

Habilidad de **representar**



**DESARROLLO DE HABILIDADES:
APRENDER A PENSAR MATEMÁTICAMENTE**

7° y 8° año de Educación Básica

Ministerio de Educación

Material elaborado por Alejandro Pedreros Matta,
Unidad de Currículum y Evaluación y Profesionales del
Nivel de Educación Media de la División de Educación General.

Ministerio de Educación de Chile
Av. Bernardo O'Higgins N° 1371
Santiago - Chile

Coordinación Editorial:
Jasnaya Carrasco Segura
Sandra Molina Martínez
División de Educación General MINEDUC

Diseño:
Verónica Santana
Sebastián Olivari

Registro de Propiedad Intelectual N° 266188
ISBN: 978-956-292-547-1

mayo, 2016

Índice

Desarrollo de habilidades: Aprender a Pensar Matemáticamente.	5
Antecedentes del currículo de matemática.	7
Habilidad de representar	11
¿Cómo generar oportunidades de aprendizaje que procuren el desarrollo de la habilidad de representar?	12
Habilidad de representar y concepto de fracción.	13
Representación y construcción del concepto de fracción.	14
Representación y su relación con unidades de medida.	19
Habilidad de representar e identificación de patrones.	23
Habilidad de representar figuras geométricas.	32
▶ Construir multiplicidad de representaciones a partir de material concreto.	34
▶ Analizar propiedades particulares o propiedades generales de figuras geométricas.	35
▶ Representar el cuadrado/rectángulo en el Geoplano y/o estampar figuras 2D a partir de figuras 3D.	36
Gestión de problemas que procuran desarrollar la habilidad de representar.	38
Ejemplos de gestión de problemas utilizando material concreto y que procuran desarrollar la habilidad de representar.	40
Ejemplos de gestión de problemas de figuras geométricas 3D que procuran desarrollar la habilidad de representar.	42
Propuesta de progresión de problemas de figuras geométricas 3D que permitirían desarrollar la habilidad de representar.	45
Ejemplos de gestión de problemas de fracciones que procuran desarrollar la habilidad de representar.	46

Desarrollo de Habilidades:
Aprender a Pensar Matemáticamente

ANTECEDENTES DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

Las Bases Curriculares que abordan los años académicos de 7° año de Educación Básica a 2° año de Educación Media¹, comprenden en forma transversal habilidades de pensamiento en que subyace la habilidad de solucionar situaciones diversas. En la asignatura de Matemática, se señala:

“Comprender las matemáticas y aplicar los conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales, es fundamental para los ciudadanos en el mundo moderno. Para resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, se requiere de un cierto nivel de comprensión de las matemáticas, de razonamiento matemático y del uso de herramientas matemáticas” (p.104).

Del mismo modo y con respecto a los Estándares de Aprendizaje, descritos para 8° año de Educación Básica, el Nivel de Aprendizaje Adecuado en el contexto de la resolución de problemas en la asignatura de Matemática establece que las y los estudiantes deben:

“(…) mostrar generalmente que son capaces de aplicar conocimientos y habilidades de razonamiento matemático en situaciones directas y en problemas de varios pasos en los que se requiere elección de datos, organizar la información o establecer un procedimiento apropiado”² (p. 10).

Asimismo, el currículum nacional potencia el logro de objetivos de aprendizaje que articulan el desarrollo de contenidos, habilidades matemáticas y actitudes frente a la asignatura de matemática. En este contexto, es importante analizar y ejemplificar cómo las habilidades matemáticas descritas para 7° y 8° año de Educación Básica aportan a la formación de un ciudadano para resolver e

-
1. Ministerio de Educación de Chile (2013). Bases Curriculares 7° básico a 2° medio.
 2. Ministerio de Educación de Chile (2013). Estándares de Aprendizaje Matemática.

interpretar problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, para lo cual se requiere de un alto nivel de comprensión de las matemáticas y de razonamiento matemático.

Por otra parte, la formación matemática y la alfabetización matemática de todos los ciudadanos se considera un elemento esencial a tener en cuenta para el desarrollo de cualquier país (Mineduc, 2013). Se conoce como alfabetización matemática a la capacidad de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar en forma adecuada tanto los conocimientos como las herramientas matemáticas para resolver problemas cotidianos.

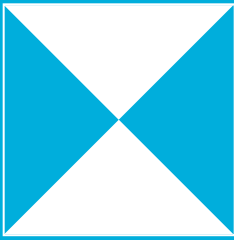
Para lograrlo, es necesario que los ciudadanos desarrollen el **razonamiento matemático**, uno de los principales focos a los cuales se orienta el currículum de esta asignatura. Esto implica formar a un estudiante que aplique la matemática en su entorno y que se valga de los conocimientos matemáticos como una herramienta útil para describir el mundo y para manejarse efectivamente en él, que reconozca las aplicaciones de la matemática en diversos ámbitos y que la use para comprender situaciones y resolver problemas. El pensamiento matemático se define como una capacidad que nos permite aplicar conocimiento y comprender las relaciones que se dan en el entorno, cuantificarlas, razonar sobre ellas, representarlas y comunicarlas. En este sentido, el papel de la enseñanza de las matemáticas es desarrollar las habilidades que generan el pensamiento matemático, sus conceptos y procedimientos básicos, con el fin de comprender y producir información representada en términos matemáticos.

La asignatura se focaliza en la **resolución de problemas**. Resolver un problema implica no solo poner en juego un amplio conjunto de habilidades, sino también creatividad para buscar y probar diversas soluciones. Al poner el énfasis en la resolución de problemas, se busca, por una parte, que las y los estudiantes descubran la utilidad de las matemáticas en la vida real y, por otro, abrir espacios para conectar esta disciplina con otras asignaturas. Otro de los énfasis del currículum de matemática consiste en que las y los estudiantes sean capaces de transitar entre distintos niveles de **representación** (concreto, pictórico y simbólico), traduciendo situaciones de la vida cotidiana a lenguaje formal, o utilizando símbolos matemáticos para resolver problemas o explicar situaciones concretas. Las Bases Curriculares dan relevancia al **modelamiento matemático**. El objetivo de desarrollar la habilidad de

modelamiento matemático es lograr que las y los estudiantes construyan una versión simplificada y abstracta de un sistema que opera en la realidad, que capturen los patrones clave y los expresen mediante símbolos matemáticos. Asimismo, [las habilidades comunicativas y argumentativas](#) son centrales en este escenario, estas se relacionan con la capacidad de expresar ideas con claridad y son muy importantes para comprender el razonamiento que hay detrás de cada problema resuelto o concepto comprendido.

Por lo tanto, aprender a ser docente de matemáticas implica desarrollar, entre otras, la competencia de planificar, aplicar y analizar estrategias e instrumentos de evaluación adaptados a las características de las competencias matemáticas desarrolladas por las y los estudiantes (Font y Godino, 2011). Además, como docentes de matemáticas, sabemos que debemos escuchar más a las y los estudiantes y, sobre todo, formular preguntas que permitan al docente generar oportunidades de aprendizaje. Es responsabilidad nuestra ir avanzando en el manejo del cuaderno como un instrumento de trabajo y un registro que permite obtener evidencia de aprendizaje.

Habilidad de **representar**

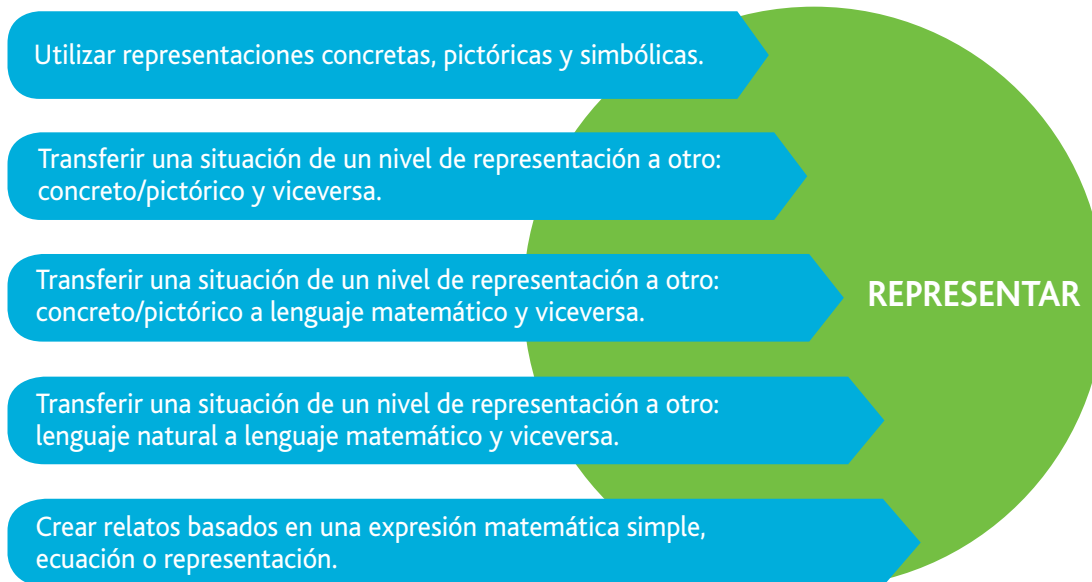


¿Cómo generar oportunidades de aprendizaje que procuren el desarrollo de la **habilidad de representar**?

Manejar una variedad de representaciones matemáticas de un mismo concepto y transitar fluidamente entre ellas, permitirá a las y los estudiantes lograr un aprendizaje significativo y desarrollar su capacidad de pensar matemáticamente. Toda representación debe transformarse de modo tal que puedan extraerse de ellas variados conocimientos, y así, no solo comunicar datos, sino que también transformar una representación para hacer explícito lo implícito (Duval, 1999). Durante la educación básica, se espera que aprendan a usar representaciones pictóricas tales como diagramas, esquemas y gráficos, para comunicar cantidades, operaciones y relaciones, y que luego conozcan y utilicen el lenguaje simbólico y el vocabulario propio de la disciplina (Mineduc, 2012).

Badillo, Edo y Font (2014) plantean que los dibujos cumplen básicamente dos funciones al resolver un problema: por una parte, sirven para modelizar el problema y, por otra, son el soporte de la actividad matemática que permite resolverlo. Lo anterior es fundamental, ya que los y las estudiantes, al explicar sus dibujos, logran comprender la actividad matemática que están realizando.

Por otra parte, cuando un estudiante realiza y evalúa una tarea matemática, activa un conglomerado formado por situaciones problema, representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Font, Godino y Gallardo, 2013). A continuación se presentan procesos clave que procuran desarrollar la habilidad de representar.



Desarrollar esta habilidad implica utilizar representaciones concretas, pictóricas y simbólicas, crear relatos basados en una expresión matemática simple, ecuación o representación, utilizar tablas o esquemas con lenguaje matemático, transferir una situación de un nivel de representación a otro. Cabe señalar que traducir de lenguaje natural a lenguaje matemático e inversamente es la base para desarrollar la habilidad de modelar.

A continuación se presenta una secuencia de actividades que procuran orientar el desarrollo de la habilidad de representar al construir el concepto de fracción y su operatoria.

Habilidad de representar y concepto de fracción

Un momento importante en el aprendizaje de las matemáticas se presenta con la introducción de las fracciones, los decimales y la razón. Estos aprendizajes implican comprender relaciones entre cantidades, en el uso de nuevos sistemas de símbolos para representar dichas relaciones y en la ampliación del sistema de numeración decimal. Por otra parte, aprender las fracciones, los números decimales, porcentajes, razones y proporciones de manera relacionada y

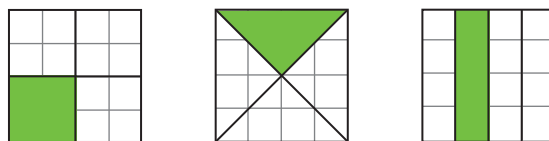
comprehensiva lo constituye en un proceso de "tratamientos y cambios de registros de representación cada vez más complejos, que conservan ya sea todo el contenido de la representación inicial, o bien solamente una parte de ese contenido" (Duval, 1999).

El concepto de fracción tiene diferentes interpretaciones, lo cual debe orientar el análisis, interpretación, el significado de dichas interpretaciones y el establecer relaciones entre ellas. Dos son las interpretaciones que vamos a considerar para abordar el desarrollo de la habilidad de representar: fracción como parte-todo, y medida.

Representación y construcción del concepto de fracción

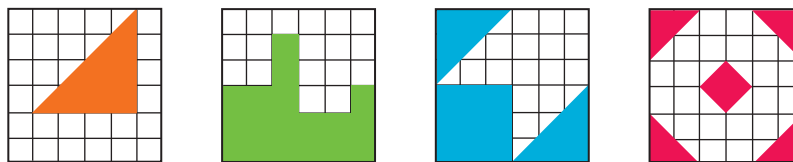
A continuación se presenta una secuencia de problemas que procura desarrollar progresivamente la habilidad de representar al construir el concepto de fracción como relación parte-todo en contextos continuos. Cabe destacar que las y los estudiantes deben relacionar las diferentes representaciones de divisiones congruentes, de tal manera que progresivamente comprendan que la división de un todo no implica figuras congruentes, sino figuras con igual superficie/ área. Además, cabe señalar que los problemas planteados a continuación son ejemplos que procuran orientar el desarrollo de la habilidad de representar.

Ejemplo 1: Observa las siguientes imágenes y responde las preguntas:



- ¿Qué fracción representa la parte achurada en cada figura? Justifica tu respuesta.
- ¿Es correcto afirmar que, al representar una fracción, la figura inicial se debe dividir en partes de igual forma e igual tamaño? Justifica tu respuesta.

Ejemplo 2: En cada una de los siguientes dibujos, ¿Qué fracción representa la parte pintada de la cuadrícula?






Ejemplo 3: Observa las siguientes imágenes y responde.



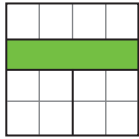
Con los ejemplos 1, 2, 3, 4 y 5 se busca desarrollar la habilidad de representar. No obstante, las habilidades de resolución de problemas y argumentar y comunicar también son habilidades que se desarrollan al mismo tiempo.


- ¿Qué parte pintada puede representar la fracción $\frac{1}{4}$? Justifica tu respuesta.
- ¿Qué parte pintada puede representar la fracción $\frac{1}{2}$? Justifica tu respuesta.

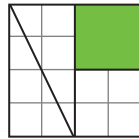
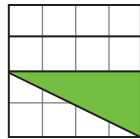
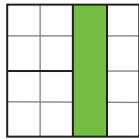
Los ejemplos 1, 2 y 3 buscan que las y los estudiantes puedan analizar y reconocer, en una primera etapa, las representaciones habituales o más comunes para representar fracciones. Con problemas similares al ejemplo 1, deben comprender la relación que hay entre el concepto de fracción y la relación parte todo en superficies. Por otra parte, con actividades similares al ejemplo 2, las y los estudiantes pueden identificar representaciones no habituales de fracciones, tales como $\frac{1}{2} \rightarrow$ . Por último, con problemas similares al ejemplo 3, pueden aprender a visualizar y justificar, a partir de diferentes representaciones, si la fracción $\frac{1}{2}$ y la fracción $\frac{3}{6}$ son equivalente.

Por ejemplo: ¿Es correcto que $\frac{1}{2} \rightarrow$  es equivalente a la fracción $\frac{3}{6} \rightarrow$ ? Justifica tu respuesta.

Ejemplo 4: ¿Es correcto el dibujo realizado por Francisca para representar la fracción $\frac{1}{4}$?
Justifica tu respuesta.



Ejemplo 5: a) ¿Es correcto que Ignacia represente la fracción $\frac{1}{4}$ con ?
Justifica tu respuesta.
b) Ignacia realiza otros tres dibujos para representar la fracción $\frac{1}{4}$.



¿Estos son correctos? Justifica tu respuesta.

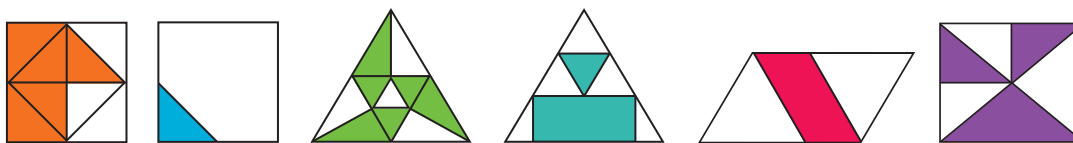
Con problemas similares a los ejemplos 4 y 5, las y los estudiantes podrían intentar responder interrogantes tales como: ¿Es correcto afirmar que al representar una fracción, la figura se debe dividir en partes de igual forma e igual tamaño? Justifica tu respuesta.

Ejemplo 6: ¿Qué fracción representa la parte achurada en cada una de las siguientes figuras?

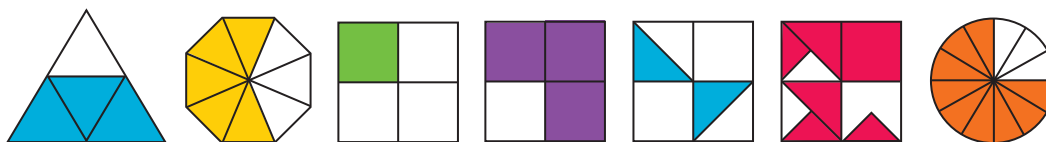


Ejemplo 7: ¿Cuál(es) de las siguientes figuras tiene achurada:

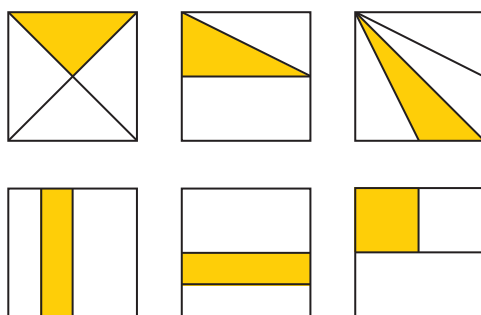
- a) $\frac{10}{16}$,
- b) $\frac{1}{2}$,
- c) $\frac{2}{16}$?



Ejemplo 8: ¿Cuál o cuáles de los siguientes dibujos representa la fracción $\frac{3}{4}$?

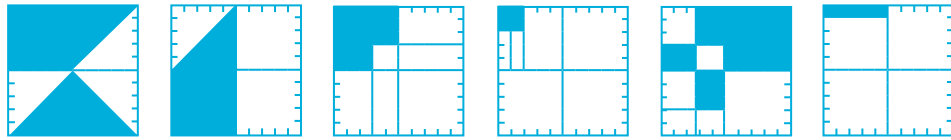


Ejemplo 9: ¿Cuál de las partes achuradas en los cuadrados **NO** representa la fracción $\frac{1}{4}$?



Con los ejemplos 6, 7, 8, 9 y 10 están orientados a obtener evidencia de aprendizaje de los diferentes niveles cognitivos (aplicación y razonamiento) por parte de las y los estudiantes al resolver problemas con foco en el desarrollo de las habilidades de argumentar y comunicar, y representar.

Ejemplo 10: Identifica la fracción que representa la parte achurada en cada figura.



Con actividades similares a los ejemplos 6, 7, 8, 9 y 10, los y las estudiantes pueden enfrentar problemas de alta complejidad cognitiva como una oportunidad de aprendizaje de analizar, relacionar e inferir información a partir de representaciones no habituales.

Representación y su relación con unidades de medida

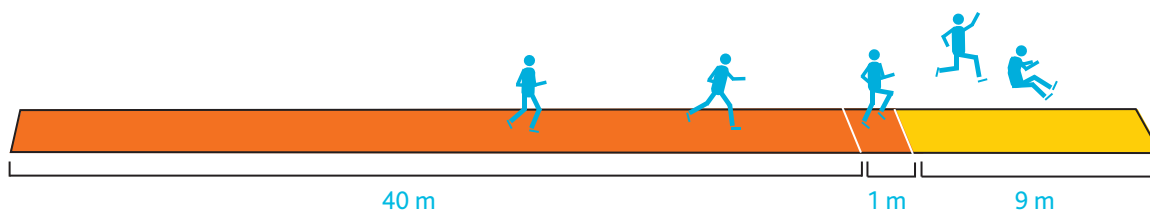
Crear una representación implica recurrir a dibujos y/o símbolos para dar a conocer información, concepto o propiedad. Por ende, los y las estudiantes cada vez que enfrentan algún tipo de representación se ven exigidos a analizar, relacionar e inferir datos o conceptos explícitos e implícitos. Dado el contexto anterior, la orientación pedagógica dada por la o el docente es clave para lograr una comprensión profunda en cada representación analizada. Toda representación está circunscrita a reglas de análisis, por ejemplo, sumar $0,25 + 0,25 = 0,5$ es diferente de sumar $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Además, cabe señalar que los problemas planteados a continuación son ejemplos que procuran orientar el desarrollo de la habilidad de representar.

Ejemplo 1: Considerando que dar una vuelta completa a la pista de atletismo implica recorrer 400 metros.

- ¿Qué fracción representa correr los 100 metros planos?
- ¿Qué fracción representa correr los 200 metros planos?

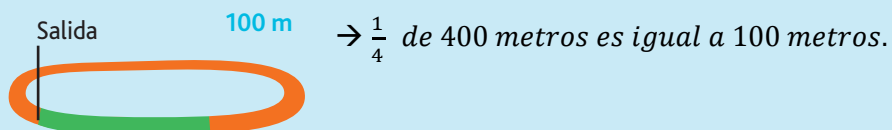


Ejemplo 2: Observa la siguiente imagen que describe el salto largo.



- ¿Cuántos metros mide la pista para realizar salto largo?
- ¿Qué fracción del largo de la pista está destinada para correr antes de realizar el salto largo?
- ¿Qué implica en el resultado final del salto largo descontar $\frac{1}{10}$ de la distancia alcanzada por el deportista?

Con actividades similares a los ejemplos 1 y 2, los y las estudiantes tienen la oportunidad de resolver problemas cuyo foco es analizar representaciones en función de unidades de medida. Cabe señalar que el o la docente debe analizar con las y los estudiantes el reglamento de atletismo y de salto largo para lograr una contextualización significativa al resolver los problemas. Específicamente, en el ejemplo 1, deben interpretar que, dado el punto de referencia "salida", la parte achurada de la pista está directamente relacionada con la unidad de medida de longitud "metros" y la relación implícita que deben inferir las y los estudiantes es:



Ejemplo 3: Observa el siguiente frasco con leche.

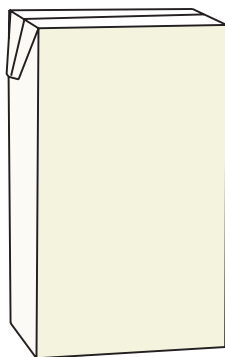
$$\frac{3}{4}$$



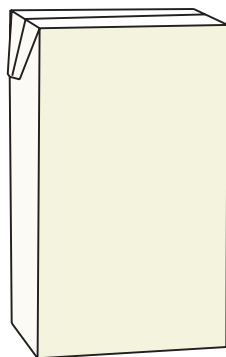
- a) ¿Es correcto decir que $\frac{3}{4}$ de litro es equivalente a 750 ml?
- b) ¿Es correcto decir que $\frac{3}{4}$ de litro es equivalente a 0,75 litros?
- c) ¿Es correcto decir que faltan 250 ml para llenar el frasco con leche?

Ejemplo 4: Ignacia debe representar la fracción indicada para cada caja de jugo.

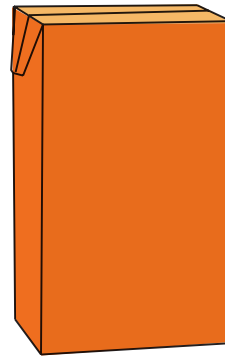
$$\frac{1}{3}$$



$$\frac{1}{2}$$



1 litro



Con actividades similares a los ejemplos 3 y 4, los y las estudiantes tienen la oportunidad de resolver problemas cuyo propósito es analizar representaciones en función de unidades de medida implícitas. Específicamente en el ejemplo 3, deben comprender que se puede analizar la situación considerando la unidad de medida litros o la unidad de medida mililitro, y en ambos casos el análisis es correcto.

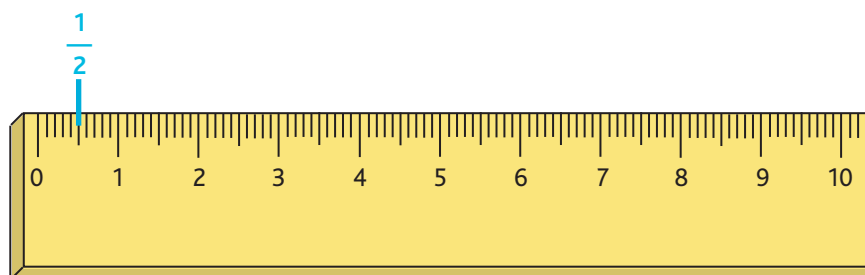
En relación al ejemplo 4, las y los estudiantes deben comprender, en primer lugar, que no es necesario explicitar la unidad de medida para resolver el problema. Por otra parte, las y los estudiantes deben identificar que los ejemplos 3 y 4 corresponden a contextos de unidad de medida de volumen. Así como, deben aprender a relacionar diferentes datos respecto de una misma representación, es decir, la representación con los $\frac{3}{4}$ de leche puede significar 750 ml o 0,75 litros (relacionar que $750 \text{ ml} = \frac{750}{1000} \text{ litros} = 0,75 \text{ litros}$).

Ejemplo 5: Una empresa embotelladora vende agua mineral de 4 litros, 8 litros y 12 litros.



- ¿Qué par de botellas de agua mineral cumplen con la razón 1:2? Argumenta.
- ¿Qué par de botellas de agua mineral cumplen con la razón 3:1? Argumenta.
- ¿Qué par de botellas de agua mineral cumplen con la razón 2:3? Argumenta.

Ejemplo 6: Angélica ubicó la fracción $\frac{1}{2}$ como muestra la siguiente imagen:



- Ubica las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$, y justifica cuál es mayor.
- Ubica las fracciones $\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{5}$, y justifica cuál es menor.
- Ubica las fracciones $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{4}$, y escribe otra fracción que sea, al mismo tiempo, mayor que $\frac{5}{4}$ y menor que $\frac{3}{2}$.

Con actividades similares a los ejemplos 5 y 6, los y las estudiantes tienen la oportunidad de resolver problemas cuyo propósito es analizar representaciones que involucran relacionar el concepto de razón y la recta numérica que está ejemplificada a través de una regla.

En relación al ejemplo 6, las y los estudiantes deben comprender, en primer lugar, que el conjunto de los números racionales es un conjunto cuyos números poseen diferentes representaciones, (Por ejemplo: $\frac{1}{2} = 0,5 = \frac{5}{10}$). En segundo lugar, deben inferir que el número racional $\frac{1}{2}$ puede ser representado por fracciones equivalentes ($\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{15}{30}$..., etc.) o un número decimal (0,5; 0,50; 0,500; ... etc.).

Habilidad de representar e identificación de patrones

El proceso de generalización constituye un verdadero desafío para la enseñanza de la matemática. Este proceso, que se inicia en Educación Parvularia con actividades tales como las seriaciones en las que es preciso identificar un patrón o regla de formación para continuar una secuencia, se trabaja con más profundidad en Educación Básica y en Educación Media, introduciendo la idea de variabilidad a través de las funciones y sus distintas formas de representación, y el lenguaje algebraico, que permite expresar propiedades de manera general (Callejo, 2012).

Ellis (2007) ha descrito estas acciones de generalización que se infieren a partir de lo que el sujeto hace, dice o escribe. Identifica tres tipos: relacionar, buscar y extender.

- ▶ **Relacionar** es establecer asociaciones entre situaciones u objetos. Se puede relacionar una situación con otra ya conocida, o generar una nueva situación a partir de otra; o también relacionar objetos, ya sea en el mismo o en distinto sistema de representación. Por ejemplo, se puede relacionar el número de diagonales de un polígono y el número de posibles parejas que puede formar un grupo de personas.
- ▶ **Buscar** es repetir acciones para identificar algún elemento de semejanza. Por ejemplo, se puede hacer una tabla de valores relacionando dos o más variables para saber si una relación como la de proporcionalidad entre dos o más variables permanece estable.
- ▶ **Extender** es centrar la atención en la generalidad de una idea más allá de una situación particular, problema o situación, o caso original. Es ampliar un modelo o relación a una estructura más general. A través de esta acción se puede generar algo nuevo: dominio de validez, objetos de una clase, relación, estructura, descripción o fenómeno general.

Por su parte, Radford (2006) considera que hablar de generalización en situaciones en las que se pide continuar una sucesión e identificar el patrón de la misma implica tener en cuenta dos aspectos: aquello que se generaliza (el objeto de generalización) y el objeto generalizado. El proceso que va de uno a otro incluye dos componentes interrelacionados: primero, identificar la regularidad en los casos particulares, y, segundo, construir un concepto general por generalización de lo que se ha identificado que tienen en común

todos los términos de la sucesión. La generalización algebraica tiene un tercer componente: el objeto generalizado cristaliza en un esquema, en este caso, en una expresión algebraica de una regla que permite obtener cualquier término de la secuencia.

Callejo (2012) considera que para construir una generalización es necesario el establecimiento de un invariante; la relación invariante se suele identificar en casos sencillos para valores pequeños y se extiende a valores más grandes.

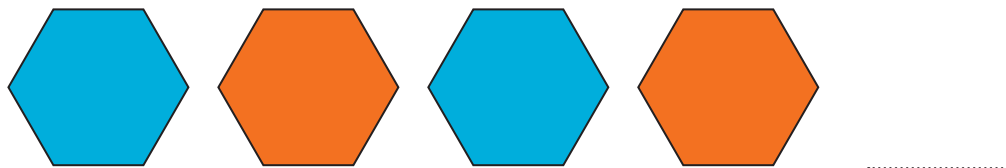
A continuación se presentan etapas que podrían orientar el aprendizaje de patrones y potenciar la habilidad de representación.

1	Modo de representación del enunciado.
2	Si hay un dibujo, detectar en una figura distintos modos de agrupamiento de sus elementos o subconfiguraciones.
3	Identificar invariantes.
4	Tipo de preguntas en relación a la generalización que se pide.
5	Resolución utilizando estrategias recursivas y funcionales.
6	Diferentes formas de establecer la relación entre la posición de una figura y el número de elementos.

Resolver problemas de patrones implica analizar representaciones, en una primera etapa, relativas a relaciones de tamaño y movimientos. Los siguientes ejemplos de patrones dicen relación con atributos relativos y atributos absolutos.



Ejemplo 1: Patrones en que cambia el color

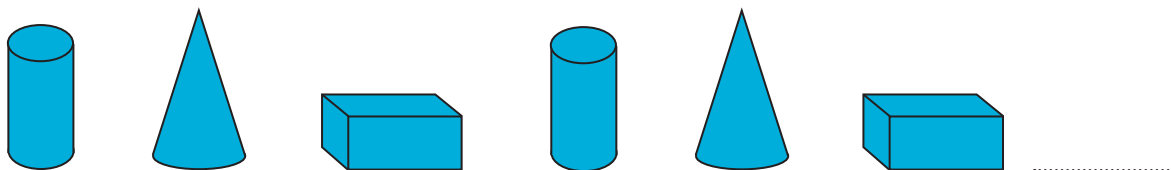


Hay un cambio en el color

Ejemplo 2: Patrones en que cambia la forma



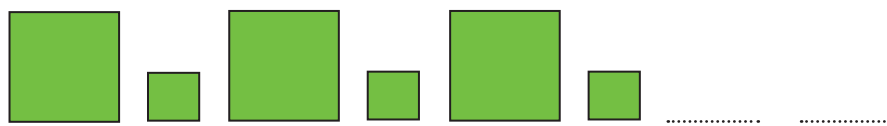
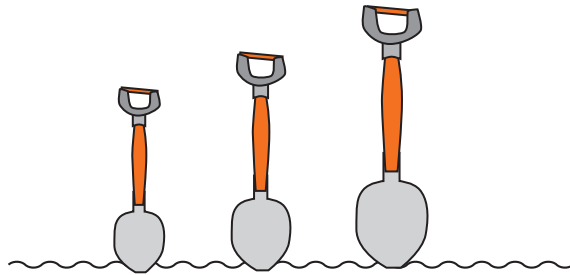
Hay un cambio en la forma



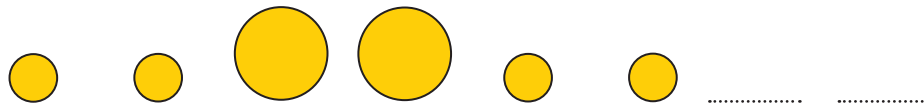
Hay un cambio en el objeto



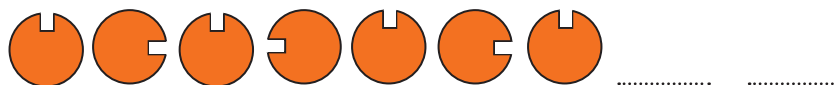
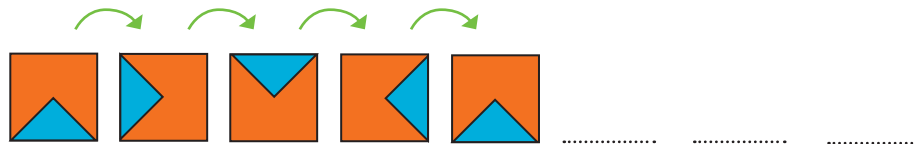
Ejemplo 3: Patrones en que cambia el tamaño



Hay un cambio en el tamaño

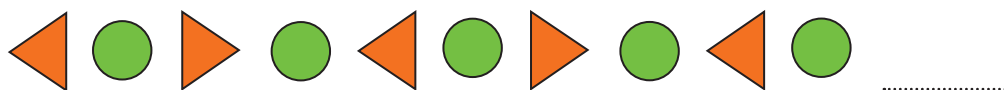


Ejemplo 4: Patrones en que se presenta un giro



Fuente: Texto Pensar Sin Límites. Matemática Método Singapur. Marshall Cavendish Education and Ministerio de Educación, Chile, 2013.

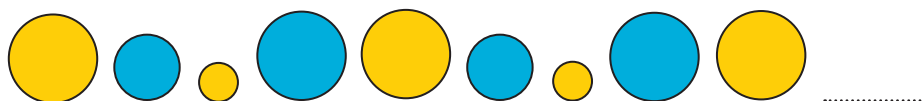
Ejemplo 5: Patrones con dos atributos a la vez



- El patrón de esta secuencia se hace usando dos figuras
- También se hace girando el triángulo



Hay un cambio en el tamaño y en el color

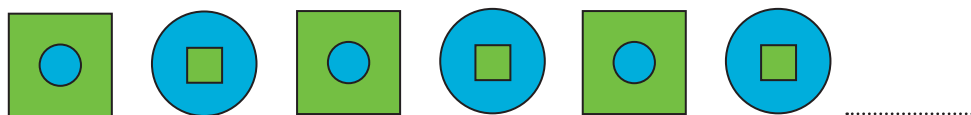


Dos atributos: Tamaño y color



Dos atributos: Forma y color

¿En el siguiente patrón hay cambio de dos atributos? Justifica tu respuesta.



Por otra parte, no todos los patrones tienen relación con atributos relativos y absolutos. Específicamente, el análisis aritmético de representaciones puede implicar descubrir un patrón numérico, lo cual conlleva un análisis mucho más complejo que deben realizar las y los estudiantes. A continuación se presenta una posible progresión de situaciones que involucra el análisis de patrones numéricos.

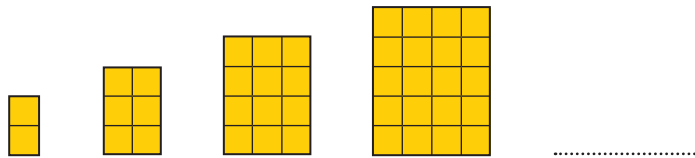
Fuente: Texto Pensar Sin Límites. Matemática Método Singapur. Marshall Cavendish Education and Ministerio de Educación, Chile, 2013.

Ejemplo 1: Observa las siguientes representaciones de puntos y responde las preguntas.



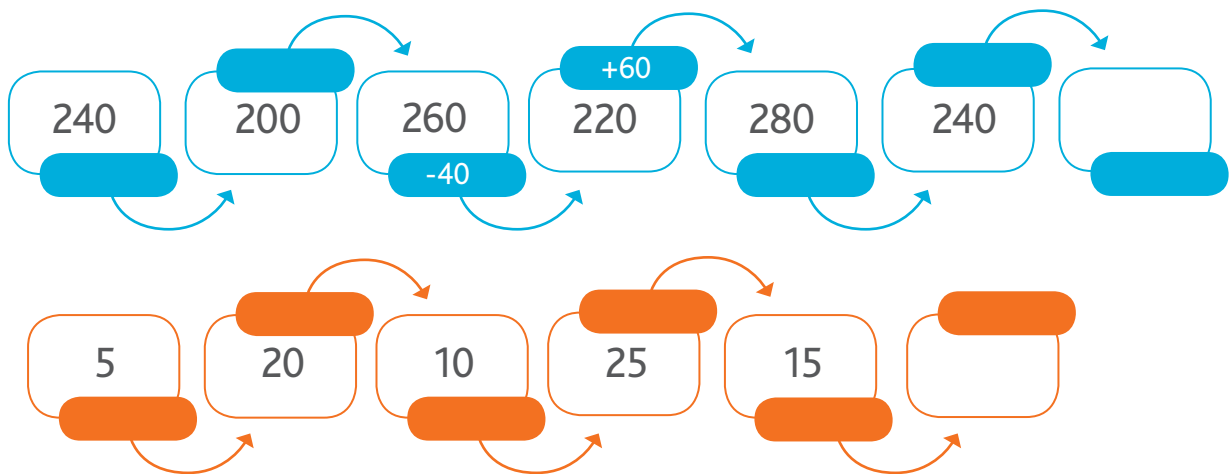
- ¿Cuántos puntos conforman la quinta figura?
- ¿Cuál es el patrón numérico que permite calcular la cantidad de puntos entre dos figuras consecutivas?
- ¿Qué relación hay entre las figuras de puntos del dibujo y los números impares?

Ejemplo 2: Observa las siguientes representaciones de rectángulos y responde las preguntas.



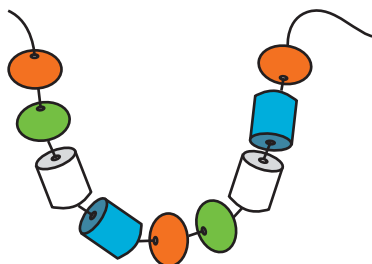
- ¿Cuántos cuadrados conforman la quinta figura?
- ¿Cuál es el patrón numérico que permite calcular la cantidad de unidades cuadradas que conforman cada rectángulo?

Ejemplo 3: ¿Cuál es el patrón numérico que permite obtener las siguientes secuencias?

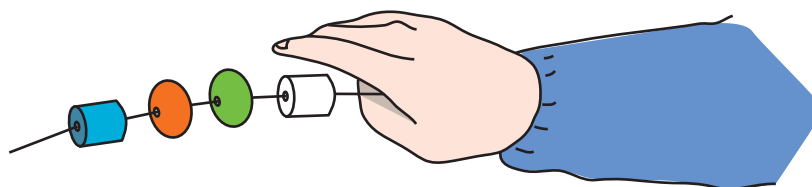


En este mismo contexto de análisis, identificar patrones implica analizar representaciones y relacionar la operatoria aritmética que permitirá identificar un término particular o establecer una **generalización** que permita analizar el término "n-ésimo", y así, identificar la **regla general** ya sea en forma verbal o algebraica.

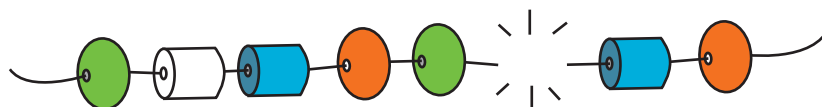
Ejemplo 1: Florencia usa diferentes mostacillas para hacer un collar como se muestra en el dibujo.



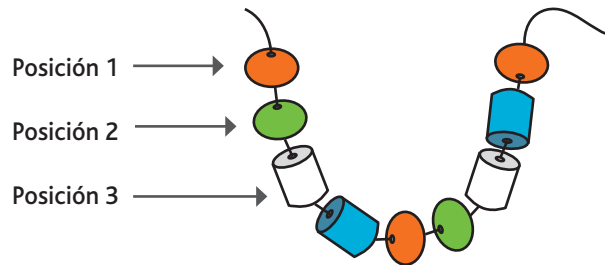
- Seguindo la misma idea de Florencia dibuja dos mostacillas más.
- ¿Qué mostacilla debe ir en el lugar que está tapando la mano? Justifica.



- ¿Qué mostacilla se cayó?



- d) ¿Cuál es el color de la mostacilla que se debe poner en la posición 16?
- e) ¿Cuál es el color de la mostacilla que se debe poner en la posición 17?
- f) ¿Cuál es el color de la mostacilla que se debe poner en la posición 240?
¿Cuál es el color de la mostacilla que se debe poner en la posición 241?



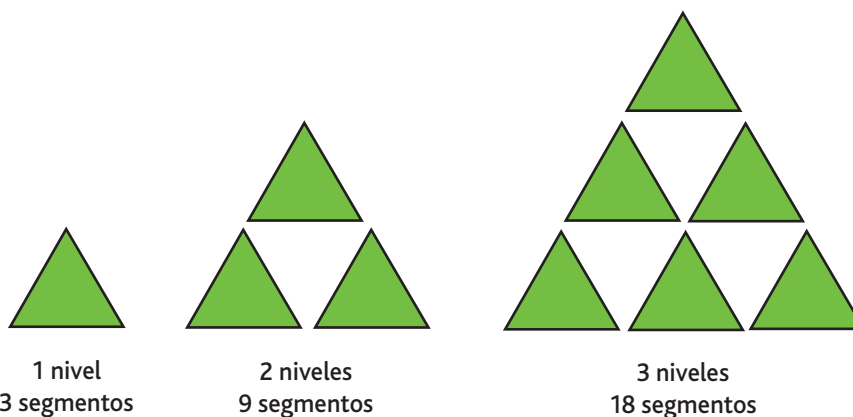
- g) ¿Qué puedes concluir acerca del color de las mostacillas y la posición en el collar?
- h) ¿Cuál es el color de la mostacilla que se debe poner en la posición 17?
¿Qué forma tiene la mostacilla que se debe poner en esa posición?
- i) ¿Cuál es el color de la mostacilla que se debe poner en la posición 161?
¿Qué forma tiene la mostacilla que se debe poner en esa posición?
- j) Describe una estrategia para identificar la forma de la mostacilla que se debe poner en cualquier posición determinada.

Ejemplo 2: Descubre el patrón que muestran los números de rojo en la tabla de 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- ¿Cuál es el patrón que permite identificar los números de rojo?
- ¿Cuál es la expresión que permite identificar cualquier número rojo?

Ejemplo 3: Se han hecho los siguientes diseños utilizando segmentos.



- ¿Cuántos segmentos serán necesarios para tener un diseño de 5 niveles?
- ¿Y para un diseño con 50 niveles? Justifica tu respuesta.
- ¿Sabrías decir cómo encontrar el número de segmentos de un diseño de cualquier número de niveles?

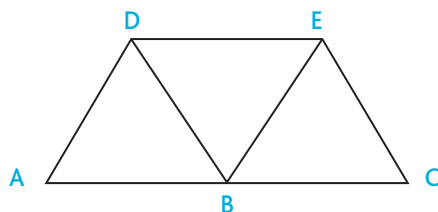
Habilidad de representar Figuras Geométricas

Para analizar geoméricamente una figura es necesario un soporte material o recurso didáctico (hoja de papel, cuerpos geoméricos, objetos, entre otros), y así, trabajar el campo perceptivo y la visualización. Específicamente, el proceso de visualización implica analizar las variaciones cualitativas (variaciones de forma, tamaño, orientación, color, entre otros) y variaciones de dimensiones (dimensión 0 el punto, dimensión 1 la línea y dimensión 2 el área). Las dimensiones permiten definir los elementos constitutivos de una figura geométrica, es decir, toda figura es la combinación de valores para cada una de las variaciones visuales de estos dos tipos: dimensional y cualitativo (Duval, 1999).

El trabajo con representaciones en geometría es clave para lograr una comprensión profunda de los conceptos y procedimientos. Resolver un problema en geometría implica, muchas veces, "ver lo implícito" e identificar enunciados que "representan aparentemente problemas totalmente diferentes".

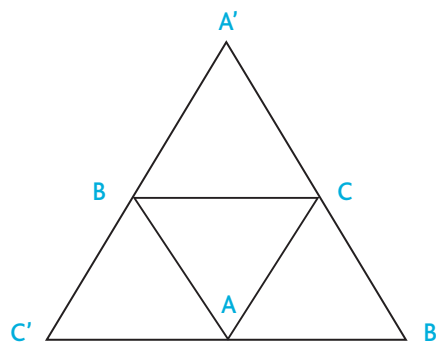
Enunciado 1

ABED y BCED son paralelogramos.
Probar que B está en la mitad de AC.



Enunciado 2

A'C' y AC son paralelas.
A'B' y AB son paralelas.
B'C' y BC son paralelas.
Probar que A es el punto medio de B'C'.



¿A qué se refiere con ver lo implícito? La figura del enunciado 2 permite verificar fácilmente que está conformada por 6 unidades figurales de dimensión 1, las cuales están designadas y enumeradas ($A'C'$, AC , $A'B'$, AB , $B'C'$ y BC); y por 8 unidades figurales de dimensión 2, que corresponden a triángulos (ABC' , $B'CA$, CBA' , $CA'B$ y $B'A'C'$) y paralelogramos ($B'CBA$, $CA'BA$ y $ACBC'$). Las unidades figurales descritas anteriormente han de analizarse para identificar las posibles estrategias que permiten resolver el problema (Duval, 1999).

Por lo tanto, una figura representa una situación geométrica solo en la medida en que la significación de las unidades figurales y sus relaciones se hagan explícitas, ya que no es suficiente el simple reconocimiento perceptivo de las unidades figurales de dimensión 2, o de las relaciones entre unidades figurales de dimensión 1. En geometría es necesario aprender a leer y crear representaciones geométricas, lo cual implica un proceso de aprendizaje caracterizado por la necesaria coordinación entre los tratamientos en dos o más registros (el de las figuras y el de la lengua materna y/o el lenguaje simbólico) y el tránsito de un discurso explicativo a un discurso argumentativo, y así, lograr una comprensión profunda de la geometría escolar y coherencia con los principios de la Geometría Dinámica y el desarrollo del razonamiento configural (Torregrosa, 2013).

A continuación se presentan actividades que procuran orientar el desarrollo de la habilidad de representar al generar oportunidades de aprendizaje en el eje Geometría.

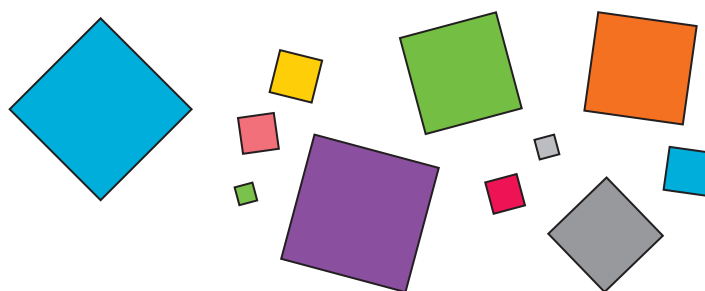
Construir multiplicidad de representaciones a partir de material concreto.

Los y las estudiantes deben explorar el material "mosaico simétrico" y construir diferentes figuras con dos piezas, con tres piezas, con 4 piezas, entre otras. Posteriormente, los y las estudiantes deben construir cualquier figura geométrica utilizando la mayor cantidad de piezas, y finalmente, construir una misma figura geométrica (como muestra el siguiente ejemplo) utilizando todas las piezas en distintas posiciones del mosaico simétrico (incluso se puede aumentar la demanda cognitiva solicitando construir una misma figura geométrica cuya disposición de las piezas implique una figura simétrica o no simétrica).

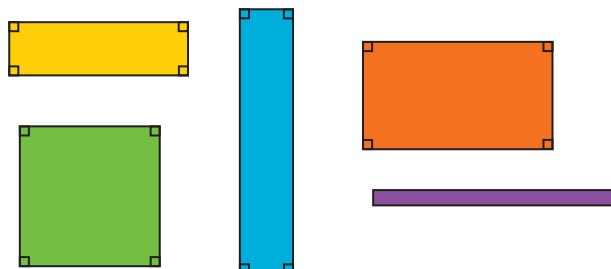


Analizar propiedades particulares o propiedades generales de figuras geométricas

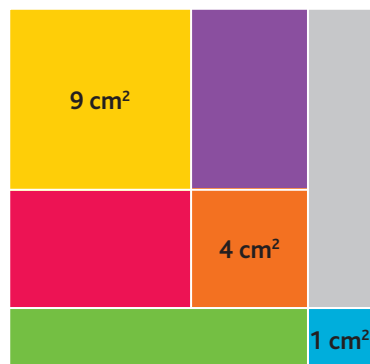
- a) **Identificar el cuadrado.** Lo importante es que las y los estudiantes puedan comprender que todas las figuras son cuadradas y que no hay rombos.



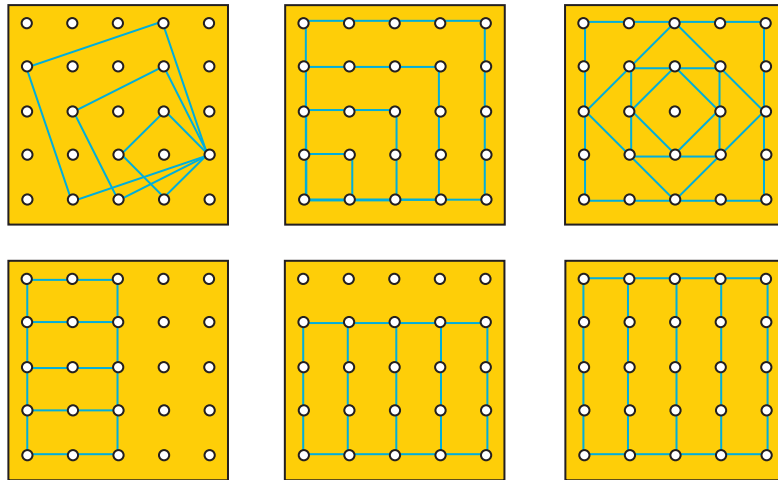
- b) **Identificar el rectángulo.** Lo importante en el siguiente análisis es que las y los estudiantes deben comprender qué significa "largo y ancho" en cada una de las siguientes representaciones. Cabe señalar que el cuadrado es un caso particular de rectángulo.



- c) **Finalmente se compara el cuadrado con el rectángulo al mismo tiempo.** Lo importante de analizar en la siguiente representación dice relación con identificar qué figuras conforman el cuadrado de mayor superficie y qué relación hay entre las medidas de los cuadrados y los rectángulos.



Representar el cuadrado/rectángulo en el Geoplano y/o estampar figuras 2D a partir de figuras 3D. Los y las estudiantes deben comprender las consecuencias geométricas (tamaño y forma) que conlleva realizar una transformación isométrica de una figura. Al mismo tiempo, toda representación de una figura modificada por una homotecia implica analizar el concepto de figuras semejantes.

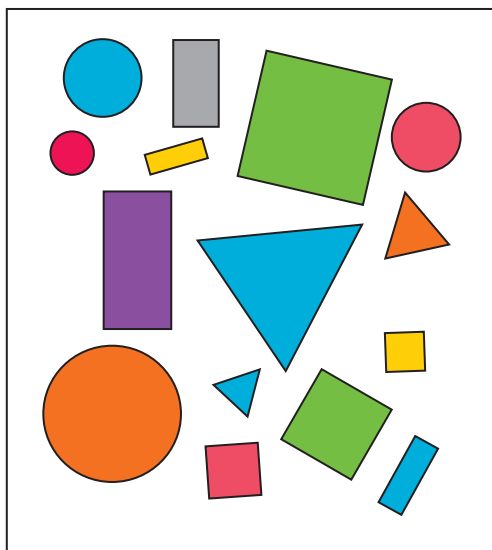


Crear figuras geométricas utilizando el Tangrama y en función de condiciones dadas.



Identificar qué figuras geométricas CUMPLEN y cuáles NO CUMPLEN con una definición o concepto dado.

¿Cuáles de las siguientes figuras NO son rectángulos?

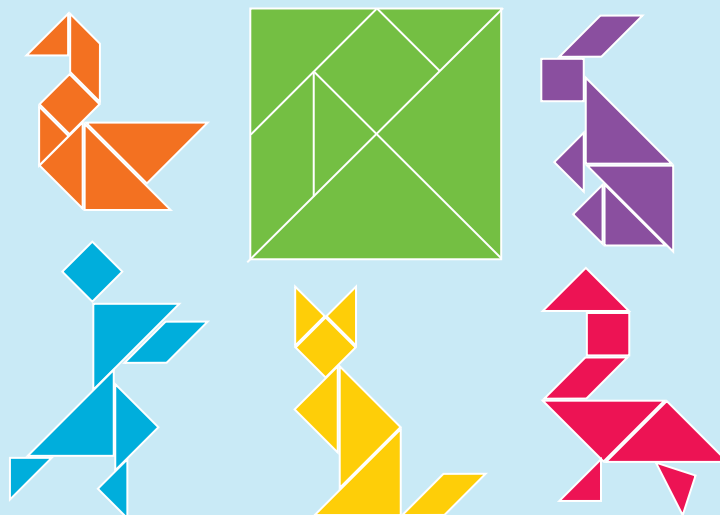


TANGRAMA CHINO Y ALGUNAS FIGURAS FORMADAS CON SUS PIEZAS

Data de 200 o 300 años atrás.

Es un rompecabezas de 7 piezas, originadas a partir de una región cuadrada.

Las figuras de las piezas son: un romboide, un cuadrado y cinco triángulos rectángulos de distintos tamaños.



Gestión de problemas que procuran desarrollar la habilidad de representar

Preguntas para analizar o comprender el enunciado: Se espera promover que la o el estudiante explore la información dada y la descubierta al interactuar con la situación, y entender los obstáculos y conceptos relevantes. Se espera que este tipo de pregunta apoye a la o el estudiante para:

Identificar datos explícitos: Seleccionar datos explícitos relevantes en un enunciado y en diferentes representaciones del problema.

Identificar datos implícitos: Seleccionar datos implícitos relevantes en un enunciado, en una tabla o en una representación geométrica.

Inferir procedimientos, calcular y transformar los resultados en información: establecer relaciones conceptuales y/o procedimentales entre los datos de un enunciado y la interrogante del problema.

Preguntas para orientar el análisis de la resolución del problema: Se espera que estas preguntas orienten a los diferentes procesos que operan al resolver el problema. Una vez que la o el estudiante relaciona los datos que posee y comprende cómo dar solución al problema, es necesario aportar con diferentes formas de representar el enunciado, construir un plan de acción y verificar posibles errores en el camino o la solución del problema. De esta manera se define brevemente cada proceso:

Representar y formular conjeturas: Construir representaciones tabulares, gráficas, simbólicas o verbales, y pasar de un formato de representación a otro; formular conjeturas sobre los datos relevantes según el contexto del problema.

Realizar procedimientos y verificar conjeturas: Hace referencia a toda razón dada para convencer de la verdad de una afirmación. Se suele distinguir entre justificaciones empíricas y deductivas. Las justificaciones empíricas usan los ejemplos como elemento de convicción y las deductivas formulan conclusiones a partir de premisas verdaderas.

Argumentar y reflexionar la solución del problema: Verificar y justificar los resultados obtenidos al resolver el problema. Además, valorar las soluciones de forma crítica y desde distintas perspectivas. Se relaciona con el proceso de regulación de la cognición.

Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema: Este tipo de preguntas permite la reflexión posterior a la resolución del problema planteado. En esta etapa se espera que las y los estudiantes puedan analizar soluciones desde distintas perspectivas, y valorar de forma crítica los supuestos y las soluciones alternativas al modificar condiciones iniciales del problema.

Ejemplos de gestión de problemas utilizando material concreto y que procuran desarrollar la habilidad de representar

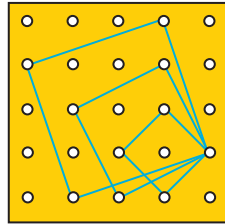
1. Construye la mayor cantidad de figuras geométricas 2D posibles, utilizando la cantidad de piezas que se indican:

- ▶ Con 2 piezas del tangrama
- ▶ Con 3 piezas del tangrama
- ▶ Con 5 piezas del tangrama

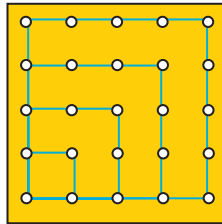


- a) **Preguntas para analizar o comprender el enunciado:** ¿Qué tipo de figuras geométricas pueden observar? ¿todos los triángulos tienen la misma medida? ¿son todos los triángulos isósceles? ¿son todos triángulos rectángulos? ¿hay algún triángulo rectángulo isósceles? Justifica tus respuestas.
- b) **Preguntas para orientar la resolución del problema:** Cuando dices que lograste construir un triángulo al unir las piezas, lo que quieres decir es que "uniste los lados que tienen igual medida" o lo hiciste de una manera diferente. Justifica tus respuestas.
- c) **Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:** Al yuxtaponer dos triángulos en función del lado mayor, lograste construir solamente un cuadrado... si ahora yuxtapones los lados de menor tamaño, ¿se construirán cuadrados solamente? Justifica tus respuestas.

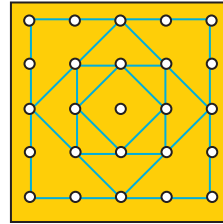
2. Observa cada representación e identifica el tipo de figura que observas en cada GeoPlano.



GeoPlano 1



GeoPlano 2



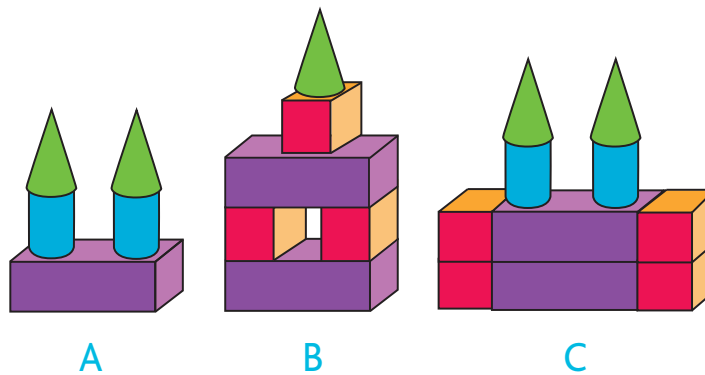
GeoPlano 3

- a) **Preguntas para analizar o comprender el enunciado:** ¿Cuántos lados tienen las figuras representadas en la figura 1? ¿Cómo podemos comprobar que los lados tienen igual o diferente medida? Justifica tus respuestas.
- b) **Preguntas para orientar la resolución del problema:** ¿Es correcto afirmar que en la figura 1 no hay cuadrados representados? ¿Es correcto que en la figura 2 hay 4 cuadrados representados? ¿Es correcto que en la figura 3 hay representados cuadrados y rombos? Justifica tus respuestas.
- c) **Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:** ¿Es posible construir un rectángulo utilizando todas las piezas del tangrama? ¿Es posible construir un triángulo utilizando todas las piezas del tangrama? y ¿Es posible construir un trapecio isósceles utilizando todas las piezas del tangrama? Justifica tus respuestas.

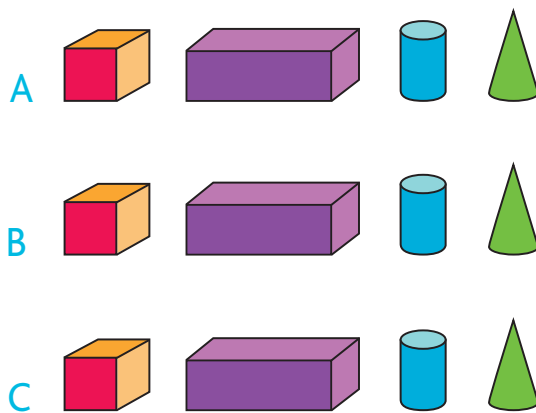


Ejemplos de gestión de problemas de figuras geométricas 3D que procuran desarrollar la habilidad de representar

1. Observa la siguiente imagen y responde.



¿Con qué cuerpos geométricos se hicieron las formas?

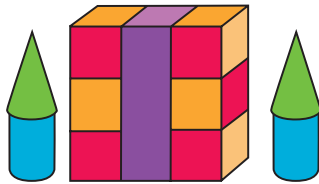


- Preguntas para analizar o comprender el enunciado:** ¿Cuántos cuerpos geométricos diferentes fueron utilizados para construir las formas? Justifica tu respuesta.
- Preguntas para orientar la resolución del problema:** ¿Es correcto suponer que la forma más alta utilizó mayor cantidad de cuerpos geométricos diferentes? Justifica tu respuesta.
- Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:** Para obtener una forma más alta, ¿debemos agregar un cilindro o un cono? Justifica tu respuesta.





Fuente: Texto Pensar Sin Límites. Matemática Método Singapur. Marshall Cavendish Education and Ministerio de Educación, Chile, 2013.

2. Lee atentamente y responde.

La siguiente forma está compuesta de algunos cuerpos geométricos. Cuenta la cantidad de cada cuerpo geométrico que la compone.

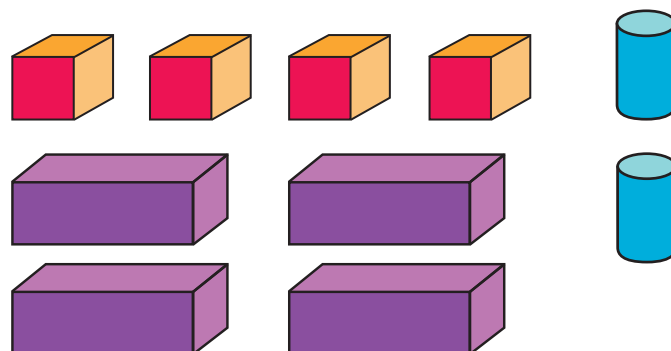


¿Cuántos son?

	<input type="text"/>
	<input type="text"/>
	<input type="text"/>
	<input type="text"/>

- Preguntas para analizar o comprender el enunciado:** ¿Cuántos cuerpos geométricos diferentes puedes observar? Justifica tu respuesta.
- Preguntas para orientar la resolución del problema:** ¿Es correcto decir que se utilizaron 4 cubos para construir la forma? Justifica tu respuesta.
- Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:** Si no hay cubos, ¿es posible construir la misma forma? ¿Qué cuerpos geométricos podríamos utilizar? Justifica tus respuestas.

3. Observa la siguiente imagen y responde.



Construye una forma usando:

1. cuatro cuerpos geométricos.
2. a lo menos, dos cuerpos de cada tipo.

- a) **Preguntas para analizar o comprender el enunciado:** ¿Qué características tienen los cuerpos geométricos utilizados?
- b) **Preguntas para orientar la resolución del problema:** ¿Es correcto decir que existen 3 formas diferentes al utilizar 4 cuerpos geométricos? Justifica tu respuesta.
- c) **Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:** Si nos piden construir una forma utilizando al menos dos cuerpos geométricos, ¿es posible hacerlo sin repetir cuerpos geométricos? Justifica tu respuesta.

Propuesta de progresión de problemas de figuras geométricas 3D que permitirían desarrollar la habilidad de representar

A continuación se presenta una posible progresión que procuran desarrollar la habilidad de representar con figuras geométricas 3D.

Identificar cuerpos geométricos

A
B
C

¿Con qué cuerpos geométricos se hicieron las formas?

A

B

C

Identificar y contar cuerpos geométricos

La siguiente forma está compuesta de algunos cuerpos geométricos. Cuenta la cantidad de cada cuerpo geométrico que la compone.

¿Cuántos son?

Construir formas a partir de (identificar y contar) cuerpos geométricos

Construye una forma usando:

- a) Cuatro cuerpos geométricos.
- b) A lo menos, dos cuerpos de cada tipo.


Fuente: Texto Pensar Sin Límites. Matemática Método Singapur. Marshall Cavendish Education and Ministerio de Educación, Chile, 2013.

Ejemplos de gestión de problemas de fracciones que procuran desarrollar la habilidad de representar

1. Trinidad está en clases de matemática y pinta la siguiente figura:






¿Qué fracción representa la parte pintada?

- a) **Preguntas para analizar o comprender el enunciado:** ¿Qué tipo de figuras geométricas identificas? Los cuadrados, ¿tienen igual tamaño? Justifica tus respuestas. ¿Qué parte del rectángulo está pintada?
- b) **Preguntas para orientar la resolución del problema:** ¿Es correcto señalar que $\frac{2}{3}$ representa la parte pintada de color naranja? ¿Es correcto decir que $\frac{3}{2}$ representa la parte pintada de color azul? ¿Es posible que la parte pintada de color azul sea mayor que 1? Justifica tus respuestas.
- c) **Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:** ¿Es posible representar $\frac{3}{5}$ con la figura ? Justifica tu respuesta.

2. Pedro observa la siguiente imagen:

¿Qué fracción, considerando el hexágono, representa el triángulo blanco?



- a) **Preguntas para analizar o comprender el enunciado:** ¿Cuántos lados tienen las figuras que observas? ¿Qué relación hay entre el triángulo y la figura achurada de color naranja? Justifica tus respuestas.
- b) **Preguntas para orientar la resolución del problema:** La figura es un hexágono regular, es decir, es una figura cuyos 6 lados y ángulos tienen igual medida. ¿Es correcto decir que un hexágono regular se puede formar con 6 triángulos equiláteros? 
- ¿Es correcto decir que la superficie del triángulo  corresponde a $\frac{1}{6}$ o $\frac{5}{6}$ del total? ¿Es correcto decir que la superficie del triángulo  corresponde a $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{12}$? Justifica tus respuestas.
- c) **Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:** ¿Cuál podría ser una representación de $\frac{1}{12}$ con rectángulos y cuadrados?

3. Observa las siguientes figuras:

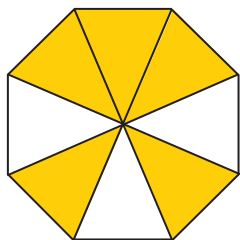


Figura 1

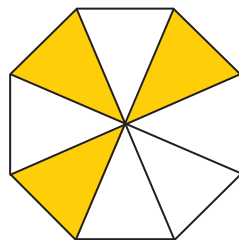


Figura 2

¿Cuál estudiante está en lo correcto?

–*Pamela*: En la figura 1, los triángulos amarillos representan $\frac{5}{3}$.

–*Antonio*: En la figura 2, los triángulos blancos representan $\frac{8}{5}$.

- Preguntas para analizar o comprender el enunciado:** En la figura 1, ¿El triángulo amarillo y el triángulo blanco tienen la misma superficie? En la figura 2, el triángulo amarillo y el triángulo blanco, ¿tienen la misma superficie? Justifica tus respuestas.
- Preguntas para orientar la resolución del problema:** En relación con la figura 1, ¿Es correcto decir que un triángulo amarillo representa $\frac{1}{8}$? ¿Es correcto decir que los triángulos blancos representan $\frac{3}{8}$? ¿Es correcto expresar que un triángulo amarillo representa $\frac{1}{8}$? ¿Es correcto señalar que los triángulos amarillos representan $\frac{3}{8}$? Justifica tus respuestas.
- Preguntas para obtener evidencia de aprendizaje posterior a resolver el problema:** ¿Es correcto decir que las partes achuradas de color amarillo en ambas figuras representan $\frac{8}{8}$? Justifica tu respuesta.

