Cuadernillo de repaso

MATEMÁTICA

EJE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

IV° medio

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

UCE

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN

Cuadernillo de repaso contenidos Matemática 2020

Material adaptado por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación en base a Cid Figueroa, Eduardo. (2019). *21 temas para aprender y practicar matemática.* Editorial Cid.

Puedes encontrar los Cuadernillos de repaso de Matemática ingresando a www.curriculumnacional.cl o escaneando el siguiente código QR:

Prohibida su reproducción total o parcial.

INTRODUCCIÓN

En el contexto actual, el Ministerio de Educación ha asumido desde su inicio como tarea primordial el apoyar a todos los estudiantes, docentes, equipos directivos, sostenedores y apoderados del país de modo que puedan, durante la suspensión de clases y en el retorno a clases, apoyar el desarrollo de los aprendizajes esenciales que nos permitan reducir las brechas educacionales provocadas por la pandemia.

El aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático es de vital importancia para los estudios de nuestros estudiantes, pues ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas necesarias para desenvolverse en la vida cotidiana. Esta se trabaja sistemáticamente enseñando habilidades y contenidos desde los primeros niveles de educación hasta afianzarse en los niveles superiores.

Dada su relevancia, la Unidad de Currículum y Evaluación pone a disposición para los estudiantes de 4° año de Enseñanza Media cuatro cuadernillos, uno por cada eje de las Bases Curriculares de Matemática, que les permitirán repasar y ejercitar de manera autónoma las habilidades y conocimientos adquiridos en Matemática desde séptimo a tercero medio fundamentalmente. En este cuadernillo de repaso encontraras los contenidos del Eje Probabilidad y Estadística.

En la primera parte del cuadernillo se presenta el repaso de la parte teórica, luego modelos de ejercicios resueltos con sus soluciones, algunos ejercicios para practicar y un miniensayo.

¿Cómo usar este Manual?

1. Lee la parte teórica y los ejercicios resueltos, no resuelvas las guías de ejercicios, sin antes haber hecho esto.
2. Resuelve la guía de ejercicios del capítulo, aquellos ejercicios que no puedas resolver, déjalos para un segundo intento, no consultes a tu compañero(a) o profesor(a) inmediatamente, o invalidarás algo muy importante en tu proceso de aprendizaje. El esfuerzo que realizas para poder resolver un ejercicio permite que los contenidos, teoremas, propiedades etc., que pasan por tu mente queden más «frescos» y fortalecidos en ella.

   La gran mayoría de los ejercicios que no resuelven los estudiantes no es debido a que no sepan los contenidos o cómo resolver los problemas, sino a que no los recuerdan, por lo tanto, un buen método de preparación es el anterior para ir recordando lo olvidado.
3. Si al resolver un ejercicio notas que te equivocaste, detente a revisar paso a paso donde está tu error, este proceso es muy importante ya que te permite detectar posibles errores de concepto que debes corregir al momento.
4. No es conveniente que resuelvas los miniensayos sino hasta haber completado cada capitulo, no sacarás mucho provecho si no tienes todavía en tu mente una buena provisión de contenidos.
5. En general se ha procurado que los ejercicios estén «graduados», por lo tanto, no deberías tener problemas en los primeros ejercicios de cada guía. Si los tuvieras solicita apoyo de tu profesor ya que requerirás más ayuda que la que te pueda brindar este texto.

ÍNDICE

EJE

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Capítulo 1

ESTADÍSTICA

Con la llegada de los grandes computadores, ahora podemos procesar una enorme cantidad de datos, lo que ha contribuido al avance en áreas muy diversas como la medicina, el deporte, robótica, o la sociología, la que nos ayuda a estudiar el comportamiento y el consumo humano.

Existen dos tipos de estadística, la descriptiva y la inferencial. En este capítulo veremos la primera, la que se dedica a analizar los datos obtenidos, graficándolos y calculando diversos parámetros, como la media, los percentiles, el rango, etc.
Por otra parte, la estadística inferencial se preocupa de sacar conclusiones de una población a partir de una muestra de ella, por ejemplo la media poblacional a partir de la media de una muestra, tema que veremos en el último capítulo de este texto.

CONCEPTOS CLAVES

- Organización de datos
- Representación de datos
- Medidas de tendencia central
- Medidas de dispersión
- Medidas de posición

ORGANIZACIÓN DE DATOS

Si tenemos un conjunto de datos, existen diversas formas de organizarlos, acá veremos solo los más frecuentes.

- **Diagrama de tallo y hojas**

Este diagrama permite ordenar los datos de tal forma que los de mayor frecuencia se destaquen sobre los demás, esto también se produce en un gráfico de barras como veremos más adelante. En este diagrama se coloca en el tallo la o las cifras de mayor valor posicional y en las hojas las cifras restantes.
Por ejemplo, las siguientes notas: 3,2 ; 3,5 ; 4,1 ; 4,7 ; 4,9, 5,1 ; 5,5 ; 5,8 ; 5,9 ; 6,0 ; 6,5 ; 7,0 en un diagrama de tallo y hojas quedarían de la siguiente forma:

Tallo	Hojas
3	2 5
4	1 7 9
5	1 5 8 9
6	0 5
7	0

- **Tabla de frecuencias**

En las tablas de frecuencias, al lado del dato aparece la frecuencia del dato, es decir la cantidad de veces que se repite.

Ejemplo:

Dato	Frecuencia
12	3
15	4
18	7
21	6

También podemos disponer de una tabla de frecuencias acumuladas, donde aparece la cantidad de datos que son menores o iguales que él:

Dato	Frecuencia acumulada
12	3
15	7
18	14
21	20

Por ejemplo, que el dato 18 tenga una frecuencia acumulada de 14 indica que hay 14 datos que son menores o iguales que él.
También podemos tener una tabla de frecuencias relativas, esta indica que parte es la frecuencia del dato con respecto al total, esta se expresa en números decimales.
Siguiendo con el mismo ejemplo, tenemos que el dato 12 se repite 3 veces de un total de 20, es decir en términos de fracciones es $\frac{3}{20}$, o bien 3 : 20 = 0,15 en decimal.

Dato	Frecuencia	Frecuencia relativa
12	3	0,15
15	4	0,2
18	7	0,35
21	6	0,3

Si la frecuencia relativa la expresamos en términos porcentuales, se denomina frecuencia relativa porcentual:

Dato	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
12	3	0,15	15%
15	4	0,2	20%
18	7	0,35	35%
21	6	0,3	30%

También podemos tener tablas con frecuencias relativas acumuladas o frecuencias porcentuales acumuladas:

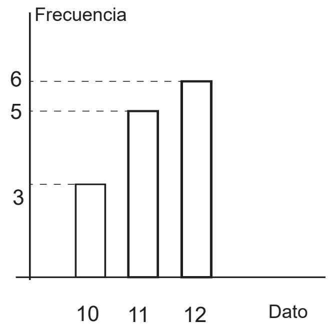
Dato	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia relativa porcentual	Frecuencia acumulada porcentual
12	3	0,15	0,15	15%	15%
15	4	0,2	0,35	20%	35%
18	7	0,35	0,70	35%	70%
21	6	0,3	1,0	30%	100%

GRÁFICOS

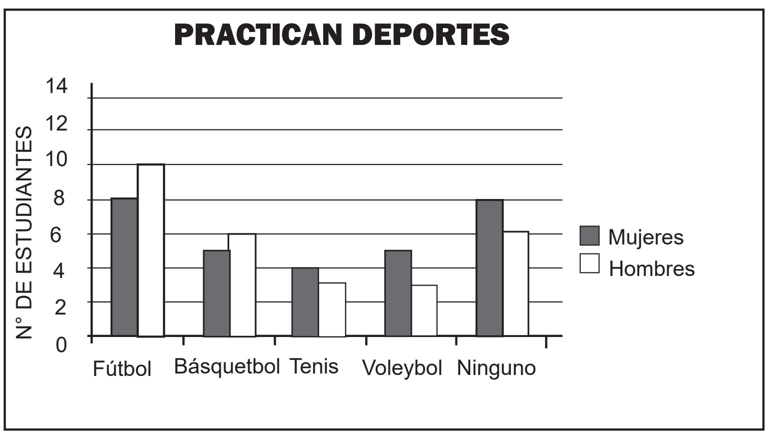
Existen diversos gráficos para representar datos, entre ellos uno de los más importantes es el gráfico de barras, en el cual las altura de las columnas que se presentan están relacionadas con las frecuencias de los datos.

- **Gráfico de barras**

En el eje horizontal se colocan los datos y en el vertical las frecuencias de los datos, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:



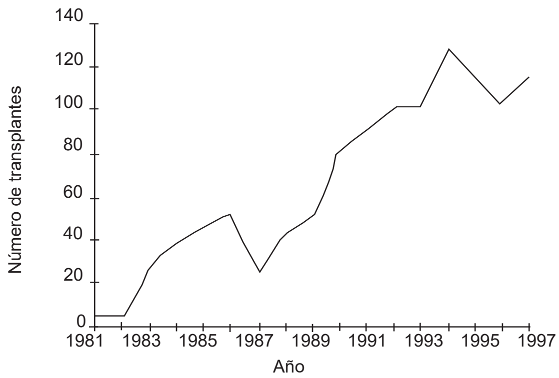
También existen los gráficos de barras dobles que nos permiten comparar dos variables:



- **Otros gráficos**

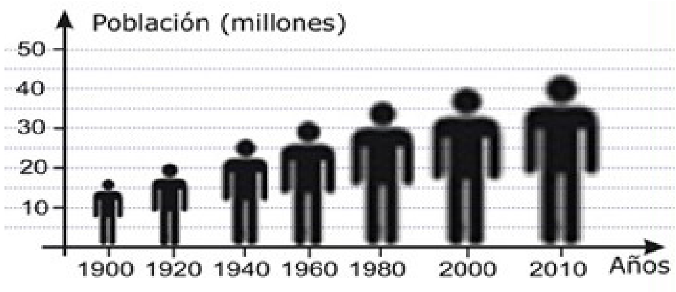
También tenemos otros tipos de gráficos como los de línea, los circulares y los pictogramas.

De línea:



Circulares:

Pictogramas:



MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central son la media, la mediana y la moda .

- **Media , media aritmética o promedio $\overline{x}$**

A) Si se tiene datos dados sin frecuencia, la media se calcula sumando los datos y dividiendo esta suma por el total de datos.

Datos: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \quad \rightarrow$

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}}$$

B) Si los datos vienen dados en una tabla de frecuencia, entonces la media se calcula multiplicando cada dato con su respectiva frecuencia, se suman estos productos y se divide por el total de datos.

Datos:

Dato	Frecuencia
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...
x_n	f_n

$$\rightarrow \boxed{\overline{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + ... + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}}$$

C) Si los datos vienen dados en una tabla de frecuencia relativas, entonces la media se calcula multiplicando cada dato con su respectiva frecuencia relativa y se suman todos estos productos.

Datos:

Dato	Frecuencia relativa
x_1	r_1
x_2	r_2
...	...
x_n	r_n

$$\rightarrow \boxed{\overline{x} = x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + ... + x_n \cdot r_n}$$

Nota: si en la tabla se indicaran las frecuencias relativas porcentuales, se efectúa la misma operación anterior pero se dividiría por 100.

- **Mediana**

Si se ordenan los datos en sentido creciente o decreciente, la mediana es el dato que se ubica al centro (en el caso de ser uno) o es la media de los dos datos centrales.

Si el número de datos es n y n es impar, la mediana es el dato de lugar $\frac{n+1}{2}$.

En el caso que n fuera par, la mediana es la media entre los datos de lugares $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} + 1$.

- **Moda**

La moda es el dato que tiene mayor frecuencia.
Si todos los datos tienen la misma frecuencia diremos que no hay moda (muestra amodal).
Un conjunto de datos puede tener más de una moda.(muestra multimodal)

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión nos indican cuan dispersos están los datos, acá veremos el rango.

- **Rango**

Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.
Este estadígrafo puede ser cero en el caso en que todos los datos son iguales y es positivo en el resto de los casos.

MEDIDAS DE POSICIÓN O PERCENTILES

El percentil k, o P_k es un valor tal que el k% de los datos es menor o igual que él.
Los percentiles más importantes son los cuartiles, los quintiles y los deciles.
Los cuartiles dividen a los datos en 4 partes iguales, el primer cuartil corresponde al percentil 25, el segundo cuartil corresponde al percentil 50, la que ya conocemos como mediana y el tercer cuartil corresponde al percentil 75, se representan como Q_1, Q_2 y Q_3 respectivamente.
Los cuartiles los ocuparemos para construir el diagrama de cajón y bigotes, el que veremos más adelante.
Los quintiles dividen los datos en cinco partes iguales, el primer quintil corresponde al percentil 20, el segundo quintil al percentil 40, etc.
El primer decil corresponde al percentil 10, el segundo decil al percentil 20, el octavo decil al percentil 80, etc.
Si tenemos n datos (no agrupados en intervalos), el percentil k corresponde al dato de lugar

$$\frac{k}{100} \cdot (n+1).$$

Si este valor corresponde a un número decimal, calculamos la media entre los dos datos más cercanos a él.

Ejemplo:
Arturo obtuvo las siguientes notas en la asignatura de Inglés: 3 , 4 , 5 , 5 , 5 , 6 , 6, 7.
Calcular el primer cuartil y el percentil 60.

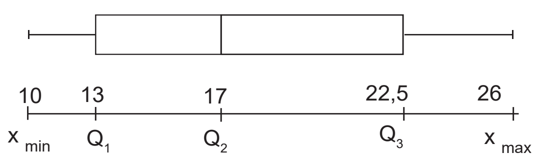
Solución:

El primer cuartil, corresponde al percentil 25, entonces calculamos $\frac{25}{100}$. (8 + 1) = 2,25, por lo que calculamos la media entre el segundo y el tercer dato, esto es 4,5.

El percentil 60 o tercer quintil, se calcula mediante $\frac{60}{100}$. (8 + 1) ≈ 5,4, de modo que calculamos la media entre el quinto y sexto dato, lo que nos da 5,5.

- **Diagrama de cajón y bigotes**

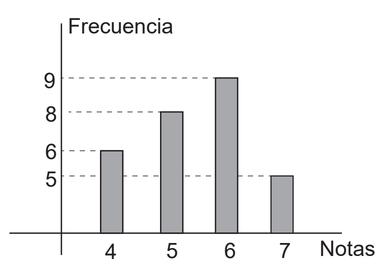
El diagrama de cajón y bigotes, es una representación visual de cuan dispersos están los datos entre los valores mínimo, los cuartiles y el valor máximo.
Ejemplo:
Supongamos que las edades de los nietos de una familia son: 10, 12, 12, 14, 16, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 26.
Tenemos que el dato mínimo es 10, el primer cuartil es Q_1=13, el segundo cuartil o mediana es Q_2=17, tercer cuartil o Q_3=22,4 y el dato máximo igual a 26.
El diagrama de cajón y bigotes es un rectángulo donde en el extremo izquierdo se ubica Q_1, en el extremo derecho Q_3, y la mediana es una línea que separa a este rectángulo.
Desde los extremos de este rectángulo o caja salen los bigotes que son segmentos que se extienden hasta el valor mínimo y al valor máximo por el otro:



Se llama valor intecuartílico a la diferencia entre Q_3 y Q_1, en este caso es 22,5–13=9,5, lo que indica que en un rango de 9,5 años está el 50% de los datos. Por otro si consideramos la partición que produce la mediana, en este ejemplo el lado derecho es mayor que el lado izquierdo, lo que indica que los datos están más dispersos entre la mediana y el tercer cuartil.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En el siguiente gráfico se muestra la distribución de notas de un cierto curso en la última prueba de Física.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada en el gráfico?

A) La mediana es 5,5.
B) La moda es 6,0.
C) La media es inferior a la mediana.
D) El rango es 3.
E) El primer cuartil es 4.

Solución:

A) Para calcular la mediana, en primer lugar que determinar cuántos datos son, para ello sumamos las frecuencias: 6+8+9+5=28. Como es un número par de datos, los centrales son los de lugares 14 y 15, si sumamos las frecuencias del 4 y del 5 suman 14, por lo tanto el dato de lugar 14 es 5 y el dato 15 es 6, si calculamos la media entre 5 y 6 nos 5,5 por lo tanto la mediana es 5,5 y A es verdadera.

B) La moda es el dato con mayor frecuencia, en este caso es el 6, por lo tanto es correcta.

C) Para calcular la media tenemos que multiplicar cada dato con su frecuencia, sumar estos productos y el resultado dividirlo con la suma de las frecuencias, entonces

$\overline{x} = \dfrac{4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 5}{6 + 8 + 9 + 5} = \dfrac{153}{28} \approx 5{,}46$, como la mediana era 5,5, se tiene que la afirmación es verdadera.

D) El rango es la diferencia entre el dato mayor y el menor, en este caso $7 - 4$, por lo tanto es verdadera.

E) El primer cuartil es el dato $\dfrac{1}{4} \cdot (28 + 1) = 7{,}25$, por lo tanto es la media entre los datos de lugares 7 y 8, ambos datos son 5, por lo tanto su media es 5, luego E) es falsa.

2. Debido a los malos resultados en la última prueba de Biología el profesor decide subir todas las notas en dos décimas.

¿Cuál de los siguientes estadígrafos **NO** resulta alterado?

I) Media.

II) Rango.

Solución:

I) Por propiedad de la media, si a todos los datos se le suma una constante, la media aumenta esa misma constante, por lo tanto la media también aumenta en dos décimas, luego I es falsa.

II) El rango es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor, supongamos que el dato mayor es X y el menor es Y, entonces el rango es $X - Y$; si X e Y aumentan en 0,2 el rango sería $(X - 0{,}2) - (Y - 0{,}2) = X - Y$, luego el rango no resulta alterado.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Se tienen los siguientes datos: 20; 15; 13; 11 ; _ , si la media de los cinco datos es 14,¿qué dato falta?

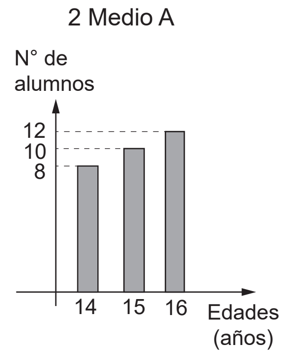
A) 1
B) 10
C) 11
D) 14
E) 21

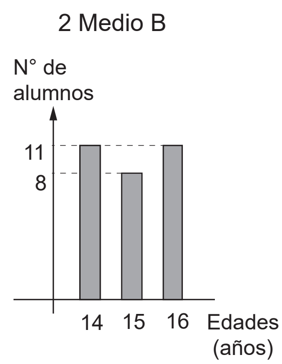
2. Las edades de los seleccionados de un colegio para un torneo de baby futbol son las siguientes: 16, 16, 17, 18, 16, 17, 18, 17. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La media es menor a 17 años.
II) La mediana es 16,5.
III) El primer cuartil es 16.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y III
E) I, II y III

3. En los siguientes gráficos se muestran las distribuciones de edades de dos cursos de un colegio.

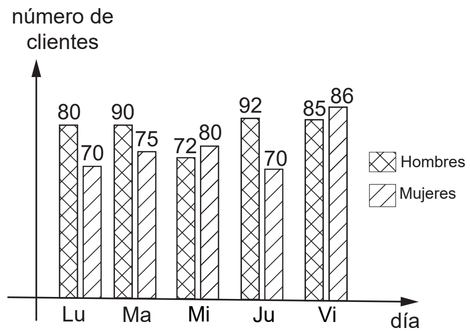




¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada?

A) La media de las edades del 2° A es superior a la del 2°B.
B) La mediana de las edades de ambos cursos es la misma.
C) El tercer quintil del 2°A es superior al correspondiente del 2°B.
D) En ambos cursos, los que tienen 16 años son menos del 40 %.
E) En ambos cursos, menos del 65% tiene a lo sumo 15 años.

4. El número de asistentes a una película durante una semana distribuidos según el sexo, fueron los siguientes:



Se puede afirmar que:

I) La media de los asistentes de sexo masculino fue de 83,8 diarios.

II) La media de los asistentes de sexo femenino fue de 76,2 diarios.

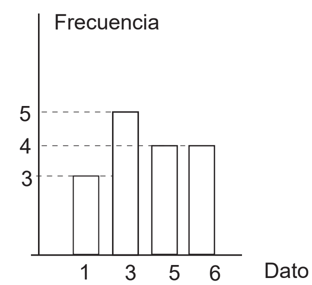
III) La media de asistentes fue de 160 diarios.

Es (son) verdadera(s):

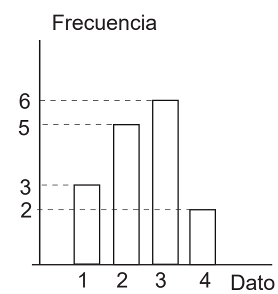
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

5. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada en los siguientes gráficos?

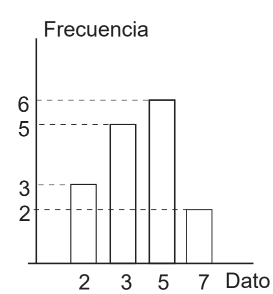
muestra P



muestra Q



muestra R



A) Q y R no tienen la misma moda.
B) En P y R el primer cuartil es 3.
C) En Q la media es inferior a 3.
D) P y R tienen la misma mediana.
E) En R la media y la mediana coinciden.

6. En una reunión de apoderados se consulta a los padres por la cantidad de hijos que tienen, obteniéndose lo siguiente:

Nº de hijos	0	1	2	3	4
Nº de familias	4	7	8	4	2

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La media de hijos por familia es superior a 1,7.
II) La moda es 8.
III) La mediana es 3.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

7. Los puntajes obtenidos por Francisco en los primeros cuatro ensayos de PSU Matemática durante el semestre fueron 550, 650, 720 y 740 puntos. Si el total de ensayos que rindió son 5, se puede determinar el puntaje del ensayo faltante, sabiendo que:

(1) La media de los puntajes fue 672 puntos.
(2) La mediana de los puntajes fue 700 puntos.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

8. Se han elegido una cantidad de alumnos de un colegio para representarlos en una Olimpiada de Matemática.
Según la información dada en la siguiente tabla, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdaderas?

Edad (años)	Frecuencia	Frecuencia relativa
15	4	
16	5	0,2
17		
18	9	

I) La frecuencia relativa para los 15 años es 0,16.
II) El total de alumnos es 25.
III) La frecuencia acumulada para los 17 años es 16.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

9. Los resultados de una prueba de Ciencias en dos cursos de 4º medio fueron los siguientes:

Curso	Número de alumnos	Media del curso
4°A	20	5,0
4°B	30	6,0

Según estos datos, ¿cuál es la media de estos alumnos de cuarto medio en esta prueba?

A) 5,2
B) 5,4
C) 5,5
D) 5,6
E) 5,8

10. Se puede determinar la media de las estaturas de los estudiantes de un curso, si se sabe:

(1) La media de las estaturas de cada sexo.

(2) El porcentaje de mujeres del curso.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

11. En la siguiente tabla se muestran las temperaturas máxima y mínima en la Antártica durante una semana:

Días	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes
T. máx	2°	3°	2°	0°	3°
T. mín	-2°	-1°	-1°	-3°	-3°

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera?

I) La media de las temperaturas máximas tiene más de 4 grados de diferencia con la media de las temperaturas mínimas.

II) La mediana de las temperaturas máximas tiene más de 4 grados de diferencia con la media de las temperaturas mínimas.

III) Las temperaturas máximas están más dispersas que las temperaturas mínimas.

A) Solo I

B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

12. Se toma una muestra para el estudio de las edades de los alumnos de preescolar de un colegio. La frecuencia y la frecuencia acumulada de los datos se ilustra en la siguiente tabla:

Edad	Frecuencia	Frecuencia acumulada
2	1	
3		n
4	3n + 5	3n + 10

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La frecuencia relativa para los tres años es 0,2.
II) La media es 3,76.
III) El total de los datos de la muestra es 25.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

13. Se tienen 5 números negativos, ¿cuál(es) de los siguientes estadígrafos también son siempre negativos?

I) El rango.
II) La media.
III) El primer cuartil.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

15. Se tienen tres datos P, Q y R con sus respectivas frecuencias relativas p, q y r:

Dato	Frecuencia relativa
P	p
Q	q
R	r

Se puede determinar la mediana de estos datos si se sabe que:

(1) $p + q > 0{,}5$
(2) $r = 0{,}4$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

16. La media de las notas de 20 alumnos en la última prueba de Matemática es 5,8 y una de las pruebas por error se anotó un 4,4 y era un 6,4.
Después de hacer la corrección, la media:

A) aumentará en dos décimas.
B) disminuirá en dos décimas
C) disminuirá en una décima.
D) aumentará en una décima.
E) no variará.

17. En la siguiente tabla, se muestra la frecuencia relativa para las edades de los estudiantes de primer año de ingeniería en una universidad.

Edad	Frecuencia relativa
18	0,3
19	0,6
20	0,1

¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada?

A) La media es inferior a 19 años.
B) La media es menor que la mediana.
C) El 70% tiene a lo menos 19 años.
D) La media y la moda no coinciden.

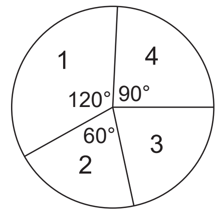
18. Un dado es lanzado una cierta cantidad de veces y los resultados obtenidos se indican en la tabla de frecuencias siguiente:

x	f
1	0
2	5
3	4
4	3
5	2
6	x

¿Cuánto debe valer x para que la media de los datos sea 3,5?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

19. En una caja hay fichas numeradas con los números del 1 al 4.
En el siguiente gráfico circular se muestra la distribución según el número marcado. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a los números marcados en las fichas?



A) La moda es el 1.

B) La media es inferior a 3,0.

C) La frecuencia relativa para el 2 equivale a los $\frac{2}{3}$ de la frecuencia relativa para el 3.

D) La frecuencia relativa porcentual para el 3 es un 25%.

E) Las frecuencias relativas del 3 y del 4 son distintas.

20. Se toman dos muestras para estudiar el número de artículos fallados que produce una máquina, para ello se toman dos muestras A y B de tamaños distintos. En la siguiente tabla se muestra el tamaño relativo de cada muestra y el % de artículos fallados en cada muestra:

	Muestra A	Muestra B
Tamaño	60 %	40 %
% artículos fallados	10 %	20 %

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Más del 50% de los artículos son de la muestra A y no tienen fallas.
II) Más del 80% no presentan fallas.
III) Hay más artículos fallados en la muestra B que en la muestra A.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

21. Para el control de calidad en la vida útil de un cierto artículo, se toman dos muestras. En las siguientes tablas se muestran los años de vida útil del artículo con $p < q < r$:

Muestra A		Muestra B	
Años de vida útil	Frecuencia	Años de vida útil	Frecuencia
p	2	p	3
q	5	q	4
r	3	r	3

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La media de los años de la muestra A es mayor que la media de la muestra B.
II) La mediana de los años de ambas muestras es la misma.
III) La moda de los años de ambas muestras es la misma.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESPUESTAS CAPÍTULO 15									
1. C	**2.** D	**3.** D	**4.** E	**5.** E	**6.** A	**7.** D	**8.** E	**9.** D	**10.** C
11. B	**12.** D	**13.** D	**14.** E	**15.** D	**16.** E	**17.** B	**18.** E	**19.** E	**20.** E

Capítulo
2

PROBABILIDADES

Los orígenes de la probabilidad se remontan desde el siglo XVI, cuando Gombauld, propuso a Pascal un problema de cómo repartir las apuestas entre los jugadores antes de que el juego concluya.
Actualmente, las probabilidades presentan múltiples aplicaciones en áreas tan diversas como la meteorología, la biología, la química, la astronomía, la aviación comercial, la industria farmacéutica, la medicina, la industria, la predicción de atentados terroristas, etc.

CONCEPTOS CLAVES

- Regla de Laplace
- Ley de los Grandes Números
- Probabilidad de unión de eventos
- Probabilidad de intersección de eventos
- Probabilidad Condicional
- Eventos independientes

REGLA DE LAPLACE

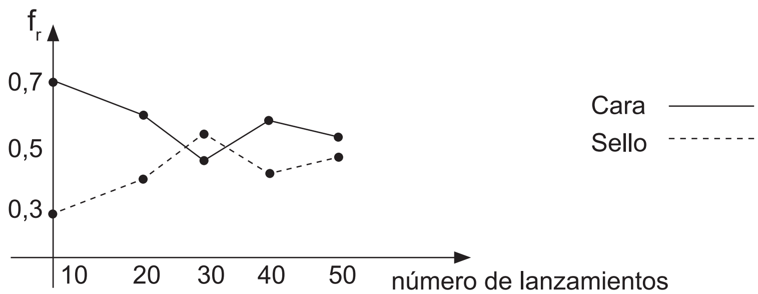
La regla de Laplace, nos permite calcular la probabilidad de un evento como el cuociente entre los casos favorables y los casos totales. La restricción a esta regla es que los casos son equiprobables, es decir todos los elementos del espacio muestral tienen la misma probabilidad.

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}}$$

Observación: si se lanza una moneda dos veces y afirmamos que los elementos del espacio muestral son cara-cara, sello-sello y cara-sello, por lo tanto la probabilidad de cara-sello es $\frac{1}{3}$, es un error debido a que los elementos del espacio muestral no son equiprobables. En este caso debes considerar como espacio muestral {cara-cara, sello-sello, cara-sello, sello-cara}, por lo tanto la probabilidad de cara-sello es $\frac{2}{4}$ o un 50%.

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La ley de los Grandes Números señala que si un experimento se repite muchísimas veces, la frecuencia relativa de la ocurrencia del suceso se irá acercando a un valor constante, ese valor constante es la probabilidad del suceso.
En la gráfica se observan, como a medida que aumentamos el número de lanzamientos de una moneda, la frecuencia relativa del número de caras y el número de sellos se acerca 0,5, lo que corresponde a la probabilidad del evento.



Ejemplo:
Supongamos que lanzamos una pareja de dados y sumamos los puntajes de ambos dados, obtenemos el siguiente espacio muestral:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La probabilidad de que los dados sumen 5 son 4 casos de 36:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Por la Ley de Laplace, tenemos que la probabilidad es $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, por otra parte, por la Ley de Los Grandes Números, si repetimos este experimento muchísimas veces, la frecuencia relativa se irá acercando a este valor. Por ejemplo si lanzamos 3.600 veces esta pareja de dados, tendremos que aproximadamente 400 veces la suma será 5, pero no podemos asegurar que exactamente sea esa cantidad de veces.

PROBABILIDAD DE UNIÓN E INTERSECCIÓN DE EVENTOS

Sean A y B dos eventos, para calcular la probabilidad de $A \cup B$, esto es, que ocurra uno o el otro, ocupamos la siguiente propiedad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Donde $A \cap B$ se refiere a que ocurran ambos eventos (intersección de los eventos).

Ejemplo:
En una fábrica hay dos turnos, el diurno y el nocturno, la distribución por sexo se muestra en la siguiente tabla:

	hombres	mujeres
diurno	32	18
nocturno	22	8

Si se elige un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje en el turno nocturno o sea de sexo femenino?

Solución:

La probabilidad pedida corresponde a la unión de eventos, por lo tanto tenemos que ocupar la propiedad: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Tenemos que, en el turno nocturno, trabajan 22 + 8 = 30 personas y el total de empleados es 32 + 18 + 22 + 8 = 80, luego P(nocturno) = $\frac{30}{80}$. Por otro lado, la probabilidad de elegir a alguien del sexo femenino es $\frac{26}{80}$, además la probabilidad de que ocurran ambos eventos, es decir que sea del turno nocturno y sea del sexo femenino es $\frac{8}{80}$.

Entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{80} + \frac{26}{80} - \frac{8}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$.

Observación: al calcular la probabilidad de que trabaje en el turno nocturno dijimos que eran 30 personas de un total de 80, al calcular la probabilidad de que sea de sexo femenino es 26 de 80, si sumamos ambas cantidades, obtenemos 56 de 80, pero estaríamos considerando las personas de sexo femenino que trabajan en el turno nocturno en ambas cantidades, por esto debemos restar 8 de 80, por lo tanto $P(A \cup B) = \frac{30}{80} + \frac{26}{80} - \frac{8}{80}$.

La probabilidad de $A \cap B$ se puede calcular multiplicando las probabilidades de A y B, solo en el caso en que los eventos sean independientes, esto es que la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.

$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$, solo si A y B son independientes.

Por ejemplo si lanzamos un dado y una moneda, la probabilidad de que en el dado salga un 4 y en la moneda salga un sello, se calcula multiplicando la probabilidad de ambos eventos, ya que la ocurrencia de uno no afecta al otro, entonces, $P(4 \text{ y } S) = P(4) \cdot P(S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Si lanzamos un dado y una moneda, la probabilidad de que en el dado salga un 4 o en la moneda salga el sello, debemos calcularlo utilizando la propiedad: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

En este caso $P(4) = \frac{1}{6}$, $P(S) = \frac{1}{2}$ y por lo visto anteriormente $P(4 \text{ y } S) = P(4) \cdot P(S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$,

luego $P(4 \text{ o } S) = P(4) + P(S) - P(4 \text{ y } S) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

TRIÁNGULO DE PASCAL

El triángulo de Pascal es una configuración numérica, donde en cada fila se empieza y se termina con un uno y los términos del medio se obtienen al sumar los dos términos cercanos que están en la fila superior.

- Primera fila, ponemos un uno.
- Segunda fila, ponemos dos unos.
- Tercera fila, un uno al principio, otro al final y el número central es la suma de los dos unos que están en la fila superior.
- Cuarta fila, un uno al principio, otro al final y los números del medio se obtienen sumando los números cercanos de la fila superior, etc.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Veamos ahora, como se aplica al cálculo de probabilidades.
Supongamos que lanzamos 4 monedas, entonces nos dirigimos a la quinta fila, o bien nos podemos guiar buscando aquella fila cuyo segundo número es un 4:

	1	4	6	4	1
Ponemos entonces	C^4	C^3S	C^2S^2	CS^3	S^4

Observa que los exponentes de C van bajando mientras los de S van subiendo, pero si sumas ambos siempre se obtiene 4.
Entonces $4C^3S$, hace alusión que hay cuatro casos en que hay tres caras y un sello, $6C^2S^2$, nos indica que hay seis casos en que hay dos caras y dos sellos, $4CS^3$, indica que hay cuatro casos que hay una cara y tres sellos, etc. El total de casos se obtiene sumando todos los coeficientes: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.
De lo anterior, tenemos entonces que si lanzamos 4 monedas la probabilidad de que salgan dos caras y dos sellos, son 6 casos de un total de 16, es decir la probabilidad es $\frac{6}{16}$ o bien $\frac{3}{8}$.

Para calcular la probabilidad de obtener a lo más dos caras, tendríamos 11 casos favorables:

1	4	6	4	1
C^4	C^3S	C^2S^2	CS^3	S^4

Luego la probabilidad es $\frac{11}{16}$.

El triángulo de Pascal lo podemos ocupar siempre que tengamos solo dos casos posibles, como cara-sello, encendido-apagado, varón-hembra, verdadero-falso, etc. Además el método visto en esta sección, es válido cuando ambos eventos son equiprobables.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En una caja se tienen 9 bolitas de igual peso y tamaño numeradas del 1 al 9, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bolita par o divisor de 6?

Los números pares presentes en estas bolitas son 2, 4, 6, 8, luego la probabilidad de sacar una bolita par es $\frac{4}{9}$, los números divisores de 6 son 1, 2, 3, 6, por lo tanto la probabilidad de elegir un número divisor de 6 es $\frac{4}{9}$.

Como la probabilidad pedida es una unión de eventos, ocupamos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, en este caso $P(A) = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{4}{9}$ y $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$, ya que hay dos elementos en común.

Luego, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

2. Se lanzan dos dados comunes y se suman los números obtenidos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera?

Solución:

A) La probabilidad de que la suma sea 4 es igual a la probabilidad de que la suma sea 10.

B) La probabilidad de que la suma sea a lo más 5 es $\frac{5}{18}$.

C) La suma más probable es 7.

D) La probabilidad de que la suma sea par e impar es la misma.

E) La probabilidad de que la suma sea par o múltiplo de 3 es $\frac{5}{6}$.

Solución:

Para mayor orden y visualización ocuparemos en la resolución de este ejercicio la siguiente tabla de doble entrada:

A) En la figura se muestra que hay 3 casos en que la suma es 4 y 3 casos en que la suma es 10, por lo tanto A es verdadera:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

B) En la figura se muestran los 10 casos en que la suma es a lo más 5, por lo tanto la probabilidad es $\frac{10}{36}$ o $\frac{5}{18}$, luego la afirmación es verdadera.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

C) En el diagrama se observa que la suma más probable es 7, ya que es la suma que presenta más casos:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

D) Hay tantos casos, en que la suma sea para como los que la suma es impar, luego la afirmación es verdadera.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

18 pares
18 impares

E) Ya vimos que hay 18 casos en que la suma es par, de que la suma sea múltiplo de 3 son los casos 3, 6, 9 y 12 y estos son 12 casos:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Pero los casos en que se cumple que la suma es par y múltiplo de 3, son aquellos en que la suma es 6 o 12, estos son 6, luego $P(A \cap B) = \frac{6}{36}$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, luego la afirmación es falsa.

3. Una librería ha comprado una partida de lápices rojos y azules de las marcas A y B.
Se sabe que el total de lápices es 90, de los cuales 40 son de la marca B y hay un total de 10 rojos de los cuales 4 son de la marca B. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

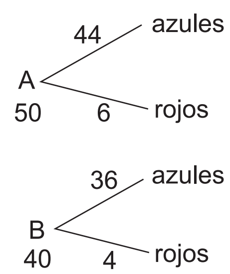
I) Si se elige un lápiz al azar, es mayor la probabilidad de obtener un lápiz rojo en la marca A que en la marca B.

II) Si se elige un lápiz al azar, la probabilidad de elegir uno azul de la marca B es mayor al 50%.

III) Si se elige al azar un lápiz dentro de los azules, la probabilidad de que sea de A es $\frac{11}{20}$.

Solución:

La información dada en el enunciado se puede ordenar en un diagrama de árbol como se muestra a continuación:



I) La probabilidad de obtener rojo de la marca A es $\frac{6}{50}$ = 0,12, mientras que en la marca B es $\frac{4}{40}$ = 0,1, luego la afirmación es verdadera.

II) La probabilidad de elegir un lápiz azul de la marca B es $\frac{36}{90}$ lo que es menor a al 50%, por lo tanto II es falsa.

III) Los lápices azules son 44 + 36 = 80, y de estos los que son de A son 44, luego la probabilidad es $\frac{44}{80}$ o bien $\frac{11}{20}$, luego la afirmación es verdadera.

Conclusión, I y III son verdaderas.

4. Se lanza una moneda 5 veces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera?

A) La probabilidad de sacar menos de 2 caras es $\frac{3}{16}$.

B) La probabilidad de sacar más de 2 caras es $\frac{1}{2}$.

C) La probabilidad de sacar a lo más 3 sellos es $\frac{13}{16}$.

D) Es igual de probable sacar a lo más 1 sello que a lo sumo 2 caras.

E) La probabilidad más alta es cuando se obtienen 3 sellos o 3 caras.

Solución:
Para resolver este ejercicio podríamos ocupar el triángulo de Pascal de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
c^5 & & c^4s & & c^3s^2 & & c^2s^3 & & cs^4 & & s^5
\end{array}
$$

A) Tal como se indica en la figura, que salgan menos de 2 caras son 6 casos de un total de 32, $\frac{6}{32} = \frac{3}{16}$, luego es verdadera.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & \multicolumn{3}{c}{\boxed{5 \qquad 1}} \\
c^5 & & c^4s & & c^3s^2 & & c^2s^3 & & cs^4 & & s^5
\end{array}
$$

B) Que salgan más de 2 caras son 16 casos de 32 (ver fig.), luego la probabilidad es $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$, la afirmación es verdadera.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\multicolumn{5}{c}{\boxed{1 \qquad 5 \qquad 10}} & & 10 & & 5 & & 1 \\
c^5 & & c^4s & & c^3s^2 & & c^2s^3 & & cs^4 & & s^5
\end{array}
$$

C) Que salgan a lo más 3 sellos, son 26 casos de 32 (ver fig.), como $\frac{26}{32} = \frac{13}{16}$, la afirmación es verdadera.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
\boxed{1 \quad 5 \quad 10 \quad 10} \quad 5 \quad 1 \\
c^5 \quad c^4s \quad c^3s^2 \quad c^2s^3 \quad cs^4 \quad s^5
\end{array}$$

D) Sacar a lo más 1 sello son 6 casos y a lo sumo 2 caras son 16:

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
\boxed{1 \quad 5} \quad 10 \quad \boxed{10 \quad 5 \quad 1} \\
c^5 \quad c^4s \quad c^3s^2 \quad c^2s^3 \quad cs^4 \quad s^5
\end{array}$$

Luego las probabilidades no son iguales, la afirmación es falsa.

E) Las probabilidades más altas son efectivamente para 3 sellos o 3 caras, ya que tienen 10 casos cada una, luego la afirmación es verdadera.

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad \boxed{10 \quad 10} \quad 5 \quad 1 \\
c^5 \quad c^4s \quad c^3s^2 \quad c^2s^3 \quad cs^4 \quad s^5
\end{array}$$

5. Se tienen tres cajas: A, B y C. En A hay tres bolitas blancas y dos negras, en B hay 2 blancas y tres negras y en C hay 4 blancas y 2 negras. Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de sacar 2 bolitas blancas y una negra?

Solución:

En esta situación los casos favorables son bbn, bnb, nbb, calcularemos cada una de estas probabilidades y luego las sumamos.

Caso bbn, la probabilidad de blanca en A es $\frac{3}{5}$, blanca en B es $\frac{2}{5}$ y negra en C es $\frac{2}{6}$, entonces

$P(bbn) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{25}$, análogamente obtenemos que $P(bnb) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{6}{25}$ y $P(nbb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{75}$,

sumando las tres probabilidades, obtenemos: $\frac{2}{25} + \frac{6}{25} + \frac{8}{75} = \frac{32}{75}$, que es la probabilidad pedida.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad de que ocurra el evento A sabiendo que ocurrió el evento B, se anota P(A/B) y se calcula mediante el siguiente cuociente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (\text{con } P(B) \neq 0)$$

De esta definición, podemos deducir que $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$, expresión que nos permite calcular la probabilidad de una intersección cuando los eventos son dependientes, es decir la ocurrencia de uno afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.
Por ejemplo, si un vendedor vende agua mineral en los buses, la probabilidad de que venda más su producto aumentará en un día soleado, por lo tanto ambos eventos son dependientes.

Ejemplo:
Se ha hecho una encuesta a los 132 estudiantes de cuarto medio, acerca si participarán en las olimpiadas interescolares. El resultado obtenido muestra que 25 hombres participarán y 27 mujeres de las 72 no participarán.
Si ordenamos la información dada en una tabla de doble entrada, obtendremos lo siguiente:

	Participa	No participa	Total
Hombres	**25**	35	60
Mujeres	45	**27**	**72**
Total	70	62	**132**

Podemos ahora calcular las siguientes probabilidades condicionales:

- La probabilidad de que participará dado que es hombre es $\frac{25}{60}$.

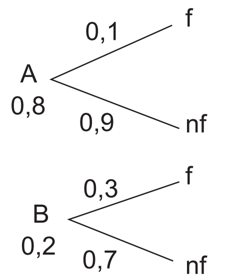
- La probabilidad de que sea mujer dado que no participará $\frac{27}{62}$.

- La probabilidad de que sea hombre dado que participará $\frac{25}{70}$, etc.

Veamos ahora como calcular la probabilidad de una intersección en el caso de eventos dependientes.

Ejemplo:
Supongamos que una máquina produce dos artículos A y B, donde el 80% de la producción es de A, además se sabe que el 10% de los artículos de A resultan fallados y el 70% de los artículos de B no tienen fallas.

La información anterior se puede ordenar en un diagrama de árbol, para una mejor comprensión:



Observa que 0,1 es la probabilidad de que un artículo fallado sabiendo que es del tipo A, esto corresponde a la probabilidad condicional, es decir $P(f/A) = 0,1$. Además $P(f/B) = 0,3$, $P(nf/A) = 0,9$ y $P(nf/B) = 0.7$.

Si quisiéramos calcular la probabilidad de que un artículo sea fallado y sea del tipo A, esto correspondería a la probabilidad de una intersección, entonces ocupamos que $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$, en este caso $P(f \cap A) = P(f/A) \cdot P(A) = 0,1 \cdot 0,8 = 0,08$.

Analogamente la probabilidad de que el artículo sea fallado y del modelo B, sería $P(f \cap B) = P(f/B) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$.

La probabilidad de hallar un artículo fallado sería entonces $0,06 + 0,08 = 0,14$, es decir un 14%. Puedes hacer el mismo cálculo para la probabilidad de que un artículo no esté fallado y evidentemente se debería obtener $(100 - 14)\%$.

- **Eventos independientes**

  Si A y B son eventos independientes implica que la ocurrencia de A no afecta la ocurrencia de B, es decir $P(A/B) = P(A)$, pero $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, entonces si A y B son independientes, se tiene que $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, si multiplicamos esta igualdad por $P(B)$, obtenemos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

  Tenemos entonces la siguiente propiedad, si A y B son eventos independientes, entonces

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

  De lo anterior podemos justificar entonces que si lanzamos una moneda tres veces, la probabilidad de que salga una cara y dos sellos (en ese orden) es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, ya que el resultado de cada lanzamiento es independiente de lo que ocurrió en el anterior.

EJERCICIOS RESUELTOS

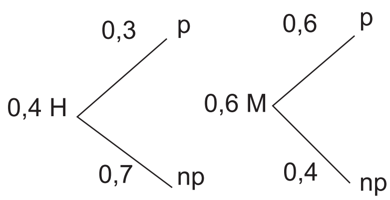
1. En un gimnasio se ha hecho un estudio y se ha determinado que la probabilidad de que un socio sufra un desgarro muscular dado que no hizo precalentamiento previo es 0,8 y la probabilidad de que un individuo no haga precalentamiento es de un 10%, ¿cuál es la probabilidad de que una persona sufra un desgarro y no haya hecho precalentamiento?

Solución:

Si definimos D como el evento de que el sujeto sufra un desgarro y NP como el evento de que no haya hecho precalentamiento, entonces según el enunciado, tenemos $P(D/NP) = 0{,}8$ y $P(NP) = 0{,}1$, como $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$, tenemos que la probabilidad pedida es $P(D/NP) \cdot P(NP) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08$, es decir un 8%.

2. Para un estudia acerca de la obesidad de una población se ha consultado a una cierta cantidad de personas si habitualmente practican deportes.
De los encuestados resultó que el 40% son hombres, de los cuales 30% practica deportes y de las mujeres el 40% declaró no practicarlo.
Si de los encuestados se elige una persona que declaró que no practica deportes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:
Para una mejor claridad ordenaremos la información dada en un esquema de árbol:



Calculemos primero la probabilidad de elegir un encuestado que no practique deportes, como ya vimos en el ejemplo anterior, la probabilidad de que no practique deportes y sea del sexo masculino se determina con $P(np/H) \cdot P(H)$, esto es $0{,}7 \cdot 0{,}4$, de la misma forma, la probabilidad de que sea mujer y no practique deportes es $P(np/M) \cdot P(M)$ es $0{,}4 \cdot 0{,}6$, por lo que la probabilidad de que un sujeto de los encuestados no practique deportes es $0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6$.
Por otro lado, la probabilidad pedida es la probabilidad condicional $P(M/NP)$, por definición de la probabilidad condicional, tenemos que $P(M/NP) = \dfrac{P(M \cap NP)}{P(NP)}$, pero $P(M \cap NP) = 0{,}4 \cdot 0{,}6$, por otro lado en el cálculo anterior obtuvimos que $P(NP) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6$, por lo tanto la probabilidad pedida es

$\dfrac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6}$, o bien $\dfrac{0{,}24}{0{,}52} = \dfrac{24}{52} = \dfrac{6}{13}$.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. ¿Cuál de los siguientes eventos es más probable al lanzar un dado?

A) Que salga un número impar.
B) Que salga un múltiplo de seis.
C) Que salga un número divisor de seis.
D) Que salga un número primo.
E) Que salga un número menor que cuatro.

2. Al lanzar un dado, la probabilidad que el resultado sea par o primo es:

A) 1

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{3}{5}$

E) $\frac{5}{6}$

3. Según la ruleta de la figura, ¿cuál es la probabilidad de que **no** salga el color blanco en dos lanzamientos seguidos?

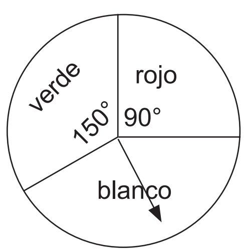
A) $\frac{1}{9}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{5}{9}$

D) $\frac{8}{9}$

E) $\frac{4}{6}$



4. ¿Cuál es la probabilidad de que en la ruleta del ejercicio anterior salga el color blanco ya sea en el primer o en el segundo lanzamiento?

A) $\frac{1}{9}$

B) $\frac{2}{9}$

C) $\frac{3}{9}$

D) $\frac{4}{9}$

E) $\frac{5}{9}$

5. Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que el primero sea un número par y el segundo sea un múltiplo de tres?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{5}{6}$

E) $\frac{5}{12}$

6. Dos eventos son complementarios si su intersección es vacía y la unión es igual al espacio muestral. ¿Cuál de las siguientes pares de eventos son complementarios?

A) Al lanzar un dado, “que salga un primo” y “que salga un número compuesto” .
B) Elegir “un ausente” o “un presente” al elegir un estudiante al azar de la lista del curso.
C) Al lanzar dos monedas, “que salga más de una cara” o “más de un sello”.
D) Elegir una prueba corregida al azar y esta tenga una nota “mayor que 4” o “menor que 4”.
E) Todos los anteriores.

7. La probabilidad de que un evento ocurra es p, ¿cuál es la probabilidad de que no ocurra en dos intentos seguidos?

A) $1 - p^2$
B) $(1 - p)^2$
C) $1 + p^2$
D) p^2
E) $p^2 - 1$

8. Si se lanzan tres dados, ¿cuál es la probabilidad que la suma sea menor que 18?

A) $\frac{1}{216}$
B) $\frac{1}{18}$
C) $\frac{215}{216}$
D) $\frac{17}{18}$
E) 1

9. En una caja se tienen diez bolitas numeradas del 0 al 9. Si se extraen dos con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que las bolitas extraídas sean impares e iguales?

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{1}{10}$
C) $\frac{5}{81}$
D) $\frac{2}{9}$
E) $\frac{1}{20}$

10. En una caja hay 7 bolitas numeradas del 1 al 7, si se saca una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea impar o mayor que 4?

A) $\frac{3}{7}$
B) $\frac{4}{7}$
C) $\frac{5}{7}$
D) $\frac{6}{7}$
E) 1

11. En un juego se tira un dado y una moneda y gana aquel que obtiene una cara y un seis, ¿cuál es la probabilidad de ganar en este juego?

A) $\frac{1}{12}$
B) $\frac{2}{12}$
C) $\frac{8}{12}$
D) $\frac{1}{8}$
E) $\frac{2}{8}$

12. En una tómbola hay 15 bolitas negras y 15 rojas, cada color numeradas del 1 al 15, ¿cuál es la probabilidad de que al elegir una bolita salga el número 13 o salga de color negro?

A) $\frac{14}{30}$

B) $\frac{15}{30}$

C) $\frac{16}{30}$

D) $\frac{17}{30}$

E) $\frac{18}{30}$

13. La distribución por sexo en los dos cursos de primero medio de un colegio, se muestra en la siguiente tabla:

	hombres	mujeres
1° A	20	10
1° B	18	12

Si de estos alumnos(as) se elige un(a) alumno(a) al azar, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que sea mujer es $\frac{22}{60}$.

II) La probabilidad de que sea del 1ºA es $\frac{1}{2}$.

III) La probabilidad de que sea un estudiante varón del 1ºB es $\frac{18}{30}$.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

14. Se lanzan 4 dados, ¿cuál es la probabilidad de que tres marquen un número par y uno marque un número impar?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{16}$

E) $\frac{3}{8}$

15. Se tienen dos cajas con bolitas negras y blancas. La primera tiene 3 blancas y 4 negras y la segunda dos blancas y 6 negras. Si se elige una bolita de cada caja (cada caja tiene la misma probabilidad de ser elegida), ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una de las bolitas sea negra?

A) $\frac{3}{7}$

B) $\frac{25}{28}$

C) $\frac{19}{28}$

D) $\frac{9}{28}$

E) $\frac{3}{28}$

16. En una caja hay solo bolitas de colores verdes, rojas y blancas todas del mismo tipo. Se puede determinar la probabilidad de extraer una bolita blanca o una roja sabiendo que:

(1) La probabilidad de sacar una bolita blanca es un 40%.

(2) La probabilidad de sacar una bolita verde es el doble de la probabilidad de sacar una roja.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

17. Se tienen tres cajas cada una con tres bolitas de colores: verde, rojo y amarillo.
Si se extrae una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

A) $\frac{1}{27}$

B) $\frac{1}{9}$

C) $\frac{2}{9}$

D) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{2}{3}$

18. Un portal de ventas de automóviles de internet ofrece 200 vehículos entre camionetas y autos, de los cuales hay nuevos y usados. Se sabe que, los autos nuevos son 40, el total de camionetas 98 y los vehículos usados corresponden al 55%. Si se elige un vehículo al azar, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que sea una camioneta nueva es 0,25.

II) La probabilidad de que sea una camioneta usada es 0,24.

III) La probabilidad de que sea un auto o un vehículo nuevo es 0,96.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

19. Se ha lanzado un dado dos veces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que la suma sea 8 es $\frac{5}{36}$.

II) La probabilidad de que las dos veces salga el mismo número es $\frac{1}{6}$.

III) La probabilidad de que el número que salga la primera vez sea a lo sumo igual al número que salga la segunda vez es $\frac{15}{36}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

20. Se lanzan dos dados y se suman los números obtenidos, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que la suma sea 5 es igual a la probabilidad de que la suma sea 9.
II) 7 es la suma con mayor probabilidad.
III) La probabilidad de que la suma sea a lo más 6 es igual a la probabilidad de que la suma sea mayor que 7.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

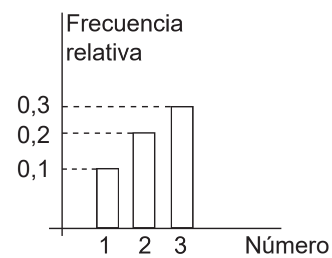
21. En una caja hay 4 bolitas blancas y 2 negras y en otra hay 4 bolitas blancas y 6 negras.
Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de sacar por lo menos una bolita blanca?

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{4}{5}$
D) $\frac{4}{15}$
E) $\frac{11}{15}$

22. En una caja hay bolitas marcadas con los números marcados del 1 al 4. En el siguiente gráfico se muestra la frecuencia relativa de algunos de estos números.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de sacar una bolita marcada con el 1 o el 4 es igual a la probabilidad de sacar una bolita marcada con el 2 o el 3.
II) La probabilidad de sacar un impar tiene la misma probabilidad que sacar un 4.
III) La probabilidad de sacar a lo más un 2 es igual a la probabilidad de sacar un 3.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III



23. En una cartera, la señora Eugenia tiene 3 monedas, una de \$50, una de \$100 y una de \$500. Si saca dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que saque más de \$150?

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$
E) $\frac{3}{4}$

24. En una caja hay 3 bolitas blancas y 2 rojas, en otra caja hay 2 blancas y 4 rojas. Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es probabilidad de que sean del mismo color?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{4}{15}$

C) $\frac{7}{15}$

D) $\frac{8}{15}$

E) $\frac{14}{15}$

25. Un dado cargado es tal que la probabilidad de que salga un número par y múltiplo de tres es 0,1, que salga un impar y divisor de seis es 0,2 y que salga un número par y divisor de 12 es 0,6, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 5?

A) 0,1

B) 0,2

C) 0,25

D) 0,3

E) 0,4

26. Sean A y B dos eventos, se puede determinar la probabilidad de que ocurra B, sabiendo:

(1) La probabilidad de que ocurra A o B.

(2) La probabilidad de que ocurra A y no B.

A) (1) por sí sola

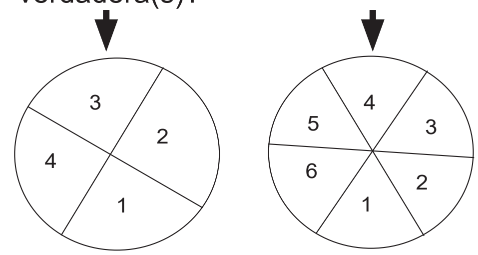
B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

27. Las ruletas de las figuras tienen sus sectores circulares respectivos congruentes.
Si se lanzan las dos ruletas y se suman los números obtenidos, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) La probabilidad de que la suma sea 7 es $\frac{1}{6}$.

II) La probabilidad de que la suma sea mayor que 8 es $\frac{1}{8}$.

III) La probabilidad de que la suma sea menor que 5 es $\frac{1}{4}$.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

28. Un jardín infantil tiene 43 bebés en sala cuna, de los cuales 23 son de sexo femenino. Si 9 de los bebés se enfermaron en el invierno pasado, de los cuales 4 eran niñitos, ¿cuál es la probabilidad de que si elige un bebé al azar este sea de sexo femenino o se enfermó en invierno?

A) $\frac{32}{43}$

B) $\frac{27}{43}$

C) $\frac{9}{43} \cdot \frac{27}{43}$

D) $\frac{1}{43}$

E) $\frac{5}{43}$

29. En una caja hay bolitas rojas, verdes y amarillas. Si se saca una bolita al azar, se sabe que la probabilidad de sacar una que no sea amarilla es $\frac{2}{3}$, la probabilidad de sacar una roja o amarilla es $\frac{4}{5}$, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bolita roja?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{7}{15}$

D) $\frac{8}{15}$

E) $\frac{3}{4}$

30. En una tómbola hay bolitas marcadas con números enteros positivos, se sabe que hay 8 bolitas amarillas y 12 rojas, de las amarillas hay 5 marcadas con números impares y de las rojas hay 4 marcadas con números pares. Si se elige una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea amarilla o par?

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{20}$

E) $\frac{3}{5}$

31. Un plantel de fútbol está formado por 3 arqueros, 6 defensas, 8 mediocampistas y 4 delanteros. Si se eligen dos jugadores al azar, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que los dos sean delanteros es $\frac{1}{35}$.

II) La probabilidad de que uno sea delantero y el otro arquero es $\frac{1}{35}$.

III) La probabilidad de que ninguno sea defensa es $\frac{1}{2}$.

A) Solo I

B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y IIII

32. Se lanza una moneda 4 veces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera?

A) La probabilidad de que salgan a lo menos 2 caras es $\frac{11}{16}$.

B) La probabilidad de que salgan a lo más 3 sellos es $\frac{15}{16}$.

C) La probabilidad de que salgan tantas caras como sellos es $\frac{3}{8}$.

D) La probabilidad de que salga solo 1 sello es menor a la probabilidad de que salgan por lo menos 3 sellos.

E) La probabilidad de que salgan menos de 2 sellos es igual a la probabilidad de que salgan a lo más 2 caras.

33. Una moneda está cargada de tal forma que es cuatro veces más probable que se obtenga una cara que un sello. Si la moneda se lanza dos veces, ¿cuál es la probabilidad de **NO** obtener dos caras?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{7}{16}$

C) $\frac{1}{25}$

D) $\frac{8}{25}$

E) $\frac{9}{25}$

34. En un comedor hay 4 ampolletas, las cuales pueden estar encendidas o apagadas independientemente unas de otras y para cada ampolleta la probabilidad de estar prendida es igual a la probabilidad de estar apagada. Si un niño juega con las 4 luces prendiéndolas y apagándolas, ¿cuál es la probabilidad de que queden dos encendidas y dos apagadas?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{1}{2}$

35. Se lanzan dos dados y una moneda, ¿cuál es probabilidad de que en la moneda salga sello y que los dados sumen 6?

A) $\frac{1}{18}$

B) $\frac{1}{24}$

C) $\frac{7}{12}$

D) $\frac{5}{72}$

E) $\frac{32}{36}$

36. Los alumnos de un cierto colegio deben optar por la asignatura de Artes o Música, pudiendo elegir una de ellas, ambas o ninguna. Si se elige un alumno al azar, se puede determinar la probabilidad de que elija Música y no Arte, sabiendo:

(1) La probabilidad de que elija Arte o Música es 0,8.

(2) La probabilidad de que elija Arte y no Música 0,5

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

37. Una moneda está cargada de modo que la probabilidad de que salga cara es 0,6, si se lanza dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga una cara y un sello?

A) 0,24
B) 0,25
C) 0,48
D) 0,5
E) 0,52

38. Se toma una muestra a las máquinas A y B para estudiar su efectividad en la producción de ciertos artículos. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Máquina	No fallados	fallados
A	114	6
B	142	8

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Es más probable hallar un artículo fallado en la muestra de B que en la muestra de A.
II) Si se elige un artículo al azar la probabilidad de que esté fallado y que haya sido producido por A es $\frac{1}{20}$.
III) Si se elige un artículo al azar la probabilidad de que esté fallado o sea producido por B es $\frac{156}{270}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

39. La probabilidad de que salga cara en una moneda cargada es el triple de que caiga en sello. Si se lanza la moneda 800 veces, por la Ley de los Grandes Números, la cantidad de caras que deberían salir es cercano a:

A) 200
B) 250
C) 300
D) 400
E) 600

40. Se toma un test de 4 preguntas de verdadero o falso a 1.600 personas y cada una de ellas las contesta al azar. La Ley de los Grandes Números permite afirmar que:

A) en un grupo de 400 personas, hay 100 que tienen 3 buenas.
B) en un grupo de 500 personas hay aproximadamente 100 obtienen 2 preguntas buenas.
C) aproximadamente, el 20% de las personas obtuvo 4 preguntas buenas.
D) aproximadamente, el 25% obtuvo una pregunta buena.
E) aproximadamente, un 40% obtuvo más de 2 preguntas buenas.

41. Se lanzan 12.000 veces dos dados no cargados, entonces según la Ley de los Grandes Números, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) 1000 veces la suma saldrá un 4.
B) aproximadamente, 6.000 veces la suma será a lo sumo igual a 6.
C) aproximadamente, 2.000 veces la suma será a lo menos 10.
D) por cada 1200 veces, 200 veces la suma será un 7.
E) por cada 1100 veces aproximadamente, en 1000 la suma será 8.

42. Según la Ley de los Grandes Números, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si se lanzan tres monedas 8000 veces en 1000 de ellas saldrá solo una cara.
II) Si se lanzan dos monedas 18000 veces, en la mitad de las veces saldrá solo una cara.
III) Si se lanzan 4 monedas 16.000 veces, en un 25% de las veces saldrán solo 3 caras.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) Ninguna de ellas.

43. En la tabla adjunta se muestra la distribución por color de las bolitas que se encuentran en una caja. Si los colores que aparecen en la tabla son los únicos que tienen las bolitas, las bolitas son de igual tamaño y tienen un solo color, ¿cuál es la probabilidad de elegir una bolita que sea roja o blanca?

color	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
rojo			0,2
verde	3		0,15
azul		12	
blanco			

A) 0,2
B) 0,24
C) 0,25
D) 0,3
E) 0,6

44. Un curso está formado por 18 hombres y 12 mujeres. Si se elige un estudiante al azar, la probabilidad de que haya asistido al paseo de fin de año es $\frac{5}{6}$ y la probabilidad de que sea una mujer que no asistió al paseo es $\frac{1}{10}$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si se elige un estudiante de los que asistieron al paseo, la probabilidad de que sea de sexo masculino es $\frac{16}{25}$.
II) Si se elige al azar uno de los estudiantes dentro de los que no fue al paseo, la probabilidad de que sea de sexo femenino es $\frac{3}{5}$.
III) Si se elige un estudiante al azar, la probabilidad de que sea hombre y no haya asistido al paseo es $\frac{1}{15}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

45. En una pequeña empresa hay 20 funcionarios que se dividen en administrativos y vendedores. Se sabe que hay 6 mujeres de las cuales hay 2 administrativos y el total de vendedores es 12.
Si se elige una persona al azar de esta empresa, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera?

I) La probabilidad de que sea una mujer vendedora es 0,2.
II) La probabilidad de que sea un administrativo de cualquier sexo o de sexo femenino es 0,7.
III) La probabilidad de elegir un administrativo de cualquier sexo es 0,4.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

46. En una caja hay solo bolitas de colores verdes, rojas y blancas todas del mismo tipo. Se puede determinar la probabilidad de extraer una bolita blanca, sabiendo:

(1) La probabilidad de sacar una bolita verde o blanca es 0,65.
(2) La probabilidad de sacar una bolita roja o blanca es 0,55.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

47. Se lanza una moneda no cargada 5 veces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de obtener más de tres sellos es igual a la probabilidad de obtener menos de 2 sellos.
II) La probabilidad de obtener más de 4 caras es igual a la probabilidad de obtener más de 4 sellos.
III) La probabilidad de obtener a lo sumo 3 caras es igual a la probabilidad de obtener menos de 3 sellos.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

48. En una oficina trabajan 8 hombres y 6 mujeres. Si se va a elegir una comisión formada por tres integrantes, ¿cuál es la probabilidad de que esté integrada por 2 hombres y una mujer?

A) $\frac{2}{13}$
B) $\frac{6}{13}$
C) $\frac{8}{13}$
D) $\frac{6}{49}$
E) $\frac{144}{243}$

49. En una caja hay solo bolitas negras y blancas todas del mismo tipo, numeradas con números enteros. Se puede determinar la probabilidad de extraer una bolita par y negra, sabiendo:

(1) La probabilidad de sacar una bolita blanca es $\frac{5}{9}$.

(2) La probabilidad de sacar una negra e impar es $\frac{1}{3}$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

50. En un curso de primer año de universidad se elige un estudiante al azar, la probabilidad de que sea mujer o haya aprobado el curso es 0,8, la probabilidad de que sea se sexo femenino es 0,5. Si la probabilidad de que sea mujer y haya aprobado el curso es 0,1, ¿cuál es la probabilidad de elegir a alguien que haya aprobado el curso?

A) 0,1
B) 0,2
C) 0,3
D) 0,4
E) 0,5

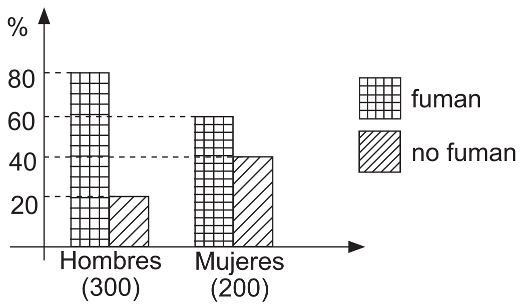
51. En una cierta ciudad la probabilidad de que un vehículo presente problemas de frenado dado que es un día lluvioso es 0,6. La probabilidad de que llueva en esa ciudad es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad de que esté lloviendo y presente fallas en los frenos?

A) 0,08
B) 0,12
C) $0,\overline{3}$
D) 0,5
E) 0,6

52. La probabilidad de que el sistema de calefacción de un bus se dañe dado que es un día en que la temperatura supere los 35° es 0,1. Si la probabilidad de que el sistema de calefacción se dañe y que la temperatura supere los 35° es 0,02, ¿cuál es la probabilidad de que la temperatura supere los 35°?

A) 0,002
B) 0,02
C) 0,2
D) 0,5
E) 0,05

53. Para un estudio acerca de la saludad de una población, se encuesta a 500 personas para saber si fuman o no, el resultado se muestra en el siguiente gráfico:



Si se elige un encuestado al azar, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que sea mujer dado que es fumador es $\frac{1}{3}$.

II) La probabilidad de que sea hombre dado que es no fumador es $\frac{3}{7}$.

III) Si se elige un hombre, la probabilidad de que este sea fumador es $\frac{4}{5}$.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

54. En un club deportivo, la probabilidad de elegir una mujer sabiendo que practican tenis es 0,3 y la probabilidad de elegir una persona que practique tenis dado que es del sexo femenino es 0,6. Si la probabilidad de elegir una mujer dentro de los socios del club es 0,1, ¿cuál es la probabilidad de que elegir al azar uno de los socios de este club, este practique tenis?

A) 0,1
B) 0,2
C) 0,3
D) 0,018
E) 0,02

55. A y B son eventos tales que $P(A \cup B) = 0,65$; $P(A) = 0,3$ y $P(A \cap B) = 0,1$.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $P(B) = \frac{9}{20}$

II) $P(A/B) = \frac{2}{9}$

III) $P(B/A) = \frac{1}{3}$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

56. En un curso de 30 alumnos de cuarto medio, la probabilidad de elegir un estudiante de sexo masculino es un 60%, además se sabe que hay 14 varones que pagaron el polerón de generación. Si la probabilidad de elegir un hombre dentro de los que no han pagado el polerón es $\frac{2}{3}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de elegir un estudiante de este curso que sea mujer y haya pagado el polerón es $\frac{1}{3}$.

II) La probabilidad de que al elegir un estudiante, este sea hombre sabiendo que pagó el polerón es superior al 50%.

III) Si se elige un estudiante al azar, la probabilidad de que sea hombre o no pagó el polerón es $\frac{2}{3}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

57. En una caja hay dados blancos y rojos, y se sabe que la probabilidad de elegir un dado blanco es 0,6. Tanto los dados blancos como rojos están cargados, de modo que en los dados blancos la probabilidad de que salga un número par es 0,7 y en los rojos la probabilidad de que salga impar es 0,6. Si se elige uno de los dados al azar y se lanza, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que salga par es un 58%.

II) Es más probable de que sea blanco y marque impar que sea rojo y marque par.

III) Si se sabe que sale impar, la probabilidad de que sea rojo es $\frac{4}{7}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

58. Sean A y B dos eventos independientes, cuyas probabilidades no son nulas.
Se puede determinar P(A/B) sabiendo que:

(1) La probabilidad de que ocurra A y B es 0,16.

(2) La probabilidad de que ocurra A es 0,2.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

59. Se tienen dos cajas A y B y en cada una de ellas hay bolitas numeradas con números enteros. Se sabe que la probabilidad de elegir la caja A es 0,4, la probabilidad de elegir una bolita par en la caja A es 0,6 y la probabilidad de sacar una bolita impar en la caja B es 0,7. Si se saca una bolita de cada caja y se suman los valores obtenidos, ¿cuál es la probabilidad de que esta suma sea un número par?

A) $0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}3$
B) $0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}7$
C) $0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7$
D) $0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}6$
E) $0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6$

60. A y B son dos eventos cuyas probabilidades no son nulas.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si A = B, entonces P(A/B) = P(B/A).
II) Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces P(A/B) = P(B/A).
III) Si P(A/B) = P(B/A), entonces P(A) = P(B).

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

61. En un curso de introducción al cálculo de una universidad, cierta cantidad de estudiantes se eximieron del examen final. Si se elige al azar un estudiante, se puede determinar la probabilidad de que este se haya eximido, sabiendo que es de sexo femenino, sabiendo que:

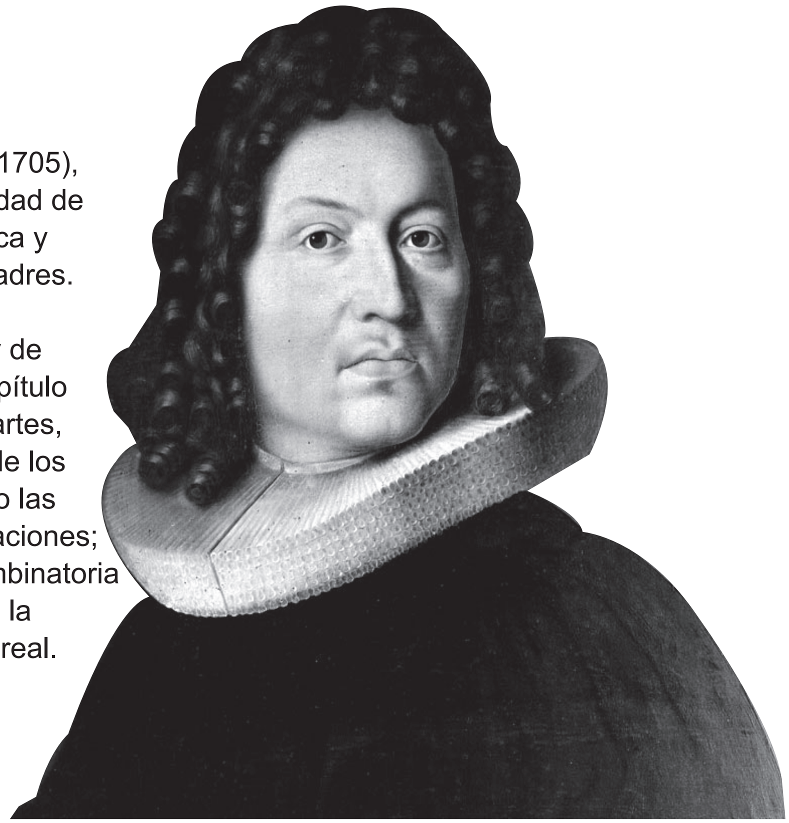
(1) La probabilidad de sea de sexo masculino es 0,6.
(2) La probabilidad de que sea del sexo femenino y se haya eximido es 0,3.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS CAPÍTULO 15									
1. C	**2.** E	**3.** B	**4.** E	**5.** C	**6.** B	**7.** B	**8.** C	**9.** E	**10.** C
11. A	**12.** C	**13.** C	**14.** C	**15.** B	**16.** C	**17.** C	**18.** C	**19.** C	**20.** E
21. C	**22.** E	**23.** B	**24.** C	**25.** B	**26.** C	**27.** E	**28.** B	**29.** C	**30.** E
31. D	**32.** E	**33.** E	**34.** C	**35.** D	**36.** E	**37.** C	**38.** C	**39.** E	**40.** D
41. C	**42.** E	**43.** E	**44.** E	**45.** D	**46.** C	**47.** C	**48.** B	**49.** C	**50.** D
51. B	**52.** C	**53.** E	**54.** B	**55.** E	**56.** E	**57.** E	**58.** B	**59.** E	**60.** C
61. C									

Capítulo 3

COMBINATORIA Y PROBABILIDADES



Jacob Bernoulli, matemático suizo (1654-1705), estudió Filosofía y Biología en la Universidad de Basilea, conjuntamente estudió Matemática y Astronomía en contra del deseo de sus padres. A fines del Siglo XVII escribió la obra "Ars Conjectandi", en la cual se enuncia la Ley de los Grandes Números que vimos en el capítulo anterior. Esta obra se separa en cuatro partes, en algunas de ellas se estudian algunos de los temas que veremos en este capítulo como las permutaciones, los arreglos y las combinaciones; en la tercera parte de la obra se ve la combinatoria aplicada al cálculo de probabilidades y en la última parte se ven aplicaciones a la vida real.

CONCEPTOS CLAVES

- Principio multiplicativo y aditivo
- Permutaciones
- Combinaciones

PRINCIPIO MULTIPLICATIVO Y ADITIVO

En este capítulo estudiaremos la Combinatoria, que es una rama de la Matemática, que se preocupa del análisis y construcción de técnicas para el conteo de casos.
Uno de las técnicas más básicas son el principio aditivo y el principio multiplicativo.

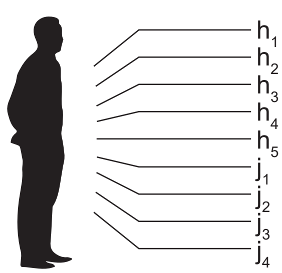
- **Principio Aditivo**

  Si un suceso ocurre de m formas distintas y otro suceso ocurre de n formas distintas, entonces hay m + n formas de que ocurra uno o el otro suceso.

  Ejemplo:

  Supongamos que tu padre te invita a una cafetería y tienes 5 opciones de helado y 4 sabores de jugo. Si debes elegir un helado o jugo, entonces tienes 5 + 4 posibilidades.
  En este caso las elecciones están en paralelo, es como si estuviésemos ante 9 caminos que están enfrente de nosotros y debemos elegir solo uno:

Principio aditivo



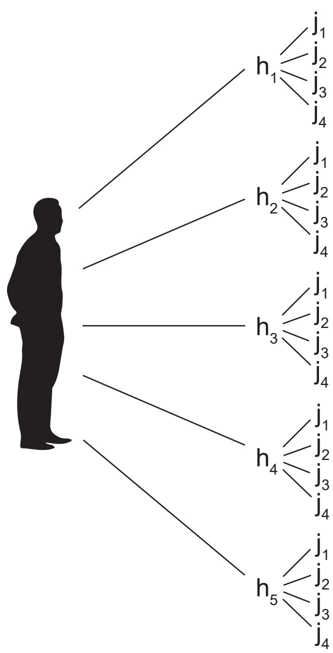
Se debe elegir entre 5 sabores de helado o 4 sabores de jugo.
Las elecciones se nos presentan en paralelo, como 9 opciones distintas.

- **Principio Multiplicativo**

  Si un suceso ocurre de m formas distintas y otro suceso ocurre de n formas distintas, entonces hay m·n formas de que ocurran ambos sucesos.

  Ejemplo:

  Siguiendo con el ejemplo anterior, si ahoras debes elegir un helado y un jugo, entonces tienes 5 · 4 posibilidades.
  En este caso las elecciones están en serie, es como si primero tendríamos 5 caminos a elegir y por cada elección de este, tendríamos después otras 4 elecciones:

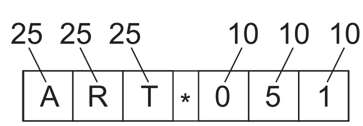


Principio multiplicativo

Se debe elegir entre 5 sabores de helado y 4 sabores de jugo.
Las elecciones se nos presentan en serie, generándose 20 opciones distintas.

Ejemplo:

Supongamos que vamos a construir patentes formadas por tres letras y tres dígitos, donde las letras son elegidas de un alfabeto de 25 letras. Por el principio multiplicativo podemos determinar que existen 25 · 25 · 25 · 10 · 10 · 10 = 15.625.000 patentes distintas.

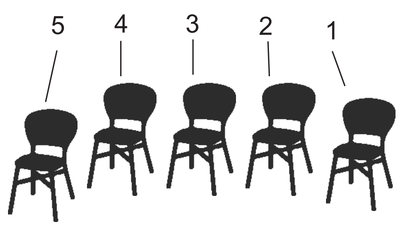


PERMUTACIONES

Se define el factorial de un número entero positivo n como el producto entre los enteros consecutivos desde el 1 hasta n, con $n \geq 2$. El símbolo utilizado para el factorial es n!, entonces $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, además se define $0! = 1$ y $1! = 1$.

El factorial de un número está estrechamente relacionado con la cantidad de formas que podemos ordenar una cierta cantidad de objetos distintos en una fila, lo que se denomina una permutación simple. Lo que explicaremos con el siguiente ejemplo:

Supongamos que hay 5 personas que se van a sentar en 5 asientos que están dispuestos uno al lado de otro. Entonces si las personas pasan de una a una a sentarse en los asientos, tenemos que la primera tiene 5 opciones, la segunda tiene solo 4 opciones (ya que fue ocupado uno de los asientos por la primera persona) la tercera tiene tres opciones, etc., hasta la quinta que le queda una sola opción, por el principio multiplicativo, la cantidad de formar en que se pueden sentar las 5 personas en las sillas es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, lo que corresponde a 5!. Lo anterior es equivalente a afirmar que la cantidad de formas que se pueden ordenar 5 personas en un fila es 5!, lo que corresponde a una permutación de 5 elementos.



La cantidad de formas que 5 personas se pueden sentar en 5 sillas es 5! y esto corresponde a una permutación.

- **Permutación con repetición**

  Supongamos que tenemos n objetos, donde hay algunos repetidos, entonces la cantidad de formas en que podemos ordenarlos en fila es una permutación con repetición.

  Supongamos que de los n objetos, hay n_1 de un tipo, n_2 de otro, etc., entonces la cantidad de formas que podemos ordenarlos es $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \, n_p!}$.

  Ejemplo:

  Supongamos que tenemos tres bolitas rojas dos verdes y una azul, la cantidad de formas de ordenarlas en una fila es $\dfrac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$, si desarrollamos los factoriales y simplificamos, tenemos

  $$\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \cancel{4}^{2} \cdot 5 \cdot 6}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 60 \text{ formas distintas.}$$

COMBINACIONES

Llamaremos combinación cuando tenemos **n** objetos diferentes y vamos a elegir **k** de ellos, sin importar el orden y sin repetir los elementos.

La cantidad de combinaciones de k objetos de un total de n (con $n \geq k$), se designa con el símbolo C_k^n o bien $C^{n,k}$ (existen muchas más notaciones) y corresponde al valor del coeficiente binomial $\binom{n}{k}$, el cual se calcula de la siguiente forma:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}}$$

Ejemplo:

En un curso de 20 personas vamos a formar grupos de trabajo de 6 integrantes, entonces la cantidad de grupos diferentes que podemos formar corresponde a una combinación de 20 sobre 6, lo que se calcula con $\binom{20}{6}$.

Usando la definición tenemos que $\binom{20}{6} = \frac{20!}{(20-6)! \cdot 6!} = \frac{20!}{14! \cdot 6!}$, si expandimos los factoriales y simplificamos, tenemos $\frac{20!}{14! \cdot 6!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 14} \cdot 15 \cdot \cancel{16}^{8} \cdot 17 \cdot \cancel{18}^{6} \cdot 19 \cdot \cancel{20}}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 14} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6}} = 15 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 19 = 38.760$

Tenemos entonces que se pueden formar 38.760 grupos de seis personas de un total de 20.

- **Combinaciones con repetición**

  Si tenemos **n** objetos y vamos a formar subconjuntos de tamaño **k** y podemos repetir los elementos en cada elección, entonces corresponde a una combinación con repetición de **n** sobre **k**, en este caso lo calculamos con el coeficiente binomial $\binom{n+k-1}{k}$.

  Ejemplo:

  Seis amigos van a un restaurante y cada uno elige una bebida, si se disponen de 10 tipos diferentes de bebidas, ¿cuántas elecciones distintas se pueden realizar?

  En este caso dos o más amigos pueden pedir la misma bebida, por lo tanto se trata de una combinación con repetición, de 6 elementos de un total de 10, entonces calculamos $\binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6}$, si haces el cálculo de este coeficiente binomial obtendrás 5.005 posibilidades distintas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En un curso hay 18 niños y 12 niñas y el profesor seleccionará una comisión formada por 2 hombres y 2 mujeres. ¿De cuántas formas puede realizar esta elección?

Solución:

El elegir 2 niños del total de 18 corresponde a una combinación, puesto que los niños no se repiten y no importa el orden interno de la elección, por lo tanto esto se puede realizar de $\binom{18}{2}$ formas. Por lo mismo, el elegir 2 mujeres se puede realizar de $\binom{12}{2}$ formas. Como queremos elegir 2 hombres y 2 mujeres, ocupando el principio multiplicativo, tenemos que esta elección se puede realizar de $\binom{18}{2} \cdot \binom{12}{2}$ formas distintas.

2. Seis hermanos se ordenan en una fila para sacarles una foto. Si todos tienen estaturas diferentes, ¿de cuántas formas se pueden ordenar de modo que los más altos se ubiquen al centro?

Solución:
Tal como se muestra en la siguiente figura, los más altos se ubican al centro:

La forma de ordenar los otros 4 hermanos es una permutación simple, es decir, 4!, pero los dos centrales se pueden permutar, lo que se puede realizar de 2! formas, por lo tanto por el principio multiplicativo, las formas posibles en que se pueden ordenar los 6 hermanos de modo que los mayores se ubiquen al centro es $4! \cdot 2! = 48$ formas distintas.

3. En un restaurante, el menú se compone de dos entradas que puede ser ensalada o empanadas de queso, el plato principal puede ser pollo o carne acompañado de ensalada, arroz o puré y de postre hay fruta, helado o flan de chocolate.
Si se elige al azar un menú, ¿cuál es la probabilidad de que tenga empanadas y budín de chocolate?

Solución:
Para la entrada tenemos 2 posibilidades, para el plato de fondo 2, para el acompañamiento 3 y 3 posibilidades de postre, por el principio multiplicativo tenemos $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ menús diferentes. De todos estos diferentes menús, que son los casos totales, veremos cuántos tienen como entrada empanadas y de postre budín de chocolate.
Tenemos para la entrada una posibilidad, para el plato de fondo 2, para el acompañamiento 3 y para el postre 1, por lo tanto hay $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$ casos favorables. Por la regla de Laplace la probabilidad pedida es $\frac{6}{36}$, o bien $\frac{1}{6}$.

4. En un curso hay 14 hombres y 16 mujeres. De estos alumnos el profesor debe elegir 7 estudiantes para que vayan a recolectar fondos para una institución de beneficencia.
¿Cuál es la probabilidad de que el grupo elegido esté integrado por 3 hombres y 4 mujeres?

Solución:
Como en cada elección los alumnos no se pueden repetir y no importa el orden en que son elegidos, entonces se trata de una combinación de 30 sobre 7, esto es, existen $\binom{30}{7}$ formas de elegir los 7 alumnos. Por otro lado, por el principio multiplicativo, elegir 3 hombres y 4 mujeres, se puede realizar de $\binom{14}{3} \cdot \binom{16}{4}$ formas. Por la regla de Laplace, tenemos que la probabilidad pedida es $\dfrac{\binom{14}{3} \cdot \binom{16}{4}}{\binom{30}{7}}$.

5. Se ordenan aleatoriamente en una fila tres hombres y tres mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que hayan quedado ordenados alternados según sexo?

Solución:
La cantidad de formas que se pueden ordenar en una fila, corresponde a una permutación de 6 elementos, esto es 6!.
La cantidad de formas en las que quedan alternados según sexo, es por ejemplo hmhmhm, acá podemos permutar los tres hombres y las tres mujeres, esto es $3! \cdot 3!$, además se puede empezar con mujer o con hombre, entonces la cantidad de formas que queden alternados por sexo es $3! \cdot 3! \cdot 2$, por lo tanto la probabilidad pedida es $\frac{3! \cdot 3! \cdot 2}{6!}$ o bien $\frac{1}{10}$.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Una línea de buses llega a 20 ciudades de todo el país. Si se requieren hacer carteles que se pondrán en cada bus, indicando la ciudad de origen y de llegada del trayecto. ¿Cuántos carteles distintos habrá que confeccionar?

A) 20^2

B) $\binom{20}{2}$

C) $\binom{19}{2}$

D) $20 \cdot 19$

E) 40

2. Un grupo de 6 alumnos han realizado un trabajo de investigación, si se van a elegir dos al azar para que realicen la presentación, ¿de cuántas maneras se puede hacer esta elección?

A) 30
B) 36
C) 15
D) 20
E) 12

3. En una caja hay seis bolitas numeradas del 1 al 6, si se eligen 3 sin reposición para formar un número de 3 cifras, ¿cuántos de estos números se pueden formar?

A) 15
B) 20
C) 60
D) 120
E) 216

4. Una clave de internet está compuesta por 4 dígitos los cuales no pueden ser los cuatro iguales, ¿cuántas claves distintas se pueden formar?

A) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

B) $\binom{10}{4} \cdot 4!$

C) $\binom{10}{4} \cdot 4! - 10$

D) $10^4 - 10$

E) $9 \cdot 10^3 - 9$

5. En una fila de 5 sillas se sientan dos hombres y tres mujeres, ¿de cuántas maneras se pueden sentar, si los del mismo sexo deben quedar juntos?

A) 2
B) $2 \cdot 3$
C) $2! \cdot 3!$
D) $2! \cdot 3! \cdot 2$
E) $2 \cdot 3 \cdot 2$

6. En el ejercicio anterior, ¿de cuántas maneras se pueden sentar de modo que queden alternados por sexo?

A) 2
B) $2 \cdot 3$
C) $2! \cdot 3!$
D) $2! \cdot 3! \cdot 2$
E) $2 \cdot 3 \cdot 2$

7. En el ejercicio anterior, ¿de cuántas maneras se pueden sentar de modo que los hombres queden juntos?

A) 2
B) $2 \cdot 3$
C) $2! \cdot 3!$
D) $2! \cdot 3! \cdot 2$
E) $4! \cdot 2!$

8. Una persona tiene 6 pantalones y 4 camisas, si elige 5 prendas, ¿de cuántas maneras puede elegir 3 pantalones y 2 camisas?

A) 26
B) 120
C) 132
D) 240
E) 1440

9. Se ordenan 6 libros distintos en un librero, uno al lado de otro, ¿de cuántas maneras se pueden ordenar de modo que dos en específico deben quedar al centro?

A) $4!$
B) $5!$
C) $4! \cdot 2!$
D) $4 \cdot 2$
E) $5! \cdot 2!$

10. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una fila 5 fichas rojas y 4 verdes?

A) 9
B) $9!$
C) $9 \cdot 8$
D) 63
E) 126

11. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en fila las 7 letras de la palabra CARACAS?

A) $7!$
B) $7 \cdot 6$
C) 420
D) 120
E) 60

12. Francisco, Leonardo, Eduardo, Sebastián y Carlos se presentan a una interrogación oral para un examen final de un curso. Si el profesor debe elegir solo tres y entre ellos debe estar Carlos, ¿de cuántas maneras puede hacer esta elección?

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 20

13. En un restaurante, el menú está compuesto por un plato de fondo, un acompañamiento y un postre, se puede determinar la cantidad de postres distintos que existen sabiendo que:

(1) La cantidad de menús distintos que se pueden armar son 12.
(2) Entre el plato de fondo y el acompañamiento existen 6 posibilidades.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

14. A una conferencia, asisten 20 científicos, si se van a formar comisiones integradas por tres o cuatro miembros, ¿cuántas comisiones se pueden formar?

A) $\binom{20}{3} \cdot \binom{20}{4}$

B) $\binom{20}{3} + \binom{20}{4}$

C) $\binom{20}{3} \cdot 3! + \binom{20}{4} \cdot 4!$

D) $\binom{20}{3} \cdot \binom{20}{4} \cdot 3! \cdot 4!$

E) $\binom{20}{3} \cdot \binom{20}{4} \cdot 7!$

15. De los 50 asistentes a una presentación de un nuevo producto, se sortearán tres regalos iguales. Si una misma persona no puede ganar más de un premio, ¿de cuantas maneras posibles se pueden repartir los obsequios?

A) $50 \cdot 49 \cdot 48$

B) 50^3

C) $\binom{50}{3}$

D) $\binom{52}{3}$

E) $\dfrac{50!}{3!}$

16. En el ejercicio anterior, si una misma persona puede ganar más de un premio, ¿de cuantas maneras posibles se pueden repartir los obsequios?

A) $50 \cdot 49 \cdot 48$

B) 50^3

C) $\binom{50}{3}$

D) $\binom{52}{3}$

E) $\dfrac{50!}{3!}$

17. Con los dígitos del 1 al 5, se forman todos los números posibles de tres cifras, pudiéndose repetir las cifras, ¿cuántos números de estos son pares?

A) 12

B) 20

C) 25

D) 40

E) 50

18. En una carrera automovilística compiten 5 autos, de colores verde, rojo, amarillo, azul y blanco. Suponiendo que no puede haber empates entre ellos, ¿de cuántas maneras pueden llegar a la meta si se sabe que los vehículos de colores rojo y verde llegaron en los primeros lugares?

A) $3!$

B) $4!$

C) $2! \cdot 3!$

D) $2! \cdot 3$

E) $4! \cdot 2$

19. En el ejercicio anterior, ¿de cuantas maneras pueden llegar a la meta si se sabe que el amarillo o el blanco ganó la competencia?

A) $3!$

B) $4!$

C) $2! \cdot 3!$

D) $2! \cdot 3$

E) $4! \cdot 2$

20. Las patentes en un cierto país están formadas por tres letras, las cuales son elegidas de un alfabeto de 25 letras, seguidas por tres dígitos. Si las letras no se pueden repetir y los dígitos si, ¿cuántas patentes distintas se pueden formar?

A) $\binom{25}{3} \cdot 10^3$

B) $\binom{25}{3} \cdot 3! \cdot 10^3$

C) $\binom{25}{3} \cdot 3! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

D) $\binom{25}{3} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

E) $\binom{25}{3} \cdot 9 \cdot 10^2$

21. En el ejercicio anterior, ¿cuántas patentes se pueden formar si no se pueden repetir ni las letras ni los dígitos?

A) $\binom{25}{3} \cdot 10^3$

B) $\binom{25}{3} \cdot 3! \cdot 10^3$

C) $\binom{25}{3} \cdot 3! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

D) $\binom{25}{3} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

E) $\binom{25}{3} \cdot 9 \cdot 10^2$

22. En un restaurante, se ofrece un menú de almuerzo que consiste en entrada, plato de fondo con ensalada y postre.
Si hay tres tipos de entrada, el plato de fondo puede ser carne o pollo, para la ensalada hay tres posibilidades y el postre puede ser fruta o helado. ¿Cuántos menús existen que contengan pollo?

A) 6

B) 8

C) 9

D) 12

E) 18

23. En el ejercicio anterior, ¿cuántos menús no tienen carne como plato de fondo y helado como postre?

A) 6

B) 8

C) 9

D) 12

E) 18

24. Se tienen una cierta cantidad de personas, se puede determinar cuántas son, sabiendo que:

(1) Existen 7! formas de ordenarlas en línea.

(2) Se pueden formar 21 parejas.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) o (2)

E) Se requiere información adicional

25. ¿Cuántos números de 4 cifras, se pueden formar si terminan en una cifra mayor que 6?

A) 1512
B) 2700
C) 3600
D) 3000
E) 4000

26. Los códigos de los productos de una industria están formados por cuatro dígitos y cuatro letras, en cualquier orden. Si las letras son elegidas de un alfabeto de 25 letras y tanto los dígitos y las letras no se pueden repetir, ¿cuántos códigos distintos se pueden formar?

A) $\binom{25}{4} \cdot \binom{10}{4}$

B) $\binom{25}{4} \cdot \binom{10}{4} \cdot 4! \cdot 4!$

C) $\binom{25}{4} \cdot \binom{10}{4} \cdot 8!$

D) $\binom{25}{4} \cdot \binom{10}{4} \cdot 8$

E) $\binom{25}{4} \cdot 4! + \binom{10}{4} \cdot 4!$

27. Se forman todos los números mayores que 1.000 y menores que 10.000, si las cifras no se pueden repetir y no pueden ser ceros, ¿cuántos de estos números tienen tantas cifras pares como impares?

A) $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2}$

B) $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 2$

C) $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4$

D) $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4!$

E) $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4!$

28. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono de n lados?

A) n

B) $\binom{n}{2}$

C) $\binom{n}{2} \cdot 2!$

D) $\binom{n}{2} - n$

E) $\binom{n-2}{2}$

29. Un papá va a comprar un barquillo simple para él y para cada uno de sus tres hijos. Si hay 12 sabores de helados, ¿cuántas posibles elecciones existen?

A) $\binom{12}{3}$

B) $\binom{12}{4}$

C) $\binom{12}{4} \cdot 4!$

D) $\binom{15}{4}$

E) 12^4

30. Seis amigos se ordenan en una fila al azar, entre los cuales hay dos hermanos.
¿Cuál es la probabilidad de que los dos hermanos queden juntos?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{4}$

31. En una final de 100 metros planos, se sabe que los atletas no pueden empatar entre ellos. Se puede determinar cuántos competidores son, sabiendo que:

(1) Existen 120 ordenaciones distintas de llegar a la meta.
(2) Todos los atletas tienen la misma probabilidad de ganar.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

32. Se ordenan aleatoriamente en una fila cuatro bolitas de colores verde, rojo, blanco y azul, ¿cuál es la probabilidad de que las fichas de colores rojo y blanco queden al centro?

A) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{3}{4}$

33. En un librero hay cinco libros, uno de historia, uno de física, uno de biología, uno de matemática y uno de química. Si se ordenan al azar uno al lado del otro, ¿cuál es la probabilidad de que el de química quede al lado del de física?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{1}{5}$

D) $\frac{1}{10}$

E) $\frac{2}{5}$

34. En el ejercicio anterior, ¿cuál es la probabilidad de que el de matemática **no** esté al lado del de química?

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{3}{4}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{9}{10}$

E) $\frac{3}{5}$

35. Se forman todos los números de 4 cifras con los dígitos 1, 2, 3, y 6 pudiéndose repetir las cifras.¿Cuál es la probabilidad que al elegir uno de estos números, este **NO** tenga dígitos repetidos?

A) $\frac{3}{32}$

B) $\frac{1}{256}$

C) $\frac{1}{24}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{1}{12}$

36. Se tienen seis bolitas marcadas con las letras A, A, A, C, C y S. Si estas bolitas se sacan una a una sin reposición para ir formando una palabra, ¿cuál es la probabilidad de que se forme la palabra "CASACA"?

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{12}$

C) $\frac{1}{60}$

D) $\frac{1}{240}$

E) $\frac{1}{120}$

37. En una heladería, los sabores de helados son chocolate, vainilla, frutilla, maracuyá, moka y menta. Si una persona solicita al mozo un cono doble y este al llegar a la vitrina no recuerda los sabores que debería servir. Si el mozo recuerda que los sabores no eran iguales y arma el cono aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que elija justamente los sabores pedidos por el cliente?

A) $\frac{1}{12}$

B) $\frac{1}{15}$

C) $\frac{2}{15}$

D) $\frac{1}{30}$

E) $\frac{1}{25}$

38. Antiguamente las patentes de vehículos de nuestro país están formada por dos letras seguidas de cuatro dígitos. Si las letras eran elegidas de un alfabeto de 25 letras y tanto las letras como los dígitos se podían repetir. Si entre todas las patentes construidas de esta forma, se elige una al azar, ¿cuál es la probabilidad que empiece con F y termine en un 3 o un 7?

A) $\frac{1}{25}$

B) $\frac{2}{25}$

C) $\frac{1}{125}$

D) $\frac{1}{250}$

E) $\frac{1}{500}$

39. En una caja hay cinco bolitas numeradas del 1 al 5, si se toman muestras de tamaño 2 sin orden y sin repetición. Si se elige al azar una de estas muestras, ¿cuál es la probabilidad de que **no** tenga el número 3?

A) $\frac{1}{5}$

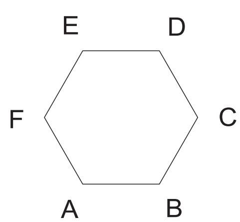
B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{3}{10}$

E) $\frac{2}{3}$

40. En el hexágono de la figura, se eligen 2 de sus vértices al azar.



¿Cuál es la probabilidad que al unir estos dos vértices por un segmento, este coincida con uno de los lados del hexágono?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{3}{10}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{6}$

41. En una caja hay 5 bolitas numeradas con los números 2, 3, 5, 7 y 8.
Si se sacan muestras de tamaño 2 sin orden ni repetición, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números de la muestra sea mayor a 10?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{4}{5}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{3}{10}$

42. Entre los alumnos de un grupo están Paula y Federico, si el profesor elige al azar 2 alumnos para una interrogación oral, se puede determinar cuántos alumnos tiene el grupo, sabiendo que:

(1) La probabilidad de elegir a Paula y Federico es $\frac{1}{15}$.

(2) La probabilidad de no elegir a Paula es $\frac{2}{3}$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

43. Con las letras A, B, C, D y E se forman todas las palabras con o sin sentido de 2 o 3 letras. Si las letras no se pueden repetir y se elige una de estas palabras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la letra A?

A) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{9}{20}$

E) $\frac{3}{10}$

44. En una caja hay 5 tarjetas, con las letras A, B, C, D y E.
Se van extrayendo las tarjetas una a una con reposición, de modo de formar una palabra de largo "p", con p > 2. ¿Cuál es la probabilidad de que la palabra formada tenga la letra A solo una vez?

A) $\frac{p}{5}$

B) $\frac{1}{5^p}$

C) $\frac{4^{p-1}}{5^p}$

D) $\left(\frac{4}{5}\right)^{p-1} \cdot p$

E) $\left(\frac{4}{5}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{5} \cdot p$

RESPUESTAS CAPÍTULO 16									
1. D	**2.** C	**3.** D	**4.** D	**5.** D	**6.** C	**7.** E	**8.** B	**9.** C	**10.** E
11. C	**12.** A	**13.** C	**14.** B	**15.** C	**16.** D	**17.** E	**18.** C	**19.** E	**20.** B
21. C	**22.** E	**23.** C	**24.** D	**25.** B	**26.** C	**27.** D	**28.** D	**29.** D	**30.** C
31. A	**32.** D	**33.** E	**34.** E	**35.** A	**36.** C	**37.** B	**38. C**	**39.** B	**40. B**
41. C	**42. D**	**43.** D	**44.** E						

MINIENSAYO N°4

EJE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Tiempo: 45 minutos

1. Si se lanza un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado salga un múltiplo de 3 o en la moneda salga cara?

A) $\frac{5}{6}$

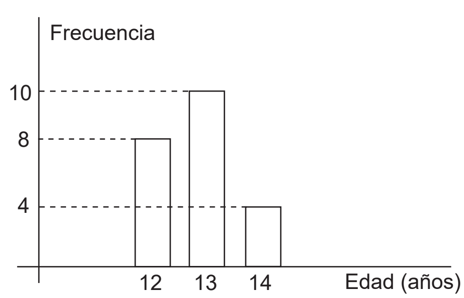
B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{3}$

E) 1

2. En el siguiente gráfico se muestra la distribución de las edades de los alumnos de 7° básico de un curso de cierto establecimiento:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La mediana es 13.
B) La media es menor que la mediana.
C) La moda es igual a la mediana.
D) El primer cuartil es 12.
E) El tercer cuartil es 14.

3. Una moneda cargada se cumple que la probabilidad de que salga cara es el doble de que salga sello. Si la moneda se lanza dos veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener una cara y un sello?

A) $\frac{2}{9}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{3}{16}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{1}{3}$

4. En una caja hay 7 bolitas numeradas del 1 al 7, si se sacan dos sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que sumen 7?

A) $\frac{1}{14}$

B) $\frac{3}{14}$

C) $\frac{1}{7}$

D) $\frac{1}{42}$

E) $\frac{6}{7}$

5. En una caja hay bolitas verdes, rojas y blancas, todas del mismo tipo. Se puede determinar la cantidad de bolitas blancas, sabiendo que:

(1) Si se extrae una bolita, la probabilidad de que sea verde o blanca es $\frac{5}{8}$.

(2) Si se extrae una bolita, la probabilidad de que sea verde es $\frac{1}{2}$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

6. A y B son dos eventos aleatorios, tales que $P(A \cup B) = 0{,}8$, $P(A) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $P(B) = 0{,}4$
II) $P(A/B) = 0{,}25$
III) $P(B/A) = 0{,}2$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

7. Las notas de Juan en la asignatura de Biología son 4, 5, 5, 7 y 6. Si posteriormente el 6 se cambia por un 7, ¿cuál(es) de los siguientes estadígrafos se modifican?

I) Media.
II) Mediana.
III) Rango.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

8. Para calcular la nota final en un trabajo de investigación se deben considerar los siguientes aspectos:

Presentación	30%
Desarrollo	50%
Exposición	20%

Si un cierto grupo de trabajo obtuvo en la presentación un 6,0 y en el desarrollo un 5,0, ¿qué nota deberían tener en la exposición para que su nota final fuese un 5,5?

A) 5,4
B) 5,5
C) 5,6
D) 5,7
E) 6,0

9. En la siguiente tabla se muestra la frecuencia absoluta f y la frecuencia acumulada F de un conjunto de datos:

x	f	F
2		p
5	q	
7		p + 3q

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) El total de datos es $3p + 4q$.

II) Hay $p + q$ datos que son a lo sumo iguales a 5.

III) La frecuencia relativa del 5 es $\frac{p+q}{p+3q}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

10. Las notas de Claudio y Andrés obtenidas en la asignatura de Física durante el primer semestre, fueron las siguientes:

Claudio	4,0	7,0	5,0	5,0	6,0	6,0
Andrés	7,0	7,0	5,0	6,0	5,0	3,0

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Ambos obtuvieron la misma media en sus notas.

II) Ambos obtuvieron la misma mediana en sus notas.

III) Las notas de Claudio están menos dispersas que las de Andrés.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

11. Un curso está formado por 18 hombres y 12 mujeres. Si se quiere elegir un grupo de 4 alumnos para que lo represente, ¿de cuántas maneras se puede elegir este grupo si tiene que estar integrado por 2 hombres y 2 mujeres?

A) $\binom{18}{2} \cdot \binom{12}{2}$

B) $\binom{18}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot 2$

C) $\binom{18}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4$

D) $18 \cdot 17$

E) $\binom{18}{4}$

12. En una cierta liga de fútbol, la probabilidad de que suspendan un partido dado que está lloviendo es 0,8 y la probabilidad de que no llueva es 0,9, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo y se suspenda un partido?

A) 8%
B) 36%
C) 64%
D) 72%
E) 90%

13. En un curso de 21 alumnos, deben optar por obligatoriamente por un taller de idiomas que puede ser Inglés, Francés o ambos.

Se sabe que la probabilidad de que esté inscrito en Francés sabiendo que está en el taller de Inglés es $\frac{1}{5}$ y la probabilidad de que esté en el taller de Inglés dado que está en el de Francés es $\frac{1}{3}$. ¿Cuántos alumnos están inscritos en ambos talleres?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 5
E) Indeterminable con los datos.

14. En un hospital el 10% de los pacientes de sexo femenino han presentado un contagio viral, mientras que los de sexo masculino el 80% no ha presentado este contagio. Si el 60% de los pacientes son de sexo femenino, y se elige un paciente al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que esté contagiado es de un 14%.
B) La probabilidad de que sea un hombre no contagiado es de un 32%.
C) Es más probable elegir un hombre contagiado que una mujer contagiada.
D) Si se elige un contagiado, la probabilidad de que sea de sexo masculino es inferior al 35%.
E) La probabilidad de elegir una mujer contagiada o un hombre no contagiado es un 38%.

15. Sean A y B dos eventos, se puede determinar P(B), sabiendo que:

(1) $P(B/A) = 0,8$ y $P(A) = 0,7$
(2) $P(A \cup B) = 0,9$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

16. Para un juego didáctico se construyen fichas rectangulares, cada una de ellas está dividida en dos sectores los cuales tienen dos colores distintos. Si no se considera el orden de los colores, ¿cuántas fichas se pueden construir si se dispone de 10 colores para formarlas?

A) $\binom{10}{2}$

B) $\binom{10}{2} \cdot 2!$

C) $\binom{11}{2}$

D) 10^2

E) 50

17. En un colegio hay dos cuartos medios, el 4° A tiene 28 alumnos y el 4°B tiene 30 alumnos. Si se forma una comisión formada por 4 estudiantes de cuarto medio, la cual debe tener a lo menos tres alumnos del cuarto A y quizás ninguno del cuarto B, ¿cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

A) $\binom{28}{4}$

B) $\binom{28}{3} \cdot 30$

C) $\binom{28}{3} + 30$

D) $\binom{28}{3} \cdot 30 + \binom{28}{4}$

E) $\binom{28}{3} + \binom{28}{4}$

18. Tres hombres y tres mujeres se ordenan en una fila al azar, ¿cuál es la probabilidad de que queden alternados según el sexo?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{10}$

C) $\frac{1}{20}$

D) $\frac{2}{5}$

E) $\frac{1}{360}$

19. Se realiza una encuesta a 80 alumnos universitarios de cuatro carreras, distribuidos tal como se ilustra en la siguiente tabla:

Carrera	Hombres	Mujeres	Total
Ingeniería	12		18
Medicina	16		24
Pedagogía	6		
Derecho	13		22

Si se elige dos de los encuestados al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que ambos sean de ingeniería es $\dfrac{\binom{18}{2}}{\binom{80}{2}}$.

II) La probabilidad de que ambos sean de sexo femenino es $\dfrac{\binom{33}{2}}{\binom{80}{2}}$.

III) La probabilidad de que uno sea de ingeniería y el otro de medicina es $\dfrac{\binom{42}{2}}{\binom{80}{2}}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

20. Una pistola con capacidad para cinco tiros, tiene solo una bala en su cargador, ¿cuál es la probabilidad que si al disparar tres veces la bala salga en el último intento?

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{1}{5}$
E) $\frac{2}{3}$

21. En un colegio los alumnos deben optar obligatoriamente por el taller de física o de química o ambos. Si se elige un alumno al azar la probabilidad de que haya tomado solo el taller de física es un 50%, el que haya tomado química es un 50% y la probabilidad de que no haya tomado ambos talleres es un 87,5%. ¿Cuál es la probabilidad de que solo haya tomado solo química?

A) 12,5%
B) 25%
C) 37,5%
D) 50%
E) 87,5%

22. En un supermercado, los productos tienen un código formado por tres letras y tres números, no necesariamente juntos y no se pueden repetir ni las letras y los números. Si las letras son elegidas del conjunto {a,b,c,d,e} y los números del conjunto {3,5,6,7,8}. ¿Cuántos códigos con las especificaciones anteriores se pueden formar?

A) 60^2

B) $\binom{5}{3}^2$

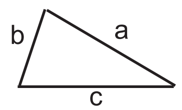
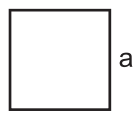
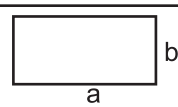
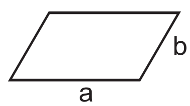
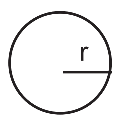
C) $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 3!$

D) $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot 6!$

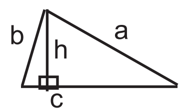
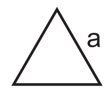
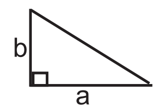
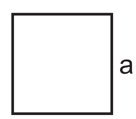
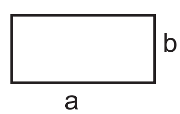
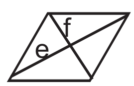
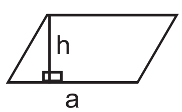
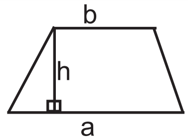
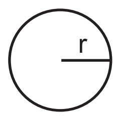
E) $\binom{10}{6} \cdot 6!$

ANEXOS

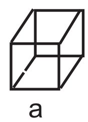
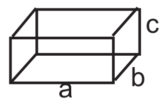
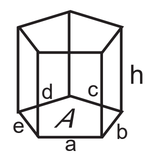
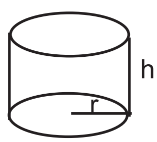
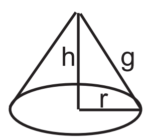
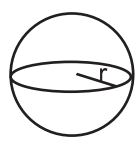
Anexo 1: Perímetro de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	PERÍMETRO
TRIÁNGULO CUALQUIERA		a + b + c
CUADRADO		4a
RECTÁNGULO		2(a + b)
ROMBOIDE		2(a + b)
CIRCUNFERENCIA		$2 \pi r$

Anexo 2: Área de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	ÁREA
TRIÁNGULO CUALQUIERA		$\frac{ch}{2}$
TRIÁNGULO EQUILÁTERO		$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
TRIÁNGULO RECTÁNGULO		$\frac{ab}{2}$
CUADRADO		a^2
RECTÁNGULO		ab
ROMBO		$\frac{ef}{2}$
ROMBOIDE		ah
TRAPECIO		$\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot h$
CÍRCULO		πr^2

Anexo 3: Área y volumen de cuerpos geométricos

NOMBRE	CUERPO	ÁREA	VOLUMEN
CUBO (hexaedro regular)		$6a^2$	a^3
ORTOEDRO (paralelepípedo recto rectangular)		$2ab+2bc+2ac$	abc
PRISMA RECTO (en la fig. un caso especial: prisma de base pentagonal)		$ah+bh+ch+dh+eh + 2A = Ph+2A$ (P= perímetro del polígono basal)	$A\,h$ (A = área del polígono basal)
CILINDRO		$2\pi rh+2\pi r^2$	$\pi r^2 h$
CONO		$\pi rg+\pi r^2$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
ESFERA		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

RESPUESTAS MINIENSAYO

RESPUESTAS MINIENSAYO									
1. B	**2.** E	**3.** B	**4.** C	**5.** E	**6.** E	**7.** A	**8.** E	**9.** B	**10.** E
11. A	**12.** A	**13.** C	**14.** D	**15.** C	**16.** A	**17.** D	**18.** B	**19.** C	**20.** D
21. C	**22.** D								

CLASES CON CONTENIDOS Y EJEMPLOS

Si quieres aprender más, asiste a una clase virtual con el contenido de cada capítulo siguiendo los links o leyendo con tu celular los códigos QR que aquí te presentamos.

Estos códigos corresponden al texto original (Cid, 2019) por lo que los números de las páginas no coinciden con los presentados en este documento.

EJE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA	
ESTADÍSTICA	PROBABILIDADES
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-17/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-18/
COMBINATORIA Y PROBABILIDADES	
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-19/	

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

UCE

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN

Repaso contenidos

MATEMÁTICA
EJE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

IV° medio