica tiene un rol fundamental, pues es una fuente de energía renovable que utiliza la fuerza del viento para generar electricidad. El principal medio para obtenerla son los aerogeneradores (molinos de viento) que transforman la energía cinética del viento en energía mecánica cuando sus aspas giran”.

1. En la Figura 3 se muestra un molino de viento, considerando que la altura del molino es fija:
  - a. ¿Cómo describirían la relación entre el movimiento de las aspas y la velocidad del viento?



Fig. 3: Applet Aerogenerador.

2. La potencia medida en KWatt que produce un aerogenerador depende de la velocidad del viento que se mide en Km/h). En la tabla se muestran algunos valores.
  - a. ¿Cómo se podría modelar esta situación?

Ver Tabla

| v | P(v)   |
|---|--------|
| 1 | 0.61   |
| 2 | 4.88   |
| 3 | 16.47  |
| 4 | 39.04  |
| 5 | 76.25  |
| 6 | 131.76 |
| 7 | 209.23 |

Fig. 4: Relación entre variables potencia del aerogenerador y velocidad del viento.

3. Marquen los puntos de la tabla en un plano cartesiano.
  - a. ¿Qué valores irán en el eje  $X$  y qué valores en el eje  $Y$ ? ¿En qué se basan para tomar esta decisión?
  - b. ¿Se puede describir la relación entre las variables mediante alguna función que hayan estudiado antes, como una función lineal, una función logarítmica u otras?
  - c. Descarten algunas funciones que saben que no describen esta relación, indicando por qué sucede esto.

4. A mano alzada, tracen una curva que pueda aproximar la relación entre los valores de las variables potencia del aerogenerador y velocidad del viento.
  - a. Describan la forma de la curva.
  - b. Desde la forma gráfica, ¿pueden relacionar esta curva con alguna otra que ya hayan estudiado?
  - c. ¿En qué se basan para descartar otras funciones que ya conocen?

5. Una posible forma algebraica que modela la relación entre la potencia del aerogenerador y la velocidad del viento es:

$$P(v) = 0,61 v^3$$

- a. ¿Qué representa 0,61 en la expresión general?
  - b. ¿Cómo pueden determinar el valor de A? ¿Cuál es?
  - c. Describan con sus palabras la relación que existe entre  $P(v)$  y  $v$ .
  - d. ¿Qué creen que pueda significar el valor 0,61 en la expresión anterior?
6. ¿Por qué se puede afirmar que  $P(v)$  es una función? ¿Qué condiciones cumple?
  7. ¿Cuáles son las restricciones de esta función para que modele efectivamente la situación descrita sobre la potencia de un aerogenerador?
  8. Consideren que la forma general de una función que modela la relación de interdependencia entre la potencia de un aerogenerador y la velocidad del viento, viene dada por:

$$P(v) = \frac{1}{2} A \rho v^3$$

donde  $A$  es el área de las hélices del aerogenerador (en  $m^2$ ) y  $\rho = 1,225 \frac{kg}{m^3}$  es la densidad del aire a nivel del mar a  $15^\circ C$ .

9. ¿En qué se diferencia esta expresión con la usada en la simulación del applet?
  - a. ¿Qué representa 0,61 en la expresión general en la simulación del applet?
  - b. ¿Cómo pueden determinar el valor de A? ¿Cuál es?
10. ¿Cómo podrían ahora, formalmente, describir la relación entre la potencia de un aerogenerador y la rapidez del viento?
  - a. ¿Entre que rangos de rapidez del viento aumenta más rápido la potencia del aerogenerador?
  - b. ¿Cuándo ocurre lo contrario?
  - c. ¿Cómo podrían utilizar esta expresión, por ejemplo, para determinar la velocidad del viento para obtener 3 kW?
  - d. Investiguen qué artefactos de su hogar podrían encender al mismo tiempo con esta potencia.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Antes de este nivel, los alumnos ya trabajaron con la función potencia de la forma  $f(x) = ax^n$ , con  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  y  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , solo que con casos particulares, para exponente 1 y 2. En esta oportunidad, se presenta el estudio de dos funciones cúbicas, en las que la experimentación es fundamental.

2. La actividad modela la curva de absorción de calcio de la hoja de la planta de una variedad de papa, en relación con el tiempo transcurrido de plantación. Se simplificó el contexto agronómico de la investigación real para que pueda estudiarse en este nivel, pues el modelo real corresponde a una función polinómica de grado 3.
3. Se sugiere mostrar la relación entre dos variables, potencia de un aerogenerador y velocidad del viento, que se describe con una función potencia de la forma  $P(v) = 0,61 v^3$ , donde  $P: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Mediante el uso de un applet de GeoGebra, simularán la interacción entre el aerogenerador y el viento. Asimismo, contarán con una tabla con algunos puntos específicos que relacionan ambas variables. Deben graficar los valores de la tabla y conjeturar una función que describa su relación, la que corroborarán mediante el mismo applet.
4. Apóyelos para que encuentren la mejor aproximación, que debería ser similar a:
 
$$f(x) = 0,0007x^3$$
5. Es importante que analicen el crecimiento de una variable a medida de la otra también crece, y viceversa. Tienen que notar cómo, en ciertos tramos de la función, el crecimiento ocurre a una tasa o razón (dependiendo de la actividad) distinta de la que ocurre en otros tramos de la misma función. Para ello, tienen que indicar la forma gráfica como la mejor representación de la función.
6. Solo desde la gráfica y sin mayor análisis, pueden cometer el error de considerar la función como exponencial o cuadrática. Para subsanarlo en parte, cabe pedirles que prueben con algunos puntos de la tabla para que corroboren el error cometido con casos concretos.
7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Interpretan información, utilizando modelos que involucran funciones potencia y trigonométricas para deducir resultados.
  - Varían parámetros de modelos existentes que involucran funciones potencia y trigonométricas para comparar resultados.
  - Describen modelos existentes que involucran funciones potencia y trigonométricas para relacionar partes y características de la situación.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Investigación completa para determinar curvas de absorción de nutrientes  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0378-18442009000100011#f1](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0378-18442009000100011#f1)
- Calculadora algebraica Wiris Cas  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.wiris.net/demo/wiris/es/cas.html>
- Explorador de energía eólica  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://walker.dgf.uchile.cl/Explorador/Eolico2/>
- Calculadora gráfica  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.desmos.com/calculator>

## Actividad 3: La rueda de la fortuna

### PROPÓSITO

Los estudiantes identifican el modelo que describe la relación entre las variables altura y tiempo de una cabina en una rueda de la fortuna en movimiento. A partir de ello, reconocen las restricciones dadas por el contexto y lo utilizan para predecir valores que puedan aportar a que comprendan mejor la situación descrita. Asimismo, identifican la relación entre la función seno y coseno a partir de la rueda de la fortuna.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 3.** Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencia de exponente entero y trigonométricas  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ , de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

### Actitudes

- Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### LA RUEDA DE LA FORTUNA

Una de las ruedas de la fortuna más grandes del mundo se encuentra en la ciudad de Las Vegas, en Estados Unidos. Su altura máxima desde el suelo es de 167,6 m y su diámetro es de 158,5 m. Las 28 cápsulas que posee albergan a cerca de 40 personas cada una, con múltiples actividades en ellas. Una cápsula tarda 30 minutos en dar una vuelta completa y quienes la han visitado comentan que adentro el movimiento es casi imperceptible.

Otra particularidad es que, una vez que comienza a girar, no se detiene en todo un día, ni siquiera para abordarla. Para conocer la altura de cualquier cápsula en un tiempo determinado, se puede contar con un modelo matemático, exacto y confiable, que describe segundo a segundo la trayectoria de dicha cápsula.

- A partir del esquema simplificado de la rueda de la fortuna (Figura 1), completa la tabla con la altura de la cápsula A en distintos momentos de tiempo, teniendo presente que el recorrido de la cápsula A comienza en el punto más cercano a la tierra.

- Observa que se ha marcado algunos ángulos en radianes, úsalos como referente para medir el tiempo en esos puntos.
- También puedes usar el applet de GeoGebra y ver una animación de la rueda de la fortuna en movimiento.

Tabla 1: Relación entre altura y tiempo de la cápsula A.

|                                      |                 |                             |                             |                              |                   |                              |                              |                              |                    |
|--------------------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------|
| Ángulo en una vuelta                 | $0 \text{ rad}$ | $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ | $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ | $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ | $\pi \text{ rad}$ | $\frac{5\pi}{4} \text{ rad}$ | $\frac{3\pi}{2} \text{ rad}$ | $\frac{7\pi}{4} \text{ rad}$ | $2\pi \text{ rad}$ |
| Tiempo en una vuelta                 | 0 min           |                             | 7,5 min                     |                              |                   |                              | 22,5 min                     |                              |                    |
| Altura de la cápsula A en una vuelta | 0 m             |                             | 79,25 m                     |                              | 158,5 m           |                              |                              |                              |                    |

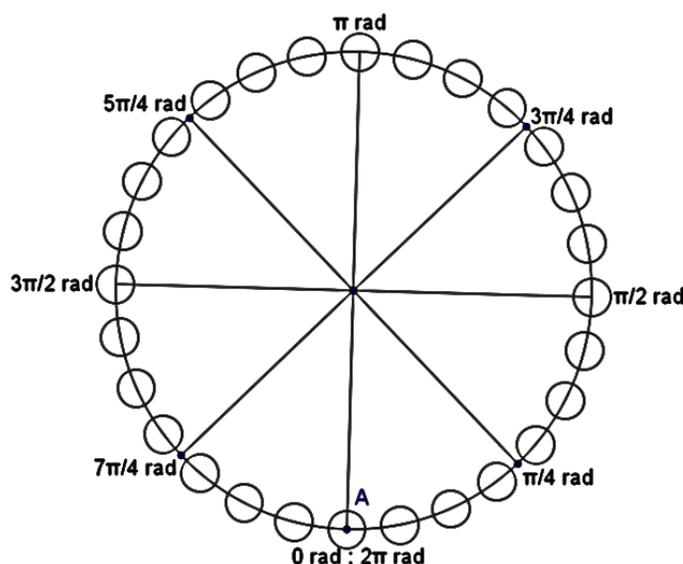


Fig. 1: Imagen simplificada de la rueda de la fortuna con 28 cápsulas, destacando la cápsula A.

- A partir de la tabla, ¿cuál es la relación entre las variables altura de la cápsula A ( $h_A$ ) y tiempo ( $t$ )? ¿Cómo la describirías? Da algunos ejemplos.
- En el plano cartesiano, marca los puntos que relacionan las variables  $h_A$  y  $t$ .
  - ¿Qué variable irá en cada eje?
  - ¿Qué criterio usarás?
  - Describe la forma del gráfico que observas.
  - ¿Crees que se pueda completar con una línea continua?
  - ¿Qué interpretación tendrían esos puntos en el contexto de la rueda de la fortuna?
- Usando el deslizador Densidad, completa la gráfica:
  - ¿Qué forma tiene?

- b. ¿Cómo se relaciona con el movimiento oscilatorio de la cápsula de la rueda de la fortuna? Puedes usar el applet para apoyar tu respuesta.

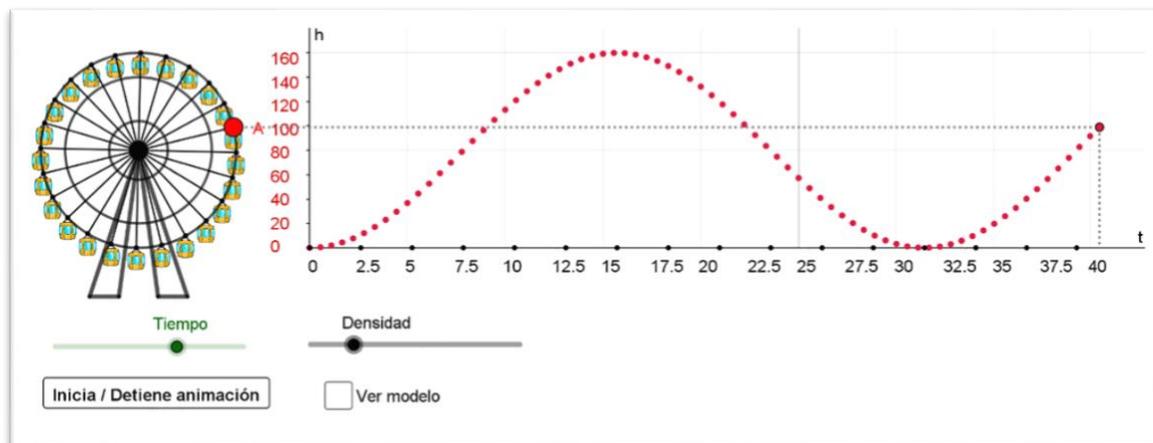


Fig. 2: Applet GeoGebra de Modelo Rueda de la fortuna

5. ¿Qué significa que la gráfica pase por el punto  $(63,75; 39,625)$ ? ¿Cuántas vueltas completas ha dado la cápsula A?
6. ¿En qué tiempos llega la cápsula A a su máxima altura en 2 vueltas completas? ¿En qué tiempos pasa por la mínima altura posible?
7. Según el contexto de la rueda de la fortuna, considera:
  - a. ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable  $hA$ ?
  - b. ¿Cuáles son los valores que puede tomar la variable  $t$ ?

### PARÁMETROS DE UNA FUNCIÓN

1. En la Figura 3, observen cuáles son los parámetros que se puede analizar de una función trigonométrica.
  - a. Para su modelo anterior, marquen la línea base de la función graficada.
  - b. Determinen el valor de la amplitud ( $A$ ), el desplazamiento vertical ( $C$ ), el periodo ( $T$ ) y el desplazamiento de fase ( $\alpha$ ).
  - c. Determinen también la frecuencia angular, considerando que  $w = \frac{2\pi}{T}$ .
  - d. Expresen algebraicamente la función seno, que describe la relación entre las variables  $hA$  y  $t$ , según el contexto de la rueda de la fortuna.

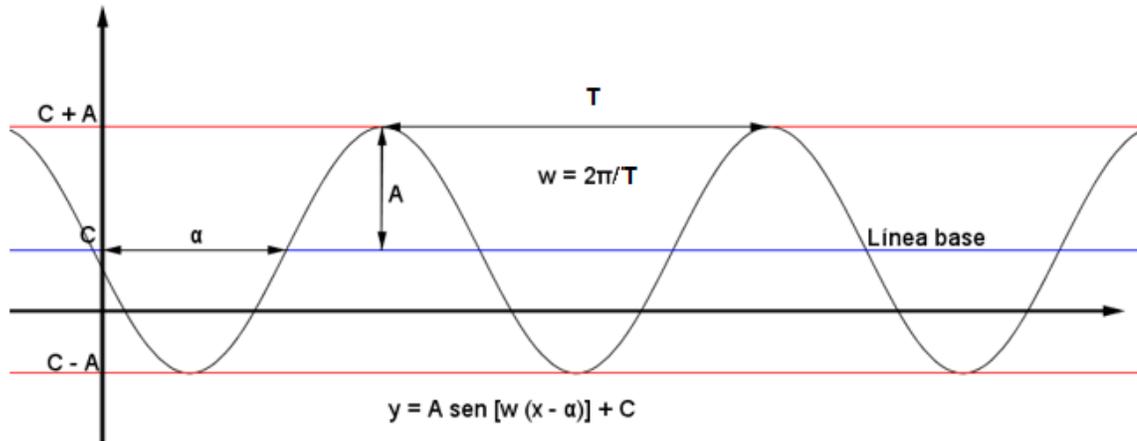


Fig. 3: Forma general de la función seno.

2. En el applet, elijan la opción Mostrar modelo algebraico y compárenlo con la representación algebraica que obtuvieron.
3. ¿Cómo se relaciona la forma algebraica con la forma gráfica de la función que modela la relación entre  $hA$  y  $t$ ?
4. Observen las dos representaciones del modelo que describe la relación entre  $hA$  y  $t$ :
  - a. ¿Cuál de ellas les parece más adecuada para describir cómo varía la altura cuando avanza el tiempo?
  - b. ¿Cuál de ellas usarían para encontrar la altura de la cápsula A cuando han pasado 150 minutos desde que comenzó a funcionar la rueda?

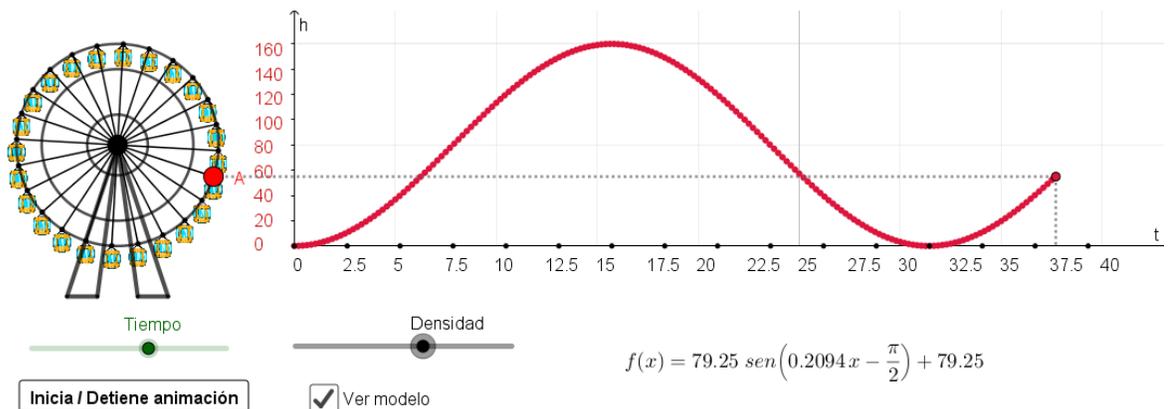


Fig. 4: Applet GeoGebra de modelo rueda de la fortuna, representación gráfica y algebraica.

5. Completen la tabla con los valores que corresponden a la altura y el tiempo de la cápsula B. Consideren que el tiempo comienza a avanzar estando la cápsula B en altura, como muestra la Figura 5.

Tabla 2: Relación entre altura y tiempo de la cápsula B.

|                                      |         |          |         |           |        |           |          |           |        |
|--------------------------------------|---------|----------|---------|-----------|--------|-----------|----------|-----------|--------|
| Tiempo en una vuelta                 | 0 min   | 3,75 min | 7,5 min | 11,25 min | 15 min | 18,75 min | 22,5 min | 26,25 min | 30 min |
| Altura de la cápsula B en una vuelta | 158,5 m |          |         |           | 0 m    |           |          |           |        |

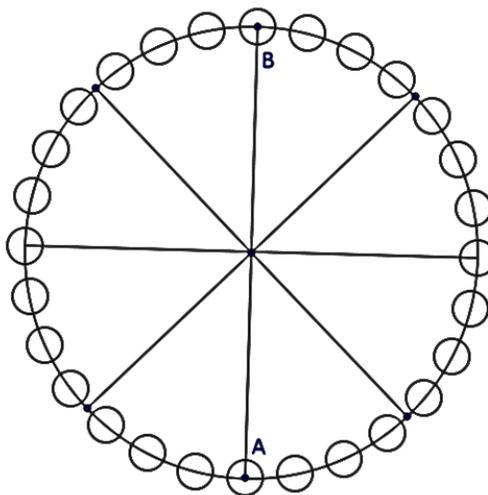


Fig. 5: Imagen simplificada de la rueda de la fortuna con 28 cápsulas, destacando las cápsulas A y B.

6. Grafiquen en el plano cartesiano anterior, la relación entre la altura de la cápsula B ( $hB$ ) y el tiempo transcurrido ( $t$ ) en dar algunas vueltas. Desde la gráfica determinen:
- La línea base de la función graficada.
  - El valor de la amplitud ( $A$ ), el desplazamiento vertical ( $C$ ), el periodo ( $P$ ) y el desplazamiento de fase ( $\alpha$ ).
  - La frecuencia angular.
  - Expresen algebraicamente la función seno que describe la relación entre las variables  $hB$  y  $t$ , según el contexto de la rueda de la fortuna.

7. Grafiquen ahora una función de la forma  $h'B(t) = A \cos(\omega t - \alpha) + C$ .
- a. Tengan presente que, en este caso, se considera el desplazamiento de fase como en la Figura 6.

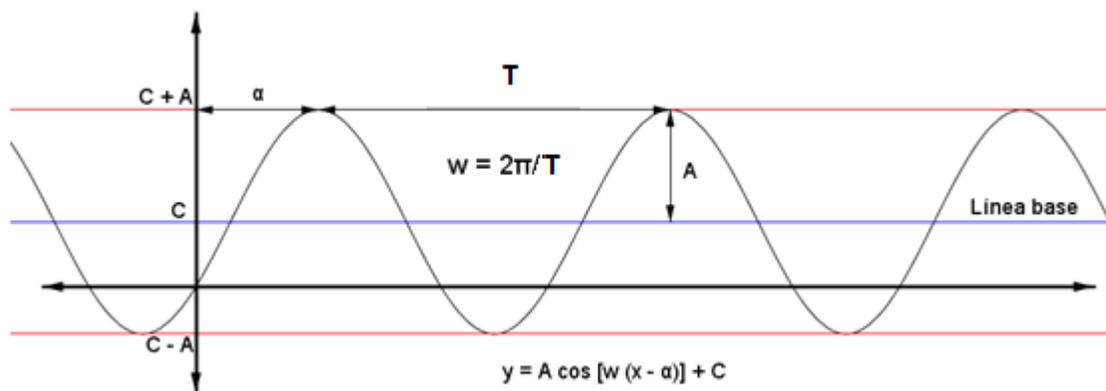


Fig. 6: Forma general de la función coseno.

8. Comparen las dos funciones  $hB$  y  $h'B$ , desde las gráficas y desde las representaciones algebraicas.
- a. ¿Cómo son las gráficas de ambas funciones? ¿Se puede afirmar que describen la misma situación?
- b. ¿Cómo son las expresiones algebraicas de ambas funciones? ¿En qué se diferencian?
- c. ¿Qué relación se puede establecer entre la función seno y la función coseno?
9. Escojan una de las representaciones obtenidas para la cápsula B y respondan:
- a. ¿Qué significa que la gráfica pase por el punto  $(37,5; 79,25)$ ? ¿Cuántas vueltas completas ha dado la cápsula B? ¿En qué vuelta va?
- b. ¿En qué tiempos la cápsula B llega a su máxima altura en 2 vueltas completas? ¿En qué tiempos pasa por la mínima altura posible?
10. En las gráficas de la cápsula A y la cápsula B hay intersecciones. Expliquen qué significan estos puntos de intersección, según el contexto de la rueda de la fortuna.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- El movimiento de las cápsulas de la rueda de la fortuna es periódico; por lo tanto, se lo puede modelar mediante una función trigonométrica. En primera instancia, se propone usar la función seno, pero en la segunda actividad se compara las funciones seno y coseno y se establece la relación entre ellas.
- Se sugiere modelar las situaciones en ambas actividades, iniciando por los datos en una tabla y luego graficando dichos datos como puntos en el plano cartesiano. A partir de ese primer acercamiento al modelo, se completa la forma gráfica y desde ahí se avanza hacia la representación algebraica.
- Al establecer los modelos algebraicos, se sugiere identificar el desplazamiento de fase –que varía entre la función seno y la función coseno– y la frecuencia angular. En este último parámetro se conjuga  $2\pi$  y el tiempo en minutos. Se recomienda registrar en todo momento las unidades de medida, de modo que los jóvenes no pierdan de vista que el seno se calcula para un ángulo.

4. Se sugiere mediar el descubrimiento de la igualdad. Para esto, se puede calcular prestando atención solo al argumento del seno, de modo de establecer que  $\frac{2\pi(x-22,5)}{30} = \frac{2\pi x}{30} + \frac{\pi}{2}$ . Por otro lado, usando algunos ejemplos específicos, cabe notar la paridad de la función.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Interpretan información, utilizando modelos que involucran funciones potencia y trigonométricas para deducir resultados.
  - Construyen modelos de situaciones que involucran funciones potencias y trigonométricas para inferir resultados en diferentes momentos.

### RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Ejemplo de una noria en funcionamiento  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales\\_didacticos/EDAD\\_4eso\\_funciones1-JS-LOMCE/noria.htm](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_4eso_funciones1-JS-LOMCE/noria.htm)
- Información de la rueda de la fortuna usada para las actividades  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://elsouvenir.com/rueda-fortuna-las-vegas/>
- Calculadora gráfica  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.desmos.com/calculator>

## Actividad 4: Movimientos cíclicos y los modelos trigonométricos

### PROPÓSITO

Los estudiantes modelan el movimiento cíclico de las mareas por medio de la función seno, bajo algunos supuestos de aproximación. Además, comparan y ajustan este modelo trigonométrico con un modelo tipo “diente de sierra”. Pueden pensar y probar sin restricciones, considerando que el error es una oportunidad para aprender y se puede mejorar, en este caso, variando la representación del modelo, ajustando según el contexto y utilizando las herramientas digitales que estén a su disposición.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 3.** Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencia de exponente entero y trigonométricas  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ , de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

### Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### LAS MAREAS

1. Lee con tu compañero el siguiente texto: “Las mareas tienen su origen en la fuerza universal de gravedad que ejercen cuerpos mutuamente entre ellos. Así, la Luna, en su recorrido alrededor de la Tierra, está ejerciendo una fuerza de gravedad a ella. Como el agua es un cuerpo líquido, el mar se deforma bajo la influencia de esta fuerza, generando una ‘barriga de agua’ que tiene su parte más alta en la posición más cercana a la Luna. En este lugar hay marea alta ‘pleamar’.

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Ciencias para la  
Ciudadanía**  
OA d y f  
3° y 4° medio



En la posición directamente opuesta, la más lejana de la Luna, también hay una ‘barriga de agua’. Esta se origina porque las masas de agua en la parte opuesta de la Tierra, menos distantes de la Luna, están más atraídas por ella, dejando también una ‘barriga de agua’ relativa, que tiene una altura más baja (con una disminución de aproximadamente 7%). Mirando atentamente el dibujo esquemático, se nota que la ‘barriga del agua’ opuesta tiene menor altura que la ‘barriga de agua’ más cercana a la Luna.

- Anota 6 palabras que consideres las más importantes del texto.
  - Compártelas con tu compañero e indica por qué las elegiste.
  - Complementa tus palabras con las que eligió tu compañero y arma una frase.
2. Lee ahora el siguiente texto: “Debido a su rotación propia, la Tierra gira dentro de las dos barrigas, acercándose y alejándose de las barrigas de agua y causando marea baja y pleamar en el mar, lo cual se nota en las playas, islas y costas de continentes. Si la Luna tuviera una posición fija frente a la Tierra, el fenómeno de marea baja y marea alta se originaría dentro de 24 horas con el siguiente ritmo: empezando de bajamar a 00:00 horas, subiendo 6 horas hasta pleamar a las 06:00 horas, bajando por 6 horas a bajamar a las 12:00 horas, subiendo otra vez por 6 horas hasta pleamar (7% menor) a las 18:00 horas y finalmente bajando por 6 horas a baja mar a las 24:00 horas. Debido a la rotación de la Luna alrededor de la Tierra, en un período de marea baja-pleamar-marea baja de 12 horas, el próximo período de 12 horas empieza 23 minutos más tarde, siguiendo el ritmo de 12 horas, siempre con un retraso de 23 min. Las alturas de pleamar sobre la marea baja dependen del lugar geográfico y, sobre todo, de la forma de la costa. En desembocaduras de ríos al mar o en fiordos, la altura de la marea es más grande que en costas estrechas. Por ejemplo, en la costa de Limón (Costa Rica), las alturas están alrededor de 0,7m; en la bahía de Fundy (Canadá) alrededor de 15m y en Castro, las alturas oscilan alrededor de 5,80m”.
- ¿De qué trata el texto? Piensa tu respuesta y habla con tu compañero.
  - ¿Qué ocurre con la marea?
  - Igual que en el caso anterior, selecciona las 6 palabras que te parezcan más importantes para describir el texto.
  - Forma con ellas una frase y compártela con tu compañero. Complementen sus respectivas frases.

- e. Prueben juntos hacer un primer modelo de la situación, utilizando conocimientos previos, como ordenar la información en tablas, hacer proyecciones para otras situaciones (dar valores para  $x$ , ver lo que ocurre con  $y$ ), graficar y probar de generalizar con una función conocida.

3. Anoten los datos que consideran importantes sobre la Figura 1.

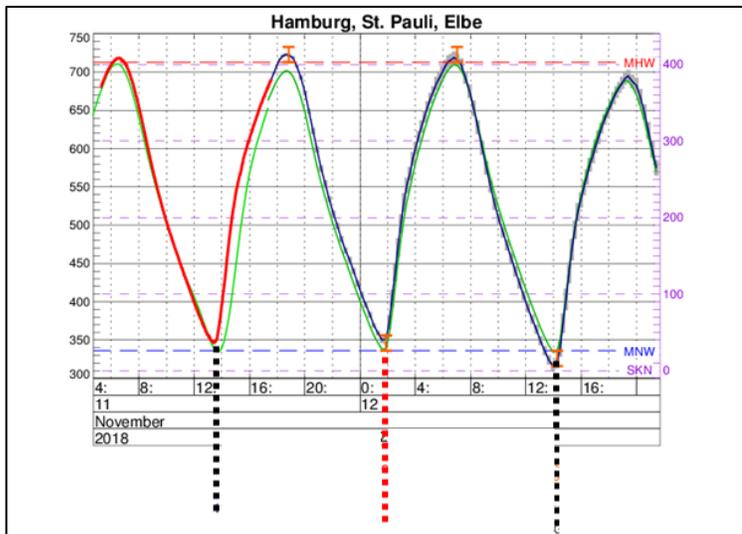


Figura 1.

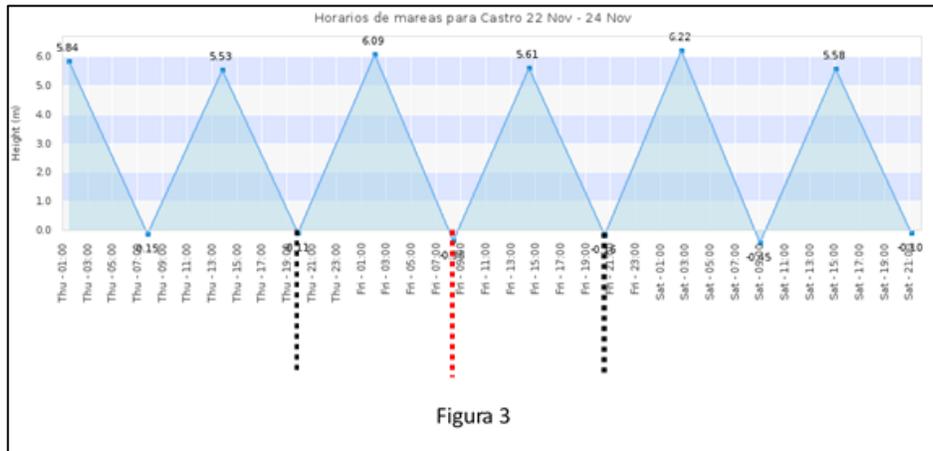
- a. ¿De qué lugar es la información?
  - b. Averigua sobre qué son los datos: tiempo, altura de las olas, trayectoria de las olas u otro.
  - c. Describe el gráfico y sus componentes a tu compañero.
4. Anoten los datos que consideran importantes sobre la figura 2.



Figura 2.

- a. ¿De qué lugar es la información?
- b. Averigua sobre qué son los datos: tiempo, altura de las olas, trayectoria de las olas u otro.
- c. Describe el gráfico y sus componentes a tu compañero.

5. Compara los modelos de las figuras 1 y 2.
  - a. ¿Qué informaciones del contexto coinciden con las representaciones gráficas y los datos en ambas figuras? Explica verbalmente a tu compañero.
  - b. ¿Qué formas aproximadas tienen las curvas que representan las mareas en las figuras 1 y 2, en el período de tiempo de 24h (marcado entre las líneas verticales punteadas de color negro)?
  - c. Considerando que las mareas con la amplitud de pleamar oscilan entre bajamar (nivel 0) y pleamar, ¿se puede modelar el fenómeno mediante una función de seno sobre el período de 24h? Argumenta con tu compañero sobre las posibilidades de modelar esta situación con la función seno.
  
6. En la figura 2 se muestra una marea de Castro con dos pleamares y dos bajamares. Las líneas punteadas marcan los períodos de aproximadamente 12 h.
  - a. Modelen el fenómeno según los datos de la figura 2, separándolo en dos períodos de 12 horas. Elaboren la tabla utilizando la función:
 
$$f(t) = a \cdot \text{sen}(k \cdot t)$$
 donde la variable  $a$  representa la amplitud del seno y la variable  $t$  representa el tiempo en horas.
  - b. ¿Qué ocurre si consideras el factor  $k = \frac{\pi}{12h}$  en el argumento del seno? Utiliza alguna herramienta digital para responder.
  - c. Con los datos aproximados de la tabla, elabora la ecuación de la marea utilizando la función del seno sobre el período de las primeras 12h ( $t = 3, 4, 6, 8, 12$  h).
  - d. Con los datos aproximados de la tabla, elabora la ecuación de la marea utilizando la función del seno sobre el período de las segundas 12h ( $t = 3, 4, 6, 8, 12$  h).
  
7. La figura 3 representa otro modelo con el cual se puede modelar aproximadamente las mareas en Castro mediante el gráfico “sierra dentada”. Determinan mediante este gráfico el nivel de la marea para las 23:00, 01:00, 02:00 y 07:00 horas, empezando con la primera línea punteada.



- a. Contrasta los niveles de la marea con el modelo con la función seno elaborado anteriormente.

- b. Considera la pleamar de 6,09m y determina el nivel de la marea para las horas correspondientes.
8. Utilizando el modelo del seno para las mareas de  $f(t) = a \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{12h} \cdot t\right)$ , ¿cómo se puede incorporar algebraicamente en el modelo el retraso de aproximadamente 20min en cada período de 12h?

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. En las actividades asociadas a las mareas y las figuras 1 y 2, no se considera el retraso de pleamar de 23 minutos que ocurre cada 12 horas; en el modelo asociado a la figura 3 sí se considera ese retraso. Se sugiere pedir a los estudiantes más avanzados que incorporen el hecho de que siempre ocurre un retraso de 23 minutos hasta la próxima pleamar y que comparen con el modelo dado en la figura 3. Deben darse cuenta de que se requiere suposiciones y simplificaciones en los modelos que describen el fenómeno de las mareas y que se puede ajustar los modelos según estas suposiciones.
2. La ocurrencia de las mareas es un fenómeno periódico. Con las funciones del seno o del coseno, los alumnos conocen por primera vez una función que puede modelar fenómenos periódicos, que se articulan con oscilaciones u ondas armónicas. No todos los fenómenos periódicos son modelables con estas funciones trigonométricas. La “naturaleza matemática” de la función del seno o del coseno tiene la propiedad de que sus valores “oscilan” alrededor del valor “0” (“nivel 0”) y toman simétricamente valores positivos y negativos.
3. Se sugiere incluir otras zonas costeras de Chile; por ejemplo, San Antonio. El gráfico muestra el cambio de las mareas en un día completo.

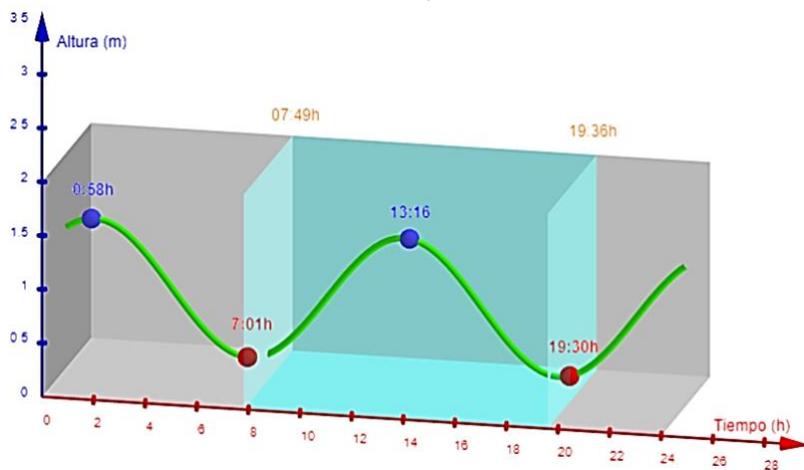


Fig. 2: Gráfico de mareas en un día en San Antonio,

Se puede describir este modelo gráfico mediante la expresión algebraica aproximada  $h(t) = 0,6 \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t + 1\right) + 0,8$ , donde  $h(t)$  se expresa en metros. Los jóvenes pueden comparar con los modelos anteriores y evaluar la pertinencia de los diferentes modelos según el contexto y lo que quieren expresar.

4. En el fenómeno de las mareas, las alturas del mar oscilan sobre el “nivel 0” y toman solamente valores positivos hasta “pleamar” para bajar después al “nivel 0” (“mares baja”). Debido a esto, en vez de 24 horas, se considera dos semiperíodos de aproximadamente 12h, lo que se puede modelar con el seno “positivo”. Además, se debe respetar que la segunda pleamar tiene una altura que está 7% debajo la primera.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Interpretan información, utilizando modelos que involucran funciones potencia y trigonométricas para deducir resultados.
  - Comparan modelos que involucran funciones potencia o trigonométricas con otros modelos que también describen la situación, para determinar sus fortalezas y debilidades.
  - Varían parámetros de modelos existentes que involucran funciones potencia y trigonométricas para comparar resultados.

### RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- SHOA Pronóstico de mareas  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.shoa.cl/php/mareas.php>
- Tabla para las mareas  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://tablademareas.com/cl>
- Applet seno Geogebra  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=SCIkI3ZijGc>
- Estudio teórico inicial  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.zweigmedia.com/MundoReal/trig/trig1.html>

## Actividad de evaluación

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 3.** Construir modelos de situaciones o fenómenos de crecimiento, decrecimiento y periódicos que involucren funciones potencia de exponente entero y trigonométricas  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ , de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

**OA f.** Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

### Indicadores de evaluación

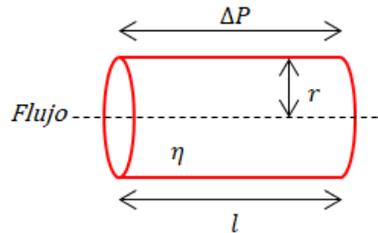
- Interpretan información, utilizando modelos que involucran funciones potencia y trigonométricas para deducir resultados.
- Varían parámetros de modelos existentes que involucran funciones potencia y trigonométricas para comparar resultados.
- Describen modelos existentes que involucran funciones potencia y trigonométricas para relacionar partes y características de la situación.
- Construyen modelos de situaciones que involucran funciones potencias y trigonométricas para inferir resultados en diferentes momentos.
- Comparan modelos que involucran funciones potencia o trigonométricas con otros modelos que también describen la situación, para determinar fortalezas y debilidades de estos.

**Duración:** 3 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 3, cada una por sí misma o en conjunto. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible.

## LA LEY DE POISEUILLE

1. La ley de Poiseuille se utiliza para determinar el flujo (caudal o gasto) de un fluido viscoso que circula por una tubería de radio  $r$  y longitud  $l$ , bajo una diferencia de presión existente entre los extremos de la tubería. Dicha ley señala que:



$$\text{Flujo} = \frac{\Delta P \cdot \pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot l} = \frac{\pi}{8 \cdot \eta} \cdot \Delta P \cdot \frac{r^4}{l}$$

Fig. 1: Tubería de radio  $r$ .

*Flujo*: Corresponde al flujo o caudal  $\left(\frac{m^3}{s}\right)$ .

$\Delta P$ : Diferencia de presión del fluido entre dos puntos de la tubería  $\left(\frac{kg}{m \cdot s^2}\right)$ .

$r$ : Radio interior del tubo ( $m$ ).

8: El factor que resulta de integrar la velocidad.

$\eta$ : Viscosidad del fluido  $\left(\frac{kg}{m \cdot s}\right)$ .

$l$ : Longitud entre dos puntos de la tubería ( $m$ ).

- a. ¿Cuál es la interdependencia entre las variables flujo y radio?
  - b. ¿Qué tan rápido crece la variable flujo cuando crece la variable radio?
  - c. ¿Conoces alguna función que responda a esta relación de crecimiento?
2. Considera cierto fluido que transita por un tubo de 1m de largo. La diferencia de presión en los extremos del tubo corresponde a  $16\,000 \left(\frac{kg}{m \cdot s^2}\right)$  (lo que equivale a 120 mmHg). Además, se sabe que la viscosidad del fluido es de  $0,096 \left(\frac{kg}{m \cdot s}\right)$  y que el radio del tubo es 0,0001 (m).
    - a. ¿Cuál es el flujo del fluido bajo estas condiciones?
    - b. ¿Qué ocurre con el flujo si el radio del tubo aumenta al doble?
    - c. ¿Qué ocurre si el radio del tubo aumenta al triple de la medida inicial?
    - d. ¿Qué ocurre si el radio del tubo disminuye a la mitad?

3. Completa la tabla que muestra la relación entre el radio del tubo y el flujo del fluido, manteniendo constantes todos los demás valores.

a. Tabla 1: Relación entre el flujo de un fluido y el radio de la tubería por la que pasa.

|              |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--------------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| <i>radio</i> |  |  |  |  |  |  |  |  |
| <i>flujo</i> |  |  |  |  |  |  |  |  |

- Grafica los puntos de la tabla anterior y describe la forma de la gráfica.
- Relaciona la forma de la gráfica con otras funciones que conozcas.
- Indica cuál es la diferencia con otras funciones que tienen relaciones de crecimiento similares.

**LAS ARTERIAS**

1. Las arterias cumplen un rol vital en nuestro organismo, por lo que es primordial que funcionen en óptimas condiciones. Una oclusión arterial implica que se reduce el radio arterial (en un tramo); puede ser leve o grave, dependiendo del porcentaje de obstrucción de la arteria, que puede llegar a cerca del 100% e impedir el flujo sanguíneo. ¿Qué consecuencias crees que puede traer a la salud una situación tan extrema?



Fig. 2: Flujo arterial.

Considerando la ley de Poiseuille para este caso, se tiene que la resistencia y el flujo vienen dados por los modelos:

$$R = k \cdot l \cdot r^{-4}$$

$$F = 16\,000 \left( \frac{kg}{m \cdot s^2} \right) \cdot k \cdot r^4$$

- Explica qué representa cada término de la expresión anterior, simplificada. (Nota: la resistencia es proporcional al largo del tubo e inversamente proporcional a la cuarta potencia del radio).
  - ¿Cuál es la relación de interdependencia entre el flujo sanguíneo y el radio de la arteria?
2. Considera la Figura 3, que muestra distintos niveles de oclusión de una arteria. El porcentaje corresponde a la disminución del radio de la arteria.

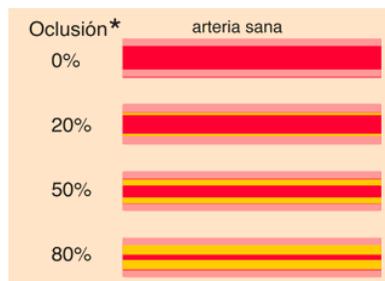


Fig. 3: Esquema de oclusión arterial creciente.

Extraído de <https://www.curriculumnacional.cl/link/http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/ppois2.html>

- a. Describe lo que entiendes de estas frases: Un porcentaje de oclusión de 20% implica que el radio de la arteria se redujo en un 20%. Esto significa que el nuevo radio de la arteria es 0,8 veces el valor inicial o  $0,8r$ . Asimismo, cuando el porcentaje de oclusión es del 80%, la arteria tiene un radio 0,2 veces el valor original o  $0,2r$ .
- b. Completa la tabla con algunos valores del flujo sanguíneo a medida que aumenta el porcentaje de oclusión.

b.

c. Tabla 2: Relación entre el flujo sanguíneo y el radio de una arteria, con aumento de oclusión.

| % Oclusión | 0%   | 20%  | 50% | 80% |
|------------|--|--|-----|-----|
| radio      | $r$  | $0,8 r$  |     |     |
| flujo      | $16\,000 \left(\frac{kg}{ms^2}\right) \cdot k \cdot r^4$ | $16\,000 \left(\frac{kg}{ms^2}\right) \cdot k \cdot (0,8 r)^4$ |     |     |

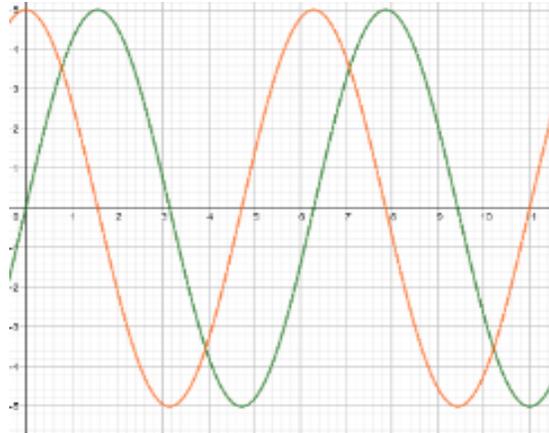
¿Cómo varía el flujo sanguíneo en función de la disminución porcentual del radio de la arteria?

### FUNCIONAMIENTO MUSCULAR

- Supón que se desea determinar el flujo sanguíneo en una arteria muscular y se sabe que  $k = 0,41 \left(\frac{s}{kg}\right)$ .
  - Reemplaza el valor de  $k$  en la tabla 2.
  - Considera el radio de la arteria de 4 mm.
  - Luego estudia cómo varía el flujo sanguíneo si la arteria se va ocluyendo porcentualmente, como en la tabla 2.
- Grafica la relación entre el radio de la arteria muscular y el flujo sanguíneo a medida que aumenta la oclusión.
  - Traza la línea que, a tu juicio, aproxime mejor la relación entre los puntos marcados.
  - ¿Qué sentido podrías darles a todos los puntos sobre la línea marcada?
  - ¿Es denso el conjunto solución que corresponde al dominio de la función?
  - ¿Qué implica esto en la gráfica de la función?
- Si el radio de la arteria disminuye a la mitad, ¿cuánto ha disminuido el flujo sanguíneo?
  - Aproximadamente, ¿con qué reducción del radio de la arteria el flujo disminuye a cerca de la mitad?
  - ¿Cuál dirías que es la diferencia entre una función entre variables con y sin contexto?
  - ¿Cuándo podemos hablar de un modelamiento matemático?

**COMPORTAMIENTO SINUSOIDAL**

1. El siguiente sistema de coordenadas muestra los gráficos de dos funciones trigonométricas  $f$  y  $g$  (de color anaranjado y verde respectivamente).



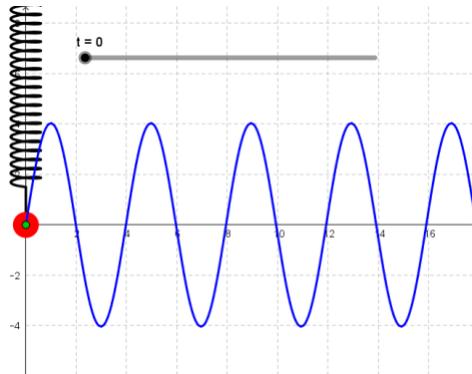
- d. Determina la ecuación de las funciones  $f$  y  $g$ . Ayúdate con la tabla y considera  $y = 5 \cdot \text{sen}(x)$  con  $x = \frac{2\pi}{T} \cdot t$ ;  $T$  es un tiempo cualquiera, pero fijo.

|                             |   |                 |               |               |                 |                |                  |     |
|-----------------------------|---|-----------------|---------------|---------------|-----------------|----------------|------------------|-----|
| $t$                         | 0 | $\frac{T}{12}$  | $\frac{T}{4}$ | $\frac{T}{2}$ | $\frac{7T}{12}$ | $\frac{3T}{4}$ | $\frac{11T}{12}$ | $T$ |
| $x$                         | 0 | $\frac{\pi}{6}$ |               |               |                 |                |                  |     |
| $y = 5 \cdot \text{sen}(x)$ | 0 | 2,5             |               |               |                 |                |                  |     |

- e. ¿Qué relación hay entre  $t = 0$ ,  $t = \frac{1}{4}T$ ,  $t = \frac{1}{2}T$ ,  $t = \frac{3}{4}T$  y  $t = T$  y un ciclo de la función  $g$  (color verde)?
- f. ¿Cuál es la amplitud de ambas funciones?
- g. ¿Cuáles son las características en común de las gráficas  $f$  y  $g$ ?
2. Compara los gráficos de  $f$  y  $g$ , mirando los vértices y los puntos de intersección con el eje  $OX$ .
- a. ¿Qué relación se puede observar entre ellos?
- b. Expresa la función  $f$  (color anaranjado) en términos de la función  $g$  (color verde).

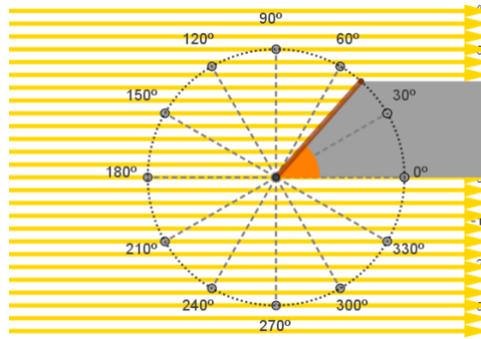
## EL RESORTE

1. Consideremos la oscilación armónica de un péndulo de resorte elástico<sup>6</sup> como se muestra en la figura siguiente. El eje  $OX$  representa la línea de equilibrio del sistema.

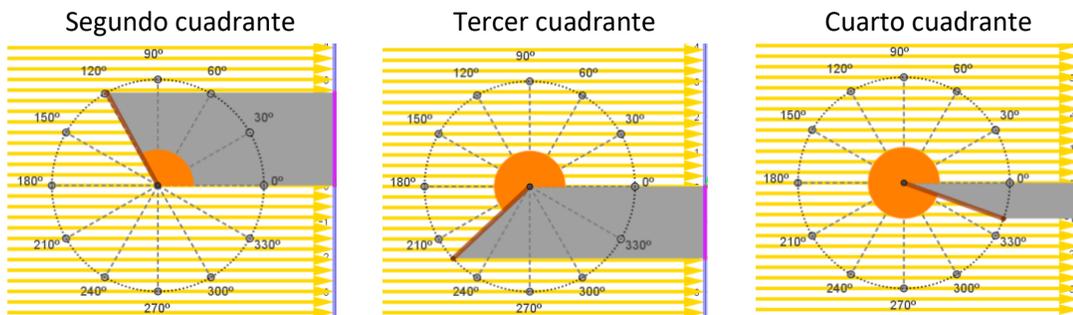


- Usa una función trigonométrica para elaborar la ecuación funcional de la oscilación del resorte que tiene una amplitud  $y_0$  cualquiera.
  - Considerando que las oscilaciones dependen del tiempo  $t$ , determina las elongaciones de un resorte de período de  $T = 4$  (s) con amplitud de  $y_0 = 4$  cm para los siguientes valores de  $t$ :  $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}$  y  $T$ , con  $x = \frac{2\pi}{T} \cdot t$ .
  - Considera una oscilación armónica con los siguientes parámetros: la amplitud es la mitad y el período es el doble de los usados en la actividad b. Conjetura acerca del cambio que se produce en la forma del gráfico de la actividad b.
  - Con herramientas digitales, elabora el gráfico con los parámetros de la actividad b. y verifica o rechaza las conjeturas que formulaste en c.
2. Observa la figura y según las posibilidades, elabora ya sea de forma manual o utilizando un programa computacional, el movimiento de una varilla gruesa alrededor de un círculo. Para esto necesitas una varilla de una unidad de largo, la cual se ve en la imagen de color café, esta debe estar fija en uno de sus extremos y que permita girarla en sentido antihorario. Requiere de una fuente de luz con rayos lumínicos paralelos en la dirección que indican las flechas amarillas (hacia la derecha) y durante la rotación de la varilla, esta proyecta su sombra (segmento rosado) a una pared (eje vertical azul), utiliza una linterna para ver el efecto del movimiento de la varilla reflejado en un plano cartesiano que se ubica al lado derecho del círculo. En esta representación, consideraremos el origen del sistema cartesiano ubicado a la altura del extremo fijo de la varilla.

<sup>6</sup> Se denomina resorte elástico a un objeto que es capaz de almacenar energía y desprenderse de ella sin sufrir deformación permanente cuando cesan las fuerzas a las que es sometido (adaptado desde <https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikipedia.org/wiki/Resorte>).



- Cuando la varilla rota circularmente, proyecta una sombra en la pared azul. ¿Qué movimiento describe la sombra?
- ¿Para cuáles ángulos el largo de la sombra proyectada es mínima, es máxima o tiene la mitad del largo de la varilla? Considera los ángulos que muestra en la figura.
- Si consideramos que el extremo de la varilla realiza la rotación por los cuadrantes de ordenada negativa ( $3^{\circ}$  y  $4^{\circ}$  cuadrantes), este valor se debe interpretar como la longitud de la sombra proyectada, pero en sentido contrario a la sombra proyectada en el primer y segundo cuadrantes.



- Entonces, ¿qué función trigonométrica permite modelar todos los valores de la longitud de la sombra?
- Si se considera el ángulo de rotación en radianes y se lo denota por  $x$ , elabora la expresión de la función  $g(x)$  y grafica la función para  $x \in [-2\pi, 4\pi]$ , considerando el largo de la sombra  $l$  de la varilla proyectada en la pared con  $l_0 = 1$ .

## PAUTA DE EVALUACIÓN

| Criterios de evaluación  | Niveles de logros     |  |  |
|--|-----------------------|--|--|
|  | Completamente logrado | Se observa aspectos específicos que pueden mejorar | No logrado por ausencia o no se puede entender en absoluto |
| Describen las variables y constantes de un modelo.   |                       |  |  |
| Completan tablas, valorando el modelo según parámetros dados.  |                       |  |  |
| Ajustan dominio y recorrido según el contexto de la situación.   |                       |  |  |
| Representan datos de una situación dada para ajustar y obtener un modelo aproximado.                           |                       |  |  |
| Varían las condiciones iniciales para predecir el comportamiento del modelo.                                   |                       |  |  |
| Identifican funciones trigonométricas a partir de gráficos dados.  |                       |  |  |
| Describen características de funciones trigonométricas, utilizando términos como ciclo, amplitud y frecuencia. |                       |  |  |
| Elaboran modelos, utilizando las funciones trigonométricas.  |                       |  |  |
| Relacionan el movimiento circular y la sombra producida por una función trigonométrica.                        |                       |  |  |

# Unidad 4

## Unidad 4: Geometría con coordenadas

### Propósito

Los estudiantes resuelven problemas, utilizando objetos geométricos como rectas y circunferencias en el plano. Podrán representar las rectas y circunferencias de diferentes modos, apoyados en conocimientos anteriores. La pregunta orientadora de esta unidad es: ¿Cómo me ayudan las representaciones de objetos y relaciones para resolver problemas?

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

## Actividad 1: Costos operacionales e ingresos con rectas

### PROPÓSITO

Los estudiantes exploran situaciones que se puede modelar mediante ecuaciones de la recta de ingreso y costo, en un solo gráfico, atendiendo a la noción de punto de equilibrio en el ámbito de pérdidas o ganancias, tanto en forma manual como utilizando herramientas digitales.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

### Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

### DESARROLLO

#### LA MAQUINA RETROEXCAVADORA

Es usual que la maquinaria para la construcción (retroexcavadoras, cargadores, motoniveladoras, entre otras) se arriende por montos diarios, semanales o mensuales. Quien ofrece el servicio tiene costos operacionales por los gastos de mantención de la máquina. Además, la maquinaria se deprecia a medida que pasan los años y eso se puede analizar. La siguiente tabla muestra costos horario y margen de contribución por hora de arriendo de una retroexcavadora:

Tabla 1: Precio de arriendo de retroexcavadora<sup>7</sup>.

|                           |            |         |          |
|---------------------------|------------|---------|----------|
| (+) Arriendo/hora         | UF 0,6878  |         | \$16 002 |
| Operación                 | Rend lt/hr | Precio  |          |
| (-) Combustibles sin IVA  | 3          | \$564   | \$1 692  |
| (-) Aceites y lubricantes | 0,040      | \$3 780 | \$151    |
| (-) Torque e hidráulica   | 0,092      | \$5 040 | \$461    |
|                           | Desg/hr    | Precio  |          |

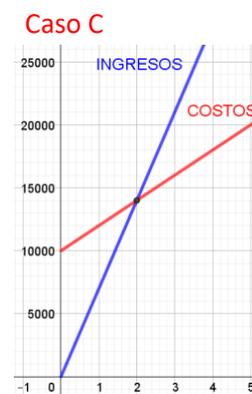


<sup>7</sup><https://www.curriculumnacional.cl/link/http://repositorio.uchile.cl/bitstream/handle/2250/132849/Plan-de-negocio-de-una-empresa-de-arriendo-de-maquinaria-para-.pdf?sequence=1>

|                     |          |             |          |
|---------------------|----------|-------------|----------|
| (-) Neumáticos      | 0,00025  | \$1 890 000 | \$473    |
| (-) Repuestos/hr    |          |             | \$320    |
| (=) Costo operación |          |             | \$3 097  |
|                     |          |             |          |
| Margen/hora         | UF 0,555 |             | \$12 905 |

- Según la información del contexto para una retroexcavadora, si  $x$  corresponde al número de horas:
  - ¿Cuál es la ecuación de la recta que permite determinar los costos operacionales de la retroexcavadora según la cantidad de horas que se use?
  - ¿Pertenece el punto  $(0,0)$  a la recta según el contexto descrito?
  - Grafica la situación anterior en el plano cartesiano.
  - ¿En qué cuadrante del plano se grafica la recta? ¿Por qué?
  - ¿Cómo es la pendiente de la recta en este caso? ¿Por qué debe ser así?
- Según la información del contexto para una retroexcavadora, si  $x$  corresponde al número de horas, ¿cuál es la ecuación que permite determinar los ingresos por arrendarla según la cantidad de horas que se use?
  - Grafica la situación anterior en el plano cartesiano.
  - ¿En qué cuadrante del plano se grafica la recta? ¿Por qué?
  - ¿Cómo es la pendiente de la recta en este caso? ¿Por qué es así?
- Las máquinas se van desvalorizando por el uso al pasar el tiempo. Una máquina nueva que costó aproximadamente \$19 980 000, al pasar los años ya no vale lo mismo. Imagina que la maquinaria en cuestión se desvaloriza \$400 000 cada año desde su valor original nuevo.
  - ¿Cuál sería la ecuación que permite obtener la depreciación?
  - Grafica esa situación en el plano cartesiano.
  - ¿En qué cuadrante del plano se grafica la recta? ¿Por qué?
  - ¿Cómo es la pendiente de la recta en este caso? ¿Por qué debe ser así?
  - ¿Cómo se interpreta el coeficiente de posición en este caso?
- Vuelve al punto 1) y 2) y grafica ambas ecuaciones con alguna herramienta digital.
  - ¿Qué sucede con las rectas? ¿Cómo se despliegan en el gráfico? Describe.
  - Si la retroexcavadora se arrienda por 6 horas, ¿cuánto dinero se recibe? ¿Cuál es la ganancia efectiva considerando los costos?
  - Si se necesita obtener una ganancia efectiva de \$156 923, ¿por cuántas horas debería arrendarse la máquina?
  - ¿Tienen algún punto en común? ¿Cómo se puede interpretar esto?
  - ¿Cómo se puede interpretar la situación en términos de pérdidas o ganancias?
  - ¿Se puede hablar de un punto de equilibrio en este caso?

5. Considera ahora una nueva situación en la que se agrega algunos gastos operacionales fijos de \$6 000. Además, por una estrategia de mercado, el dueño decide bajar el costo de arriendo a \$5 000 la hora. Grafica la nueva situación con alguna herramienta digital.
- ¿Qué sucede con las rectas ahora? ¿Cómo se despliegan en el gráfico?
  - Si la retroexcavadora se arrienda por 6 horas, ¿cuánto dinero se recibe? ¿Cuál es la ganancia efectiva, considerando los costos?
  - Si se necesita obtener una ganancia efectiva de \$32 060, ¿por cuántas horas debería arrendarse la máquina?
  - ¿Tienen las rectas algún punto en común? ¿Cómo se puede interpretar esto?
  - ¿Cuál es el punto de equilibrio?
  - ¿Cómo se puede interpretar la situación en términos de pérdidas o ganancias?
  - Si comparas esta situación de arriendo con la primera (punto 1), ¿qué ventajas o desventajas se puede observar? ¿Cuál es una mejor estrategia?
6. En el contexto de arriendo de una maquinaria, ¿cómo se interpreta lo que sucede en cada uno de los siguientes gráficos (horas versus dinero) presentados?



### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Es importante que comprendan que se puede modelar los costos operacionales (punto 1) con una recta que pasa por los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 3\ 097)$ . Así, la pendiente es el valor 3 097 y, dado que es positiva, implica una orientación con ángulo menor a  $90^\circ$  respecto del eje X. En este caso, la recta  $y_c = 3\ 097x$  pasa por el origen.
- Aunque se da énfasis a la ecuación de la recta como objeto matemático, es relevante preguntarse por cuáles valores de  $x$  son pertinentes; los alumnos deben inferir que, de acuerdo con el contexto, no tiene sentido hablar de horas “negativas”.
- Se puede agregar otras preguntas para obtener los costos de la operación según diferentes horas de arriendo de la retroexcavadora. Así se refuerza la comprensión de la situación propuesta.

4. En la actividad relacionada con la retroexcavadora, se propone que busquen la ecuación de la recta para los ingresos de la operación acorde al número de horas de arriendo de la misma. Aquí la recta pasa por los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 16\ 002)$  y la pendiente ahora es 16 002, también positiva, pero con una inclinación mayor que la recta de los costos. En este caso, la recta  $y_i = 16\ 002x$  pasa por el origen.
5. Luego, se propone una situación algo diferente: el concepto de devaluación del precio de una retroexcavadora. Por ello, la recta que representa la situación tiene pendiente negativa y corta el eje Y en el valor correspondiente al precio original de la máquina cuando se compra. En este caso, la recta es  $y = -400\ 000x + 19\ 980\ 000$ .
6. Proponga que usen herramientas digitales para graficar las ecuaciones de los costos operacionales y de los ingresos por concepto de arriendo. Lo primero que se puede observar es que la ecuación de los costos va por “debajo” de la ecuación de los ingresos, lo que es un buen indicador de que el negocio debería funcionar; es lo que produce la ganancia o margen de la operación.
7. Una pregunta clave es que comparen situaciones y vean cuál es más conveniente. Se propone que los jóvenes discutan al respecto, ya que en el primer modelo se produce ganancia desde el principio, pero en el segundo modelo existe un costo relacionado con ahorro como resguardo en caso de que la máquina sufra un desperfecto; no obstante, el arriendo por hora es considerablemente menor.
8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Explican las respuestas relacionadas con problemas sobre rectas y circunferencias.
  - Describen situaciones mediante ecuaciones analíticas de rectas o circunferencias.
  - Elaboran ecuaciones de rectas a partir de la pendiente y las coordenadas de un punto dado.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Punto de equilibrio  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.slideshare.net/licmata/punto-de-equilibrio-2-ecuaciones-2-incgnitas>
- Crecimiento lineal y ecuación de la recta  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/algebra-basics/alg-basics-graphing-lines-and-slope/alg-basics-writing-slope-intercept/v/graphs-using-slope-intercept-form>
- Ecuaciones lineales y punto de equilibrio  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=zWr64MoJri0>
- Crecimiento lineal y ecuación de la recta  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/algebra-basics/alg-basics-graphing-lines-and-slope/alg-basics-writing-slope-intercept/v/graphs-using-slope-intercept-form>

## Actividad 2: Puntos de encuentro en circunferencias

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes identifiquen los puntos de intersección de dos circunferencias ubicadas en un plano cartesiano, usando la geometría analítica para contar con las coordenadas exactas desde un punto de referencia dado. Se propone un trabajo con un sentido cotidiano para que contextualicen la geometría y valoren el álgebra en problemas de esta naturaleza, más allá del uso habitual de fórmulas.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

### Actitudes

- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### REUNIÓN DE AMIGOS

Discutan la siguiente situación y resuelvan los diferentes problemas planteados: Dos amigos, Clara y Fabricio, desean reunirse para almorzar. Ambos trabajan en Temuco, pero la congestión vehicular a la hora del almuerzo los obliga a elegir un lugar cercano a ambos trabajos y así no destinar tanto tiempo a trasladarse.

Clara trabaja cerca del Hospital Regional y estima que puede trasladarse hasta 300 m caminando desde su trabajo.

Fabricio se siente más cansado y dice que puede desplazarse hasta 200 m caminando desde su trabajo, que queda muy cerca del Servicio de Registro Civil.

Como referente, hay aproximadamente 210m desde el Hospital Regional hasta la Avenida Caupolicán en línea recta, mientras que desde el Servicio de Registro Civil hay cerca de 130m en línea recta hasta la avenida Caupolicán.

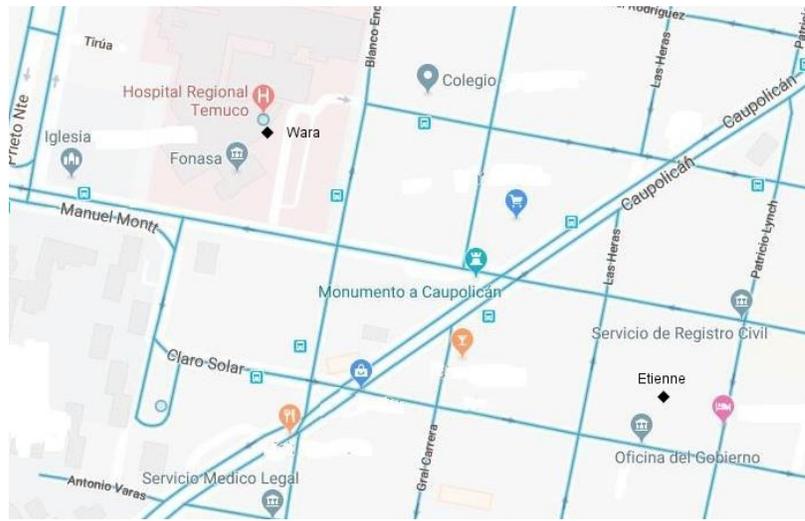


Fig. 1: Mapa de un sector de Temuco, adaptado de Google Maps.

1. Escojan una escala adecuada y marquen en la Figura 1 el sector por el que Clara está dispuesta a trasladarse.
  - a. ¿Qué forma tiene ese sector?
  - b. ¿Cuál es el centro?
  - c. Describan la distancia desde el trabajo de Clara hasta cualquier punto del sector marcado.
  - d. Remarquen la distancia máxima a la que Clara se podría trasladar. ¿Qué forma tiene?
2. Marquen en la Figura 1 el sector por el que Fabricio está dispuesto a trasladarse.
  - a. Respondan las mismas preguntas anteriores para este caso.
3. En la Figura 1, marquen el sector en el que podrían juntarse Clara y Fabricio, considerando sus restricciones para trasladarse desde sus trabajos.
4. Analizando los restaurantes disponibles en la zona, solo encuentran opciones si ambos se trasladan lo máximo posible deseado.
  - a. Marquen en la Figura 1 todas las opciones posibles, considerando los traslados máximos de cada uno.
  - b. ¿Cuántos puntos posibles de encuentro hay entre ambos?
  - c. Geométricamente, ¿cómo se interpretan estos puntos?
5. ¿Qué ecuación describe todos los puntos que se encuentran a una distancia de 300 m del trabajo de Clara?
  - a. Ubiquen el centro de un plano cartesiano en el trabajo de Clara, ese será el referente.
  - b. Elijan un punto cualquiera  $(x, y)$  a 300m del trabajo de Clara.

- c. Determinen la distancia entre el trabajo de Clara y el punto seleccionado. Expresen la distancia de forma algebraica.
  - d. La expresión algebraica obtenida, ¿sirve para describir la distancia de cualquier punto ubicado a 300m del trabajo de Clara?
6. Escriban la ecuación que describe todos los puntos que se encuentran a una distancia de 200m del trabajo de Fabricio. Esta vez, consideren el trabajo de Fabricio en el centro del plano cartesiano.
  7. ¿Qué ajuste podrían hacer a las ecuaciones anteriores si quisieran usar un único plano cartesiano?
    - a. Consideren el plano cartesiano ubicado, como se muestra en la Figura 2.
    - b. Aproximadamente, ¿cuáles son las coordenadas del trabajo de Clara y de Fabricio, según este referente?



Fig. 2: Mapa de un sector de Temuco, con un sistema de referencias dado.

8. Consideren el plano cartesiano que se muestra en la Figura 2, ¿qué ecuación describe todos los puntos que se encuentran a una distancia de 300m del trabajo de Clara?
  - a. Elijan un punto cualquiera  $(x, y)$  a 300m del trabajo de Clara.
  - b. Determinen la distancia entre el trabajo de Clara y el punto seleccionado. Expresen la distancia de forma algebraica.
  - c. La expresión algebraica obtenida, ¿sirve para describir la distancia de cualquier punto ubicado a 300 m del trabajo de Clara, con relación al plano cartesiano señalado?
  - d. Compara tus resultados con uno de tus compañeros y anota las diferencias en un color diferente.
9. Usando el plano cartesiano ubicado, como en el punto anterior, ¿qué ecuación describe todos los puntos que se encuentran a una distancia de 200m del trabajo de Fabricio?
  - a. Elijan un punto cualquiera  $(x, y)$  a 200 m del trabajo de Fabricio.
  - b. Determinen la distancia entre el trabajo de Fabricio y el punto seleccionado. Expresen la distancia de forma algebraica.

- c. La expresión algebraica obtenida, ¿sirve para describir la distancia de cualquier punto ubicado a 200 m del trabajo de Fabricio, con relación al plano cartesiano señalado?
- d. Compara tus resultados con uno de tus compañeros y anota las diferencias en un color diferente.
10. En el plano cartesiano, ¿qué ocurre con las dos circunferencias dibujadas, la de Clara y la de Fabricio?
- ¿Cómo se interpreta la intersección de las dos circunferencias en el contexto del problema?
  - ¿Cómo se obtiene algebraicamente las coordenadas de los puntos de intersección de las circunferencias?
  - ¿Por qué la intersección de ambas circunferencias, algebraicamente, da una recta que pasa por dichos puntos?
  - ¿Cómo se obtiene y cómo se interpreta en este problema la intersección de la recta anterior con una de las circunferencias?
  - ¿Varía su respuesta anterior si prueban intersectando la recta con la otra circunferencia?
  - Comprueba comparando con los resultados de tus compañeros que los puntos de intersección sean correctos.
11. ¿Cuáles son las coordenadas exactas en las que se encuentran los dos posibles restaurantes en los que se podría reunir Clara y Fabricio, según el plano cartesiano de la Figura 2?
12. Si la representación gráfica de la situación de los dos amigos es la que muestra la Figura 3, ¿qué condición cambió entre ellos: el lugar de trabajo o la distancia a la que se desean desplazar? Argumenten y determinen el nuevo punto de intersección de las circunferencias.



Fig. 3: Mapa de un sector de Temuco, con un sistema de referencias dado.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se recomienda verificar al inicio que los estudiantes distinguen entre un círculo y una circunferencia, dado que primero se les solicita identificar la región que se forma al interceptar dos círculos, que tiene infinitos puntos en este caso. Luego se les pide interceptar dos circunferencias, por lo que la respuesta se reduce solo a dos puntos. Para obtener la circunferencia, se debe hablar de las distancias máximas que cada amigo está dispuesto a avanzar desde sus trabajos respectivos.
2. Al comienzo no se cuenta con un sistema de referencia; por ende, para dibujar los radios, tienen que extraer la información del contexto, donde se señala la distancia aproximada entre dos puntos en la realidad. Por ejemplo, si la distancia en línea recta entre el hospital y Caupolicán es de 210m en la realidad, entonces deben medir con una regla el segmento que une los dos puntos en la Figura 1 y luego encontrar la escala adecuada, usando la regla de proporcionalidad directa.
3. Durante las actividades, se les pide obtener ecuaciones de circunferencia. Al principio, se trata de dos ecuaciones y cada una está centrada en el origen de un plano cartesiano, por lo que aplicar la expresión de distancia entre dos puntos debería ser simple. Aunque no hayan trabajado antes esa distancia, la pueden determinar aplicando el teorema de Pitágoras. A partir del punto 7, como las ecuaciones no estarán centradas en el origen, deben poner atención en la distancia entre dos puntos, siendo uno de ellos el centro de la circunferencia.
4. Se recomienda que usen alguna herramienta digital que esté disponible libremente en la web.
5. Si el centro de una circunferencia no coincide con el origen del plano cartesiano, la ecuación de la circunferencia se trabaja como  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ , donde el centro de la circunferencia es el punto  $(a; b)$
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Explican las respuestas relacionadas con problemas sobre rectas y circunferencias.
  - Describen situaciones mediante ecuaciones analíticas de rectas o circunferencias.
  - Elaboran representaciones gráficas en el plano cartesiano.



### RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Calculadora algebraica Wiris  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.wiris.net/demo/wiris/es/cas.html>
- Desarrollo matemático del tema  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Ecuacion\\_Circunferencia.html](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Ecuacion_Circunferencia.html)

### Actividad 3: Rectas y circunferencias en el plano cartesiano

#### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes relacionen las ecuaciones de rectas y circunferencias con la situación de tsunami. Esta relación permite responder de manera adecuada frente a situaciones de riesgo; por lo tanto, se pretende que resuelvan problemas en contexto, utilizando circunferencias concéntricas cuyo radio crece según una función afín, y la intersección de rectas y circunferencias, incluyendo el caso especial de tangente. Pueden elegir las herramientas manuales o digitales que les sean más familiares para representar o calcular.

#### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

#### Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

#### DESARROLLO

##### LA PROPAGACIÓN DE LAS ONDAS DE UN TSUNAMI

1. Modelar la propagación de las ondas de un tsunami en la superficie del Océano Pacífico puede ser de vida o muerte en una situación real.

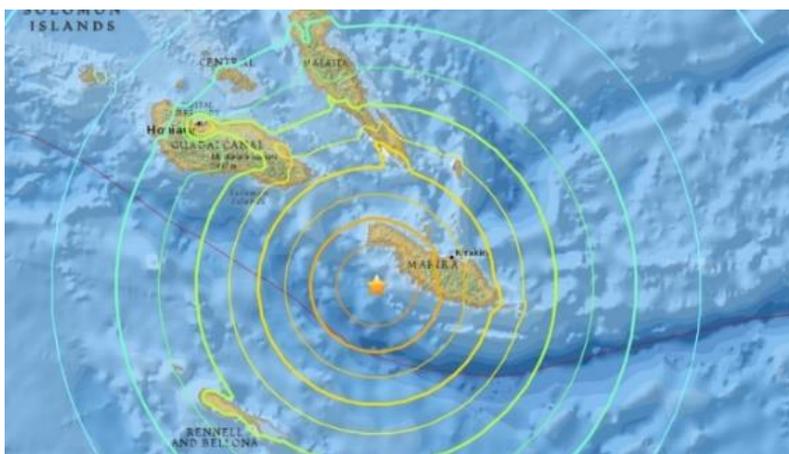


Fig. 1: Propagación de las ondas de un tsunami luego de un temblor.

Conexión  
interdisciplinaria:  
**Ciencias para la  
Ciudadanía**  
OA f, 3° y 4° medio

- a. En el dibujo se ha marcado el punto rojo como el epicentro del temblor, lo cual producirá olas y un tsunami. Se necesita saber a qué lugar llegaría primero el tsunami, realiza tus estimaciones dibujando círculos concéntricos sobre el mapa.

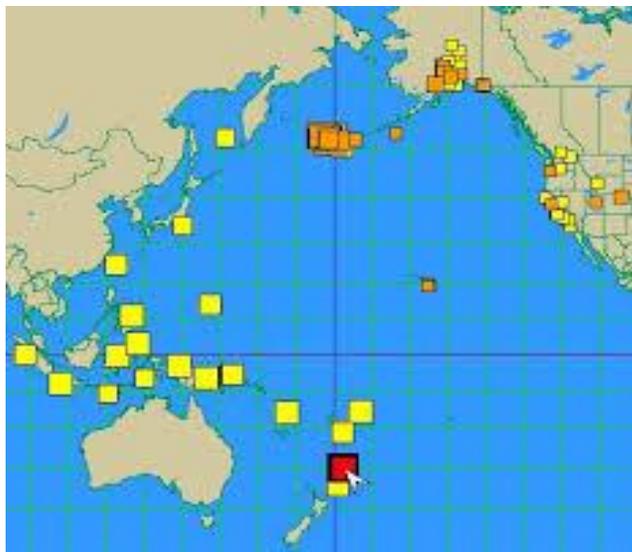
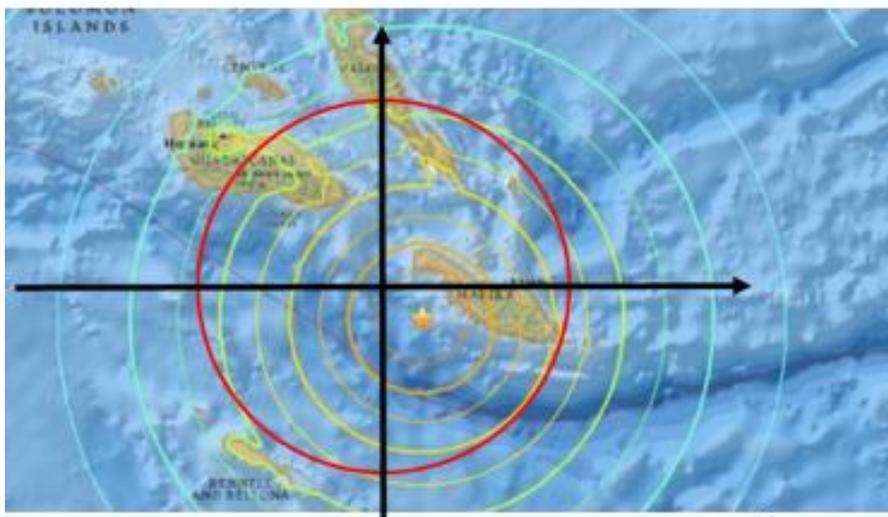


Fig. 2: Propagación de las ondas de un tsunami.

- b. Cambia el epicentro del temblor y dibuja su propagación en el mapa. ¿A qué lugar llegaría primero?
- c. Compara tus estimaciones con tu compañero.
- d. ¿Por qué conviene poner el centro de las ondas del tsunami en el centro del sistema de coordenadas?



- e. Marca un sistema de coordenadas, donde el largo de cada cuadrícula representa una unidad. Determina la ecuación de la circunferencia dibujada.

2. En el modelo, el centro de las ondas del tsunami está en el origen del plano cartesiano. Considera la siguiente información: En la profundidad del mar, las ondas se propagan a rapidez constante de  $600 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . En el plano el largo de cada cuadrícula representa 50km. La línea de la costa más cercana al centro del tsunami tiene una inclinación de  $45^\circ$  con el eje  $y$ .
  - a. Dibuja las circunferencias concéntricas para cada 30 minutos desde el inicio de la propagación y determina gráficamente el tiempo y el lugar de la primera llegada del frente del tsunami a la costa.
  - b. Determine algebraicamente los resultados estimados al inicio de la actividad.
  - c. Utiliza herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra para determinar tiempo y posición de la llegada de las ondas del tsunami en más puntos de la línea de la costa, variando parámetros como velocidad del tsunami o el tiempo.
3. Practica determinando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:
  - a. Dibuja una recta cualquiera en el plano cartesiano. Marca dos puntos sobre ella.
  - b. Determina la pendiente de la recta, usando la expresión:
 
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{donde } x_1 \neq x_2$$
  - c. Usando uno de los puntos antes elegidos u otro punto sobre la recta, expresa la ecuación de la recta, usando la expresión:
 
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
4. Practica determinando ecuaciones de la circunferencia centradas en el origen:
  - a. Ubica un punto en el plano a 3cm del centro  $(0;0)$ .
  - b. Repite la instrucción anterior con al menos 10 puntos más. ¿Qué figura se está formando?
  - c. Usando un compás, completa la curva anterior con todos los puntos del plano que están a 3cm del centro.
  - d. Elige un punto cualquiera sobre la circunferencia anterior y usa la expresión analítica de la distancia entre dos puntos para expresar algebraicamente la distancia entre los dos puntos.
  - e. Repite el punto anterior, considerando los dos puntos como  $A(x_1; y_1)$  y  $O(0; 0)$ .

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Los estudiantes tienen que saber cómo se determina la distancia entre dos puntos y haber resuelto problemas o ejercicios usando la expresión analítica asociada, que es la que se sugiere emplear en la primera actividad. De igual modo, deben poder establecer la ecuación de una recta que pasa por dos puntos. Si no dominan bien estos temas, se recomienda explicarlos con detalle antes de iniciar el trabajo.
2. En la primera parte, se puede hacer dos ajustes que simplifiquen las tareas. Una opción es centrar la circunferencia en el origen del plano cartesiano. La otra es usar puntos conocidos con números enteros y no generalizar de inmediato usando las coordenadas  $(x; y)$  y  $(h; k)$ .
3. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Elaboran representaciones gráficas en el plano cartesiano.
  - Modelan situaciones, utilizando la ecuación de la recta o la circunferencia.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Calculadora algebraica Wiris  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.wiris.net/demo/wiris/es/cas.html>
- Desarrollo matemático del tema  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sangakoo.com/es/temas/interseccion-de-una-circunferencia-y-una-recta>

## Actividad 4: Seguridad en el trabajo

### PROPÓSITO

Los estudiantes modelan un espacio de seguridad, utilizando la ecuación de la circunferencia y la tangente a ella en un punto. Resuelven el problema analíticamente, buscando la intersección entre rectas y circunferencias. Se espera que reconozcan la importancia de las herramientas disponibles para resolver el problema y que utilicen las ecuaciones de rectas y circunferencias para delimitar zonas de seguridad.

### Objetivos de Aprendizaje

- OA 4. Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.
- OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

### Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

**Duración:** 6 horas pedagógicas

## DESARROLLO

### SOLDAR Y EL ESPACIO DE SEGURIDAD

1. La foto muestra el esmerilado de una pieza metálica. Ese trabajo requiere reglas de seguridad para el trabajador y para el entorno del lugar, porque genera chispas que pueden causar lesiones a personas o daños materiales. Las chispas salen en forma tangencial al disco en el punto del contacto entre el disco y la pieza a trabajar. ¿Qué relación geométrica de posición mutua existe entre la tangente y el radio que toca la tangente?



Fig. 1 Esmerilado de una pieza metálica.

2. En la siguiente imagen esquemática, se mira verticalmente hacia abajo. Se eligió un sistema cartesiano de coordenadas, de manera que el centro del disco del esmeril eléctrico se encuentre en el origen  $O(0,0)$  del sistema de coordenadas. El eje del esmeril eléctrico, representado por la línea punteada, tiene la dirección de la bisectriz del segundo cuadrante del sistema de coordenadas. El disco del esmeril tiene un diámetro  $d = 20\text{cm}$ .

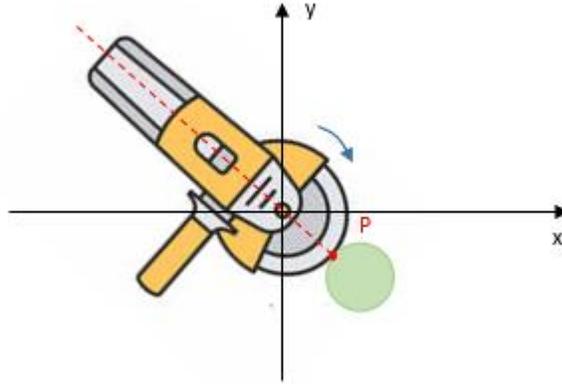


Fig. 2: Esmeril con centro del disco en el origen  $O(0,0)$

- Determina las coordenadas del punto  $P$  en el cual el esmeril toca la pieza de trabajo. Aproxímalas a la décima en  $\text{cm}$ .
  - Considerando la relación geométrica de posición entre la tangente y el radio  $\overline{OP}$ , determina la ecuación de la tangente en el punto  $P(14,1 ; 14,1)$ .
3. El siguiente esquema muestra el entorno de un puesto de trabajo en el cual se trabaja con un esmeril eléctrico. El alcance del rayo de las chispas es de aproximadamente  $4\text{m}$  y se considera un radio de seguridad de  $R = 5\text{m}$ .

Conexión interdisciplinaria:  
**Ciencias para la Ciudadanía**  
OA g, 3° y 4° medio

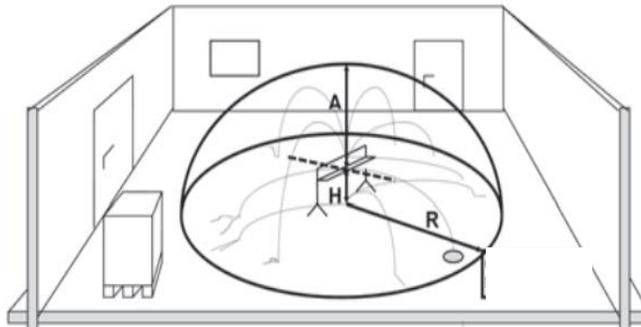


Fig. 3: Alcance del rayo de un esmeril eléctrico.

Además, el haz de las chispas que se genera con el esmeril tiene una forma cónica y sus rayos marginales tienen una pendiente de  $m_1 = 1,1$  y de  $m_2 = 0,9$ .

- Elabora las ecuaciones de los rayos marginales de las chispas que se generan en el punto  $P$ .
- Debido a las dimensiones de  $R = 5\text{m}$  y del radio del disco de  $10\text{cm}$ , se adapta el modelo a una forma 2D, de modo que el punto  $P$  coincida con el punto  $H$  en el suelo. Mediante la geometría

- analítica, determina el punto de intersección del rayo tangencial con la circunferencia del modelo. Considera que la ecuación de la tangente se simplifica a  $y = x$ .
- Considera que las ecuaciones de los rayos marginales se simplifican a  $y = 1,1x$  e  $y = 0,9x$ , respectivamente. Determina los puntos de intersección de los rayos marginales con la circunferencia. Compara los resultados con los de la actividad anterior.
  - Elabora una representación gráfica en un sistema de cartesiano de coordenadas en el cual una unidad corresponde a  $1m$ .

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Para que una tangente siempre esté perpendicular al radio que une el centro con el punto contacto de la circunferencia con la tangente, se recomienda establecer una secuencia de secantes paralelas (empezando con un diámetro) que están perpendiculares a un radio y cuyos puntos de intersección con la circunferencia se acercan al punto de contacto, convirtiendo las secantes en la tangente.
- Se sugiere motivarlos a trabajar individual y autónomamente; para esto, se pueden preparar las respuestas correctas y dejar a libre disposición de los estudiantes, también se puede hacer una especie de puzle para que ellos mismo asocien las respuestas correctas con las preguntas, en este caso, no se debe agregar el número de la respuesta. Algunas respuestas correctas son:  $P(14,1 ; 14,1)$ ;  $y = x - 28,2$ ;  $m_1 = 1,1$  ;  $y = 1,1x - 29,61$ ;  $m_2 = 0,9$  ;  $y = 0,9x - 26,76$ .
- Para la parte contextualizada en colegios técnico-profesionales, se recomienda articularse con el profesor de la especialidad y mencionar aspectos de seguridad laboral que hay en los puestos de trabajo de los alumnos. El profesor debe explicarles que a veces se debe hacer supuestos simplificados para aplicar un modelo más sencillo.
- Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
  - Elaboran ecuaciones de rectas a partir de la pendiente y las coordenadas de un punto dado.
  - Modelan situaciones, utilizando la ecuación de la recta o la circunferencia.

### RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:*

- Ejercicios de circunferencias y rectas  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.reformamatematica.net/wp-content/uploads/2018/10/20181015-Solucionario-G-circunferencias-y-rectas.pdf>
- Ejercicios de ecuación de la circunferencia  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/conica/ejercicios-de-la-ecuacion-de-la-circunferencia.html>

## Actividad de evaluación

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA e.** Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

### Indicadores de evaluación

- Explican las respuestas relacionadas con problemas sobre rectas y circunferencias.
- Describen situaciones mediante ecuaciones analíticas de rectas o circunferencias.
- Elaboran ecuaciones de rectas a partir de la pendiente y las coordenadas de un punto dado.
- Modelan situaciones, utilizando la ecuación de la recta o la circunferencia.

**Duración:** 3 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 4, cada una por sí misma o en conjunto. Se sugiere delimitar la evaluación según el contexto y el tiempo disponible.

1. En los países en que predomina el sistema inglés de medidas (como Inglaterra y Estados Unidos), la temperatura se mide en grados Fahrenheit. Para convertir a grados Celsius (y viceversa), se utiliza una función lineal que vincula los puntos de congelamiento y de ebullición del agua. Se sabe que el punto de congelación del agua ocurre cuando alcanza los  $0^{\circ}$  Celsius y el de ebullición<sup>8</sup>, cuando llega a  $100^{\circ}$  Celsius. Se sabe también que el agua se congela a  $32^{\circ}$  Fahrenheit y que ebulle a  $212^{\circ}$  Fahrenheit.

A partir de los datos del enunciado, responde:

- a. ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen  $0^{\circ}$  Celsius?
- b. ¿A cuántos grados Fahrenheit equivalen  $100^{\circ}$  Celsius?
- c. En el cuaderno, construye un plano cartesiano en donde el eje horizontal se representa los grados Celsius y en el eje vertical, los grados Fahrenheit (ser cuidadoso con la escala de cada eje). Considera como pares ordenados las dos temperaturas de las preguntas a. y b. para que los grafiques como puntos en el plano cartesiano que construiste.
- d. Determina la ecuación de la recta que permite transformar grados Celsius a grados Fahrenheit.
- e. En el cuaderno, construye el gráfico de la ecuación de la recta encontrada en d.
- f. Utiliza el gráfico hallado en e. para estimar a cuántos grados Fahrenheit equivalen  $20^{\circ}$  Celsius.
- g. Utiliza la ecuación de la recta encontrada en d. para determinar a cuántos grados Celsius equivalen  $68^{\circ}$  Fahrenheit.

<sup>8</sup> El agua se congela a  $0^{\circ}$  Celsius y ebulle a  $100^{\circ}$  Celsius cuando está a nivel del mar.

- h. Si alguien afirma que se encuentra en un lugar a  $-40^\circ$  de temperatura, ¿por qué no es relevante saber la unidad de medida de la temperatura? Justifica.
2. Usando un software para graficar, realiza las siguientes actividades:
- Grafica la ecuación de la recta  $L$  que pasa por los puntos  $A(2; 4)$  y  $B(5; 6)$ .
  - Utilizando la representación gráfica de la ecuación  $L$ , ¿cuál podría ser la ecuación de una recta perpendicular a la recta  $L$ ? Justifica tu respuesta.
  - ¿Es correcto afirmar que la ecuación de la recta  $y = \frac{-3}{2}x + p$  (con  $p \in \mathbb{R}$ ) representa a todas las rectas perpendiculares a la ecuación de la recta  $3y - 2x = 8$ ? Justifica tu respuesta. (Sugerencia: Crea un deslizador para variar el valor de  $p$ ).
  - Utilizando como el valor  $p$  la intersección de las dos rectas del punto c., encuentra las ecuaciones de dos rectas más, de modo que entre las cuatro conformen un rectángulo. Conjetura respecto de la cantidad de soluciones posibles y justifica la conjetura que entregues como respuesta.
3. Determina algebraicamente si existen puntos de intersección entre la recta  $x - y - 7 = 0$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 37 = 0$ . Justifica tu respuesta.
4. Utiliza un software que permita graficar y estimar el intervalo de valores entre los que debe variar el valor de  $k$ , de modo que exista intersección entre las circunferencias  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 36 = 0$  y  $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = k^2$ . Justifica tu respuesta.

Se sugiere que respondan las siguientes preguntas en forma colaborativa, según los recursos y el contexto.

5. Usando un software, grafiquen las rectas  $3x + 4y - 49 = 0$ ,  $4x - 3y - 32 = 0$  y la circunferencia de ecuación  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 - 25 = 0$  y, a continuación:
- Determinen con el software si las rectas son o no tangentes a la circunferencia. Justifiquen algebraica o numéricamente la afirmación que hagan.
  - Determinen el ángulo que forman las rectas. Justifiquen su afirmación.
  - Determinen las ecuaciones de dos tangentes a la circunferencia que pasen por el punto  $(-3; 2)$ .
  - Usen la herramienta Relación de GeoGebra (que corresponde al ícono ) para determinar la relación que existe entre las dos rectas halladas en c. Justifiquen numéricamente lo que indica el software.
6. Creen una visualización similar a la propagación y el choque de dos ondas que se desplazan sobre la superficie de un líquido (como el agua) y que representen aproximadamente las oscilaciones que producen dos gotas que caen simultáneamente en dos puntos diferentes, ubicados a cierta distancia.
- ¿Qué expresiones algebraicas puede utilizarse para generar la familia de circunferencias que produce la caída de cada gota en la superficie del agua? Justifiquen la respuesta.
  - Busquen imágenes y vídeos que muestren ondas en el agua, tsunamis, cubetas de onda, y relacionen el objeto con las imágenes obtenidas.

## PAUTA DE EVALUACIÓN

| Criterios de evaluación  | Completamente logrado | Niveles de logros                                  |  |
|--|-----------------------|--|--|
|  |                       | Se observa aspectos específicos que pueden mejorar | No logrado por ausencia o no se puede entender en absoluto |
| Representan una situación por medio de rectas.   |                       |  |  |
| Describen situaciones por medio de rectas y sus intersecciones.                                  |                       |  |  |
| Determinan la recta perpendicular a una recta dada.  |                       |  |  |
| Determinan la intersección de una recta con una circunferencia.                                  |                       |  |  |
| Determinan la intersección de dos circunferencias.   |                       |  |  |
| Varían parámetros de ecuaciones de rectas o circunferencias para que se intercepten entre ellas. |                       |  |  |
| Modelan situaciones, utilizando la ecuación de la circunferencia.                                |                       |  |  |

## Proyectos Interdisciplinarios

### Manual de orientación

---

#### ¿Qué es el Aprendizaje Basado en Proyectos?

El Aprendizaje Basado en Proyectos se define como una propuesta de enseñanza que se organiza en torno a un problema o necesidad que se puede resolver, aplicando diferentes perspectivas y áreas del conocimiento. Para encontrar la solución, los estudiantes movilizarán conocimientos, habilidades y actitudes durante todo el proceso hasta llegar a una solución que se expresa en un producto. Los proyectos surgen desde sus propias inquietudes e intereses, potenciando así su motivación por aprender y su compromiso frente al propio aprendizaje.

#### ¿Por qué fomenta el trabajo interdisciplinario?

La complejidad de un problema real o necesidad es la razón que justifica la participación y conexión de distintos saberes y disciplinas. Por ejemplo, los proyectos STEM se desarrollan sobre problemas o necesidades que vinculan ciencia, tecnología, matemática e ingeniería para su solución.

#### ¿Cómo se relaciona con las Habilidades para el siglo XXI?

La metodología de proyecto permite que los estudiantes potencien estas habilidades y actitudes, ya que, por ejemplo, su procedimiento los organiza para que busquen juntos una solución, los desafía para que flexiblemente encuentren una respuesta nueva al problema y para que reflexionen con otros desde diferentes perspectivas, generando así el trabajo colaborativo, la comunicación y el pensamiento crítico y creativo.

#### ¿Cuáles son los elementos del Aprendizaje Basado en Proyectos?

##### **Pregunta o problema central**

Los problemas que se aborda en un proyecto se vinculan con situaciones reales y significativas para los estudiantes. Se relacionan con sus inquietudes e intereses y los motivan a explorar y participar activamente en la búsqueda responsable de una solución.

##### **Indagación sostenida**

Cuando se enfrentan a un problema desafiante, comienza el proceso de búsqueda para construir soluciones. Durante este proceso, los alumnos hacen nuevas preguntas, utilizan recursos y profundizan los conocimientos.

##### **Autenticidad**

Los proyectos tienen un contexto auténtico. Por ejemplo: los estudiantes resuelven problemas que enfrentan las personas fuera de la escuela, pero también pueden centrarse en problemas auténticos dentro de ella. Los proyectos pueden tener un impacto real en los demás, como cuando los alumnos atienden una necesidad en su escuela o comunidad (por ejemplo: diseñar y construir un huerto escolar,

mejorar un parque comunitario, ayudar a los inmigrantes locales); también pueden crear algo que otras personas usarán o experimentarán. Un proyecto puede tener autenticidad personal si refleja las preocupaciones, los intereses, las culturas, las identidades y los problemas de los estudiantes en sus vidas.

### **Voz y elección del estudiante**

Los alumnos deben sentir que pueden participar activamente, tomar decisiones, expresar sus puntos de vista, proponer soluciones durante el trabajo en equipo y expresarse por medio de los productos que crean. Participan activamente en un proyecto, desde el momento en que identifican el problema hasta que divulgan el producto; así fortalecen su compromiso y motivación con el propio aprendizaje.

### **Metacognición**

A lo largo de un proyecto los estudiantes –junto con el docente– deben reflexionar sobre lo que están aprendiendo, cómo están aprendiendo y por qué están aprendiendo. La reflexión puede ocurrir de manera informal, como parte de la cultura y el diálogo en el aula, pero también debe ser una parte explícita de los diarios del proyecto, la evaluación formativa programada, las discusiones en los puntos de control del proyecto y las presentaciones públicas de su trabajo. La reflexión sobre el proyecto en sí, cómo se diseñó e implementó, los ayuda a decidir cómo podrían abordar su próximo proyecto y a mejorar la forma de aplicar esta metodología.

### **Crítica y revisión**

Los estudiantes deben estar abiertos a dar y recibir comentarios constructivos acerca del trabajo propio y el de sus compañeros, lo que permite mejorar los procesos y productos del proyecto. Idealmente, tiene que hacerlo según protocolos formales y con el apoyo de rúbricas. Los invitados o expertos externos también pueden ayudar, brindando un punto de vista auténtico y real. La crítica y revisión del trabajo propio permite a los alumnos evaluar los resultados de su aprendizaje, fortaleciendo la evaluación formativa.

### **Producto público**

A diferencia de otras metodologías, en el Aprendizaje Basado en Proyectos la respuesta o solución a la pregunta o problema se expresa en un "producto", que puede ser un artefacto tangible, multimedial o digital, una presentación sobre la solución a un problema, un desempeño o evento, entre otras opciones. Al finalizar el proyecto, los estudiantes tienen que poder presentarlo públicamente; eso aumenta su motivación, ya que no se reduce a un intercambio privado entre profesor y alumno. Esto tiene un impacto en el aula y en la cultura escolar, pues ayuda a crear una "comunidad de aprendizaje", en la cual los estudiantes y los maestros discuten lo que se está aprendiendo, cómo se aprende, cuáles son los estándares de desempeño aceptables y cómo se puede mejorar el desempeño de los alumnos. Finalmente, hacer que el trabajo de los alumnos sea público es una forma efectiva de comunicarse con los pares y los miembros de la comunidad.

### ¿Qué debo considerar antes de la ejecución de un proyecto?

- Incorporar en la planificación anual de la asignatura una o más experiencias de proyectos, tomando en cuenta el tiempo semanal de la misma.
- Si la asignatura es de 2 horas a la semana, se recomienda incorporar un proyecto acotado o abordar toda una unidad de aprendizaje mediante esta metodología.
- Si la asignatura es de 6 horas semanales, se recomienda destinar un tiempo fijo a la semana (por ejemplo, 2 horas) para el proyecto.
- La planificación anual también debe incorporar la exhibición pública de los proyectos. Se recomienda que sea una instancia en que se invite a los padres, familias, expertos y otros miembros de la comunidad (se sugiere solicitar a la dirección del establecimiento que reserve un día para llevar a cabo la actividad).
- Identificar en los Objetivos de Aprendizaje, tópicos, necesidades o problemas que se pueda abordar interdisciplinariamente con dos o más asignaturas.
- Si el proyecto involucra a dos o más asignaturas, los profesores deben planificarlo juntos y solicitar un tiempo adecuado para ello a su jefe técnico o al director.
- Una vez hecha esta planificación e iniciado el año escolar, se debe explicar a los estudiantes en qué consiste esta metodología, exponerles los tópicos que se identificó en las Bases Curriculares y pedirles que, a partir de ello, propongan problemas o preguntas que se puede resolver o responder mediante un proyecto.
- El Aprendizaje Basado en Proyectos requiere de un trabajo grupal y colaborativo. Cada integrante del grupo debe asumir un rol específico, el cual puede ir rotando durante la ejecución del proyecto.

### ¿Cómo se organiza y ejecuta el proyecto?

Para organizar el proyecto, se presenta una ficha con diferentes componentes que ayudarán a ejecutarlo. A continuación, se explica cada uno de esos componentes.

#### **Resumen del proyecto**

Síntesis del tema general, el propósito y el resultado esperado del proyecto.

#### **Nombre del proyecto**

Se recomienda incluir un subtítulo que evidencie el tema o el contenido que se trabaja en el proyecto.

#### **Problema central**

En esta sección, se expone un párrafo de la pregunta o problema que se quiere resolver por medio del proyecto. Se recomienda explicar cuál es el tema que se va a resolver y por qué el proyecto puede hacerlo o desarrollar reflexiones profundas en los alumnos.

#### **Propósito**

Se explica el objetivo general y específico del proyecto.

#### **Objetivos de Aprendizaje de Habilidades y Conocimientos**

En esta sección, se explica cuáles son los Objetivos de Aprendizaje de la asignatura que se desarrollará en el proyecto. Se espera que sean interdisciplinarios, por lo que se recomienda incorporar los OA de las otras asignaturas involucradas.

**Tipo de Proyecto Interdisciplinario**

Es importante aclarar qué aspectos de las distintas disciplinas se aplicará en el proyecto. Esta sección busca que el docente exponga y explique tales relaciones de manera que sea más fácil guiar el trabajo interdisciplinario. Para esto, conviene que se coordine con los profesores de las otras áreas disciplinares.

**Producto**

Todo proyecto debe tener como resultado un producto; es decir, algún objeto, aparato, informe, estudio, ensayo, disertación oral, escrita, visual, audiovisual o multivisual para que los estudiantes divulguen el trabajo realizado.

**Habilidades y actitudes para el siglo XXI**

Es importante que el docente resalte que esta metodología pretende que los alumnos desarrollen habilidades y actitudes del siglo XXI, que son transversales a todas las áreas del currículum. Esto permite que profesores y alumnos sean conscientes de que ellas van más allá de los conocimientos y habilidades disciplinares.

**Recursos**

Se tiene que describir los componentes, insumos de trabajo, bibliografía o elementos fundamentales para el proyecto.

**Etapas**

Hay que planificar el proyecto según fases de trabajo, considerando el tiempo destinado al mismo en la planificación anual.

**Cronograma semanal**

Es importante planificar el avance del proyecto clase a clase; en una sola se puede desarrollar más de una etapa, o una etapa puede durar más de una clase. Lo importante es que la planificación sea clara y ordenada para que profesor y alumnos trabajen de la manera más regular posible, considerando los avances u obstáculos que puedan encontrar en el desarrollo del proyecto.

**Evaluación formativa y sumativa**

En esta sección, el docente tiene que especificar con qué criterios se evaluará el proyecto y qué instrumentos se aplicará, tanto en la dimensión formativa como en la sumativa. Es importante recordar que la retroalimentación es un componente esencial del proyecto, por lo que profesor debe señalar cómo llevará a cabo dicho proceso.

**Difusión final**

Dependiendo del objetivo del proyecto, se sugiere que cuando lo terminen, los alumnos dediquen algún tiempo para difundirlo a la comunidad escolar.

## Proyecto STEM: Selección natural: Entendiendo la evolución a través del juego

### Resumen del Proyecto

El proyecto busca que los estudiantes sean capaces de corregir preconceptos erróneos sobre la selección natural y la teoría de la evolución, como visiones teleológicas, creacionistas, ideas acerca del desarrollo “progresivo” del ser humano, y pensar que la cooperación y el altruismo no se pueden por el mecanismo de selección natural. Para corregir los preconceptos errados, se diseñan actividades concretas tipo juego que les permitan cambiar sus concepciones de la biología evolucionaria para comenzar a dar explicaciones más científicas.

Primero, jugarán un juego de Selección Natural de un rasgo físico, el color, y luego otro de un rasgo conductual, la cooperación. Representarán los resultados de los juegos con gráficos y estadísticas que les permitirán aplicar habilidades transversales de ciencias y matemática. Finalmente, presentarán los resultados a la comunidad.

#### Nombre del Proyecto

### SELECCIÓN NATURAL

#### Entendiendo la evolución a través del juego

#### Problema central

¿En qué consiste realmente la selección natural dentro del proceso de la evolución de las especies?

La evolución es un tema central en Biología; aunque ha ido ganando preponderancia en la enseñanza, todavía prevalecen muchas concepciones erradas y la enseñanza no logra solucionar esa deficiencia.

Los sesgos esencialistas pueden distorsionar juicios sobre una amplia gama de fenómenos evolutivos, como los conceptos de variación, herencia, adaptación, domesticación, especialización y extinción. Los estudiantes, ya antes de entrar a la escuela, vienen con concepciones teleológicas y vitalistas, que los inducen a concebir una evolución lamarkeana, y les dificulta comprender los mecanismos ciegos de la selección natural.

#### Propósito

Se pretende que los alumnos cambien sus concepciones de biología sobre evolución para comenzar a dar explicaciones más científicas, usando selección natural en lugar de explicaciones teleológicas y creacionistas.

Se espera que, por medio de este proyecto, comprendan y expliquen el mecanismo de selección natural, en el entendido de que es un sistema ciego y que el azar es central en su funcionamiento. También se busca que comprendan el rol de la herencia de rasgos (tanto físicos como conductuales), grafiquen patrones y desarrollen el pensamiento poblacional. Esto se evidencia con la construcción de explicaciones científicas que empleen correctamente el concepto de evolución.

| Objetivos de Aprendizaje de Habilidades   | Preguntas   |
|---|---|
| <p><b>CIENCIAS</b></p> <p><b>OA Habilidades</b></p> <p>OA a. Formular preguntas y problemas sobre tópicos científicos de interés, a partir de la observación de fenómenos y/o la exploración de diversas fuentes.</p> <p>OA d. Analizar las relaciones entre las partes de un sistema en fenómenos y problemas de interés, a partir de tablas, gráficos, diagramas y modelos.</p> <p>OA e. Construir, usar y comunicar argumentos científicos.</p> <p>OA f. Desarrollar y usar modelos basados en evidencia, para predecir y explicar mecanismos y fenómenos naturales.</p> <p><b>MATEMÁTICA</b></p> <p><b>OA Conocimiento y comprensión</b></p> <p>OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.</p> <p><b>OA Habilidades</b></p> <p>OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.</p> <p>OA f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.</p> <p><b>BIOLOGÍA DE LOS ECOSISTEMAS</b></p> <p><b>OA Conocimiento y comprensión</b></p> <p>OA 1. Explicar el estado de la biodiversidad actual a partir de teorías y evidencias científicas sobre el origen de la vida, la evolución y la intervención humana.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Cómo funciona la selección natural?</li> <li>• ¿Cómo podemos observar y explicar la teoría evolutiva de Darwin sin observar a los animales directamente?</li> <li>• ¿Se puede utilizar la estadística para comprender la selección natural?</li> <li>• ¿Hay factores colaborativos en la evolución de las especies, o la supervivencia y adaptación se dan sólo por factores individuales?</li> </ul> |

**Tipo de Proyecto Interdisciplinario STEM**

- Matemática
- Biología

**Producto**

Análisis estadístico del resultado de los juegos acerca de la selección natural tanto del rasgo color como el de cooperación.

Reporte audiovisual sobre los resultados estadísticos de los juegos y su relación con el concepto de selección natural.

**Habilidades y actitudes para el siglo XXI**

Pensamiento crítico

Trabajo colaborativo

Comunicación

**Recursos****SELECCIÓN NATURAL**

- Un pliego de papel color tierra de 3 x 1,5m
- Fichas de color blanco y color tierra de 5 x 5 cm (100 de cada color)
- Bolsas para guardar las fichas que indiquen: Generación I, II y III; si fueron capturadas o no.
- Hojas para confeccionar cuadros estadísticos y gráficos.

Cómic de explicación en <http://www.conectastem.cl/conecta/Comics/seleccion-natural/>

**COOPERACIÓN**

- 2 contenedores plásticos de 0,5 x 1.0 m, adaptados con una red y una ventana en la tapa.
- Adornos de Navidad tipo guirnalda esféricas de distintos tamaños.
- Ganchos elaborados con alambres de dos tipos: gancho simple y gancho doble, de unos 4 cm.
- Bolsas para guardar ganchos y adornos que indiquen Generación I, II y III para organismos muertos y sobrevivientes.

Cómic de explicación en <http://www.conectastem.cl/conecta/Comics/coopera/>

**Etapas**

- Fase 1: Comprensión del problema: ¿en qué consiste la selección natural? Conversar con los estudiantes sobre la evolución, explicando cómo el factor del azar influye en ella.
- Fase 2: Juego de selección natural
- Fase 3: Análisis estadístico de selección natural

- Fase 4: Comprensión del problema: la evolución, ¿es producto únicamente de la capacidad individual, o la cooperación y la organización con otros puede facilitar la sobrevivencia?
- Fase 5: Juego de cooperación
- Fase 6: Análisis estadístico de cooperación
- Fase 7: Presentación de resultados a la comunidad

### **Cronograma semanal**

Primera clase (Fases 1, 2 y 3)

- Plantear el problema.
- Guiar a los estudiantes mediante preguntas y actividades de descubrimiento para construir conocimiento respecto de la selección natural, preguntándoles acerca de sus preconcepciones y explicando cómo el azar influye en la selección evolutiva.

Ejemplo: Extracto de la serie Cosmos (2017), capítulo 2.

<https://www.youtube.com/watch?v=JlkXsG4Jfwg>

- Aplicar el juego de la selección natural.
- Elaborar informe y gráficos estadísticos.

Segunda clase (Fases 4, 5 y 6)

- Plantear el problema.
- Guiar a los estudiantes mediante preguntas y actividades de descubrimiento para construir conocimiento acerca de la cooperación entre los individuos de una especie.

Ejemplo: Revisar documental “Nuestro Planeta” (2019)

- Aplicar juego de la cooperación.
- Elaborar informe y gráficos estadísticos

Tercera clase (Fase 7)

- Presentar resultados aprendidos a la comunidad.
- Se propone analizar el problema del criadero de gallinas ponedoras de huevos y las dos opciones de selección artificial (gallina que pone más huevos de cada caja se reproduce, todas las gallinas de la jaula que pone más huevos se reproducen); que los estudiantes predigan cuál opción es mejor y, luego de conocer los resultados, intenten explicarlos.

### **Evaluación Formativa**

Retroalimentación de cada fase del proceso.

### **Evaluación Sumativa**

Informe de gráficos y estadísticas

**Difusión Final**

Demostración de las conclusiones frente a la comunidad.

**Bibliografía**

Araya, R., Bahamondes, M., Contador, G., Dartnell, P. y Aylwin, M. (2013) “Enseñanza de la selección natural con juego masivo por internet”, en *Congreso de Pedagogía 2013*, La Habana, Cuba.

“Comic Coopera”, Conecta Stem, <http://www.conectastem.cl/conecta/Comics/coopera/>

“Comic Selección Natural”, Conecta Stem <http://www.conectastem.cl/conecta/Comics/seleccion-natural/>

Muir, W.M. (1995). Group selection for Adaptation to Multiple-Hen Cages: Selection Program and Direct Responses. En *Poultry Sciences* 75(4), p. 447-458

**Criterios de evaluación**

Tanto para las habilidades y actitudes del siglo XXI de Pensamiento creativo e innovación, Pensamiento crítico y Trabajo colaborativo, como para el Diseño de proyecto y la Presentación del trabajo, referirse a las rúbricas correspondientes en el Anexo.

## Proyecto TP: Usando la estadística para prevenir accidentes de tránsito

### Resumen del Proyecto

Se pretende promover en la comunidad que es necesario realizar las mantenciones preventivas de los vehículos para evitar accidentes de tránsito por fallas mecánicas. Para esto, los estudiantes harán una investigación, un análisis estadístico y campañas de sensibilización que fomenten la responsabilidad que tenemos, como ciudadanos, de mantener adecuadamente nuestros vehículos.

|  |   |
|--|---|
| <b>Nombre del Proyecto</b><br>Usando la estadística para prevenir accidentes de tránsito   |   |
| <b>Problema central</b><br>¿Estamos conscientes de la cantidad de accidentes de tránsito que se originan por fallas mecánicas?<br>¿Cómo puedo aportar con mis conocimientos a reducir la cantidad de accidentes en mi comunidad?   |   |
| <b>Propósito</b><br>Crear una campaña de sensibilización sobre los accidentes de tránsito, especialmente los que se producen por fallas mecánicas o por falta de mantención de un vehículo.  |   |
| <b>Objetivos de Aprendizaje</b><br><br><b>MATEMÁTICA</b><br><b>OA de Conocimiento y comprensión</b><br><b>OA 2.</b> Fundamentar decisiones en situaciones de incerteza, a partir del análisis crítico de datos estadísticos y con base en los modelos binomial y normal.<br><br><b>OA de Habilidad</b><br><b>OAC.</b> Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico. | <b>Preguntas</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿Qué factores mecánicos pueden influir en que ocurra un accidente de tránsito?</li> <li>• ¿Cuántos accidentes suceden en nuestro país debido a fallas mecánicas?</li> <li>• ¿Qué precauciones puedo tomar para evitar un accidente por falla mecánica?</li> <li>• ¿Cómo nos ayuda la estadística a estudiar estos accidentes?</li> <li>• ¿Cómo comunicar los resultados del análisis estadístico para sensibilizar a la comunidad?</li> </ul> |
| <b>FORMACIÓN TÉCNICO-PROFESIONAL</b><br><b>OAA.</b> Comunicarse oralmente y por escrito con claridad, utilizando registros de habla y de escritura pertinentes a la situación laboral y a la relación con los interlocutores.  |   |

**OAH.** Manejar tecnologías de la información y comunicación para obtener y procesar información pertinente al trabajo, así como para comunicar resultados, instrucciones e ideas.

### ESPECIALIDAD DE MECÁNICA AUTOMOTRIZ

**OA 1.** Inspeccionar y diagnosticar averías y fallas en el funcionamiento mecánico, eléctrico o electrónico de vehículos motorizados, identificando el o los sistemas y componentes comprometidos y realizando mediciones y controles de verificación de distintas magnitudes mediante instrumentos análogos y digitales, con referencia a las especificaciones técnicas del fabricante.

**OA 3.** Realizar mantenimiento básico de diversos sistemas de vehículos automotrices livianos, semipesados y pesados, de acuerdo a las pautas de mantenimiento del fabricante, de inspección y diagnóstico de fallas.

- ¿Cómo permite la mecánica automotriz prevenir los accidentes de tránsito?
- ¿Cómo sensibilizar a la comunidad para ser agentes activos para prevenir los accidentes de tránsito?

#### Tipo de Proyecto Interdisciplinario

- Matemática
- Especialidad de Mecánica automotriz

#### Producto

- Crear una campaña de sensibilización sobre los accidentes de tránsito que se producen por fallas mecánicas, empleando recursos digitales. Dar a conocer a la comunidad las estadísticas relacionadas con los accidentes de tránsito producidos por fallas mecánicas.

#### Habilidades y actitudes para el siglo XXI

- Pensamiento creativo e innovación
- Trabajo colaborativo

#### Recursos

TIC

Bibliografía

**Etapas****Fase 1: Análisis del problema:**

- Guiados por las preguntas, los estudiantes reflexionan sobre el problema.
- Proponen formas de solucionarlo.

**Fase 2: Investigación:**

- Organizados en grupos, investigan los accidentes de tránsito ocurridos en nuestro país y sus causas en la página gubernamental de Conaset (2019 a, b).
- En el laboratorio de computación, filtran la información para confeccionar gráficos y esquemas que les permitan centrar su análisis en los accidentes originados por fallas mecánicas.

**Fase 3: Relaciones entre parámetros técnicos y el riesgo de accidentes:**

- Analizan el Manual de procedimientos e interpretan los resultados para establecer la relación entre los parámetros que se inspecciona y la probabilidad de aumentar el riesgo de tener accidentes de tránsito. Eligen algunos factores que se revisa en una Planta de Revisión Técnica (PRT); entre ellos, la inspección visual, la inspección de luces, la alineación y frenos, la detección de holguras y la suspensión.
- Elaboran preguntas y dan a conocer la interpretación estadística de los datos analizados. Por ejemplo: ¿Qué porcentaje de accidentes se produce en Chile por una falla en el sistema de frenos? ¿Sabías que, en los últimos 10 años, los accidentes de tránsito han aumentado en...?

**Fase 4: Elaboración de material multimedia:**

- En el taller de la especialidad y apoyados en los instrumentos y herramientas del taller, crean videos en que explican los puntos de revisión que escogieron y vinculan la falla o deficiencia en su funcionamiento con un posible accidente de tránsito.

**Fase 5: Difusión de los resultados del proyecto:**

- Crean un canal de YouTube, perfil de Instagram o Facebook para dar a conocer sus análisis a la comunidad, y los promueven por redes sociales.
- Informan sobre sus resultados a la comunidad.

**Cronograma semanal**

Semana 1: Diagnóstico y análisis (Fase 1).

Semana 2: Proceso de investigación (Fase 2).

Semana 3: Interpretación estadística (Fase 3).

Semana 4: Elaboración del material multimedia (Fase 4).

Semana 5: Difusión (Fase 5).

**Evaluación Formativa**

Los jóvenes hacen un seguimiento del avance (físico o digital), que contiene el desarrollo de cada una de las etapas, para ser retroalimentados a lo largo del proceso.

**Evaluación Sumativa**

Elaboran videos para explicar a la comunidad las estadísticas que entrega Conaset sobre las causas de los accidentes de tránsito; además, explican la importancia de los aspectos que fiscalizan las PRT y los riesgos de no efectuar las mantenciones preventivas a un vehículo.

**Difusión Final**

Crean un canal de YouTube, perfil de Instagram o Facebook para dar a conocer sus análisis a la comunidad, y los promueven por redes sociales.

Participan en una feria científica con una muestra de los gráficos analizados y explican a los visitantes las fallas mecánicas que pueden causar que un vehículo participe en un accidente de tránsito.

Exponen sus trabajos a otros estudiantes de la comunidad para incentivarlos a ingresar a la especialidad.

**Bibliografía**

Conaset. (2019). *Estadísticas generales*. Comisión Nacional de Seguridad de Tránsito. Recuperado de <https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.conaset.cl/programa/observatorio-datos-estadistica/biblioteca-observatorio/estadisticas-generales/>

MTT. (2015). *Manual de procedimientos e interpretación de resultados/Revisiones técnicas clase B*. Ministerio de Transportes y Telecomunicaciones. Disponible en <https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.prt.cl/Documentos/Manual%20de%20Procedimientos%20e%20Interpretaci%C3%B3n%20de%20Resultados%20B%20v11.pdf>

## Proyecto TP: ¿De qué depende mejorar las jubilaciones en Chile?

### Resumen del Proyecto

Para comenzar, los estudiantes investigan respecto del problema de la jubilación en Chile. Se los invita a reflexionar sobre las posibles causas que explican por qué es tan importante comprender el significado de invertir en fondos de menor o mayor riesgo y su relación con el concepto de rentabilidad y ahorro previsional voluntario (APV).

Luego, crean un modelo de cálculo de jubilación a mediano y largo plazo que considere variables clave para mejorar las jubilaciones y validar dicha propuesta con un experto en el área. Este proyecto se conecta interdisciplinariamente con el uso de tecnologías y de habilidades de diseño para difundir la propuesta elaborada, de modo que finalmente se realice una feria para presentar los principales resultados.

|  |  |
|--|--|
| <p><b>Nombre del Proyecto</b></p> <p style="text-align: center;"><b>¿De qué depende mejorar las jubilaciones en Chile?</b></p>   |  |
| <p><b>Problema central</b></p> <p>¿Cómo elaborar una proyección de jubilación a mediano y largo plazo que permita identificar las condiciones para lograr una “mayor” o “menor” jubilación?</p>  |  |
| <p><b>Propósito</b></p> <p>Este proyecto permite a los jóvenes recopilar e interpretar información, usando tecnología, para elaborar una proyección de las futuras jubilaciones que podrían tener sus padres y cómo mejorarlas.</p>  |  |
| <p><b>MATEMÁTICA</b></p> <p><b>OA Conocimiento y comprensión</b></p> <p><b>OA 1.</b> Fundamentar decisiones en el ámbito financiero y económico, personal o comunitario, a partir de modelos que consideren tasas de interés e índices económicos.</p> <p><b>FORMACIÓN TÉCNICO-PROFESIONAL</b></p> <p><b>OAH.</b> Manejar tecnologías de la información y comunicación para obtener y procesar información pertinente al trabajo, así como para comunicar resultados, instrucciones e ideas.</p> | <p><b>Preguntas</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿En qué medida somos responsables de nuestras jubilaciones?</li> <li>• ¿Qué variables se debe considerar para obtener una mayor o menor jubilación?</li> <li>• ¿Cómo tomar buenas decisiones para mejorar nuestras jubilaciones?</li> <li>• ¿Cuándo debería una persona tener sus ahorros en un fondo de menor riesgo,</li> </ul> |

**OAL.** Tomar decisiones financieras bien informadas y con proyección a mediano y largo plazo respecto del ahorro, especialmente del ahorro previsional, de los seguros, y de los riesgos y oportunidades del endeudamiento crediticio, así como de la inversión.

#### **ADMINISTRACIÓN, MENCIÓN RECURSOS HUMANOS**

**OA 2.** Calcular remuneraciones y finiquitos, obligaciones tributarias y previsionales del personal de una empresa, de acuerdo a los contratos de trabajo, la legislación vigente y las Normas Internacionales de Contabilidad (NIC).

#### **CONTABILIDAD**

**OA 1.** Leer y utilizar información contable sobre la marcha de la empresa, de acuerdo a las normas internacionales de contabilidad y a la legislación tributaria vigente.

para mejorar sus expectativas de una mayor jubilación?

- ¿Cuándo obtiene una jubilación mayores beneficios al pertenecer a un fondo con mayor rentabilidad y mayor riesgo?

#### **Tipo de Proyecto Interdisciplinario**

- Matemática
- Administración
- Contabilidad

#### **Producto**

- Presentación de un modelo de jubilación a mediano y largo plazo.

#### **Habilidades y actitudes para el siglo XXI**

- Pensamiento creativo e innovación
- Pensamiento crítico
- Trabajo colaborativo

#### **Recursos**

TIC

#### **Etapas**

Fase 1: Análisis del problema

- Reflexionan a partir de las preguntas.

- Analizan la jubilación de los padres como parte de un caso real.

#### Fase 2: Investigación

- Reflexionan acerca de medidas que se podría tomar para mejorar las posibles jubilaciones.
- Investigan para validar las medidas propuestas.

#### Fase 3: Propuesta para mejorar las jubilaciones

- Construyen una propuesta para mejorar las jubilaciones.
- Validan la propuesta con un experto en el área de la economía.
- Mejoran la propuesta, incluyendo los aportes del experto en economía.

#### Fase 4: Difusión de la propuesta para mejorar las jubilaciones

#### Cronograma semanal

- Primera semana: Análisis del problema (Fase 1)
- Segunda semana: Investigación (Fase 2)
- Tercera semana: Elaboración de la propuesta (Fase 3)
- Cuarta semana: Difusión (Fases 4)

#### Evaluación Formativa

Los estudiantes elaboran un informe de avance (físico o digital) que incluye el desarrollo de cada una de las etapas para ser retroalimentados a lo largo del proceso.

#### Evaluación Sumativa

En grupos, entregan un informe con la proyección de las jubilaciones según los datos entregados por el profesor, y con las posibles medias a tomar para mejorarla.

#### Difusión Final

Las propuestas de modelamiento de optimización de servicio de reparto se pueden presentar en la feria de ciencias y/o en ferias vocacionales del establecimiento educativo para motivar a los visitantes a estudiar la especialidad.

#### Bibliografía

SP. (2019). *Simulador de pensión para asociados a una AFP*. Superintendencia de Pensiones. Disponible en <https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.chileatiende.gob.cl/fichas/35757-simulador-de-pension-para-afiliados-a-una-afp>

#### Criterios de evaluación

Tanto para las Habilidades del siglo XXI de Pensamiento creativo e innovación, Pensamiento crítico y Trabajo colaborativo, como para el Diseño de proyecto y la Presentación del trabajo, referirse a las rúbricas correspondientes en el Anexo.

## Proyecto TP: Optimizando el servicio de despacho de productos

### Resumen del Proyecto

Para comenzar, los estudiantes investigan respecto del problema de los servicios de reparto. Se los invita a reflexionar sobre las posibles causas que explican por qué es tan importante optimizar servicios de reparto y el impacto que produce en los usuarios y profesionales que trabajan en esta área laboral.

Luego, crean un modelo de optimización que considere variables clave para mejorar un servicio de reparto y aplicarlo en un piloto a menor escala. Se pretende, además, conectar interdisciplinariamente este proyecto con el uso de tecnologías y de habilidades de diseño para difundir la propuesta elaborada, de modo que, finalmente, se organice una feria para presentar los principales resultados.

|   |  |
|---|--|
| <p><b>Nombre del Proyecto</b></p> <p style="text-align: center;"><b>OPTIMIZANDO EL SERVICIO DE DESPACHO DE PRODUCTOS</b></p>  |  |
| <p><b>Problema central</b></p> <p>Establecer un plan estratégico optimizado para el servicio de reparto de productos.</p>   |  |
| <p><b>Propósito</b></p> <p>Se pretende que construyan un modelo para optimizar los servicios prestados por una empresa, mediante la distribución de locales y servicios de entrega de productos, aplicando conocimientos geométricos como rectas y circunferencias en el plano. El proyecto, podría ser de especial interés para la especialidad de Administración de Empresas, mención Logística.</p>  |  |
| <p><b>Objetivos de Aprendizaje</b></p> <p><b>MATEMÁTICA</b></p> <p><b>OA Conocimiento y comprensión</b></p> <p><b>OA 4.</b> Resolver problemas acerca de rectas y circunferencias en el plano, mediante su representación analítica, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.</p> <p><b>FORMACIÓN TÉCNICO-PROFESIONAL</b></p> <p><b>OAJ.</b> Empezar iniciativas útiles en los lugares de trabajo y/o proyectos propios, aplicando principios básicos de gestión financiera y administración para generarles viabilidad.</p> <p><b>OAH.</b> Manejar tecnologías de la información y comunicación para obtener y procesar información</p> | <p><b>Preguntas</b></p> <p>¿Por qué es necesario optimizar los servicios de reparto?</p> <p>¿Qué variables debe considerarse para optimizar un servicio de repartos?</p> <p>¿Cómo permiten los conocimientos geométricos de rectas y circunferencias modelar y optimizar fenómenos de servicio de repartos?</p> <p>¿Cómo repercute la optimización de un servicio de reparto en la calidad laboral de los usuarios y los profesionales de reparto?</p> |

pertinente al trabajo, así como para comunicar resultados, instrucciones e ideas.

### **ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS**

**OA 2.** Elaborar un programa de actividades operativas de un departamento o área de una empresa, de acuerdo a orientaciones de la jefatura y/o del plan estratégico de gestión, considerando recursos humanos, insumos, equipamiento, distribución temporal y proyección de resultados.

**OA 3.** Hacer seguimiento y elaborar informes del desarrollo de un programa operativo de un departamento o área de una empresa, sobre la base de evidencias, aplicando técnicas apropiadas y considerando todos los elementos del programa.

### **Mención LOGÍSTICA**

**OA 5.** Prevenir riesgos de accidentes laborales, mediante la aplicación de normas básicas de seguridad en zonas de almacenamiento y distribución, y el reconocimiento de la rotulación internacional de sustancias peligrosas.

### **Tipo de Proyecto Interdisciplinario**

- Matemática
- Administración de empresas, mención Logística

### **Producto**

- Presentación de un modelo de optimización de servicio de reparto.

### **Habilidades y actitudes para el siglo XXI**

- Pensamiento creativo e innovación
- Pensamiento crítico
- Trabajo colaborativo

### **Recursos**

TIC  
Software GeoGebra  
Google Maps

**Etapas**

- Fase 1: Análisis del problema.
- Fase 2. Investigación:
  - Los alumnos investigan estrategias para determinar la ubicación geográfica de una empresa de distribución logística.
  - Se reúnen en equipos para analizar y comentar la información recopilada y establecen conclusiones sobre los aspectos relevantes para elegir la ubicación más adecuada.
  - Con base en las conclusiones, determinan posibles ubicaciones (en su entorno cercano) para instalar una sucursal para su empresa de venta de productos con despacho a domicilio.
- Fase 3: Construcción de un modelo de optimización:
  - Ubican en el mapa las direcciones seleccionadas por el grupo, apoyados por la herramienta Google Maps (Google, 2019).
  - Toman una captura del mapa para insertarlo en la aplicación GeoGebra (GeoGebra, 2019), donde dibujan circunferencias concéntricas con centro en cada ubicación del posible local.
  - Analizan las circunferencias construidas en todas las ubicaciones para elegir tres locales desde los cuales se pueda tener un óptimo radio de reparto.
  - Utilizando Google Maps, determinan el radio real de reparto que debe tener cada una de las sucursales (con la herramienta medir distancia).
  - En Google Maps, determinan la ubicación geográfica de las intersecciones de las tres circunferencias,
  - Apoyados en Google Maps, determinan la ubicación geográfica de las zonas entre las intersecciones de las circunferencias, y escogen dos direcciones que se encuentren en cada zona de intersección.
  - En Google Maps, con la herramienta medir distancia, determinan desde cuál de las sucursales sería más rentable hacer el despacho, utilizando el método “la ruta más corta” y creando nodos con las intersecciones de las calles apreciadas en el mapa.
- Fase 4: Pilotaje de la propuesta de modelamiento:
  - Aplican el piloto.
  - Reelaboran la propuesta de modelamiento de optimización en función de los resultados obtenidos al aplicar el piloto.
  - Elaboran el informe.
- Fase 5: Difusión de la propuesta.

**Cronograma semanal**

- Primera semana: Análisis e investigación (Fases 1 y 2)
- Segunda semana: Construcción de un modelo (Fase 3)
- Tercera semana: Pilotaje del modelamiento (Fase 3)
- Cuarta semana: Difusión (Fase 4)

**Evaluación Formativa**

Los estudiantes elaboran un informe de avance (físico o digital) que incluye el desarrollo de cada una de las etapas, para ser retroalimentados a lo largo del proceso.

### **Evaluación Sumativa**

En grupos, exponen el problema y dan un nombre y rubro ficticio a la empresa, para aplicar la solución en contexto.

### **Bibliografía**

Google. (2019). *Google Maps*. Disponible en

(<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.google.com/maps/>)

GeoGebra. (2019). *GeoGebra*. Disponible en

(<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/graphing>)

### **Criterios de evaluación**

Tanto para las habilidades y actitudes del siglo XXI de Pensamiento creativo e innovación, Pensamiento crítico y Trabajo colaborativo, como para el Diseño de proyecto y la Presentación del trabajo, referirse a las rúbricas correspondientes en el Anexo.

## Bibliografía

- Bermejo, M. (1991). *Geometría descriptiva aplicada*. México: Alfaomega.
- Bertoline, G., Wiebe, E., Miller, C. y Mohler, J. (1999). *Dibujo en ingeniería y comunicación gráfica*. México: McGraw Hill.
- Fadel, Ch., Bialik, M., y Trilling, B. (2016). *Educación en cuatro dimensiones: las competencias que los estudiantes necesitan para su realización*. Santiago: Graphika.
- Fraleigh, J. (1997). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Fondo Editorial Interamericano.
- Griffin, P. (2014). *Assessment for Teaching*. Melbourne: Cambridge University Press.
- Hawk, M. C. (1991). *Geometría descriptiva*. México: McGraw Hill.
- Herrera, B., y Montero López, F. (2002) *Geometría analítica, descriptiva y proyectiva para arquitectos y diseñadores*. México: Pearson Educación.
- Holliday-Darr, K. (2000). *Geometría descriptiva*. México: Thomson International.
- Larmer, J., Mergendoller, J. & Boss, S. (2015). *Setting the standard for project based learning: A proven approach to rigorous classroom instruction*. Alexandria, VA.: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Larson, R. y Hostetler, R. (1995). *Cálculo y geometría analítica*. Bogotá: McGraw-Hill.
- Lehmann, C. H. (1964). *Algebra*. México: Limusa.
- Leighton, W. B. (1987) *Geometría descriptiva*. Barcelona: Reverté.
- Leithold, L. (1998). *El cálculo con geometría analítica*. (7ª Ed.). México: Harla.
- Moss, C. & Brookhart, S. (2009). *Advancing formative assessment in every classroom: a guide for instructional leaders*. Alexandria, VA.: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Purcell, E. J. y Varberg, D. (1993). *Cálculo con geometría analítica*. México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Rosenmann, R. (1981). *Geometría descriptiva diédrica: con aplicación a geología*. Santiago: Instituto de Investigaciones Geológicas.
- Simmons, G. (2002). *Cálculo y Geometría Analítica*. (2ª Ed.) Bogotá: McGraw-Hill.
- Stein, S. y Barcellos, A. (1995). *Cálculo y geometría analítica*. Bogotá: McGraw-Hill.
- Stewart, J. (1999). *Cálculo: trascendentes tempranas*. México: Thomson International.
- Stewart, J. (2006). *Cálculo: conceptos y contextos*. México: Thomson International.
- Stewart, J.; Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo: Matemáticas para el cálculo*. Santa Fe, México: Cengage Learning.

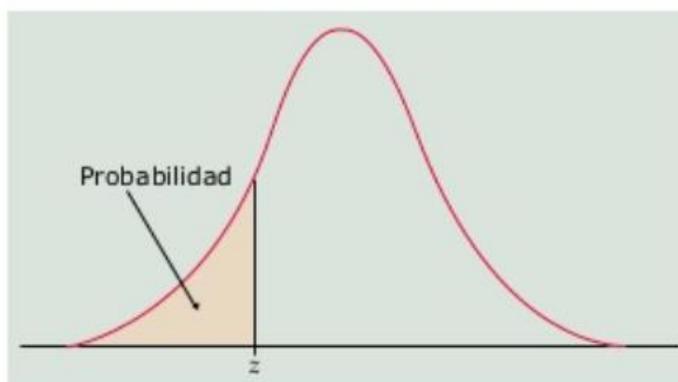
Swokowski, E. (1987). *Introducción al cálculo con geometría analítica*. México: Iberoamericana.

Vygotsky, L. (1978). "Interaction between learning and development". In Gauvain & Cole (Eds.) *Readings on the Development of Children*. New York: Scientific American Books, pp.34 – 40.

Wiggins, G. & McTighe, J. (2005). *Understanding by design*. Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.

## Anexos

El valor de la tabla para  $z$  es el área bajo la curva de la normal estándar a la izquierda de  $z$



**TABLA A: Probabilidades de la normal estándar**

| $z$  | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| -3.4 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0003 | .0002 |
| -3.3 | .0005 | .0005 | .0005 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0004 | .0003 |
| -3.2 | .0007 | .0007 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0006 | .0005 | .0005 | .0005 |
| -3.1 | .0010 | .0009 | .0009 | .0009 | .0008 | .0008 | .0008 | .0008 | .0007 | .0007 |
| -3.0 | .0013 | .0013 | .0013 | .0012 | .0012 | .0011 | .0011 | .0011 | .0010 | .0010 |
| -2.9 | .0019 | .0018 | .0018 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| -2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| -2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| -2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| -2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | .0049 | .0048 |
| -2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| -2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| -2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| -2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| -2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| -1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| -1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0301 | .0294 |
| -1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| -1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| -1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |
| -1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| -1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| -1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| -1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| -1.0 | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| -0.9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| -0.8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| -0.7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2296 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| -0.6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| -0.5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| -0.4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| -0.3 | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| -0.2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| -0.1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| -0.0 | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |

El valor de la tabla para  $z$  es el área bajo la curva de la normal estándar a la izquierda de  $z$

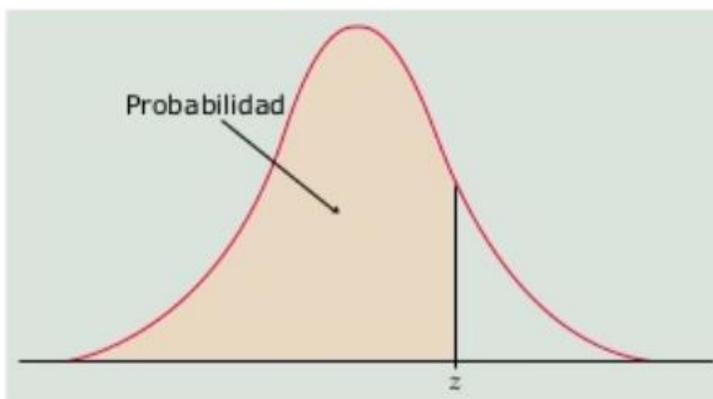


TABLA A: Probabilidades de la normal estándar (cont.)

| $z$ | .00   | .01   | .02   | .03   | .04   | .05   | .06   | .07   | .08   | .09   |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9772 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 |

## RÚBRICA PARA EL TRABAJO COLABORATIVO

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

| Desempeño individual  | Bajo el estándar  | Acercándose al estándar   | Cumple el estándar  |
|---|---|---|---|
| <p><b>1</b></p> <p><b>Se hace responsable de sí mismo</b></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>No demuestra preparación, información y disposición para trabajar en equipo.</li> <li>No usa las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas de proyecto.</li> <li>No hace la mayoría de las tareas del proyecto o no las completa a tiempo.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>En general demuestra preparación, información y disposición para trabajar con el equipo.</li> <li>Usa las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas del proyecto, pero de manera consistente.</li> <li>Realiza algunas tareas pero necesita que se le recuerde al respecto.</li> <li>Completa la mayoría de las tareas a tiempo.</li> <li>A veces usa retroalimentación de los otros para mejorar su trabajo.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Demuestra preparación, información y disposición para trabajar; estando bien informado acerca del tema del proyecto y cita y usa la evidencia para investigar y reflexionar acerca de ideas con el equipo.</li> <li>Usa sistemáticamente las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas del proyecto.</li> <li>Realiza las tareas sin que se le tenga que recordar al respecto.</li> <li>Completa la totalidad de las tareas a tiempo.</li> <li>Usa la retroalimentación de los otros para mejorar su trabajo.</li> </ul> |
| <p><b>2</b></p> <p><b>Ayuda al equipo</b></p>                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>No ayuda al equipo a resolver problemas; puede generar problemas.</li> <li>No hace preguntas de sondeo ni expresa ideas o elabora en respuesta a preguntas y discusiones.</li> <li>No da retroalimentación útil a los otros.</li> <li>No ofrece ayudar a los otros si estos lo necesitan.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Coopera con el equipo, pero puede no ser activo en la ayuda para solucionar problemas.</li> <li>A veces expresa sus ideas claramente, hace preguntas de sondeo y elabora en respuesta a preguntas y discusiones.</li> <li>Da retroalimentación a otros, pero esto no es siempre útil.</li> <li>A veces ofrece ayudar a los otros si estos lo necesitan.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Ayuda al equipo a resolver problemas y manejar los conflictos.</li> <li>Ayuda a la generación de discusiones efectivas al expresar sus ideas claramente, hacer preguntas de sondeo, asegurarse que todos sean escuchados y al responder de manera reflexiva ante nueva información y perspectivas.</li> <li>Da retroalimentación efectiva (específica, factible y apoyadora) a los otros para que puedan mejorar su trabajo.</li> <li>Ofrece ayuda a los otros si es que los necesitan.</li> </ul>   |
| <p><b>3</b></p> <p><b>Respeto a otros</b></p>                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>Es irrespetuoso o poco amable con sus compañeros de equipo (puede interrumpir, ignorar las ideas de los otros o herir sentimientos)</li> <li>No reconoce o respeta otras posturas.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>En general, es educado y amable con sus compañeros de equipo.</li> <li>En general, reconoce y respeta las posturas de los otros y al estar en desacuerdo, lo expresa de forma diplomática.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Es educado y amable con sus compañeros de equipo.</li> <li>Reconoce y respeta las posturas de los otros y al estar en desacuerdo, lo expresa de forma diplomática.</li> </ul>  |

## RÚBRICA PARA EL PENSAMIENTO CRÍTICO

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

| Oportunidad de pensamiento crítico en las fases del proyecto  | Bajo el estándar  | Acercándose al estándar   | Cumple el estándar   |
|---|---|---|--|
| <p><b>1</b></p> <p><b>Lanzamiento del proyecto.</b></p> <p><b>Analiza la pregunta clave e inicia la indagación.</b></p>               | <ul style="list-style-type: none"> <li>Solo ve los aspectos superficiales de la pregunta clave o solo un punto de vista de la misma.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Identifica algunos aspectos centrales de la pregunta clave, pero puede no ver sus complejidades ni considerar variados puntos de vista.</li> <li>Realiza preguntas complementarias acerca del tema o acerca de lo que la audiencia o usuarios del producto quieren o necesitan, pero no indaga lo suficiente en ello.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Demuestra comprensión acerca de los aspectos centrales de la pregunta clave, identificando en detalle lo que se necesita saber para responderla y considerando varios posibles puntos de vista para responderla.</li> <li>Realiza preguntas complementarias que permiten enfocar o ampliar la indagación, si es que se necesita.</li> <li>Hace preguntas complementarias para lograr la comprensión acerca de lo que la audiencia o usuarios del producto quieren o necesitan.</li> </ul> |
| <p><b>2</b></p> <p><b>Construcción de conocimiento, comprensión y habilidades.</b></p> <p><b>Recopilar y evaluar información.</b></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Es incapaz de integrar la información para responder la pregunta clave; recopila muy poca o demasiada información y esta es irrelevante o viene de muy pocas fuentes.</li> <li>Acepta la información sin cuestionar su validez ni evaluar su calidad.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Intenta integrar la información para responder la pregunta clave; pero puede ser muy poca o demasiada información y/o viene de muy pocas fuentes o de algunas irrelevantes.</li> <li>Comprende que la calidad de la información debe ser considerada pero no aplica este criterio de manera rigurosa.</li> </ul>                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>Integra suficiente información relevante para responder la pregunta clave. Esta información proviene de múltiples y variadas fuentes.</li> <li>Evalúa de manera rigurosa la calidad de la información (considera su utilidad, precisión y credibilidad; distingue los hechos de las opiniones; reconoce el sesgo).</li> </ul>   |

| Oportunidad de pensamiento crítico en las fases del proyecto   | Bajo el estándar   | Acercándose al estándar   | Cumple el estándar   |
|--|--|---|--|
| <p style="text-align: center;"><b>3</b></p> <p><b>Desarrollo y revisión de ideas y productos.</b></p> <p><b>Uso de evidencia y sus normas de evaluación.</b></p>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Acepta argumentos para la obtención de posibles respuestas a la pregunta clave sin cuestionar si su razonamiento es válido.</li> <li>• Usa la evidencia sin considerar cuán sólida esta es.</li> <li>• Confía en "su instinto" para evaluar y revisar las ideas, prototipos de productos o soluciones a los problemas (no usa las normas de evaluación).</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconoce la importancia y necesidad de un razonamiento válido y evidencia sólida, pero no los evalúa de forma cuidadosa al formular respuestas a la pregunta clave.</li> <li>• Evalúa y revisa ideas, prototipos de producto, soluciones a los problemas, basándose en normas incompletas o inválidas.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Evalúa argumentos para la obtención de posibles respuestas a la pregunta clave considerando si es que el razonamiento es válido y la evidencia es relevante y suficiente.</li> <li>• Justifica la elección de los criterios usados para evaluar las ideas, prototipos de productos o soluciones a los problemas.</li> <li>• Revisa los borradores, diseños y soluciones inadecuadas y explica por qué no se ajustan a las normas.</li> </ul>  |
| <p style="text-align: center;"><b>4</b></p> <p><b>Presentación de productos y la respuesta a la pregunta clave.</b></p> <p><b>Justifica sus elecciones, considera alternativas y sus implicancias.</b></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Elige un medio para presentar sin considerar las ventajas y desventajas de usar otros medios para presentar un tema o idea en particular.</li> <li>• No es capaz de dar razones válidas o evidencia adecuada para defender elecciones con el fin de responder la pregunta central o crear productos.</li> <li>• No considera ni respuestas alternativas, ni distintos diseños del producto o diferentes puntos de vista para responder a la pregunta clave.</li> <li>• No es capaz de explicar el nuevo conocimiento ganado a través de la realización del proyecto.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Considera las ventajas y desventajas de usar diferentes medios para presentar un tema o idea en particular, pero no de forma rigurosa.</li> <li>• Explica opciones tomadas al responder la Pregunta clave o la creación de productos, pero algunas razones no son válidas o carecen de evidencia que las apoye.</li> <li>• Entiende que puede haber alternativas de respuestas a la pregunta de manejo o diseños para productos, pero no los considera cuidadosamente.</li> <li>• Puede explicar algunas cosas aprendidas en el proyecto, pero no está del todo claro acerca de nuevos conceptos.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Evalúa las ventajas y desventajas de usar otros medios para presentar un tema o idea.</li> <li>• Justifica sus elecciones al responder la pregunta central o al crear productos dando razones válidas con evidencia que las respalde.</li> <li>• Reconoce las limitaciones de una sola respuesta a la pregunta central o al diseño del producto (cómo puede no ser completa, certera o perfecta) y considera perspectivas alternativas.</li> <li>• Puede explicar claramente los nuevos aprendizajes adquiridos en el proyecto y cómo estos pueden ser transferidos a otras situaciones o contextos.</li> </ul> |

## RÚBRICA DE PENSAMIENTO CREATIVO E INNOVACIÓN

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

| Oportunidad de creatividad e innovación en distintas fases del proyecto  | Bajo el estándar  | Acercándose al estándar  | Cumple el estándar  |
|--|---|--|---|
| <p><b>1</b></p> <p><b>Lanzamiento del proyecto.</b></p> <p><b>Definición del desafío creativo</b></p>                                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Puede solo "seguir instrucciones" sin comprender el propósito de la innovación o considerar las necesidades e intereses del público objetivo.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprende el propósito de la innovación, pero no considera a cabalidad las necesidades e intereses del público objetivo</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comprende el propósito de la innovación (¿quién necesita esto? ¿por qué?)</li> <li>• Desarrolla perspicacia acerca de las necesidades e intereses del público objetivo.</li> </ul>   |
| <p><b>2</b></p> <p><b>Construcción de conocimiento, comprensión y habilidades.</b></p> <p><b>Identifica fuentes de información</b></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa solo fuentes de información usuales (página web, libro, artículo).</li> <li>• No ofrece nuevas ideas durante las discusiones.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Encuentra una o dos fuentes de información que no son las usuales (página web, libro, artículo).</li> <li>• Ofrece nuevas ideas durante las discusiones, pero sus puntos de vista son poco variados.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Encuentra maneras o lugares inusuales para obtener nueva información (adultos expertos, miembros de la comunidad, empresas, organizaciones, literatura), además de las fuentes usuales (página web, libro, artículo).</li> <li>• Promueve puntos de vista divergentes y creativos durante las discusiones.</li> </ul>  |
| <p><b>3</b></p> <p><b>Desarrollo y revisión de ideas y productos.</b></p> <p><b>Generación y selección de ideas.</b></p>               | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Permanece dentro de los parámetros ya existentes; no usa técnicas para la generación de ideas para el desarrollo de nuevas ideas para la creación de productos.</li> <li>• Selecciona una idea sin evaluar su calidad.</li> <li>• No formula nuevas preguntas ni elabora la idea seleccionada.</li> <li>• No considera ni usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Desarrolla algunas ideas originales para los productos, utilizando una o dos veces las técnicas de generación de ideas.</li> <li>• Evalúa las ideas antes de seleccionar una, pero no de manera rigurosa.</li> <li>• Formula una o dos preguntas nuevas, pero puede hacer solo pequeñas modificaciones a la idea seleccionada.</li> <li>• Demuestra algo de imaginación al dar forma a las ideas para la elaboración de un producto, pero permanece dentro de límites convencionales.</li> <li>• Considera y usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto, pero no busca esta retroalimentación.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa técnicas para la generación de ideas para el desarrollo de nuevas ideas para la creación de productos.</li> <li>• Evalúa cuidadosamente la calidad de las ideas y selecciona la mejor para darle forma a un producto.</li> <li>• Formula preguntas nuevas y toma distintas perspectivas para elaborar y mejorar la idea seleccionada.</li> <li>• Usa el ingenio y la imaginación y se sale de los límites convencionales al dar forma a las ideas para la elaboración de un producto.</li> <li>• Busca y usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto y así cumplir de una mejor manera con las necesidades del público objetivo.</li> </ul> |

| Oportunidad de creatividad e innovación en distintas fases del proyecto   | Bajo el estándar   | Acercándose al estándar   | Cumple el estándar  |
|---|--|---|---|
| <p><b>4</b></p> <p><b>Presentación de productos y respuestas a las preguntas centrales.</b></p> <p><b>Presentación del trabajo a los usuarios o público objetivo.</b></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Presenta ideas y productos de forma convencional (presentaciones ppt, cargadas de texto, recitación de notas, falta de elementos de interacción con la audiencia)</li> </ul>          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Añade algunos detalles que poseen atractivo visual a los medios utilizados en la presentación.</li> <li>• Intenta incluir elementos en la presentación que la harán más animada y atractiva.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Crea medios para una presentación atractiva visualmente, evitando las formas convencionales (presentaciones ppt cargadas de texto, recitación de notas, falta de elementos de interacción con la audiencia).</li> <li>• Incluye elementos en la presentación que son especialmente vivaces, llamativos o poderosos y acordes al público objetivo.</li> </ul> |
| <p><b>5</b></p> <p><b>Originalidad</b></p>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Usa modelos, ideas o direccionamientos existentes; no es original o único.</li> <li>• Sigue reglas y convenciones; usa materiales e ideas de maneras típicas.</li> </ul>              | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiene algunas ideas novedosas o considera mejoras, pero algunas de estas ideas son predecibles o convencionales.</li> <li>• Puede tentativamente tratar de desmarcarse de las reglas y convenciones, o encontrar nuevos usos para materiales e ideas comunes.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Es novedoso, único y sorprendente; muestra un toque personal.</li> <li>• Puede romper las reglas y convenciones de manera exitosa o usar materiales e ideas comunes de formas nuevas, inteligentes y sorprendidas.</li> </ul>  |
| <p><b>6</b></p> <p><b>Valor</b></p>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• No es útil o valioso para el público objetivo/usuario.</li> <li>• No funcionaría en el mundo real porque es poco práctico o inviable.</li> </ul>                                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Es útil y valioso en cierta medida; puede no resolver ciertos aspectos del problema o ajustarse exactamente a la necesidad previamente identificada.</li> <li>• No queda claro si es que el producto sería práctico o viable.</li> </ul>                                 | <ul style="list-style-type: none"> <li>• El producto se percibe como útil y valioso, resuelve el problema ya definido o la necesidad previamente identificada.</li> <li>• Es práctico y viable.</li> </ul>  |
| <p><b>7</b></p> <p><b>Estilo</b></p>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Es seguro, común y corriente y, de hecho, es un estilo convencional.</li> <li>• Contiene tres o más elementos que no son coherentes entre sí, dificultando su comprensión.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Tiene algunos toques interesantes, pero carece de un estilo distintivo.</li> <li>• Tiene uno o dos elementos que pueden ser excesivos o no coherentes entre sí.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Está bien diseñado, es llamativo, tiene un estilo distintivo pero adecuado al propósito.</li> <li>• Combina diferentes elementos logrando un todo coherente.</li> </ul>  |

Nota: El término "producto" se usa en esta rúbrica como un término que abarca el resultado del proceso de innovación durante un Proyecto. Un producto puede ser un objeto construido, una propuesta, presentación, solución a un problema, servicio, sistema, obra artística o literaria, un invento, un evento, una mejora a un producto existente, etc.

## RÚBRICA DE DISEÑO DEL PROYECTO

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

|  | No presenta las características del Proyecto efectivo   | Necesita más desarrollo   | Incluye características del proyecto efectivo  |
|--|---|---|--|
| <p><b>1</b></p> <p><b>Metas de aprendizaje del estudiante: conocimiento esencial, comprensión y habilidades para alcanzar el éxito</b></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Las metas de aprendizaje del estudiante no son claras ni específicas: el proyecto no está enfocado en los estándares.</li> <li>El proyecto no abarca, evalúa o demuestra el desarrollo de habilidades para el éxito.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto se enfoca en los estándares derivados del conocimiento y de la comprensión, pero puede referirse a muy pocas o demasiadas metas o metas sin mucha importancia.</li> <li>Las habilidades para el éxito están presentes, pero pueden ser demasiadas para ser enseñadas y evaluadas de manera adecuada.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto se enfoca en la enseñanza de habilidades y conocimiento importante enfocado en los estudiantes. Estos conocimientos se ajustan a los estándares y representan conocimientos centrales de las asignaturas.</li> <li>Las habilidades para el éxito se abordan de manera explícita para ser enseñadas y evaluadas, como los son el pensamiento creativo, la colaboración, la creatividad y la gestión del proyecto.</li> </ul>   |
| <p><b>2</b></p> <p><b>Problema o pregunta desafiante</b></p>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto no se enfoca en un problema o pregunta central (es más parecido a una unidad con varias tareas); o el problema o pregunta es muy fácil de resolver o de responder para que la existencia del proyecto se justifique.</li> <li>El problema o pregunta inicial no gira en torno a una pregunta que sea esencial para el proyecto o presenta graves fallas como, por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> <li>Tiene una sola y/o simple respuesta.</li> <li>No es motivante para los estudiantes (suena demasiado compleja o académica, como si viniera de un libro y, por ende, es atractiva solo para el profesor).</li> </ul> </li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto se enfoca en un problema o pregunta central, pero el nivel de desafío puede ser inapropiado para los estudiantes a quienes va dirigido.</li> <li>La pregunta inicial para el proyecto se relaciona con el mismo, pero no captura su problema o pregunta central (puede ser más como una temática más amplia).</li> <li>La pregunta inicial cumple con algunos de los criterios presentes en la columna de "incluye las características" pero carece de otros.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto se enfoca en un problema o pregunta central con un desafío apropiado.</li> <li>El proyecto se enmarca en una pregunta inicial que es: <ul style="list-style-type: none"> <li>Abierta: hay más de una respuesta correcta.</li> <li>Comprensible e inspiradora para los estudiantes.</li> <li>Alineada con las metas de aprendizaje. Para responder esta pregunta los estudiantes deberán obtener las habilidades, conocimiento y comprensión adecuados.</li> </ul> </li> </ul> |
| <p><b>3</b></p> <p><b>Indagación constante</b></p>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto es más bien una actividad de hacer o construir cosas que un proceso extendido de indagación. No existe un proceso para que los estudiantes generen preguntas que guíen la indagación.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>La indagación es limitada (puede ser breve y ocurrir solo una o dos veces en el proyecto; la búsqueda de información es la tarea principal; no existen preguntas realmente profundas).</li> <li>Los estudiantes generan preguntas, pero mientras algunas pueden ser cubiertas, otras no son usadas para guiar la indagación y, por ende, no afectan el camino que toma el proyecto.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>La indagación es sostenida a lo largo del tiempo y es rigurosa académicamente (los estudiantes hacen preguntas, buscan e interpretan datos, desarrollan y evalúan soluciones o construyen evidencia para obtener respuestas y generar nuevas preguntas).</li> <li>A lo largo del proyecto, la indagación está conducida por preguntas generadas por parte de los estudiantes que son fundamentales para el desarrollo del proyecto.</li> </ul>  |

|   | No presenta las características del Proyecto efectivo   | Necesita más desarrollo  | Incluye características del proyecto efectivo   |
|---|---|--|---|
| <p><b>4</b></p> <p><b>Autenticidad</b></p>                  | <ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto se asemeja a un trabajo en clases tradicional; carece de tareas, herramientas y contexto del mundo real. No genera un impacto real en el mundo ni habla de los intereses personales de los estudiantes.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto presenta algunas características auténticas, pero estas pueden ser limitadas o ser lejanas a las necesidades del contexto.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>El proyecto presenta un contexto auténtico y tareas y herramientas del mundo real; cumple estándares de calidad, genera un impacto en el mundo y habla sobre las preocupaciones, intereses o identidades personales de los estudiantes.</li> </ul>   |
| <p><b>5</b></p> <p><b>Voz y elección del estudiante</b></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>No se les da oportunidad a los estudiantes para que expresen su voz y tomen decisiones que afecten el contenido o proceso del proyecto; el proyecto está dirigido por el docente.</li> <li>O bien, se espera que los estudiantes trabajen de manera demasiado independiente sin una guía adecuada por parte del docente y/o que trabajen de esta manera antes de que sean capaces de hacerlo.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Se les dan pocas oportunidades a los estudiantes para que expresen su voz y tomen decisiones de mediana importancia (decidir cómo dividir tareas dentro del grupo o qué sitio web usar para investigar).</li> <li>Los estudiantes trabajan, en cierta medida de manera independiente del docente, pero podrían hacer más por sí solos.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes tienen oportunidades para expresar su voz y tomar decisiones acerca de los temas importantes (temas a investigar, preguntas, textos y recursos usados, gente con quien trabajar, productos a ser creados, uso del tiempo, organización de las tareas).</li> <li>Los estudiantes tienen oportunidades para tomar responsabilidades significativas y trabajar lo más independientemente del profesor como sea apropiado hacerlo, pero de manera guiada.</li> </ul> |
| <p><b>6</b></p> <p><b>Reflexión</b></p>                     | <ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes y el docente no participan en conjunto de la reflexión acerca de qué y cómo los estudiantes aprenden acerca del diseño del proyecto y su gestión.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes y el docente participan en conjunto de algún tipo de reflexión acerca del proyecto y luego de la culminación del mismo, pero no de forma regular o en profundidad.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes y el docente participan en conjunto de una reflexión profunda y comprensiva tanto durante el proyecto como después de su culminación. Reflexionan también acerca de cómo aprenden los estudiantes, el diseño del proyecto y su gestión.</li> </ul>   |
| <p><b>7</b></p> <p><b>Crítica y revisión</b></p>            | <ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes obtienen retroalimentación limitada o irregular acerca de sus productos y el trabajo en progreso y esta retroalimentación es solo por parte de él, no de los pares.</li> <li>No se requiere su utilización o los estudiantes no saben cómo utilizarla para revisar y mejorar su trabajo.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Se provee a los estudiantes de oportunidades para dar y recibir retroalimentación acerca de la calidad de los productos y del trabajo en progreso, pero este espacio para la retroalimentación puede carecer de estructura o solo existir una vez.</li> <li>Los estudiantes leen o reciben oralmente la retroalimentación acerca de su trabajo, pero no la usan para revisar y mejorar su trabajo.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Se provee regular y estructuradamente a los estudiantes de oportunidades para dar y recibir retroalimentación acerca de la calidad de los productos y del trabajo en progreso por parte de los pares, los docentes y de otros fuera de la clase, si la ocasión lo amerita.</li> <li>Los estudiantes usan la retroalimentación acerca de su trabajo para revisarlo y mejorarlo.</li> </ul>  |
| <p><b>8</b></p> <p><b>Producto</b></p>                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>Los estudiantes no hacen de su producto algo público que se presente a una audiencia o que se ofrezca a la gente más allá de la clase.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>El trabajo de los estudiantes se hace público solo para los compañeros y el docente.</li> <li>Los estudiantes presentan productos pero no se les pide que expliquen cómo trabajaron ni qué aprendieron.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>El trabajo de los estudiantes se hace público al presentar, mostrar u ofrecerlo a la gente más allá de la clase.</li> <li>Se les pregunta a los estudiantes que expliquen las razones que justifican sus elecciones, su proceso de indagación, cómo trabajaron, qué aprendieron etc.</li> </ul>  |

## RÚBRICA DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

|  | Bajo el estándar   | Acercándose al estándar   | Cumple el estándar  |
|--|--|---|---|
| <p><b>1</b></p> <p><b>Explicación de las ideas e información</b></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>No presenta información, argumentos, ideas o hallazgos de forma concisa y lógica; el argumento no contiene evidencia que lo valide; la audiencia no puede seguir la línea de razonamiento.</li> <li>La selección de información, desarrollo de ideas y el estilo son inapropiados para el propósito, tarea y audiencia (puede ser demasiada o muy poca información o un enfoque erróneo).</li> <li>No se refiere a perspectivas o puntos de vista alternativos u opuestos.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Presenta información, argumentos, hallazgos y evidencia de una manera que no siempre es clara, concisa y lógica; la línea de razonamiento es a veces difícil de seguir por parte de la audiencia.</li> <li>Intenta seleccionar información, desarrollar ideas y usar un estilo apropiados para el propósito, tarea y audiencia, que no son por completo exitosos.</li> <li>Intenta referirse a perspectivas alternativas u opuestas, pero no de forma completa o clara.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Presenta información, argumentos, hallazgos y evidencia en forma clara, concisa y lógica; la línea de razonamiento se puede seguir fácilmente por parte de la audiencia.</li> <li>Selecciona información, desarrolla ideas y usa un estilo apropiado al propósito, la tarea y la audiencia.</li> <li>Abarca perspectivas alternativas u opuestas de manera clara y acabada.</li> </ul> |
| <p><b>2</b></p> <p><b>Organización</b></p>                           | <ul style="list-style-type: none"> <li>No cumple los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación.</li> <li>No incluye una introducción y/o conclusión.</li> <li>Usa el tiempo de manera poco adecuada; la totalidad de la presentación o parte de ella es muy corta o muy larga.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Cumple la mayoría de los requerimientos respecto de los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación.</li> <li>Una introducción y conclusión, pero no son claras ni interesantes.</li> <li>Generalmente organiza bien el tiempo, pero puede usar demasiado o muy poco tiempo en un tema, material de apoyo o idea.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Cumple todos los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación.</li> <li>Incluye una introducción y conclusión que son claras e interesantes.</li> <li>Organiza bien el tiempo y no hay ninguna parte de la presentación que sea o muy larga o muy corta.</li> </ul>   |
| <p><b>3</b></p> <p><b>Mirada y lenguaje corporal</b></p>             | <ul style="list-style-type: none"> <li>No mira a la audiencia, lee las notas o láminas.</li> <li>No usa gestos o movimientos.</li> <li>Carece de pose y confianza (mueve los dedos, se agacha, se ve nervioso).</li> <li>Usa ropa inapropiada para la ocasión.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Mantiene contacto visual con poca frecuencia. Lee las notas o diapositivas la mayor parte del tiempo.</li> <li>Utiliza algunos gestos o movimientos que no parecen naturales.</li> <li>Presenta una actitud que demuestra confianza y adecuación a la situación. Solo se observa un poco de inquietud y movimiento nervioso.</li> <li>Intenta usar una presentación personal adecuada para la ocasión.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Mantiene contacto visual con la audiencia la mayor parte del tiempo; solo en algunas ocasiones mira las notas o diapositivas.</li> <li>Utiliza gestos y movimientos naturales.</li> <li>Presenta una actitud que demuestra confianza y adecuación a la situación.</li> <li>Posee una presentación personal acorde a la ocasión.</li> </ul>   |

|   | Bajo el estándar  | Acercándose al estándar  | Cumple el estándar   |
|---|---|--|--|
| <p><b>4</b></p> <p><b>Voz</b></p>                                       | <ul style="list-style-type: none"> <li>No pronuncia bien o habla demasiado bajo que dificulta la comprensión; frecuentemente usa muletillas (uhh, mmm, entonces, y, como, etc.) no adapta el discurso al contexto y la tarea.</li> </ul>          | <ul style="list-style-type: none"> <li>La mayor parte del tiempo habla de manera clara; utiliza una voz lo suficientemente fuerte para que la audiencia pueda escuchar la mayor parte del tiempo, pero puede hablar ocasionalmente de forma monótona.</li> <li>Usa muletillas.</li> <li>Intenta adaptar el discurso al contexto o tarea, pero no es consistente o no tiene éxito en su intento.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Habla de manera clara y a un ritmo adecuado; ni muy rápido ni muy lento. Habla lo suficientemente fuerte para que todos puedan escuchar; cambia el tono y el ritmo para mantener el interés.</li> <li>Rara vez usa muletillas</li> <li>Adapta el discurso al contexto y la tarea.</li> <li>Domina el registro formal cuando su uso es necesario.</li> </ul> |
| <p><b>5</b></p> <p><b>Elementos de ayuda para la presentación</b></p>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>No usa elementos de audio, visuales o de medios.</li> <li>Usa solo uno o pocos elementos visuales, de audio o de medios pero estos no añaden valor a la presentación y pueden incluso distraer.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Usa elementos de audio, visuales o de medios, pero estos pueden a veces distraer o no añadir valor a la presentación.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Usa elementos de audio, visuales o de medios bien elaborados para fortalecer la comprensión de los hallazgos, el razonamiento y la evidencia y añadir interés.</li> <li>Incorpora de forma adecuada y natural a la presentación los elementos visuales, de audio o de medios.</li> </ul>  |
| <p><b>6</b></p> <p><b>Respuesta a las preguntas de la audiencia</b></p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>No responde a las preguntas por parte de la audiencia (se sale del tema o no comprende las preguntas y no busca explicación o clarificación de las mismas)</li> </ul>                                      | <ul style="list-style-type: none"> <li>Responde algunas preguntas de la audiencia, pero no siempre de forma clara o completa.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Responde las preguntas de la audiencia en forma clara y completa.</li> <li>Busca clarificaciones a las preguntas, admite cuando no sabe o explica cómo encontrar la respuesta cuando es incapaz de dar una respuesta.</li> </ul>  |
| <p><b>7</b></p> <p><b>Participante en presentaciones de equipo</b></p>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>No todos los miembros del grupo participan; solo uno o dos de ellos hablan.</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>Todos los miembros del equipo participan, pero no en la misma proporción.</li> </ul>  | <ul style="list-style-type: none"> <li>Todos los miembros del equipo participan por aproximadamente el mismo período de tiempo.</li> <li>Todos los miembros del equipo son capaces de responder las preguntas sobre el tema como un todo y no solo acerca de su parte de la presentación.</li> </ul>   |