Repaso contenidos

MATEMÁTICA

IV° medio

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

UCE
UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN

Repaso contenidos Matemáticas 2020

Material adaptado por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación en base a Cid Figueroa, Eduardo. (2019). *21 temas para aprender y practicar matemática.* Editorial Cid.

Prohibida su reproducción total o parcial.

Prohibida su reproducción total o parcial.

INTRODUCCIÓN

En el contexto actual, el Ministerio de Educación ha asumido desde su inicio como tarea primordial el apoyar a todos los estudiantes, docentes, equipos directivos, sostenedores y apoderados del país de modo que puedan, durante la suspensión de clases y en el retorno a clases, apoyar el desarrollo de los aprendizajes esenciales que nos permitan reducir las brechas educacionales provocadas por la pandemia.

El aprendizaje y el desarrollo del pensamiento matemático es de vital importancia para los estudios de nuestros estudiantes, pues ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas necesarias para desenvolverse en la vida cotidiana. Esta se trabaja sistemáticamente enseñando habilidades y contenidos desde los primeros niveles de educación hasta afianzarse en los niveles superiores.

Dada su relevancia, la Unidad de Currículum y Evaluación pone a disposición para los estudiantes de 4° año de Enseñanza Media este manual que les permitirá repasar y ejercitar de manera autónoma las habilidades y conocimientos adquiridos en Matemática desde séptimo a tercero medio fundamentalmente.

El manual de repaso de Matemática está estructurado de acuerdo con los mismos ejes de las Bases Curriculares de Matemática: Números; Álgebra y Funciones; Geometría y Probabilidades y Estadística. Primero se presenta el repaso de la parte teórica, luego modelos de ejercicios resueltos con sus soluciones y finalmente algunos ejercicios para practicar. Además de 4 miniensayos, uno por cada eje.

Prohibida su reproducción total o parcial.

¿Cómo usar este Manual?

1. Lee la parte teórica y los ejercicios resueltos, no resuelvas las guías de ejercicios, sin antes haber hecho esto.

2. Resuelve la guía de ejercicios del capítulo, aquellos ejercicios que no puedas resolver, déjalos para un segundo intento, no consultes a tu compañero(a) o profesor(a) inmediatamente, o invalidarás algo muy importante en tu proceso de aprendizaje. El esfuerzo que realizas para poder resolver un ejercicio permite que los contenidos, teoremas, propiedades etc., que pasan por tu mente queden más «frescos» y fortalecidos en ella.

   La gran mayoría de los ejercicios que no resuelven los estudiantes no es debido a que no sepan los contenidos o cómo resolver los problemas, sino a que no los recuerdan, por lo tanto, un buen método de preparación es el anterior para ir recordando lo olvidado.

3. Si al resolver un ejercicio notas que te equivocaste, detente a revisar paso a paso donde está tu error, este proceso es muy importante ya que te permite detectar posibles errores de concepto que debes corregir al momento.

4. No es conveniente que resuelvas ensayos sino hasta haber completado por lo menos el capítulo de geometría, no sacarás mucho provecho si no tienes todavía en tu mente una buena provisión de contenidos.

5. En general se ha procurado que los ejercicios de cada capítulo estén «graduados», por lo tanto, no deberías tener problemas en los primeros ejercicios de cada guía. Si los tuvieras solicita apoyo de tu profesor ya que requerirás más ayuda que la que te pueda brindar este texto.

Prohibida su reproducción total o parcial.

ÍNDICE

EJE NÚMEROS

1	NÚMEROS REALES	7
2	POTENCIAS Y RAÍCES	24
3	LOGARITMOS	35
	MINIENSAYO 1	46

EJE ÁLGEBRA Y FUNCIONES

4	OPERATORIA ALGEBRAICA	55
5	ECUACIÓN Y FUNCIÓN CUADRÁTICA	67
6	FUNCIONES	87
7	TIPOS DE FUNCIONES Y FUNCIÓN INVERSA	104
8	DESIGUALDADES E INECUACIONES	126
9	PLANTEO DE PROBLEMAS	138
	MINIENSAYO 2	155

EJE GEOMETRÍA

10	TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS	164
11	GEOMETRÍA DE PROPORCIÓN	181
12	VECTORES	200
13	GEOMETRÍA ANALÍTICA	210
	MINIENSAYO 3	232

EJE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

14	ESTADÍSTICA	238
15	PROBABILIDADES	254
16	COMBINATORIA Y PROBABILIDADES	283
	MINIENSAYO 4	299

ANEXOS

ANEXO 1: Perímetro de figuras planas	307
ANEXO 2: Área de figuras planas	308
ANEXO 3: Área y volumen de cuerpos geométricos	309
Respuestas Miniensayos	310
Clases con contenidos y ejemplos	311

Prohibida su reproducción total o parcial.

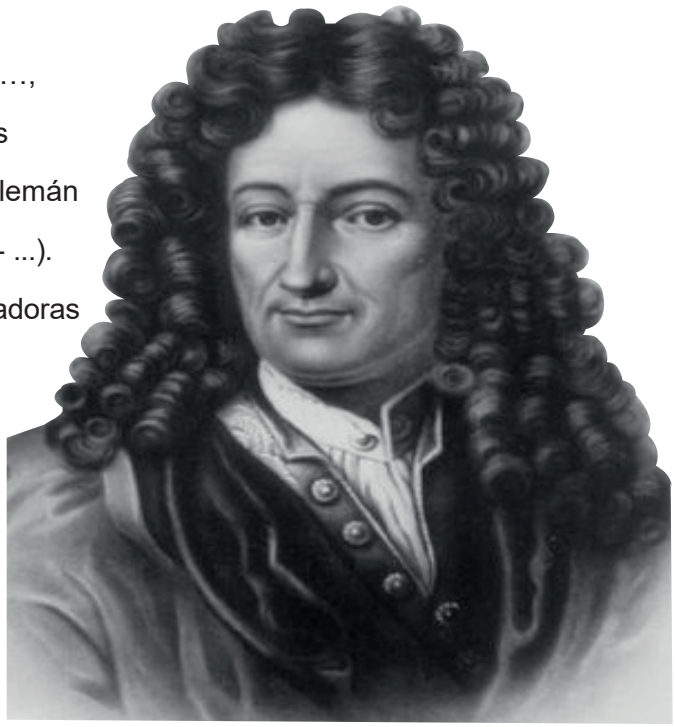
EJE

NÚMEROS

Capítulo
1

NÚMEROS REALES

Los números irracionales como π = 3,1415926…, se pueden aproximar por una serie de números racionales. Por ejemplo, Leibniz, matemático alemán (1646-1716) descubrió que $\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...)$. Este tipo de aproximaciones permite que calculadoras científicas y computadores puedan trabajar con números que tengan infinitas cifras decimales.



CONCEPTOS CLAVES

- Números racionales
- Números irracionales
- Conversión a fracción
- Números reales
- Aproximaciones

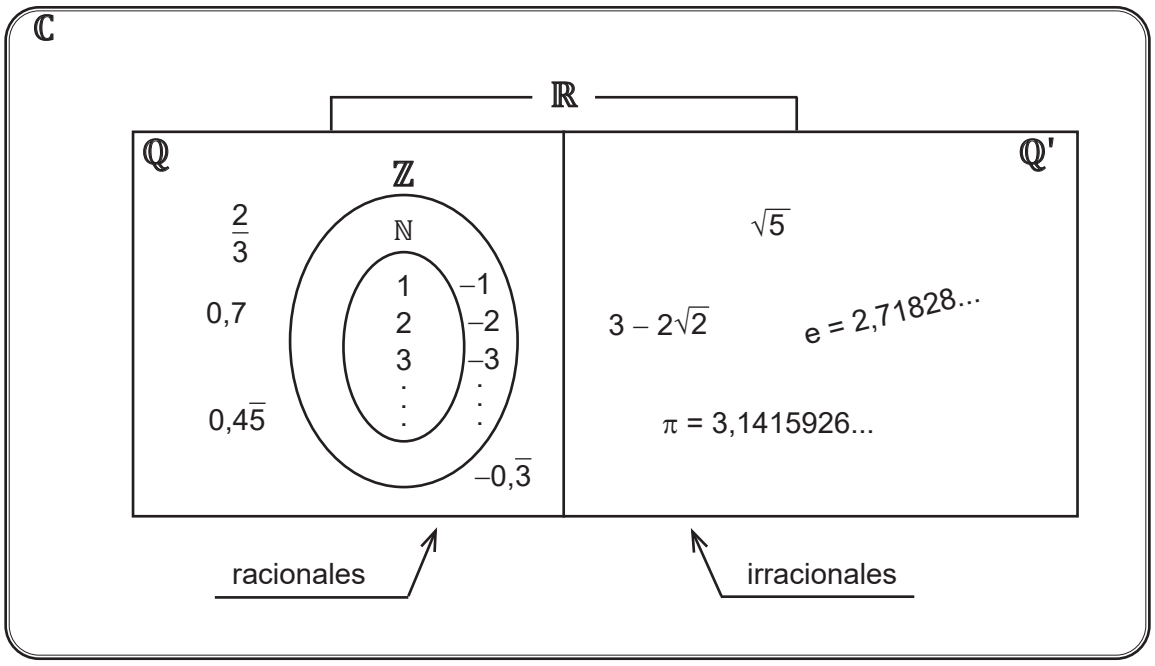
Prohibida su reproducción total o parcial.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Los conjuntos numéricos más importantes son los siguientes:

CONJUNTO NUMÉRICO	DESCRIPCIÓN
Números naturales	$\mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$
Números enteros	$\mathbb{Z} = \{...-3,-2,-1,0,1,2,3...\}$
Números racionales	Son aquellos números que se pueden expresar como fracción, como los números decimales finitos, periódicos, semiperiódicos y enteros. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$
Números irracionales	Son aquellos números que **no** se pueden expresar como fracción, como $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3} - 1$, π, etc., se caracterizan por tener infinitas cifras decimales sin período, este conjunto numérico se designa con la letra $\mathbb{Q}'$ o I.
Números reales	Se designa con la letra $\mathbb{R}$ y es la unión entre los racionales e irracionales. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$
Números complejos	Son de la forma a+bi donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria, si b=0 se obtiene un número real, por lo tanto los complejos incluyen a los números reales. $\mathbb{C} = \{ z = a + bi \ / \ a \text{ y } b \in \mathbb{R} \}$

Resumiendo, tenemos el siguiente esquema:



Observación:
No son números reales las raíces de índice par de negativos, como $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-16}$, etc., ni tampoco cuando se divide por cero.

Prohibida su reproducción total o parcial.

CONVERSIÓN DE DECIMAL A FRACCIÓN

En los racionales los decimales pueden ser finitos, infinitos periódicos o infinitos semiperiódicos, a continuación veremos cómo se pueden convertir a fracción:

- **Decimal finito**
  Se escribe en el numerador el número que forman sus cifras sin considerar la coma y en el denominador van un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga.
  Ejemplo: $0{,}32 = \frac{32}{100}$; $1{,}283 = \frac{1283}{1000}$.

- **Decimal infinito periódico**
  Si no tiene entero, se escribe en el numerador el número que forman sus cifras sin la coma y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas tenga.
  En el caso que tenga entero, se coloca en el numerador la resta entre el número que forman todas sus cifras (sin la coma) con el entero y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas tenga.
  Ejemplo: $0{,}\overline{78} = \frac{78}{99}$; $1{,}\overline{45} = \frac{145 - 1}{99} = \frac{144}{99} = \frac{16}{11}$.

- **Decimal infinito semiperiódico**
  Si no tiene entero, se escribe en el numerador la resta entre el número que forman sus cifras (sin la coma) con el anteperíodo y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.
  En el caso que tenga entero, se coloca en el numerador la resta entre el número que forman todas sus cifras (sin la coma) con el número que forman las cifras que no tienen período y en el denominador van tantos nueves como cifras periódicas seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.
  Ejemplo: $0{,}3\overline{5} = \frac{35 - 3}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$; $4{,}2\overline{8} = \frac{428 - 42}{90} = \frac{386}{90} = \frac{193}{45}$.

PROPIEDAD DE CLAUSURA

La propiedad de clausura de un conjunto con respecto a una operación, se refiere a que si se toman dos elementos de un conjunto y se realiza una operación, el resultado que se obtiene está en el mismo conjunto.
Las cuatro operaciones básicas en los números reales tienen la propiedad de clausura, si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos dos reales obtenemos un número real, a excepción de la división por cero que no está definida.
Los números racionales también tienen la propiedad de clausura para sus cuatro operaciones, excepto al igual que en el caso anterior, la división por cero.
Los números irracionales no tienen la propiedad de clausura en ninguna de sus cuatro operaciones.

Ejemplos: $2 - \sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ son irracionales, pero si los sumamos resulta 2 que es racional.
$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ y $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ son irracionales, pero si los multiplicamos, obtenemos $(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$, que es racional, etc.

Al operar un racional con un irracional, siempre se obtiene un irracional, con dos excepciones, si se multiplica por cero se obtiene cero (que es racional) y al dividir por cero, lo que no está definido.

Prohibida su reproducción total o parcial.

APROXIMACIONES DE NÚMEROS REALES

Existen diversas formas de aproximar un número, esto puede ser por redondeo, truncamiento o aproximar por defecto o por exceso.

- **Redondeo**
  Se considera la cantidad de cifras indicada y se observa si la cifra que sigue es superior o no a cinco, en el caso en que esta sea menor que cinco se dejan las cifras que teniamos y si es mayor o igual que cinco se aumenta en uno la última cifra.
  Ejemplo: redondear a la milésima el número 3,2568
  Como redondeamos a las milésimas consideramos tres cifras decimales 3,256, como la cifra que viene es mayor que 5 (es un 8), implica que la última cifra se aumenta en 1, por lo tanto la aproximación a la milésima es 3,257.

- **Truncamiento**
  En este caso solo se consideran las cifras pedidas sin importar las cifras que vienen a continuación.
  Ejemplo: truncar a las diezmilésimas es número 1,467897
  Si estamos considerando hasta la diezmilésima, esto significa considerar hasta la cuarta cifra decimal y no considerar las cifras restantes, por lo que nos queda 1,4678.

- **Por defecto**
  Este tipo de aproximación significa dejar un número con la cantidad de cifras pedidas, menor que el número dado, pero lo más cercano posible.
  Ejemplo: aproximar por defecto a las milésimas el número 3,67864
  A las milésimas significa considerar tres cifras decimales, como el número tiene que ser menor que el número dado, entonces tiene que ser 3,678.

- **Por exceso**
  Este tipo de aproximación significa dejar un número con la cantidad de cifras pedidas, mayor que el número dado, pero lo más cercano posible.
  Ejemplo: aproximar por exceso a las diezmilésimas el número 3,67864
  A las diezmilésimas significa considerar cuatro cifras decimales, como el número tiene que ser mayor que el número dado, entonces tiene que ser 3,6787.

ORDEN EN LOS NÚMEROS REALES

Esto se traduce que si tenemos un conjunto de números reales, siempre podemos ordenarlos, para ello existen diversas técnicas, algunas de ellas las veremos a continuación.
Si queremos comparar dos fracciones podemos multiplicar cruzado para compararlas:
$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leftrightarrow ad < bc$ (siempre que $b,d > 0$) en el caso en que sean más de dos fracciones podemos proceder como se ilustran en los primeros dos ejemplos.

Prohibida su reproducción total o parcial.

Ejemplo 1

Ordenar de menor a mayor las fracciones

$\frac{9}{20}; \frac{2}{5}; \frac{3}{8}$

Para poder compararlas podemos intentar igualar denominadores, para ello calculamos el m.c.m. entre ellos y amplificamos las fracciones para que todas queden con igual denominador.

En este caso, el m.c.m. entre 8, 5 y 20 es 40, por lo tanto amplificamos para que todas las fracciones queden con denominador 40:

$\frac{9}{20} = \frac{9 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{18}{40}; \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{16}{40}$ y $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{15}{40}$

Como $\frac{15}{40} < \frac{16}{40} < \frac{18}{40}$, se obtiene que $\frac{3}{8} < \frac{2}{5} < \frac{9}{20}$.

En el caso en que fuese complicado igualar denominadores, se puede intentar igualar numeradores, o bien convertir las fracciones a decimal.

Ejemplo 2

Ordenar los números: $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$, y $0,4\overline{2}$

Si convertimos a fracción el decimal $0,4\overline{2}$, obtenemos $0,4\overline{2} = \frac{42-4}{90} = \frac{38}{90} = \frac{19}{45}$. En este caso el tratar de igualar numeradores o denominadores entre las fracciones: $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}$ y $\frac{19}{45}$ es tedioso, por lo tanto lo más aconsejable es convertir a número decimal.

$\frac{5}{12} \leftrightarrow 5 : 12 = 0,41666...$; $\frac{3}{8} \leftrightarrow 3 : 8 = 0,375$ y $\frac{19}{45}$ sabíamos que era $0,4\overline{2}$.

Como $0,375 < 0,41666\ldots < 0,4\overline{2}$, tenemos que $\frac{3}{8} < \frac{5}{12} < 0,4\overline{2}$.

Ejemplo 3

Ordenar los números reales: $P = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $Q = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ y $R = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, de menor a mayor.

En este caso podemos intentar racionalizar primero las expresiones dadas.

$P = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2}{2}$; $Q = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{1} = 2+\sqrt{2}$

$R = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-1} = 3-2\sqrt{2}$

Para poder ordenar $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$, $2+\sqrt{2}$ y $3-2\sqrt{2}$, se puede reemplazar $\sqrt{2}$ por 1,4 y comparar:

$\frac{\sqrt{2}+2}{2} \approx \frac{1,4+2}{2} = \frac{3,4}{2} = 1,7$; $2+\sqrt{2} \approx 3,4$ y $3-2\sqrt{2} \approx 3-2 \cdot 1,4 = 0,2$, por lo tanto $R < P < Q$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuántas veces cabe $32 \cdot 10^{-7}$ en $1{,}28 \cdot 10^{-6}$?

Solución:
Debemos efectuar la división $\frac{1{,}28 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-7}}$, para ello transformaremos $1{,}28 \cdot 10^{-6}$

Tenemos que $1{,}28 \cdot 10^{-6} = 128 \cdot 10^{-8}$, entonces $\frac{1{,}28 \cdot 10^{-8}}{32 \cdot 10^{-7}} = \frac{128 \cdot 10^{-8}}{32 \cdot 10^{-7}}$, simplificando 128

con 32 y restando los exponentes de 10^{-8} y 10^{-7}, obtenemos $4 \cdot 10^{-8-(-7)} = 4 \cdot 10^{-1} = 0{,}4$.

2. Una aproximación de $\sqrt{5}$ es 2,236067977, utilizando este valor calcula $\sqrt{20}$ redondeado a la milésima.

Solución:
Tenemos que $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$, si multiplicamos $2 \cdot 2{,}236067977$ obtenemos 4,47212…, observamos que la cuarta cifra es un uno, como esta cifra es menor que 5, el redondeo a la milésima resulta ser 4,472.

3. Si a y b son dígitos, ¿cuál de las siguientes fracciones corresponde a $0{,}a\overline{b} + 0{,}b\overline{a}$?

Solución:
Si $0{,}a\overline{b}$ lo convertimos a fracción tenemos $0{,}a\overline{b} = \frac{\boxed{ab} - a}{90}$, donde $\boxed{ab}$ representa un número

de dos cifras, es decir equivale a $10a + b$, por lo tanto $0{,}a\overline{b} = \frac{\boxed{ab} - a}{90} = \frac{10a + b - a}{90} = \frac{9a + b}{90}$,

por otro lado $0{,}b\overline{a} = \frac{\boxed{ba} - a}{90} = \frac{10b + a - b}{90} = \frac{a + 9b}{90}$,

entonces $0{,}b\overline{a} + 0{,}b\overline{a} = \frac{a + 9b}{90} + \frac{9a + b}{90} = \frac{10a + 10b}{90} = \frac{a + b}{9}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

4. Sean a y b enteros mayores que 1, con a > b, entonces al ordenar las fracciones

$\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a}{b-1}$, $\frac{a+1}{b-1}$, de menor a menor resulta:

Solución:

Como a > b > 1, tenemos que $\frac{a}{b} > 1$ y $\frac{b}{a} < 1$, por lo tanto $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$ ahora si comparamos

$\frac{a}{b}$ con $\frac{a}{b-1}$, tenemos que $\frac{a}{b-1} > \frac{a}{b}$, ya que $\frac{a}{b-1}$ tiene un denominador menor y los

numeradores son iguales.

Por otro lado $\frac{a+1}{b-1} > \frac{a}{b-1}$, ya que el numerador es mayor y los denominadores son iguales.

Entonces $\frac{b}{a} < \frac{a}{b} < \frac{a}{b-1} < \frac{a+1}{b-1}$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. $(-3)^2 - (-2)^2 - (-1)^2$:

A) -14
B) 4
C) 6
D) 12
E) 14

2. $\dfrac{\frac{3}{5} - \frac{1}{3}}{2 + \frac{2}{5}} =$

A) 9
B) $\frac{1}{18}$
C) $\frac{16}{25}$
D) $\frac{1}{3}$
E) $\frac{1}{9}$

3. La cuarta parte de $0,\overline{2}$ es :

A) $0,0\overline{4}$
B) $0,05$
C) $0,0\overline{5}$
D) $0,\overline{5}$
E) $0,\overline{8}$

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$

A) -6
B) -3
C) 4
D) 6
E) 8

5. $(0,\overline{2})^{-1} =$

A) 4
B) $4,5$
C) $4,\overline{5}$
D) $4,9$
E) 5

6. Si $x = 0,24$, $y = 5 \cdot 10^4$ y $z = 12000$, entonces $\frac{xy}{z} =$

A) 10^{-8}
B) 10^{-6}
C) 10^{-4}
D) 10^{0}
E) 10^{-2}

7. De los siguientes números reales, ¿cuál es el menor?

A) $38 \cdot 10^{-3}$
B) $390 \cdot 10^{-4}$
C) $4200 \cdot 10^{-6}$
D) $0,4 \cdot 10^{-3}$
E) $0,41 \cdot 10^{-2}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

8. Las cinco milésimas partes de 62,5 aproximado por defecto a las milésimas es:

A) 0,312
B) 0,313
C) 0,310
D) 3,125
E) 3,124

9. $\left(\frac{0,05}{5}\right)^{-1} =$

A) −100
B) 10
C) 100
D) 1.000
E) 10.000

10. El resultado de $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{3,5}$, es un número:

A) entero.
B) decimal finito.
C) decimal periódico.
D) decimal semiperiódico.
E) irracional.

11. En la recta numérica, ¿cuál de los siguientes números está más cerca del cero?

A) 0,25
B) $-0,2\overline{1}$
C) −0,3
D) 0,23
E) $0,\overline{2}$

12. Si el producto 0,24 · 0,75 se divide con $\frac{2}{3}$ resulta :

A) 0,03
B) 0,5
C) 0,12
D) 0,27
E) 0,42

13. Se puede determinar que la expresión $\frac{a + b}{c}$, con a, b y c números enteros y c≠0, representa un número entero positivo, si:

(1) c(a+b)>0
(2) a y b son múltiplos de c.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

14. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a un número racional **NO** entero?

A) $(0,2)^{-3}$

B) $3,\overline{9}$

C) $\frac{0,0\overline{2}}{0,2}$

D) $\frac{0,\overline{32}}{0,\overline{04}}$

E) $\frac{0,8\overline{3}}{0,1\overline{6}}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

15. ¿Cuál de los siguientes números **NO** está entre $1,0\overline{6}$ y 1,1?

A) $\frac{49}{45}$

B) $\frac{27}{25}$

C) $1\frac{1}{11}$

D) $\frac{267}{250}$

E) $1\frac{4}{33}$

16. Los tres primeros atletas en una carrera de 100 metros planos, fueron Pedro, Felipe y Andrés los cuales obtuvieron las siguientes marcas: 12,2", 12,02" y 13,1" respectivamente. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Felipe fue el vencedor.
II) Pedro llegó después de Andrés.
III) Felipe llegó 18 centésimas de segundo antes que Pedro.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

17. La superficie de nuestro país sin considerar el territorio antártico es aproximadamente de 755.000 km².
Si una hectárea es 10.000 m², entonces ¿cuántos millones de hectáreas tiene la superficie de nuestro país?

A) 7550
B) 755
C) 75,5
D) 7,55
E) 0,755

18. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones da(n) como resultado un número entero?

I) $(10^{-1} + 10^{-2})^{-1}$

II) $\frac{10^{-2} + 1}{10^{-4} + 10^{-2}}$

III) $\frac{10^{-4} + 10^{-3}}{10^{-5}}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

19. $a = 0,23 \cdot 10^{-3}$; $b = 5 \cdot 10^{3}$; $c = 0,3 \cdot 10^{-5}$, entonces ab + bc redondeado a la centésima es:

A) 1,16
B) 1,17
C) 11,51
D) 11,52
E) 0,17

Prohibida su reproducción total o parcial.

20. La población de algunos países de América del Sur se muestra en la siguiente tabla:

País	Población
Argentina	43823000
Bolivia	11066000
Chile	18286000
Perú	31660000

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La diferencia entre los dos más poblados es superior a los $1{,}215 \cdot 10^7$ habitantes.
II) La suma entre los dos menos poblados es superior a $29{,}4 \cdot 10^6$ habitantes.
III) Entre todos superan los $1{,}048 \cdot 10^8$ habitantes.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

21. En una cierta mina se extrajeron en cierto mes $3{,}7 \cdot 10^4$ kilos de mineral y al siguiente se extrajeron $4{,}2 \cdot 10^5$ kilos.
Si una tonelada son 1000 kg, ¿qué variación hubo, medido en toneladas, entre lo extraído entre ambos meses?

A) 5
B) 38,3
C) 383
D) 416,3
E) 383000

22. En su viaje de vacaciones, una persona recorrerá un trayecto en tres días.
Si el primer día recorrió $\frac{2}{5}$ del trayecto y el segundo día los $\frac{3}{4}$ de lo que recorrió primer día, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El tercer día anduvo más que en el primero.
II) Entre el primer y segundo día recorrió el 70% del trayecto.
III) El segundo y tercer día anduvo lo mismo.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

23. ¿Para cuál(es) de los siguientes números reales, su raíz cuadrada es un número racional?

I) $16{,}9 \cdot 10^{-5}$
II) 1.960.000
III) $\frac{196 \cdot 10^{-3}}{169 \cdot 10^{-7}}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

24. Si el producto $0{,}22 \cdot 0{,}16$ se redondea a dos decimales resulta:

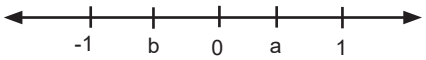
A) 0,02
B) 0,03
C) 0,04
D) 0,05
E) 0,35

Prohibida su reproducción total o parcial.

25. Si el producto $0,22 \cdot 0,16$ se trunca a dos decimales resulta:

A) 0,02
B) 0,03
C) 0,04
D) 0,05
E) 0,35

26. Sean a y b dos números racionales que se ubican en la recta numérica, tal como se muestra en la siguiente figura:



¿Cuál(es) de las siguientes desigualdades es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $a - b < 2$

II) $-1 < a + b < 1$

III) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 2$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

27. Frecuentemente una aproximación de π en las calculadoras científicas es 3,141592654; si a y b son respectivamente las aproximaciones por exceso a la milésima y por defecto a la centésima de este valor, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $a > b$

II) $a - b = 500^{-1}$

III) $a + b < 6,28$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

28. Si $a = 0,2 \cdot 10^{-3}$ y $b = 15 \cdot 10^{-7}$.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **FALSA(S)**?

I) $a \cdot b = 3 \cdot 10^{-10}$

II) $a^2 + b = 1,54 \cdot 10^{-6}$

III) $\frac{b}{a} = 7,5 \cdot 10^{-11}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Solo II y III

29. Si $P = 0,\overline{24}$, $Q = \frac{121}{500}$ y $R = \frac{11}{45}$, entonces al ordenarlos de menor a mayor, resulta:

A) $P < Q < R$
B) $P < Q < R$
C) $Q < R < P$
D) $R < P < Q$
E) $Q < P < R$

30. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $0,\overline{32} + 0,\overline{8} = 1,\overline{12}$

II) $0,\overline{2} - 0,1\overline{5} = 0,0\overline{6}$

III) $0,3\overline{6} \cdot 0,\overline{45} = 0,1\overline{6}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

31. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El doble de $0,0\overline{5}$ es $0,\overline{1}$.
II) El inverso multiplicativo de $0,\overline{6}$ es 1,5.
III) El triple de $0,2\overline{3}$ es 0,7.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

32. Sean m y n números enteros, se puede determinar que $m^2 - n^2$ es divisible por 6 si se sabe que:

(1) m + n es múltiplo de 3.
(2) m – n es par.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

33. Si a y b son dígitos, entonces $\frac{0,a\overline{b}}{0,\overline{b}} =$

A) $\frac{a - b}{10}$

B) $\frac{10a - b}{10b}$

C) $\frac{10a + b}{10b}$

D) $\frac{11a + b}{100b}$

E) $\frac{9a + b}{10b}$

34. Si a y b son dígitos, ¿cuál de las siguientes fracciones es siempre igual al resultado de $0,a\overline{b} - 0,\overline{a}$?

A) $\frac{b - a}{9}$

B) $\frac{b - a}{90}$

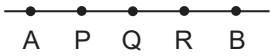
C) $\frac{a - b}{90}$

D) $\frac{a - b}{9}$

E) $\frac{b - a}{900}$

35. En la figura, el punto A se ubica en el decimal 0,27 y el B en el 0,32. Si el trazo $\overline{AB}$ se ha dividido en cuatro partes iguales por los puntos P, Q y R. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) P se ubica en el número real $2,825 \cdot 10^{-1}$.
II) Q se ubica en el número real $2,95 \cdot 10^{-1}$.
III) R se ubica en el número real $3,075 \cdot 10^{-1}$.



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

36. Sean $x = \frac{0{,}0025}{200}$; $y = \frac{25 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{3}}$; $z = \frac{0{,}25}{20000}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $x < z < y$
B) $y < z < x$
C) $z < y < x$
D) $x = y = z$
E) Ninguna de ellas.

37. Se tienen los números reales: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$y = \frac{2}{\sqrt{2} - 1}$; $z = \frac{4}{\sqrt{2} + 1}$; $w = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El mayor es y.
II) $y > z > x$.
III) $w > z > x$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

38. Sea a un número real, se puede determinar que a es racional, sabiendo que:

(1) $(a + 2)^2 - (a - 2)^2$ es racional.

(2) $\frac{a + 2}{a - 2}$ es un racional distinto de 1.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

39. Si n es un número entero, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones corresponden a números racionales?

I) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^n \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})^n$
II) $\left((\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}\right)^n$
III) $(\sqrt{2} - 1)^{2n} \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

40. ¿Cuál(es) de los siguientes números corresponden a **números racionales**?

I) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$

II) $(1 + \sqrt{2})^2$

III) $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{16}}}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

41. Si m y n son números enteros, se puede determinar que m+n es par, sabiendo que:

(1) $m - n$ es par.
(2) $m^2 + 2mn + n^2$ es par.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

42. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si el perímetro de un triángulo equilátero es racional, entonces las medidas de sus lados son racionales.
II) Siempre el área de una circunferencia es irracional.
III) Si la longitud de el lado de un cuadrado es irracional, entonces su área es racional.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Ninguna de ellas.

43. Si $A = 0{,}2 \cdot 10^{-2}$; $B = 200 \cdot 10^{-4}$ y $C = 2000 \cdot 10^{-5}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $B = 10A$

II) $B = C$

III) $\frac{A}{B} = \frac{C}{A}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

44. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) siempre verdadera(s)?

I) El promedio entre dos irracionales es irracional.
II) La diferencia entre dos racionales es racional.
III) Si la suma de dos números es racional, la diferencia también.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

45. Si $P = \sqrt{8}$, $Q = \sqrt{32}$ y $R = \sqrt{2}$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones corresponde(n) a números racionales?

I) $\frac{P + Q}{R}$

II) $\frac{PQ}{R}$

III) PQR

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

46. Si q y r son múltiplos de p, con $q \neq r$ y $p \neq 0$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) siempre números enteros?

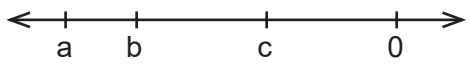
I) $\frac{q - r}{p}$

II) $\frac{q^2 + r^2}{p}$

III) $\frac{q + r}{q - r}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

47. a, b y c son números racionales, cuya ubicación en la recta numérica se muestra en la siguiente figura:



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $a^2 < b^2 < c^2$

II) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

III) $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

48. Sean a y b dos números enteros y distintos, se puede determinar que la solución de la ecuación en x, ax-bx=a+b es un número entero negativo, sabiendo que:

(1) $(a - b)$ es un divisor de $(a+b)$.
(2) $a^2 - b^2 < 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

49. Si $\alpha = \frac{x + y}{x - y}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $x \neq y$, entonces $\alpha > 1$.
II) Si $y < 0 < x$, entonces $\alpha < 1$.
III) Si $x < y < 0$, entonces $\alpha > 1$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

RESPUESTAS CAPÍTULO 1									
1. B	**2.** E	**3.** C	**4.** D	**5.** B	**6.** D	**7.** D	**8.** A	**9.** C	**10.** A
11. B	**12.** D	**13.** C	**14.** C	**15.** E	**16.** D	**17.** C	**18.** D	**19.** B	**20.** D
21. C	**22.** D	**23.** E	**24.** C	**25.** B	**26.** E	**27.** C	**28.** C	**29.** E	**30.** D
31. E	**32.** C	**33.** E	**34.** B	**35.** E	**36.** D	**37.** E	**38.** D	**39.** E	**40.** C
41. D	**42.** A	**43.** C	**44.** B	**45.** A	**46.** C	**47.** D	**48.** C	**49.** D	

Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
2

POTENCIAS Y RAÍCES

$r5$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$

El símbolo de raíz cuadrada lo utilizó por primera vez en 1525 el matemático polaco Cristoph Rudolff. En un principio era una “r” de “root” (raíz en inglés) que con el transcurso de los años se fue transformando.

CONCEPTOS CLAVES

- Base y exponente
- Racionalización
- Conversión entre potencia y raíz

Prohibida su reproducción total o parcial.

DEFINICIONES

Definición de potencia

Si **a** es un número real y **n** es un número entero positivo, entonces la potencia a^n se define como el producto a · a · a · ... · a (n – veces).

También se define $a^0 = 1$ y $a^{-1} = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$.

Definición de potencia de exponente racional.
Una potencia de exponente fraccionario es equivalente a una raíz:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

PROPIEDADES

1. Producto de potencias de igual base

$A^m \cdot A^n = A^{m+n}$

2. División de potencias de igual base

$\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$

3. Potencia de potencia

$(A^n)^m = A^{nm}$

4. Producto de potencias de igual exponente

$A^n \cdot B^n = (AB)^n$

5. División de potencias de igual exponente

$\frac{A^n}{B^n} \left(\frac{A}{B}\right)^n$

6. Igualdad de potencias

$A^n = B^n \rightarrow A = B$ $(\text{con } A \neq 0, A \neq 1, B \neq 0, B \neq 1)$

7. Eliminación de raíz

$\sqrt[n]{A^n} = |A|$, en el caso que A > 0, se tiene que $\sqrt[n]{A^n} = A$

8. Producto de raíces de igual índice

$\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{AB}$

9. División de raíces de igual índice

$\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$

10. Amplificación y simplificación de índice con exponente

$\sqrt[nm]{A^{mp}} = \sqrt[n]{A^p}$; $\sqrt[n]{A^p} = \sqrt[nm]{A^{mp}}$

11. Raíz de raíz

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{A}} = \sqrt[nm]{A}$

12. Ingreso de factor dentro de una raiz

$A \cdot \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A^n \cdot B}$ (A > 0 si A es par)

(*) Se entenderá la validez de las propiedades siempre que las raíces existan, es decir están definidas en los reales.

Prohibida su reproducción total o parcial.

RACIONALIZACIÓN

La racionalización consiste en eliminar las raíces que están en el denominador de una expresión fraccionaria. Veremos acá solo los casos más utilizados.

A) En el denominador aparece solo una raíz cuadrada y no hay adiciones ni sustracciones. Para eliminar la raíz del denominador, se amplifica por la misma raíz que aparece.

Ejemplo:
Racionalizar $\frac{4}{\sqrt{8}}$

Amplificamos la fracción por $\sqrt{8}$.

$$\frac{4 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

B) En el denominador aparecen adiciones y sustracciones donde uno o ambos términos son raíces cuadradas.
En este caso, se amplifica la fracción de modo de formar una suma por su diferencia.

Ejemplo:
Racionalizar $\frac{9}{3 - \sqrt{3}}$

Amplificamos la fracción por $3 + \sqrt{3}$ para formar una suma por su diferencia.

$$\frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3}) \cdot (3 + \sqrt{3})} = \frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3})}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{9 \cdot (3 + \sqrt{3})}{6} = \frac{3 \cdot (3 + \sqrt{3})}{2}$$

C) En el denominador aparece solo una raíz de índice superior a dos y no hay adiciones ni sustracciones. Para eliminar la raíz del denominador, se amplifica por una raíz del mismo índice de la que aparece, con un exponente tal que al sumar con el exponente de la raíz que aparece resulte un múltiplo del índice.

Ejemplo:
Racionalizar $\frac{10}{\sqrt[3]{2^4}}$

Amplificamos la fracción por $\sqrt[3]{2^2}$, así al multiplicar ambas raíces se eliminará la raíz que aparece.

$$\frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^4} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2^2} = \frac{5 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2}$$

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. $\dfrac{3^{27} - 3^{25}}{2^{29} - 2^{27}} =$

Solución:

Cuando se tiene una suma o una resta de potencias de igual base, se debe factorizar por la menor potencia.
En la diferencia $3^{27} - 3^{25}$, se factoriza por factor por 3^{25}, entonces nos queda, $3^{25} \cdot (3^2 - 1)$.
En la diferencia que se ubica en el denominador, factorizamos por 2^{27}, entonces resulta $2^{27} \cdot (2^2 - 1)$, por lo que la fracción dada queda de la forma:

$$\frac{3^{27} - 3^{25}}{2^{29} - 2^{27}} = \frac{3^{25}(3^2 - 1)}{2^{27}(2^2 - 1)} = \frac{3^{25} \cdot 8}{2^{27} \cdot 3} = \frac{3^{25} \cdot 2^3}{2^{27} \cdot 3} = \frac{3^{25} \cdot 2^3}{3 \cdot 2^{27}} = \frac{3^{24}}{2^{24}}, \text{ o bien } \left(\frac{3}{2}\right)^{24} \text{ (prop. 5)}$$

2. $\dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} =$

Solución:

Como las raíces que aparecen tienen distinto índice, se pueden igualar amplificando el índice con el exponente (prop. 10), igualando todos los índices a su m.c.m que es 6:
En $\sqrt[3]{2^1}$, se amplifica el índice y el exponente por 2, $\sqrt[3]{2^1} = \sqrt[6]{2^2}$, en $\sqrt{2}$ se amplifican por 3, $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3}$.

Por lo que la expresión dada es equivalente a: $\dfrac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}}$, por propiedades 8 y 9:

$\dfrac{\sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^2 \cdot 2^3}{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2}}$, por prop. 2: $\sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2}} = \sqrt[6]{2^4}$, simplificando el índice y el exponente, prop.10

resulta $\sqrt[3]{2^2}$.

3. Si $m > 0$ y $m > n$, entonces $\sqrt{4m^2 - 4mn + n^2} - \sqrt{n^2 - 2mn + m^2} =$

Solución:

La expresión $\sqrt{4m^2 - 4mn + n^2}$ se puede poner de la forma: $\sqrt{(2m - n)^2}$, como $m > 0$ y $m > n$, se tiene que $2m > n$, por lo que $2m - n > 0$, por prop. 7; $\sqrt{(2m - n)^2} = 2m - n$.
La expresión $\sqrt{n^2 - 2mn + m^2}$ es equivalente a $\sqrt{(n - m)^2}$ pero $m > n$, por lo que $n - m < 0$,
por prop. 7, $\sqrt{(n - m)^2} = |n - m| = m - n$.
Entonces $\sqrt{4m^2 - 4mn + n^2} - \sqrt{n^2 - 2mn + m^2} = (2m - n) - (m - n) = 2m - n - m + n = m$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. $3^3 + 3^3 + 3^3 =$

A) 3^4
B) 3^5
C) 3^9
D) 9^3
E) 9^9

2. $\sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8} =$

A) 0
B) $\sqrt{24}$
C) $6\sqrt{2}$
D) $\sqrt{40}$
E) $\sqrt{60}$

3. $2^{10} + 2^{11} =$

A) 2^{21}
B) 2^{22}
C) 4^{21}
D) 6^{10}
E) $3 \cdot 2^{10}$

4. $\dfrac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{3}} =$

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 16

5. $\dfrac{\sqrt{2020}}{\sqrt{0{,}2020}} =$

A) 10^4
B) 10^2
C) 10^{-2}
D) 10^{-1}
E) 10

6. $(0{,}00036)^{-3} : (6000)^{-3} =$

A) $6^{-3} \cdot 10^6$
B) $6^{-3} \cdot 10^{12}$
C) $6^{-3} \cdot 10^{-24}$
D) $6^{-3} \cdot 10^{24}$
E) $6^{-9} \cdot 10^{-24}$

7. Sean los números: $a = \sqrt{2}$; $b = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $c = 1{,}4$.
Al ordenarlos de menor a mayor, resulta:

A) c – b – a
B) a – b – c
C) a – c – b
D) b – a – c
E) b – c – a

8. $(\sqrt{2} - 1)^2 - (1 + \sqrt{2})^2 =$

A) $-4\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{2}$
C) $\sqrt{2}$
D) 2
E) 0

Prohibida su reproducción total o parcial.

9. $\frac{\sqrt{20} + \sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$

A) 5
B) 7
C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{13}$
E) $2 + 3\sqrt{5}$

10. $\frac{2^4 + 2^5}{2^6 + 2^7} =$

A) 2^{-4}
B) 2^{-2}
C) 2^{-1}
D) 2^2
E) 2^3

11. Se puede determinar la potencia a^n, con a y n racionales y $a \neq 0$, si se sabe que:

(1) $a^{-2n} = 9$
(2) $a^{3n} = -\frac{1}{27}$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

12. $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} =$

A) $1 + \sqrt{2}$
B) $\frac{1}{2}$
C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$
E) $-\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$

13. El resultado de $\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - 1}$ es un número real que está entre:

A) 1 y 2
B) 2 y 3
C) 3 y 4
D) 4 y 5
E) 5 y 6

14. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})^4 =$

A) $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
B) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$
C) $\sqrt{30}$
D) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$
E) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

15. Si $P = \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}}$, entonces $P^2 =$

A) 4
B) 8
C) 14
D) 16
E) $2\sqrt{2}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

16. $(2^n - 2^{n-1})^2 =$

A) 2^{2n-1}
B) 4^{n-2}
C) $(0,25)^{2-n}$
D) $(0,25)^{1-n}$
E) $(0,5)^{2+2n}$

17. La resta $2^{12} - 1$ **NO** es divisible por:

A) 7
B) 9
C) 5
D) 13
E) 25

18. El resultado de $2^{40} + 2^{39} + 2^{36}$ es divisible por:

I) 8
II) 10
III) 100

Es (son) correcta(s):

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

19. Si $\frac{2^{x+1} + 2^x}{3^x - 3^{x-2}} = \frac{4}{9}$, entonces el valor de 2x + 1 es:

A) 5
B) 15
C) 14
D) 13
E) 11

20. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) equivalente(s) al cuociente $\frac{3^8 + 3^7}{2^{10} - 2^8}$?

I) $(1,5)^6$
II) $(0,\overline{6})^{-6}$
III) $\frac{3^6}{2}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

21. $\sqrt{\frac{\sqrt{75} + \sqrt{48}}{\sqrt{3}}} =$

A) 3
B) 9
C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$
E) $4\sqrt{3}$

22. Sean los números: $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$; $y = \sqrt{3} + \sqrt{2}$; $z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, entonces xyz =

A) $1 + \sqrt{6}$
B) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
E) $\sqrt{6}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

23. Si $ab = \sqrt{3}$ y $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, entonces a:

A) $3 + \sqrt{6}$
B) $3 + \sqrt{3}$
C) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
D) $-(1 + \sqrt{2})$
E) $-\sqrt{2}$

24. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** es equivalente a $2\sqrt{6}$?

A) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{3}}$

B) $\sqrt{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{4\sqrt{3}}$

C) $\sqrt{2\sqrt{7}+2} \cdot \sqrt{2\sqrt{7}-2}$

D) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$

E) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

25. $(\sqrt{2})^{20} \cdot \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} \cdot \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10} =$

A) 1

B) $\dfrac{1}{4}$

C) $\dfrac{9}{4}$

D) $\dfrac{3}{4}$

E) $\dfrac{9}{16}$

26. Se puede determinar el signo de la potencia a^n, con **a** un número racional distinto de cero y **n** un número entero, si se sabe que:

(1) $a^{n+1} < 0$
(2) $a^{2n+1} < 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

27. Si $A = 2^{-x} + 2^x$, entonces $4^{-x} + 4^x =$

A) $A^2 + 4$
B) $A^2 - 4$
C) $A^2 + 2$
D) $A^2 - 2$
E) A^2

28. Se puede determinar la cifra de las unidades de la potencia 3^n, con n un entero positivo, sabiendo que:

(1) n=4k+3, con k entero positivo.
(2) n=2k+3, con k entero positivo.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

29. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ =

A) 1
B) 2
C) $\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{6}$
E) 7

30. Si x > 0, entonces
$\sqrt{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$ =

A) 3
B) 9
C) $\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$
E) $3\sqrt{3}$

31. Si a > 0, entonces $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}$ =

A) $\sqrt[3]{a^2}$
B) $\sqrt{a^3}$
C) $\sqrt{a}$
D) $\sqrt[3]{a}$
E) $\sqrt[6]{a}$

32. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}=3$

II) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[12]{3}$

III) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[7]{3}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

33. Sean a y b números reales y n un número entero. Se puede determinar que $a^n>b^n$, sabiendo que:

(1) a > b
(2) a y b son positivos.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

34. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) equivalente(s) a la expresión $\sqrt{4^{2n+3}+4^{2n+2}+4^{2n}}$?

I) $9\cdot4^n$
II) 18^n
III) $(0{,}25)^{-n}\cdot9$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

35. Si 0 < a < 2, entonces
$\sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2+4a+4}$ =

A) 2a
B) 4a
C) 2
D) 4
E) –2

Prohibida su reproducción total o parcial.

36. Si $m>n>0$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) equivalentes a

$$\frac{\sqrt{4n^2 - 12mn + 9m^2}}{\sqrt{9m^2 - 4n^2}} \ ?$$

I) $\dfrac{2n - 3m}{\sqrt{(3m + 2n)(3m - 2n)}}$

II) $\dfrac{\sqrt{9m^2 - 4n^2}}{2n + 3m}$

III) $\sqrt{\dfrac{3m - 2n}{3m + 2n}}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

37. La expresión $\sqrt{4(m^2 + n^2 - 2mn)} - \sqrt{9(m - n)^2}$ con $n > m$ es equivalente a:

A) $5(m + n)$
B) $n - m$
C) $m - n$
D) $7(m + n)$
E) $5(m - n)$

38. Si $p > 3$ y n es un entero positivo tal que $n > p$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el número mayor?

A) p^n
B) np^n
C) $(p + 1)^n$
D) $(-p)^n$
E) p^{n+1}

39. Si $0 < p < 1$ y n es un entero par negativo, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el número menor?

A) np^n
B) p^{n+1}
C) $(p + 1)^n$
D) $(-p)^{n+1}$
E) p^n

40. Sea a un número racional y n es un número entero. Se puede determinar que $a^{n+1} > a^n$, sabiendo que:

(1) $a>0$
(2) $n>0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

41. Si $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $z = \frac{\sqrt{10}}{4}$ y $w = \frac{\sqrt{18}}{5}$, entonces:

A) $z < x < w < y$
B) $z < w < y < x$
C) $z < w < x < y$
D) $w < z < x < y$
E) $y < x < w < z$

Prohibida su reproducción total o parcial.

42. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

II) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{4} < \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}$

III) $\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2\sqrt{5}+1} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

43. Si $A = 2\sqrt{3} + 2$, $B = 2\sqrt{7} - 1$ y $C = \sqrt{38}$, entonces:

A) $A < B < C$
B) $A < B < C$
C) $B < A < C$
D) $B < C < A$
E) $C < A < B$

44. Si a y b son números reales positivos, tales que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 62$, entonces $\sqrt[3]{\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}} =$

A) 2
B) 3
C) 5
D) 8
E) 27

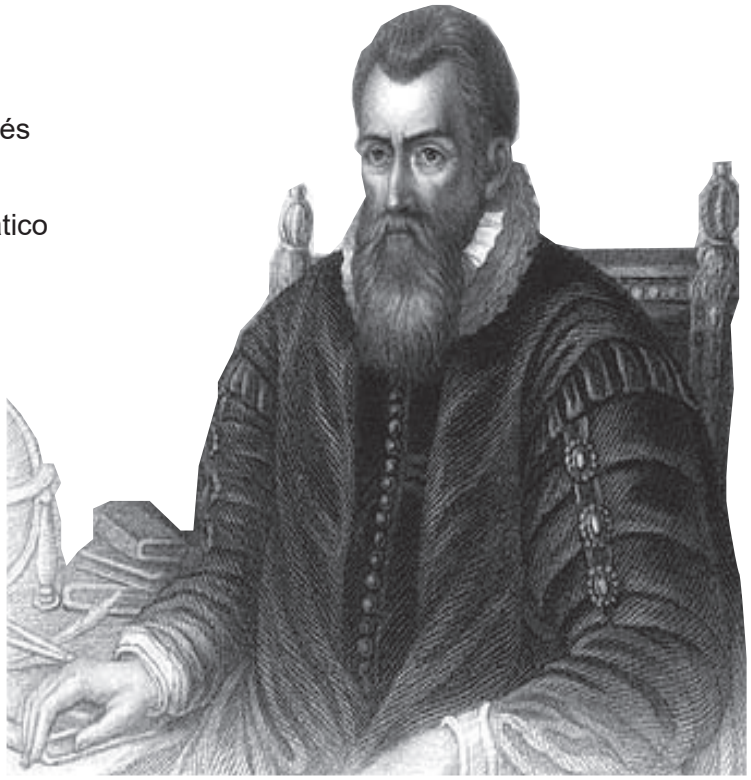
RESPUESTAS CAPÍTULO 2									
1. A	**2.** A	**3.** E	**4.** B	**5.** B	**6.** D	**7.** E	**8.** A	**9.** A	**10.** B
11. B	**12.** D	**13.** D	**14.** E	**15.** C	**16.** D	**17.** E	**18.** E	**19.** E	**20.** C
21. A	**22.** D	**23.** A	**24.** E	**25.** A	**26.** C	**27.** D	**28.** A	**29.** A	**30.** A
31. E	**32.** B	**33.** E	**34.** C	**35.** D	**36.** D	**37.** C	**38.** B	**39.** A	**40.** E
41. C	**42.** A	**43.** C	**44.** A						

Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
3

LOGARITMOS

John Napier (o Neper), matemático escocés (1550-1617), fue el primero que definió y desarrolló los logaritmos, método matemático que permitió simplificar enormemente el cálculo numérico lo que tuvo enormes repercusiones en todos los campos de la matemática aplicada, en especial en los cálculos astronómicos.



CONCEPTOS CLAVES

- Base del logaritmo
- Argumento del logaritmo
- Relación entre logaritmo y potencia

Prohibida su reproducción total o parcial.

DEFINICIÓN

Definición de logaritmo
Sean a y b números positivos con $a \neq 1$, se define $\log_a b$, como el número real con el que hay que elevar **a** para obtener **b**, es decir:

$$\log_a b = n \leftrightarrow a^n = b \qquad (a,b > 0 \text{ y } a \neq 1)$$

Donde **a** se denomina la base del logaritmo y **b** el argumento.

PROPIEDADES

1. El logaritmo de uno es cero.
$\log_a 1 = 0$

2. El logaritmo de la base es uno.
$\log_a a = 1$

3. El logaritmo de una potencia de la base equivale al exponente de esa potencia.
$\log_a a^n = n$

4. Propiedad de la inversa del logaritmo.
$a^{\log_a n} = n$

5. El logaritmo de un producto equivale a la suma de los logaritmos de los factores.
$\log_n (ab) = \log_n a + \log_n b$

6. El logaritmo de un cuociente equivale a la diferencia de los logaritmos de los términos.
$\log_n \left(\frac{a}{b}\right) = \log_n a - \log_n b$

7. El logaritmo de una potencia equivale al producto entre el exponente y el logaritmo de la base de la potencia.
$\log_n x^p = p \cdot \log_n x$

8. Propiedad de cambio de base.
$$\log_n a = \frac{\log_b a}{\log_b n}$$

9. Propiedad de igualdad de logaritmos
$\log_n a = \log_n b \rightarrow a = b \quad (a,b,n > 0 \text{ y } n \neq 1)$

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si $p = \log_8 \sqrt{2}$; $2 = \log_3 q$ y $\log_r 0{,}64 = 2$, entonces pqr =

Solución:
Como $p = \log_8 \sqrt{2}$, por definición de logaritmo:

$8^p = \sqrt{2} \rightarrow 2^{3p} = 2^{\frac{1}{2}} \rightarrow 3p = \frac{1}{2} \rightarrow p = \frac{1}{6}$

Análogamente: $2 = \log_3 q \rightarrow 3^2 = q \rightarrow q = 9$.

$\log_r 0{,}64 = 2 \rightarrow r^2 = 0{,}64 \rightarrow r = 0{,}8 = \frac{4}{5}$ (el valor de r negativo se descarta, por ser la base de un logaritmo).

Por lo tanto: $pqr = \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$

2. Si $\log \sqrt{a} = 0{,}4$ $(a > 0)$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\log a^2 = 1{,}6$
II) $\log \sqrt[4]{a} = 0{,}2$
III) $\log (10a) = 1{,}8$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Solución:
Se tiene que $\log \sqrt{a} = 0{,}4$, por lo tanto:

$\log a^{\frac{1}{2}} = 0{,}4 \rightarrow \frac{1}{2} \log a = 0{,}4$ (prop. 7) $\rightarrow \log a = 0{,}8$

En I, $\log a^2 = 2 \log a$ (prop. 7), pero $\log a = 0{,}8$, por lo tanto $\log a^2 = 1{,}6$ (verdadera)

En II, $\log \sqrt[4]{a} = \frac{1}{4} \log a$ (prop. 7), por lo tanto $\log \sqrt[4]{a} = \frac{1}{4} \log a = \frac{1}{4} \cdot 0{,}8 = 0{,}2$ (verdadera)

En III, $\log (10a) = \log 10 + \log a$ (prop. 5), pero $\log 10 = 1$ (prop. 2), por lo tanto
$\log (10a) = 1 + \log a = 1 + 0{,}8 = 1{,}8$ (también es verdadera), respuesta E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

3. Si $\log \sqrt{m} = p$ y $\log\left(\frac{m}{n}\right) = q$, entonces $\log \sqrt[4]{mn} =$

Solución:

Por prop. 7: $\log \sqrt{m} = \frac{1}{2} \log m$, pero $\log \sqrt{m} = p$, por lo tanto $\frac{1}{2} \log m = p \rightarrow \log m = 2p$.

Por otro lado: $\log\left(\frac{m}{n}\right) = \log m - \log n = q$ (prop. 6)

Como $\log\left(\frac{m}{n}\right) = q$, tenemos que $\log m - \log n$ y sabemos que $\log m = 2p$,

por lo que se deduce que $\log n = 2p - q$.

La expresión pedida, $\log \sqrt[4]{mn}$, por propiedades 7 y 5 es equivalente a $\frac{1}{4} (\log m + \log n)$ reemplazando $\log m$ y $\log n$ por los valores obtenidos, tenemos que:

$\log \sqrt[4]{mn} = \frac{1}{4} (\log m + \log n) = \frac{1}{4}(4p - q) = p - \frac{q}{4}$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Si $\log_2 8 = x$, entonces $x =$

A) -3
B) $2\sqrt{2}$
C) 3
D) 4
E) 5

2. Si $\log_3 x = -2$, entonces $x =$

A) -9
B) -6
C) $0,\overline{1}$
D) $0,\overline{3}$
E) 9

3 $\log_2 (0,25) + \log_3 9 =$

A) -1
B) 0
C) 1
D) 3
E) 4

4. $\log_3 \sqrt{0,\overline{1}} =$

A) -1
B) 1
C) 2
D) -2
E) $\frac{2}{3}$

5. Si a es un número real mayor que uno, entonces $\log a^3 =$

A) 12
B) 6
C) 5
D) 4
E) 3

6. Si a es un número real mayor que uno, entonces $\log_a \left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}} \right) =$

A) -6
B) 6
C) $-\frac{1}{6}$
D) $\frac{1}{6}$
E) $\frac{7}{6}$

7. Si $\log (x + 1) = 2$, entonces $x =$

A) 19
B) 21
C) 99
D) 101
E) 1.023

Prohibida su reproducción total o parcial.

8. Si $\log (x + 2) = 1$, entonces $\log_2 x =$

A) 2
B) 3
C) 4
D) 0,25
E) 0,125

9. Sean $P = \log_2 \sqrt[3]{4}$, $Q = \log_4 \sqrt[3]{4}$ y $R = \log_8 \sqrt[3]{4}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $Q = \frac{P}{2}$

II) $R = \frac{P}{3}$

III) $PQ = R$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

10. $\log_5 \left(\frac{5 - x}{2}\right) = 2$, entonces $x =$

A) -45
B) -5
C) 25
D) 55
E) $-\frac{15}{2}$

11. Si $p = \log_4 \sqrt{2}$, $4 = \log_q 16$ y $2 = \log_4 r$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $pr = 2q$
II) $pqr = 8$
III) $r^p = q$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

12. $\log 2 + \log 8 - \log 4 =$

A) $\log 4$
B) $\log 6$
C) $\log 8$
D) $\log 12$
E) $\log \left(\frac{5}{2}\right)$

13. Si $x > 1$, $\log (x + 1) + \log (x - 1) =$

A) $2 \log x$
B) $2 \log (x - 1)$
C) $2 \log x - 1$
D) $\log (x^2 - 1)$
E) $\log x + \log 2$

14. $\log_2 (\log_9 (\log_5 125)) =$

A) 2
B) -2
C) 1
D) -1
E) 0

Prohibida su reproducción total o parcial.

15. $\log_2(\log_4(\log_2 \sqrt[3]{4^6})) =$

A) -1
B) 1
C) 0
D) 2
E) log 2

16. Si $\log \sqrt{m} = 0{,}24$ y $\log n^3 = 0{,}69$, entonces $\log\left(\frac{m}{n}\right) =$

A) $-0{,}11$
B) 0,16
C) 0,25
D) 0,35
E) 0,71

17. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) equivalente(s) a la expresión:

$\log\left(\frac{ba^2}{c^2}\right)$?

I) $2 \log a + \log b - 2 \log c$

II) $\log b + 2\log\left(\frac{a}{c}\right)$

III) $2 \log (ab) - 2 \log c$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

18. Si a, b y c son números reales positivos, entonces $\log a - \log b - 2 \log c =$

A) $\log\left(\frac{a}{bc^2}\right)$

B) $\log\left(\frac{ab}{c^2}\right)$

C) $\log\left(\frac{ac^2}{b}\right)$

D) $\log\left(\frac{c^2}{ab}\right)$

E) $\log\left(\frac{b}{ac^2}\right)$

19. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = -2$

II) Si $\log_x 25 = 2$, entonces $x = 5$

III) Si $\log_4 x = 8$, entonces $x = 32$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

20. Si a y b son números positivos, se puede determinar que $a=b^2$, si:

(1) $\log a = 2 \log b$

(2) $\log\left(\frac{a}{b^2}\right) = 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

21. $\log\left(\frac{\sqrt{6}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right) =$

A) $\frac{1}{2}\log 3$
B) $\log 3$
C) $2\log 3$
D) $\log 6$
E) $\log 2$

22. Si $3\log a = 2\log b$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $b = a\sqrt{a}$

II) $\log_a b = \frac{2}{3}$

III) $\log\left(\frac{a^3}{b^2}\right) = 0$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

23. $\log x^2 + \log(2xy) + \log y^2 =$

A) $3(\log x + \log y) + \log 100$

B) $\log\left(\frac{xy}{3}\right)$

C) $2\log(x + y)$

D) $\log\left(\frac{xy}{100}\right)$

E) $3\log(xy) + \log 2$

24. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\log(0,5) < 0$
II) $(\log 2^{-3}) \cdot (\log 2^3) \geq 0$
III) $\log 2 \cdot \log(0,3) < 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II, III

25. Si $\log\left(\frac{3}{2}\right) = 0,18$, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $\log\left(\frac{9}{4}\right) = 0,36$
II) $\log(0,\overline{6}) = \frac{50}{9}$
III) $\log\sqrt{1,5} = 0,9$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Ninguna de ellas.

26. Si $\log 2 = a$, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $\log(0,25) = -2a$
II) $\log 8 = 4a$
III) $\log(0,5) = \frac{1}{a}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II, III

Prohibida su reproducción total o parcial.

27. Si $x > y > 0$, ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) equivalente(s) a $\log (x^2 - y^2)$?

I) $2 \log x - 2 \log y$

II) $\log (x + y) + \log (x - y)$

III) $\dfrac{\log x^2}{\log y^2}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II, III

28. Si a, b y c son números reales positivos, la expresión: $2 \log a + 2 \log b - 2 \log c$ es equivalente a

I) $\log \left(\dfrac{ab}{c}\right)^2$

II) $2\log \left(\dfrac{ab}{c}\right)$

III) $\log (ab)^2 - \log c^2$

A) Solo I y II
B) Solo III
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II, III

29. Si $\log 2 = u$ y $\log 3 = v$, entonces $\log 18$ en términos de u y v es:

A) $2u + v$
B) $2v + u$
C) uv^2
D) $3v + u$
E) $2uv$

30. Si $\log m^2 = n$ y $\frac{1}{2}\log \sqrt{p} = q$, entonces $\log \left(\dfrac{m}{p}\right) =$

A) $\dfrac{n}{2} + 4q$
B) $\dfrac{n}{2} - 4q$
C) $\dfrac{n}{2} - \dfrac{q}{2}$
D) $\dfrac{n}{2} - \dfrac{q}{4}$
E) $2n - 4q$

31. Si $\log_a b = 3$, entonces $\log_{b^2} a =$

A) 6
B) $\dfrac{3}{2}$
C) $\dfrac{1}{2}$
D) $\dfrac{1}{6}$
E) $\dfrac{1}{3}$

32. La masa de un material radioactivo medida en kilos, está dada por la expresión $m(t)=4\cdot(0,2)^t$, donde **t** es el tiempo medido en años. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la masa del material quede reducida a dos kilos?

A) $\log 2,5$
B) $\dfrac{\log 5}{\log 2}$
C) $\log 5 - \log 2$
D) $\dfrac{\log 2}{1 - \log 2}$
E) Todas las anteriores.

Prohibida su reproducción total o parcial.

33. Si log 2 = a y log 3 = b, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\log 144 = 4a + 2b$

B) $\log (4,5) = 2b - a$

C) $\log (0,\overline{8}) = 3a - 2b$

D) $\log \sqrt{12} = a + \frac{b}{2}$

E) $\log (1,5) = \frac{b}{a}$

34. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $2 \log \sqrt{2} = \frac{1}{4} \log 2$

II) $2 \log (\sqrt{2} - 1) = \log (3 - 2\sqrt{2})$

III) $\log (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \log (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

35. Si $\log x^3 = 2$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $x = \sqrt[3]{100}$

II) $\log x^{12} = 16$

III) $\log \left(\frac{10}{x}\right) = \frac{1}{3}$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

36. Si $\log_2 5 = a$, entonces $\log 2 =$

A) $\frac{1}{a}$

B) $\frac{2}{a}$

C) $\frac{a + 1}{a}$

D) $\frac{1}{a - 1}$

E) $\frac{1}{a + 1}$

37. Sea $x = \log_p q$, $y = \log_q p$ y $z = \log_q p^2$, con $p > q$ y p y q números reales positivos menores que uno. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $x < y < z$
B) $x < z < y$
C) $y < x < z$
D) $y < z < x$
E) $z < x < y$

38. Si a es un número real positivo, se puede determinar log a sabiendo que:

(1) $\log (10a) - \log a = 1$
(2) $\log (10a) + \log a = 3$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

39. Si $p > 1$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\log_5 p > \log_4 (p + 1)$

II) $\log_4 p > \log_5 \sqrt{p}$

III) $\log_4 (p + 1) > \log_8 \sqrt[3]{p + 1}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

40. Si a y b son números reales positivos, se puede determinar ab sabiendo:

(1) $\log a + \log b = 1$

(2) $\log a + \log b = 2 - \log (ab)$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

41. Si $x > 0$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $\log (10x) > \log x$

II) $2 \log x > \log x$

III) $\log_2 x > \log_3 x$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESPUESTAS CAPÍTULO 3									
1. C	**2.** C	**3.** B	**4.** A	**5.** B	**6.** D	**7.** C	**8.** B	**9.**E	**10.** A
11. E	**12.** A	**13.** D	**14.** D	**15.** C	**16.** C	**17.** C	**18.** A	**19.** C	**20.** D
21. A	**22.**D	**23.** E	**24.** D	**25.** A	**26.** A	**27.** B	**28.** E	**29.** B	**30.** B
31. D	**32.** D	**33.** E	**34.** E	**35.** D	**36.** E	**37.** D	**38.** B	**39.** D	**40.** D
41. A									

Prohibida su reproducción total o parcial.

MINIENSAYO N°1

EJE NÚMEROS

Tiempo: 70 minutos

1. Si los tres cuartos de $0,\overline{2}$ sumado con 0,8 se aproximan por defecto a las milésimas, la última cifra decimal de esta aproximación es:

A) 0
B) 3
C) 5
D) 6
E) 7

2. El resultado de $\dfrac{0,\overline{2}+3^{-1}}{3-2^{-1}}$ es un número:

A) entero positivo.
B) entero negativo.
C) decimal infinito periódico.
D) decimal infinito semiperiódico.
E) decimal finito.

3. ¿Cuál de los siguientes números tiene mayor valor numérico?

A) $0,\overline{4}$
B) $\dfrac{15}{33}$
C) $\dfrac{3}{7}$
D) $\dfrac{9}{20}$
E) $0,\overline{43}$

4. Si $p = 0,5 \cdot 10^{-1}$, $q = 5 \cdot 10^{-2}$ y $r = 50 \cdot 10^{-3}$, entonces se cumple:

A) $p = q > r$
B) $p < q < r$
C) $p < r < q$
D) $q < p < r$
E) $p = q = r$

5. Sean los números $a = 0,1 \cdot 10^{-2}$, $b = 4 \cdot 10^{-1}$ y $c = 2 \cdot 10^{-2}$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El menor es a.
B) El mayor es b.
C) $ab = c^2$
D) $b^2 < c$
E) $c = 20a$

6. Si $a = 0,2$, $b = 0,04$ y $c = 0,035$, entonces $ab + c$ aproximado por exceso a la centésima es:

A) 0,02
B) 0,03
C) 0,04
D) 0,05
E) 0,06

Prohibida su reproducción total o parcial.

7. El resultado de $\frac{2^8 + 2^{10}}{2^9 - 2^8}$ corresponde a:

A) Un número racional no entero mayor que uno.
B) Un número racional no entero menor que uno.
C) Un número entero positivo mayor que 6.
D) Un número entero positivo menor que 6.
E) Un número entero negativo.

8. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $0,\overline{5} \cdot 0,\overline{2} = 0,\overline{10}$

II) $\frac{0,3\overline{2}}{0,1\overline{6}} = 2$

III) $0,\overline{23} + 0,\overline{76} = 1$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas.

9. Una familia viajará desde un punto A a un punto B de la carretera, distantes 457,2 km, haciendo detenciones en los puntos C y D. En C se encuentra un servicentro el que se ubica a 208,6 km del punto de partida y en D hay un restaurant que se ubica 123,3 km más al sur de servicentro.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) El restaurant se encuentra a más de 331 km del punto de partida.
B) Desde el restaurant al punto de destino hay más de 125 km.
C) Entre el servicentro y el punto de destino hay más de 250 km.
D) Hay una mayor distancia entre el restaurante y el punto de destino que del restaurante al servicentro.
E) De los tres tramos del recorrido, el mayor es el del punto de partida al servicentro.

10. Sean m y n números enteros positivos, se puede determinar que m + n es par, sabiendo que:

(1) m – n es par.
(2) mn es par.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $-2^{-2} > 2^{-3}$

II) $(0,5)^{-3} = 2^3$

III) $(0,2)^{-3} > 25$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

12. Un padre deja como herencia a sus tres hijos, un fundo de **A** hectáreas, al hijo mayor le deja los $\frac{2}{3}$ y al segundo le deja los $\frac{1}{5}$ del resto, ¿cuánto recibe el tercer hermano?

A) $\frac{A}{6}$
B) $\frac{4}{15}A$
C) $\frac{2}{15}A$
D) $\frac{13}{15}A$
E) $\frac{A}{15}$

13. El cuociente $0,\overline{3} : 0,1\overline{6}$ corresponde a un número:

I) Racional.
II) Entero positivo.
III) Decimal infinito.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Ninguna de ellas.

14. Si a y b son dígitos, entonces $0,a\overline{b} - 0,b\overline{a} =$

A) $\frac{5a - 4b}{45}$
B) $\frac{4a - 4b}{45}$
C) $\frac{b - a}{90}$
D) $\frac{8a - 8b}{99}$
E) $\frac{4a + 5b}{45}$

15. ¿Cuál de los siguientes números tiene el mayor valor numérico?

A) $(0,\overline{2})^{-2}$
B) $(0,0\overline{2})^{-1}$
C) $(0,\overline{3})^{-3}$
D) $(0,\overline{5})^{-4}$
E) $(1,25)^{-6}$

16. $(0,\overline{2})^{-3} \cdot (3,5)^{-3} =$

A) $(0,0\overline{7})^{-3}$
B) $(0,7)^{-6}$
C) $(0,\overline{7})^{-6}$
D) $(0,7)^{-3}$
E) $(0,\overline{7})^{-3}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

17. $\dfrac{2^x + 2^x}{3^x + 3^x} =$

A) $\dfrac{2}{3}$

B) $\dfrac{4}{9}$

C) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

D) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}$

E) $2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

18. Al ordenar de menor a mayor los números: $a = 2 + \sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{3}$; $c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ se obtiene:

A) a – c – b

B) a – b – c

C) c – b – a

D) c – a – b

E) b – a – c

19. Sabiendo que una milla es equivalente a 1,609 km, un automóvil que recorre un trayecto de 4,5 millas, su equivalente en km aproximado por defecto a las milésimas es:

A) 7,230

B) 7,239

C) 7,240

D) 7,241

E) 7,242

20. ¿Cuál(es) de las siguientes magnitudes corresponde(n) a un número racional?

I) La longitud del lado de un cuadrado cuya diagonal mide $\sqrt{8}$ cm.

II) El lado de un triángulo equilátero cuya altura mide $4\sqrt{3}$ cm.

III) El radio de una circunferencia cuya longitud es π cm.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

21. ¿Cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 2$

II) $\dfrac{3}{2\sqrt{3} + 3} = 2\sqrt{3} - 3$

III) $\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2$

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

22. Utilizando que log 5 es aproximadamente 0,69897, ¿cuál(es) de las siguientes aproximaciones es (son) verdadera(s)?

I) log 25 redondeado a la milésima es 1,400.

II) log 2 redondeado a la centésima es 0,31.

III) log 50 redondeado por exceso a la cuarta cifra decimal es 1,6990.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

23. Se tienen $8{,}94 \cdot 10^{-2}$ gramos de un material radiactivo, el cual se divide en tres partes iguales en tres contenedores distintos. Si al material que está en uno de los contenedores se saca una centésima de gramo y se agrega a uno de los otros, ¿cuántos gramos, de este material, redondeado a las milésimas, tiene el contenedor que contiene más de este material?

A) 0,004
B) 0,031
C) 0,040
D) 0,129
E) 0,130

24. Sean m y n números reales, se puede determinar que $\frac{m}{n} > 1$, sabiendo que:

(1) $m > n$
(2) $n > 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

25. Si log a = 0,12, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\log a^2 = 0{,}24$

B) $\log \sqrt{a} = 0{,}6$

C) $\log (10a) = 1{,}12$

D) $\log \left(\frac{1}{a}\right) = -0{,}12$

E) $\log \left(\frac{10}{a}\right) = 0{,}88$

26. Sean a y b dos números reales positivos, tales que $\log \sqrt{a} = 2$ y $\log \sqrt[3]{b} = 3$, entonces $\log \left(\frac{ab^2}{100}\right) =$

A) 0,72
B) 1,44
C) 2,2
D) 20
E) 70

Prohibida su reproducción total o parcial.

27. Si **a** es un número real positivo, ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s)?

I) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$

II) $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a}$

III) $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$

A) Solo II
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

28. El resultado de $\frac{4^8 - 4^6}{2^5 + 2^7}$ es un número que es divisible por:

I) 7
II) 12
III) 24

A) Solo II
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

29. Sea la ecuación en x, $ax + b = c$, donde a,b y c son números enteros y $a \neq 0$. Se puede determinar que x es un número entero, sabiendo que:

(1) $(c - b)$ es múltiplo de a.
(2) c y b son múltiplos de a.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

30. Sean los números reales, $x = (2 - \sqrt{2})^{-1}$, $y = (2 + \sqrt{2})^{-1}$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) racional(es)?

I) $x + y$
II) $(x - y)^2$
III) $\frac{x}{y}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

31. La cantidad de mg de un medicamento que permanece en la sangre de un individuo está dado por la expresión $m_0 \cdot 2^{-0,2t}$, donde t es tiempo medido en horas. ¿A las cuántas horas el medicamento se habrá reducido a la cuarta parte?

A) 2
B) 4
C) 5
D) 8
E) 10

32. Si $\frac{c^2 - d^2}{a^2} > 0$, ¿cuál de las siguientes expresiones es **siempre** equivalente a $\log\left(\frac{c^2 - d^2}{a^2}\right)$?

A) $2 \log\left(\frac{c - d}{a}\right)$

B) $\log_{a^2}(c^2 - d^2)$

C) $2 \log\left(\frac{c}{a}\right) - 2 \log\left(\frac{d}{a}\right)$

D) $2 \log c - 2 \log a$

E) $\log (c + d) + \log (c - d) - 2 \log a$

Prohibida su reproducción total o parcial.

33. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$ es un número irracional menor que uno.

B) $\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}$ es un número irracional positivo.

C) $\sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2}$ es un número irracional positivo.

D) $(\sqrt{18}-\sqrt{8})^2$ es un número racional.

E) $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$ es un número irracional negativo.

34. Si $p > q > 1$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $\log_p q < 1$

II) $\log (p^2 - q^2) > 0$

III) $\log \left(\frac{q}{p}\right) < 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

35. En una red de usuarios de internet, se ha detectado que una noticia falsa, cada un minuto se cuadruplica la cantidad de cibernautas que la han leído. Si inicialmente tres usuarios leyeron esta noticia, ¿a los cuántos minutos 6000 personas la habrán leído?

I) $\frac{\log 2000}{\log 4}$

II) $\log_4 2000$

III) $\frac{\log 2 + 3}{2 \log 2}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas

36. Si x e y son números racionales entre -1 y 0 tales que $y < x$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) números racionales menores que -1?

I) $\frac{y - x}{xy}$

II) $\frac{x - y}{x + y}$

III) $\frac{x + y}{xy}$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

37. Si $a^3 = b^2$, con a y b son reales positivos y distintos a uno, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\log_a b = 1{,}5$

II) $\log_b a = 0{,}\overline{6}$

III) $\frac{\log a}{\log b} = \frac{2}{3}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

38. Sea la ecuación en t, $ab^t = c$, donde a,b y c son números reales positivos y $b \neq 1$, entonces ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde a **t** ?

A) $\frac{c - a}{b}$

B) $\frac{\log c}{\log a + \log b}$

C) $\frac{\log (c - a)}{\log b}$

D) $\frac{\log c - \log a}{\log b}$

E) $\log\left(\frac{c}{ab}\right)$

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJE

ÁLGEBRA Y FUNCIONES

Capítulo
4

OPERATORIA ALGEBRAICA

Al-Juarismi, matemático de origen persa que vivió en el siglo IX, desarrolló el Álgebra, rama de la Matemática que generaliza la Aritmética, cuyo estudio son los números y sus operaciones.

CONCEPTOS CLAVES

- Factor o divisor
- Producto notable
- Factorización
- Ecuación de primer grado
- Sistemas de ecuaciones

Prohibida su reproducción total o parcial.

PRODUCTOS NOTABLES

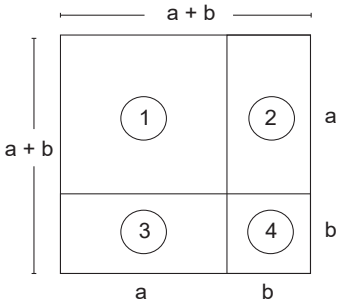
Los productos notables más importantes son los siguientes:

• Suma por su diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
• Cuadrado de binomio	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
• Producto de binomios con término común	$(ax + b)(ax + c) = (ax)^2 + (b + c)ax + bc$
• Cuadrado de trinomio	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
• Cubo de binomio	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Visualización geométrica de algunos productos notables:

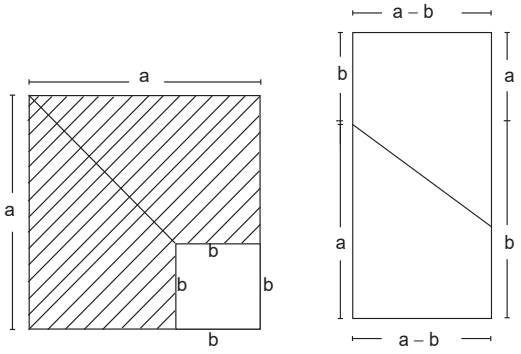
- **Cuadrado de binomio:** $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

El cuadrado de lado a + b se ha dividido en cuatro sectores cuyas áreas son las siguientes:
Área 1: a^2, Área 2: ab , Área 3: ab, Área 4: b^2.
Por lo tanto: $(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$, de donde se concluye que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

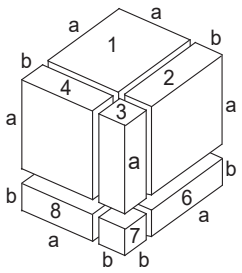


- **Suma por su diferencia:** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

En la figura de la izquierda se tienen dos cuadrados de lados a y b respectivamente.
Si esta figura se recorta, se puede formar el rectángulo de la derecha, cuyos lados son (a + b) y (a – b).
Por lo tanto el área sombreada de la izquierda: $a^2 - b^2$ es igual al área del rectángulo de la derecha (a + b)(a – b), por lo tanto $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.



- **Cubo de binomio:** $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
El cubo de arista (a + b) de la figura, se ha dividido en 8 cuerpos, los volúmenes de cada uno de ellos son los siguientes:
$V_1 = a^3$, $V_2 = a^2b$, $V_3 = ab^2$, $V_4 = a^2b$, $V_5 = a^2b$, $V_6 = ab^2$, $V_7 = b^3$ y $V_8 = ab^2$.
La suma de los 8 volúmenes sería igual al volumen del cubo inicial que es $(a + b)^3$, con lo que se concluye que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$



Prohibida su reproducción total o parcial.

FACTORIZACIÓN

La factorización consiste en expresar sumas y restas en productos.
Las factorizaciones que más se utilizan son las siguientes:

• Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
• Factorización de trinomio cuadrático	$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$, con $p + q = b$ y $pq = c$
• Suma de cubos	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
• Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Supongamos que tenemos la ecuación de primer grado $ax - b = 0$, al despejar x, obtenemos que $x = \frac{b}{a}$, entonces tenemos tres casos:

- Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $x = 0$.
- Si $a \neq 0$, entonces x tiene una única solución.
- Si $a = b = 0$, entonces x tiene infinitas soluciones.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$ donde a, b, c, a', b' y c' son números reales y x e y son las soluciones.

Al encontrar las soluciones para "x" y para "y" lo que estamos encontrando es el punto donde se intersectan las rectas cuyas ecuaciones son las que aparecen en el sistema.
En el siguiente capítulo veremos los métodos de reducción, igualación y sustitución que permiten resolver este tipo de sistemas.
Acá estudiaremos la relación que existe entre los coeficientes y las soluciones del sistema.
Existen tres casos:

(1) Sistema compatible indeterminado

En este caso las ecuaciones representan dos rectas paralelas coincidentes, por lo que se obtendrán infinitas soluciones. Esto ocurre cuando son proporcionales los coeficientes de las rectas:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \leftrightarrow \infty \text{ soluciones} \leftrightarrow \text{sistema compatible indeterminando}$$

Prohibida su reproducción total o parcial.

(2) Sistema compatible determinado

En este caso las ecuaciones representan dos rectas secantes, por lo que se obtendrá una única solución. Esto ocurre cuando no son proporcionales los coeficientes de "x" y de "y" de las rectas:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \leftrightarrow \text{solución única} \leftrightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

(3) Sistema incompatible

En este caso las ecuaciones representan dos rectas paralelas no coincidentes, por lo que no existirá solución. Esto ocurre cuando son proporcionales los coeficientes de "x" y de "y " de las rectas, pero no con los términos libres.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \leftrightarrow \text{no existe solución} \leftrightarrow \text{sistema incompatible}$$

Ejemplo:

Determina el valor de **p**, para que el sistema $\begin{array}{l}(p+1)x - 2py = 8\\ 3x - 5y = 4\end{array}$ tenga infinitas soluciones.

Solución:

Estamos acá ante el caso (1), un sistema compatible indeterminado, entonces debe ocurrir que

$\frac{p+1}{3} = \frac{-2p}{-5} = \frac{8}{4}$, de la primera proporción: $\frac{p+1}{3} = \frac{-2p}{-5}$, si multiplicamos cruzado y resolvemos, obtenemos que p=5, de la segunda proporción $\frac{-2p}{-5} = \frac{8}{4}$, multiplicando cruzado y resolviendo, también obtenemos que p=5, luego para este valor el sistema tendrá infinitas soluciones.

Ejemplo:

Determina que condición debe cumplir **k**, para que el sistema $\begin{array}{l}(k+1)x - 3y = 12\\ kx - 4y = 5\end{array}$ tenga una única solución.

Solución:

Si el sistema tiene una única solución, corresponde a un sistema compatible determinado (caso 2), por lo tanto se debe cumplir que $\frac{k+1}{k} \neq \frac{-3}{-4}$, multiplicando cruzado y resolviendo, obtenemos que $k \neq -4$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

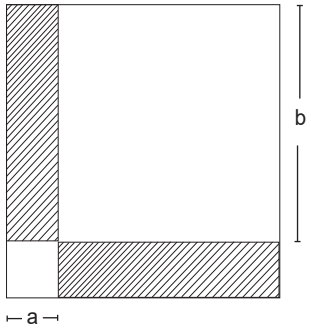
EJERCICIOS RESUELTOS

1. La figura está formada por dos cuadrados de lados a y b y dos rectángulos sombreados. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones corresponde(n) al área sombreada?

I) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$

II) $2(a + b)b - 2b^2$

III) $\dfrac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{2}$



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Tenemos que en los rectángulos sombreados sus lados miden “a” y “b”, por lo tanto el área de cada rectángulo es ab y el área de la figura sombreada sería 2ab.

I) El área sombreada corresponde al área del cuadrado mayor (cuyo lado mide a + b) restada con las áreas de los cuadrados blancos que son a^2 y b^2, es decir $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$, por lo tanto I es correcta.

II) Si desarrollamos la expresión $2(a + b)b - 2b^2$, obtenemos $2ab + 2b^2 - 2b^2 = 2ab$, por lo tanto es correcta.

III) Si desarrollamos la expresión $\dfrac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{2}$, se tiene

$$\frac{(a + b)^2 - (a - b)^2}{2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{2} = \frac{4ab}{2} = 2ab,$$ por lo tanto también es correcta. Respuesta E) I, II y III

2. Las aristas de dos cubos miden respectivamente (a+b) y (a-b) unidades. ¿Cuál es la diferencia, en ese orden, en unidades cúbicas, entre sus volúmenes?

Solución:

El volumen de cubo de arista a es a^3, por lo tanto el volumen del primer cubo es $(a + b)^3$,

según el producto notable de un cubo de binomio, tenemos que

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, mientras que el volumen del segundo cubo es

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, restando ambos volúmenes, tenemos:

$(a + b)^3 - (a - b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) = 6a^2b + 2b^3 = 2b(3a^2 + b^2)$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

3. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) factor(es) de la expresión $(a - b)^3 + 2b(a - b)^2$?

I) ab
II) a + b
III) $a^2 - b^2$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

Solución:
La expresión dada $(a - b)^3 + 2b(a - b)^2$, se puede factorizar por el factor común $(a - b)^2$, entonces nos queda: $(a - b)^2(a - b + 2b) = (a - b)^2(a + b)$, observa que esta última expresión tiene como factores o divisores a las siguientes expresiones: $(a - b)$, $(a + b)$ o $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, sin embargo ab no es uno de los factores.
Por lo tanto II y III son correctas, respuesta D.

4. Si $a + b = 8$ y $ab = 2$, entonces $a^2 + b^2 =$

Solución:
Si elevamos al cuadrado la expresión $a + b = 8$, obtenemos $(a + b)^2 = 64$, desarrollando el cuadrado de binomio: $a^2 + 2ab + b^2 = 64$, si reemplazamos $ab = 2$, se tiene que $a^2 + b^2 + 4 = 64$, por lo tanto $a^2 + b^2 = 60$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. $(x - y)^2 - (2x + y)^2 =$

A) $-3x^2 + 2xy + 2y^2$
B) $-3x(3x + 2y)$
C) $-3x^2 + 2y^2$
D) $-3x^2$
E) $-3x(x + 2y)$

2. ¿Cuánto vale $a^2 - ab + b^2$, si $a = -2$ y $b = -1$?

A) −5
B) 1
C) 3
D) 5
E) 7

3. $x - 2 - (x - (x + 2)) =$

A) x
B) $-x$
C) $-x - 4$
D) $-x + 4$
E) $x - 4$

4. La factorización de la expresión $x^2 - y^2 - 3x - 3y$ es:

A) $(x - y)(x + y - 3)$
B) $(x + y)(x - y + 3)$
C) $(x + y)(x - y - 3)$
D) $(x - y)(x - y + 3)$
E) $(x - y)((x + y + 3)$

5. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) factores de $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$?

I) $(x + y)^2$
II) $x^2 + y^2$
III) $x^2 - y^2$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

6. Si $x = 2$ e $y = -1$, entonces el valor numérico de $2x - (x - y - (x - y - (x + y)))$ es:

A) −1
B) 1
C) 3
D) 4
E) 5

7. Si $4p^2 - 4q^2 = 72$ y $\frac{p - q}{3} = 1$, entonces $p + q =$

A) 6
B) 9
C) 12
D) 15
E) 24

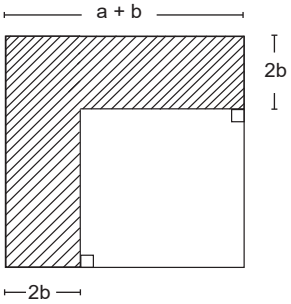
Prohibida su reproducción total o parcial.

8. Si $x - y = 4$, entonces $3 - 2x + 2y =$

A) -5
B) -4
C) 4
D) 5
E) 11

9. Si en la figura se tiene un cuadrado de lado $a + b$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes expresiones corresponde(n) al área sombreada?

I) $4ab$
II) $(a + b)^2 - (a - b)^2$
III) $2b(a + b) + 2b(a - b)$



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

10. $(2x - z)^2 - (x + z)^2 - (x - z)(x + z) =$

A) $2x^2 - 6xz + 3z^2$
B) $2x^2 + z^2$
C) $2x^2 - z^2$
D) $2x^2 - 6xz - z^2$
E) $2x^2 - 6xz + z^2$

11. Si $a = -4$, $a = 2c$ y $a^2 - 2ac + 3bc = 12$, entonces $b =$

A) -10
B) -2
C) 2
D) 10
E) $\frac{10}{3}$

12. Si $a - b = 5$, entonces $a^2+3a+b^2-2ab-3b =$

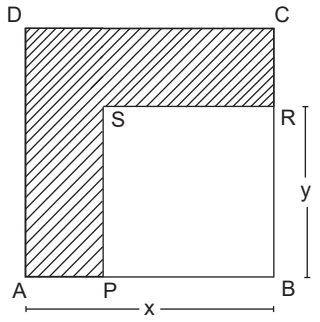
A) 10
B) 28
C) 30
D) 40
E) Falta información para determinarlo.

13. Sea la ecuación en x, $ax-a^2=bx-b^2$, con $a \neq b$, entonces la solución de la ecuación es $x =$

A) $a - b$
B) $a + b$
C) $\frac{b}{a}$
D) $b - a$
E) $a^2 + b^2$

14. En la figura, ABCD y PBRS son cuadrados, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) el área de la figura sombreada?

I) $x^2 - y^2$
II) $(x - y)y + (x - y)x$
III) $(x - y)^2 + 2(x - y)y$



A) Solo I
B) Solo I y II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

15. Si (2,3) es solución del sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} ax + (b-1)y = 2 \\ 4x - (b+2)y = 5 \end{array}\right|$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $a = 4$
B) $a + b = 3$
C) $a - b = 2$
D) $a - 3b = 7$
E) $2a - b = 9$

16. Una bandeja contiene **A** huevos y en cada caja vienen **B** bandejas. Si el valor de **C** cajas es $**D**, ¿cuánto vale cada huevo?

A) $\$ \frac{CD}{AB}$
B) $\$ \frac{D}{ABC}$
C) $\$ \frac{AD}{BC}$
D) $\$ \frac{ABD}{C}$
E) $\$ \frac{C}{ABD}$

17. Para un matrimonio están invitadas $(3p - 2q)$ personas y no asisten $(q - p)$, ¿cuántas asistieron?

A) $2p + q$
B) $2p - 2q$
C) $4p - 2q$
D) $2p - 3q$
E) $4p - 3q$

18. Sea el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} (p+2)x - (p+5)y = 15 \\ px - (p+2)y = 10 \end{array}\right|$, ¿cuánto debe ser el valor de **p** para que el sistema tenga infinitas soluciones?

A) 3
B) 4
C) 5
D) -4
E) No existe tal valor.

19. Un vehículo tiene un rendimiento de **A** km/L. Si el litro de bencina vale $**B**, ¿cuánto se gastará en bencina si se debe recorrer un trayecto de **C** km?

A) $\$ \frac{BC}{A}$
B) $\$ \frac{AB}{C}$
C) $\$ \frac{AC}{B}$
D) $\$ \frac{A}{BC}$
E) $\$ \frac{C}{AB}$

20. La solución de la ecuación:

$(x - a)^2 - (x - b)^2 = (b + a)(b - a)$ es $x =$

A) $a - b$
B) $a + b$
C) $-a + b$
D) $-a - b$
E) $a^2 - b^2$

Prohibida su reproducción total o parcial.

21. Sea el sistema de ecuaciones

$\begin{array}{l}(k+3)x-2y=3\\(k+1)x+10y=-15\end{array}$, ¿qué condición debe cumplir **k** para que el sistema tenga una única solución?

A) $k \neq \frac{8}{3}$

B) $k \neq -\frac{8}{3}$

C) $k \neq -\frac{7}{2}$

D) $k = -\frac{7}{2}$

E) No existe tal valor de k.

22. Si $mx + n^2 = m^2 - nx$ con $m \neq n$, ¿cuál de las siguientes expresiones representa a x?

A) $m^2 + n^2$

B) $(m + n)^2$

C) $(m - n)^2$

D) $m - n$

E) $m + n$

23. Sea la ecuación en x, ax=p+bx,¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si a=b, no tiene solución.

II) Si a≠b, existe una única solución.

III) Si p=0 y a=b, tiene infinitas soluciones.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y II

24. Si el área de un rectángulo es $2x^2 + x - 6$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si un lado mide x + 2 el otro mide 2x – 3.

II) Si un lado mide 2x – 3 su perímetro es 6x – 2.

III) Es imposible que un lado mida x+1.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

25. Sea el sistema de ecuaciones

$\begin{array}{l}(2r+1)x-4ry=12\\(r+1)x-(2r-1)y=3\end{array}$, ¿para qué valor de **r** el sistema **NO** tiene soluciones?

A) $\frac{1}{4}$

B) $-\frac{1}{4}$

C) Distinto a $-\frac{1}{4}$.

D) Distinto a $\frac{1}{4}$.

E) No existe tal valor.

Prohibida su reproducción total o parcial.

26. Sea la ecuación en x, $ax+ab^2=bx+a^2b$, se puede determinar el valor numérico de x, sabiendo que:

(1) $a \neq b$
(2) $ab = 12$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

27. El área de un cuadrado es $(a^2 + 6a + 9)$ unidades cuadradas, si el lado aumenta en 2 unidades, entonces una expresión que representa la variación del área del nuevo cuadrado con respecto al área del cuadrado original en unidades cuadradas, es:

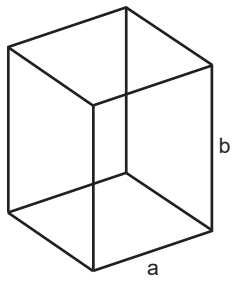
A) $4a + 16$
B) $a + 5$
C) $10a + 25$
D) $a^2 + 10a + 25$
E) 16

28. En un terreno rectangular de largo $(2x + 3)$ metros y ancho $(x + 5)$ metros, se construye una piscina rectangular.
Si la piscina tiene alrededor de ella una franja constante de 2 metros de ancho, ¿cuál es el área de esta franja, en metros cuadrados?

A) $2x + 6$
B) $12x + 16$
C) $12x + 14$
D) $6x + 12$
E) $6x + 18$

29. En el prisma de base cuadrada de la figura, la arista basal mide **a** unidades y la arista lateral mide **b** unidades.
¿Cuál(es) de las siguientes expresiones corresponde(n) a su área en unidades cuadradas?

I) $2a(a + 2b)$
II) $a^2 - 4b^2 + (a + 2b)^2$
III) $2((a + b)^2 - b^2)$



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

30. El largo y el ancho de un rectángulo miden $(2x + 3)$ y $(x - 2)$ metros respectivamente. Si el largo disminuye en 2 metros y el ancho en 1 metro, entonces la variación del área del nuevo rectángulo respecto del primero, en metros cuadrados es:

A) $4x + 3$
B) $3 - 4x$
C) 2
D) 3
E) 5

31. Si $m^3 - n^3 = 32$ y $m - n = 2$, entonces $mn =$

A) -12
B) 12
C) 4
D) $\frac{14}{3}$
E) Falta información para determinarlo.

Prohibida su reproducción total o parcial.

32. Si a y b son positivos tales que a > b, $a^2 + b^2 = 39$ y $ab = 18$, entonces $a^2 - b^2 =$

A) 3
B) 12
C) 15
D) 48
E) $\sqrt{3}$

33. Sea la ecuación en x, $ax - b = bx$, esta ecuación tiene una única solución si:

(1) $b \neq 0$
(2) $a \neq b$

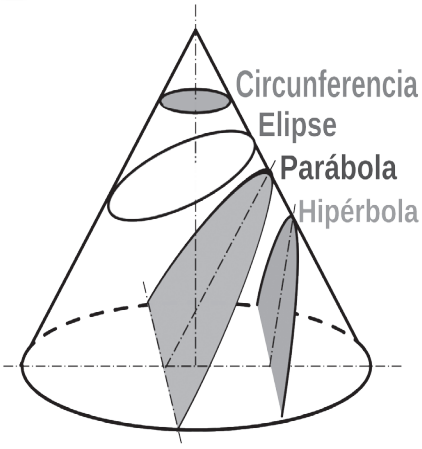
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS CAPÍTULO 4									
1. E	**2.** C	**3.** A	**4.** C	**5.** D	**6.** C	**7.** A	**8.** A	**9.** E	**10.** E
11. B	**12.** D	**13.** B	**14.** E	**15.** C	**16.** B	**17.** E	**18.** B	**19.** A	**20.** B
21. B	**22.** D	**23.** D	**24.** C	**25.** B	**26.** C	**27.** A	**28.** B	**29.** E	**30.** B
31. C	**32.** C	**33.** C							

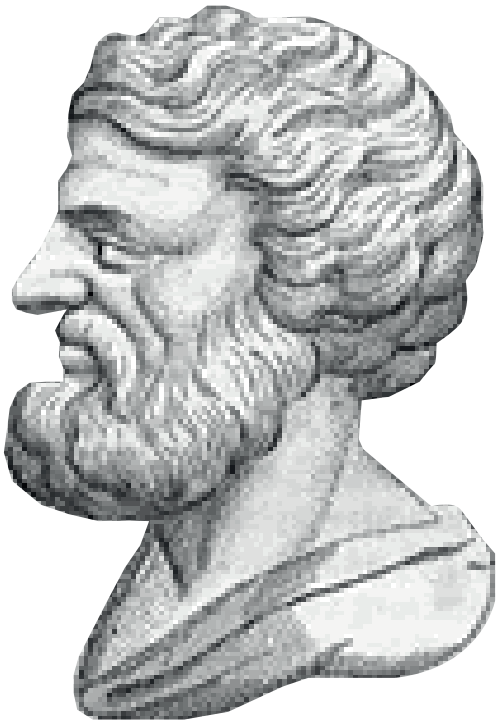
Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
5

ECUACIÓN Y FUNCIÓN CUADRÁTICA



Apolonio de Perga, (262 a.C? - 190 a.C?), en su gran obra, conocida como “Las Cónicas”, realizó un amplio estudio acerca de las curvas que se originan al cortar un cono por un plano, estas curvas se denominan secciones cónicas, que pueden ser un círculo, una elipse, una parábola y una hipérbola.
En este capítulo estudiaremos particularmente las parábolas, que son las curvas que resultan al graficar funciones cuadráticas.



CONCEPTOS CLAVES

- Ecuación cuadrática
- Fórmula general
- Discriminante
- Función cuadrática
- Relación entre los coeficientes de la ecuación y la gráfica.
- Forma canónica de una función cuadrática.

Prohibida su reproducción total o parcial.

RESOLUCIÓN DE ECUACIÓN CUADRÁTICA

Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Para resolver una ecuación de este tipo, existen diversos métodos, entre los más importantes, tenemos:

- Factorización
- Completación de cuadrados
- Uso de fórmula general

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^2 - 10x + 24 = 0$

Esta ecuación se puede resolver fácilmente, si factorizamos el trinomio $x^2 - 10x + 24$, para ello determinamos dos números que sumen -10 y multipliquen 24, estos son -4 y -6, luego la factorización del trinomio es $(x - 4)(x - 6)$, entonces la ecuación queda $(x - 4)(x - 6) = 0$. Como el producto es cero uno de los factores debe ser cero, por lo tanto $x - 4 = 0$ o $x - 6 = 0$, de donde se concluye que las soluciones son 4 o 6.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $x^2 - 8x - 20 = 0$

Esta ecuación la resolveremos mediante una completación de cuadrados.

Esta técnica consiste en formar un cuadrado de binomio, para ello procederemos de la siguiente forma:

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

Tomamos la mitad del coef. de x, y lo elevamos al cuadrado, en este caso $-8 : 2 = -4$, $(-4)^2 = 16$ por lo tanto formamos un 16 al lado izquierdo, para ello debemos sumar 36 a ambos lados de la ecuación:

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \qquad /+36$$
$$x^2 - 8x + 16 = 36$$

El lado izquierdo corresponde al desarrollo del cuadrado de binomio $(x - 4)^2$, por lo que la ecuación queda:

$$(x - 4)^2 = 36$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos lados:

$$x - 4 = \pm\sqrt{36}$$

Por lo tanto, $x - 4 = 6$ o $x - 4 = -6$, luego las soluciones son $x = 10$ o $x = -2$.

(*) La formación del cuadrado de binomio explicado de esta forma resulta cuando el coeficiente de x^2 es uno, de no ser así debes dividir previamente la ecuación por este coeficiente.

Prohibida su reproducción total o parcial.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $2x^2 + 5x - 12 = 0$

Esta ecuación la resolveremos utilizando la fórmula general.

Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, podemos hallar sus soluciones, utilizando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este ejemplo, a = 2, b = 5 y c = –12, entonces las soluciones son:

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4}$, es decir $x_1 = \frac{-5 + 11}{4} = \frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{-5 - 11}{4} = -4$

DETERMINACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA DADAS SUS SOLUCIONES

Supongamos que las soluciones de una ecuación cuadrática son x_1 y x_2, por lo visto en la técnica de factorización, la ecuación debe ser de la forma $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, desarrollando, obtenemos la ecuación:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Esta corresponde entonces a la ecuación cuadrática cuyas soluciones son x_1 y x_2.

NATURALEZA DE LAS SOLUCIONES

Sabemos que las soluciones de la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$,

las podemos hallar con la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, la cantidad subradical se denomina **discriminante** y se designa con la letra Δ.

Dependiendo del signo del discriminante, tenemos los siguientes casos:

Signo de Δ	Tipo de soluciones
Positivo	Reales y distintas
Cero	Reales e iguales
Negativo	No reales

(*) En el caso en que las soluciones no son reales, estas serán de la forma p + qi y p – qi con p y q numeros reales y $q \neq 0$, es decir serán complejas conjugadas.

Prohibida su reproducción total o parcial.

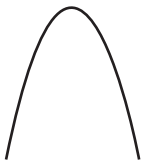
GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con a,b y $c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$) y su gráfica es una parábola.

• Concavidad

Las ramas de la parábola se abren hacia arriba o hacia abajo, dependiendo si el signo de a es positivo o negativo:

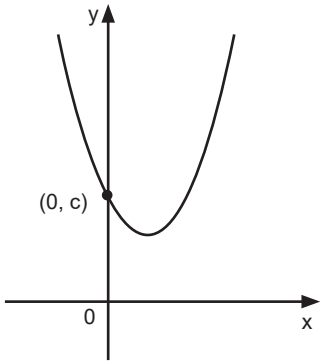
$a > 0$
las ramas se abren hacia arriba



$a < 0$
las ramas se abren hacia abajo

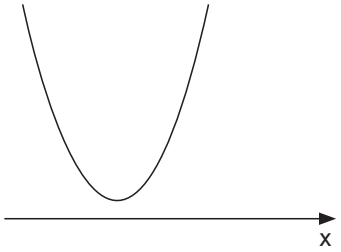
• Intersección con eje y

La intersección de la gráfica con el eje y es el punto (0,c):

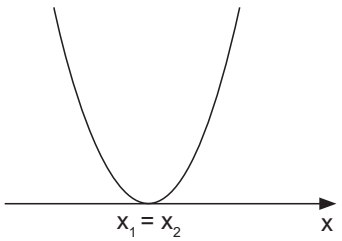


• Intersección con eje x

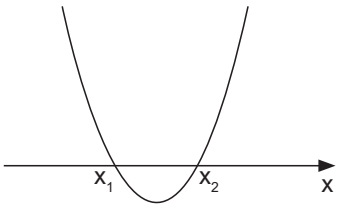
Las intersecciones de la gráfica de la función cuadrática, llamados ceros de la función, corresponden a las soluciones de la ecuación cuadrática asociada a la función, estos pueden ser dos, uno o ninguno, dependiendo del signo del discriminante, como lo habíamos visto anteriormente.



$b^2 - 4ac < 0$
La parábola no intersecta al eje x



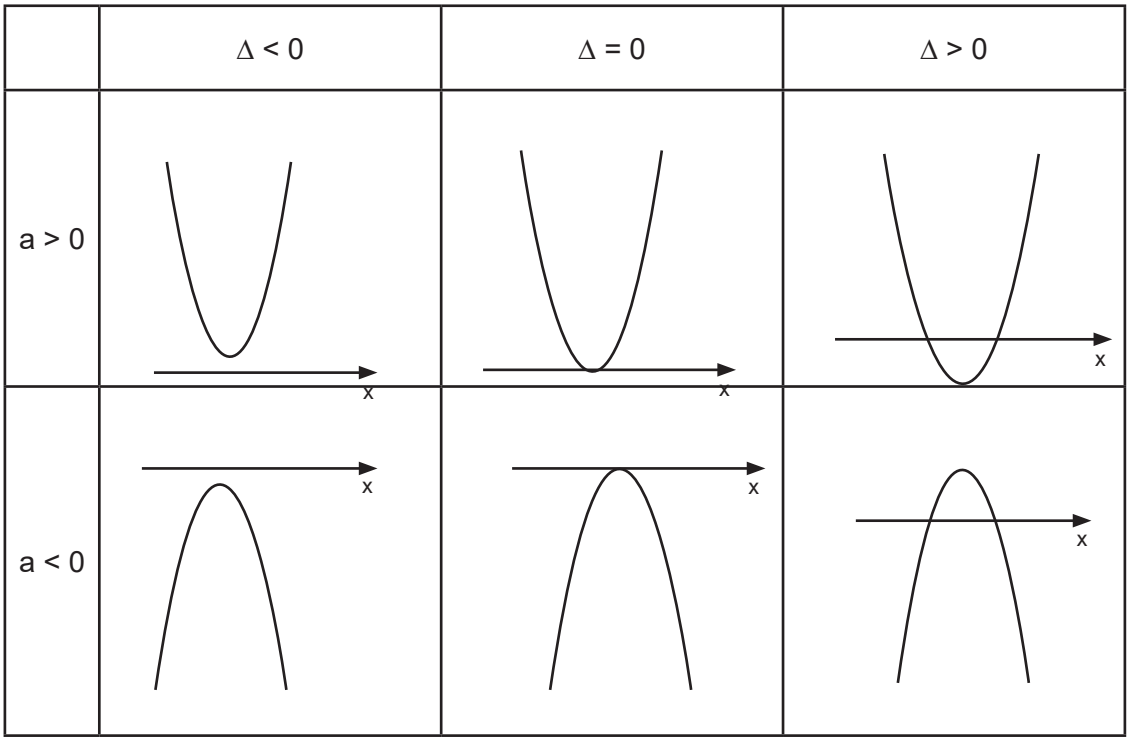
$b^2 - 4ac = 0$
La parábola es tangente al eje x



$b^2 - 4ac > 0$
La parábola intersecta al eje x en dos puntos

Prohibida su reproducción total o parcial.

Considerando el signo del coeficiente cuadrático y del discriminante, tenemos entonces los siguientes casos:

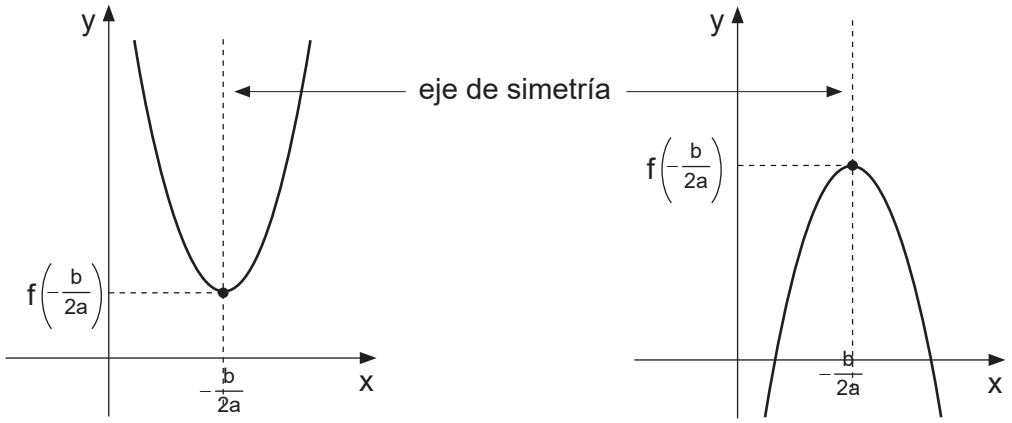


- **Vértice y eje de simetría**

El vértice es el punto más bajo en la gráfica cuando a > 0 y es el punto más alto cuando a < 0.

La abscisa del vértice corresponde a $x = -\frac{b}{2a}$ y su ordenada se puede calcular mediante $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, o bien $y = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$

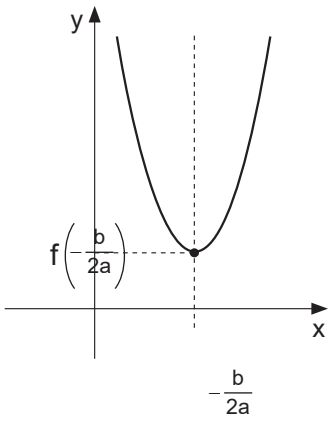
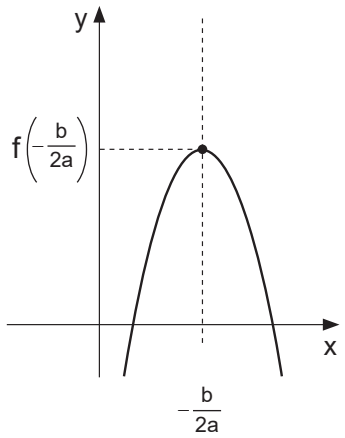
El eje de simetría es una recta que pasa por el vértice y es paralela al eje y, su ecuación es $x = -\frac{b}{2a}$.



Prohibida su reproducción total o parcial.

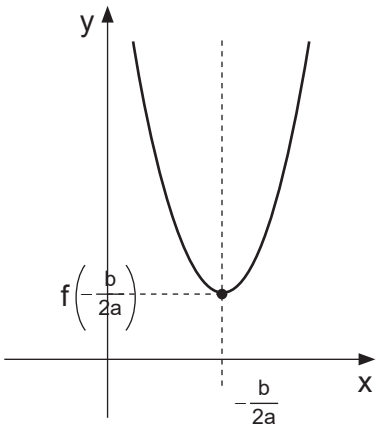
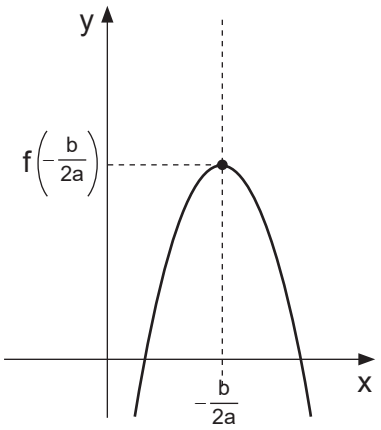
- **Máximo o mínimo**

Tanto el mínimo como el máximo de la función cuadrática se encuentran en el vértice, pero habrá un mínimo cuando a > 0 y un máximo cuando a < 0.

Caso a>0	Caso a<0
	
Acá la función tiene un **mínimo** y su valor es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ o bien $\frac{4ac - b^2}{4a}$	Acá la función tiene un **máximo** y su valor es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ o bien $\frac{4ac - b^2}{4a}$

- **Dominio y Recorrido**

El dominio de la función y = f(x) corresponde al conjunto de todos los valores de x y el recorrido corresponde a todos los valores de las imágenes.
El dominio de una función cuadrática corresponde al conjunto de los reales, Dom f = $\mathbb{R}$.
Mientras que el recorrido de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, depende del signo de a:

Caso a>0	Caso a<0
	
Recorrido: $\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty \right[$	Recorrido: $\left] -\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right]$

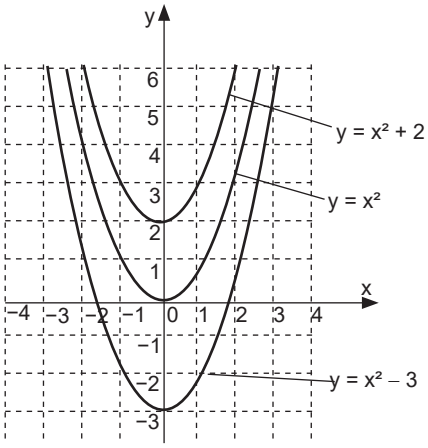
Prohibida su reproducción total o parcial.

TRASLACIONES A LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

• Traslación vertical

Si a una función cuadrática se le suma una constante positiva “k”, entonces su gráfico se traslada “k” unidades hacia arriba y si se le suma una constante negativa “k”, el gráfico se traslada “k” unidades hacia abajo.

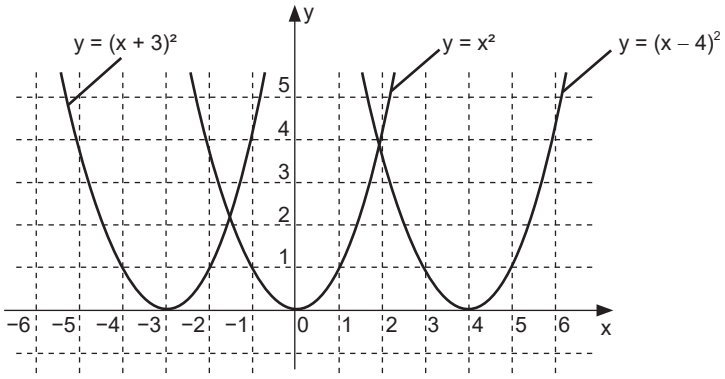
Ejemplos:



• Traslación horizontal

Si a la variable “x” de una función cuadrática se le suma una constante positiva “k”, entonces su gráfico se traslada “k” unidades hacia la izquierda y si se le suma una constante negativa “k”, el gráfico se traslada “k” unidades hacia la derecha.

Ejemplos:

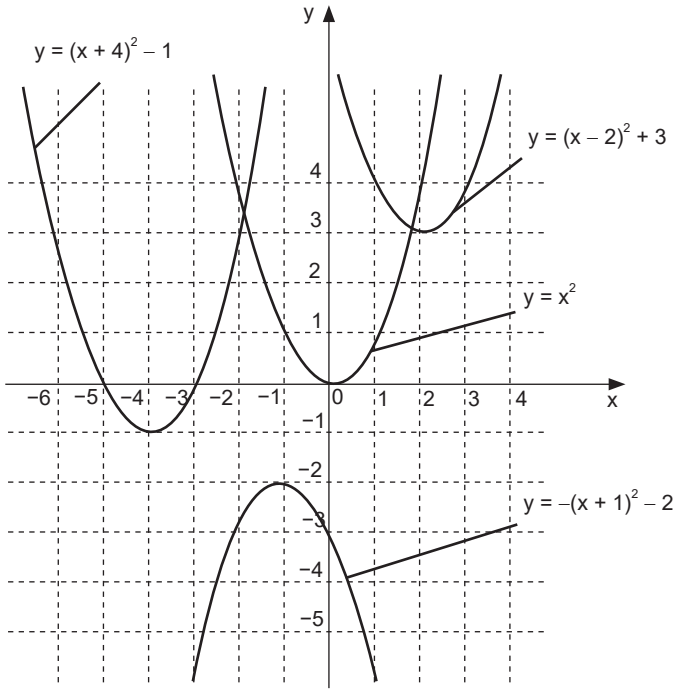


Prohibida su reproducción total o parcial.

FORMA CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática de la forma: $f(x) = a(x - h)^2 + k$ se denomina la forma canónica de una función cuadrática.
Por lo visto anteriormente, si h y k son números reales positivos entonces la gráfica de $f(x) = a(x - h)^2 + k$ corresponde al gráfico de $f(x) = ax^2$ trasladado "h" unidades la derecha y "k" unidades hacia arriba.

Ejemplos:



EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuál es la ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son los números reales $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$?

Solución:

Habíamos visto que si x_1 y x_2 son las soluciones de una ecuación de segundo grado, la ecuación es:

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$, o bien $x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

En este caso, $x_1 + x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$,

$x_1 \cdot x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{(-1)^2 - (\sqrt{5})^2}{4} = -1$, luego la ecuación es

$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 \cdot x_2 = 0 \leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$

Prohibida su reproducción total o parcial.

2. Sea la ecuación cuadrática en x, $ax^2 - 2x + a = 0$, ¿cuál es el conjunto que determina todos los valores de **a** para los cuales la ecuación tiene soluciones reales y distintas?

Solución:
Para que la ecuación tenga soluciones reales y distintas debe ocurrir que el discriminante debe ser positivo:
$b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 4 - 4 \cdot a \cdot a > 0 \rightarrow 4 - 4a^2 > 0 \rightarrow a^2 < 1 \rightarrow -1 < a < 1$, luego la respuesta es el intervalo $]-1, 1[$.

3. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = x^2 + 6x + a$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si a = 9, la gráfica es una parábola que intersecta al eje x en un solo punto.
II) Si a < 9, entonces la parábola intersecta en dos puntos al eje x.
III) Si a > 9, entonces la parábola no intersecta al eje x.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Solución:
En I, si la gráfica intersecta al eje x en un solo punto, entonces su discriminante debe ser cero:
$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 36 - 4 \cdot 1 \cdot a = 0 \rightarrow a = 9$, entonces I es correcta.
En II, para que la parábola intersecte en dos puntos al eje x, debe ocurrir que el discriminante debe ser positivo:
$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 36 - 4 \cdot 1 \cdot a > 0 \rightarrow a < 9$, entonces II es correcta.
Inversamente, si la parábola no intersecta al eje x, debe ocurrir que el discriminante debe ser negativo:
$\Delta = b^2 - 4ac < 0 \rightarrow 36 - 4 \cdot 1 \cdot a < 0 \rightarrow a > 9$, entonces III es correcta.
Respuesta, E) I, II y III.

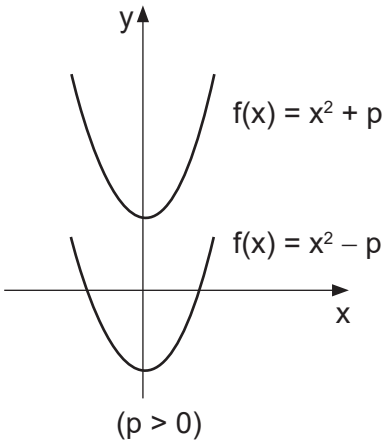
Prohibida su reproducción total o parcial.

4. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s) con respecto a la función definida en los reales mediante $f(x)=x^2 + p$, con $p \neq 0$?

I) El eje de simetría de la gráfica es el eje y.
II) Si $p > 0$, entonces el discriminante asociado a la función cuadrática es positivo.
III) El máximo de la función es p.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

Solución:
Sabemos que el gráfico de $f(x) = x^2 + p$, corresponde a la gráfica de $g(x) = x^2$, desplazada "p" unidades hacia arriba o hacia abajo dependiendo si p es positivo o negativo.



(p > 0)

Observa que en ambos casos, el eje de simetría es el eje y, entonces I es verdadero.
Si $p > 0$, el gráfico se trasladó "p" unidades hacia arriba, luego no intersecta al eje x, de lo que se deduce que su discriminante es negativo, por ende, II es falso.

El coeficiente de x^2 en la función, $f(x) = x^2 + p$ es positivo, luego sus ramas se abren hacia arriba, por lo tanto posee mínimo y no máximo, luego III es falso.
Respuesta: A) Solo I

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Las soluciones de la ecuación $2(x-1)^2 = 5$ están representadas en:

A) $1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

B) $-1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

C) $1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$

D) $-1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$

E) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

2. ¿En cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas, las soluciones son reales e iguales?

A) $x^2 - 4x = -1$

B) $x^2 - 2x = -4$

C) $2x^2 - 9 = 0$

D) $2x^2 + x = 1$

E) $4x^2 + 4x = -1$

3. ¿En cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas, las soluciones **no** son reales?

A) $x^2 + x = 1$

B) $x^2 - 2x = 4$

C) $2x^2 - 5x = -2$

D) $x^2 + x = 2$

E) $x^2 + 4x = -8$

4. Con respecto a las soluciones (o raíces) de la ecuación $x^2 + 4x = 32$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Son racionales.

II) Son positivas.

III) Son números enteros.

A) Solo I

B) Solo I y II

C) Solo I y III

D) Solo II y III

E) I, II y III

5. Si una de las soluciones de la ecuación en x, $3x^2 + 5kx + 2 = 0$ es -2, entonces k =

A) -1

B) 1

C) $\frac{7}{5}$

D) $-\frac{7}{5}$

E) $-\frac{1}{3}$

6. Si x es la solución de la ecuación $-x = \frac{3}{x-4}$, ¿cuál es el menor valor posible para la expresión: $\frac{3}{x-4}$?

A) -4

B) -3

C) -1

D) 1

E) 3

Prohibida su reproducción total o parcial.

7. ¿Cuál(es) de las siguientes ecuaciones **no** tienen soluciones en los números reales?

I) $2(x-2)^2 + 3 = 0$

II) $-\frac{3}{2}(x-1)^2 + 1 = 0$

III) $2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

8. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene como raíces (o soluciones) a $(2 + \sqrt{5})$ y $(2 - \sqrt{5})$?

A) $x^2 - 4x + 9 = 0$
B) $x^2 + 4x + 9 = 0$
C) $x^2 - 4x + 1 = 0$
D) $x^2 - 4x - 1 = 0$
E) $x^2 - 2x - 1 = 0$

9. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene raíces (o soluciones) $(a + b)$ y $(a - b)$?

A) $x^2 + ax + a^2 - b^2 = 0$
B) $x^2 - ax + a^2 - b^2 = 0$
C) $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$
D) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$
E) $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$

10. Con respecto a las soluciones de la ecuación $x + \frac{2}{x-1} = 4$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Son reales de distinto signo.
B) Son racionales positivas.
C) No son reales.
D) Son racionales negativas.
E) Ninguna de ellas.

11. Las soluciones de la ecuación en x, $2x^2 - 4x + k = 0$ son reales y distintas, entonces:

A) $k > 2$
B) $k < 2$
C) $k \leq 2$
D) $k < \frac{1}{2}$
E) $k > 1$

12. Las soluciones de la ecuación en x, $bx^2 - bx + b + 1 = 0$, con $b \neq 0$, son reales e iguales, entonces b =

A) $-\frac{3}{4}$
B) $\frac{3}{4}$
C) $\frac{4}{3}$
D) $-\frac{4}{3}$
E) No existe tal valor de b.

Prohibida su reproducción total o parcial.

13. Dada la ecuación en x,
$(k-1)x^2 + 2(k-2)x + (k-1) = 0$, ¿qué valor debe tomar **k** para que las raíces o soluciones sean reales e iguales?

A) $\frac{3}{2}$

B) $-\frac{2}{3}$

C) $-\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{2}$

E) No existe tal valor de k.

14. La ecuación en x,
$(k-2)x^2 + 2(k-4)x + k - 4 = 0$, con k un número real distinto de 2, tiene dos soluciones que no son números reales, entonces:

A) $k > 4$
B) $k = 4$
C) $k < 4$
D) $k > 2$
E) $k < 2$

15. Sea la ecuación cuadrática en x, $a(x-b)^2 + b = c$, se puede determinar que las soluciones de esta ecuación son reales y distintas, sabiendo que:

(1) $c > b$
(2) $a(b-c) < 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

16. Dada la ecuación $x^2 + 10x - 15 = 0$, ¿qué número real p se debe sumar a ambos lados de la ecuación para completar el cuadrado de un binomio en el lado izquierdo de ella y cuáles son las soluciones de esta ecuación?

A) p = 40 y las soluciones son $(-5-\sqrt{115})$ y $(-5+\sqrt{115})$.
B) p = – 10 y las soluciones son $(10-\sqrt{5})$ y $(10+\sqrt{5})$.
C) p = 40 y las soluciones son $(-5-\sqrt{40})$ y $(-5+\sqrt{40})$.
D) p = – 25 y las soluciones no son reales.
E) p = 25 y las soluciones no son reales.

17. **a** y **b** son números reales, ¿cuál(es) de las siguientes ecuaciones en x, tiene(n) **siempre** solución(es) en el conjunto de los números reales?

I) $(x-b)^2 - \frac{a}{b} = 0$, con $ab>0$.
II) $ax^2 + b = a$, con $a > b$.
III) $ax^2 + b = 0$, con $ab < 0$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

18. El área de un rectángulo es 50 cm^2 y su perímetro es 30 cm. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar su largo "x"?

A) $x^2 - 15x - 50 = 0$
B) $x^2 + 15x + 50 = 0$
C) $x^2 - 15x + 50 = 0$
D) $x^2 - 30x + 50 = 0$
E) $x^2 + 30x + 50 = 0$

Prohibida su reproducción total o parcial.

19. Se tienen tres números consecutivos donde el menor es "x".
Si el doble del producto de los dos menores tiene 20 unidades más que el cuadrado del mayor, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el menor de los términos?

A) $2x(x + 1) + 20 = (x + 2)^2$
B) $2x(x + 1) - 20 = (x + 2)^2$
C) $2x(x + 1) = (20 + x + 2)^2$
D) $2x(x + 1) = 20 - (x + 2)^2$
E) $2x(x + 1) = (20 - (x + 2))^2$

20. La edad de un hermano es el doble de la edad del otro más cuatro años.
Si el producto de sus edades es 160, ¿cuál es la edad del mayor?

A) 8 años
B) 10 años
C) 16 años
D) 20 años
E) 24 años

21. En un rectángulo, el largo mide 2 cm más que el ancho. Si los lados se aumentan en 2 cm, se forma un segundo rectángulo cuya área sumada con la del primero resulta 288 cm^2. ¿Cuánto mide el ancho del rectángulo original?

A) 8 cm
B) 10 cm
C) 12 cm
D) 14 cm
E) 18 cm

22. Las aristas de un cubo disminuyen en 2 cm, disminuyendo el volumen del cubo en 296 cm^3. ¿Cuánto medían inicialmente las aristas?

A) 4 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 36 cm
E) 48 cm

23. Un número tiene dos cifras, tales que la de las decenas tiene una unidad más que el doble de la otra. Si al número se le suma el producto de las cifras resulta 94, entonces ¿cuál es la diferencia de las cifras?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 7
E) 8

24. Por el arriendo de una casa en la playa, a un grupo de amigos le cobran $ 60.000 por el fin de semana. Para cancelar este valor lo dividieron en partes iguales, pero posteriormente dos de ellos no pudieron asistir por lo que la cuota tuvo que subir en $ 1500 para reunir el total del arriendo, entonces ¿cuántos amigos iban a ir al comienzo?

A) 7
B) 8
C) 10
D) 12
E) 15

Prohibida su reproducción total o parcial.

25. Un campesino ha plantado lechugas en filas, poniendo en cada una de ellas la misma cantidad, de modo que la cantidad de lechugas por fila supera en dos a la cantidad de filas.
Al otro año decide aumentar en cuatro la cantidad de filas y disminuir en dos la cantidad de lechugas por fila.
Si la cantidad de lechugas plantadas durante los dos años es 756, ¿cuántas fueron plantadas en cada fila en el primer año?

A) 20
B) 22
C) 24
D) 25
E) 26

26. La gráfica de la función f definida en los reales mediante $f(x) = x^2 + a$, pasa por el punto (a, 2), entonces el (los) valor(es) de a es (son):

A) Solo 1
B) Solo -1
C) -2 o 1
D) Solo -2
E) No existen tales valores.

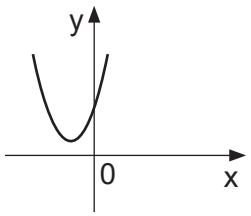
27. Con respecto a la parábola de ecuación: $y = -x^2 + 4x - 3$, se afirma que:

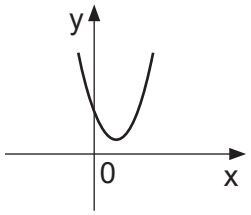
I) Intercepta al eje y en $(0,-3)$.
II) Intercepta al eje x en dos puntos.
III) Su vértice es el punto $(-2,-7)$.

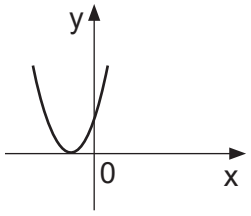
¿Cuál(es) de las afirmaciones anteriores es (son) verdadera(s)?

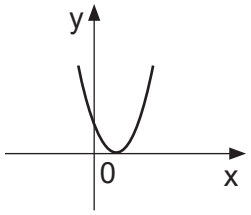
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

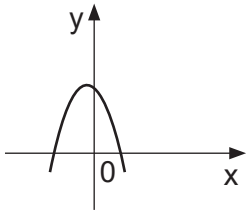
28. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función cuadrática: $y = x^2 - 6x + 9$?

A)


B)


C)


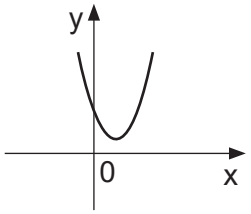
D)


E)


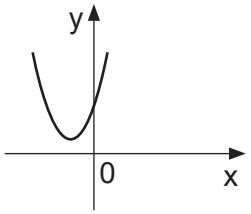
Prohibida su reproducción total o parcial.

29. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función: $f(x) = (x + 2)^2 + 1$?

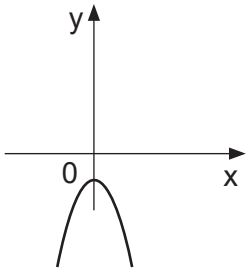
A)



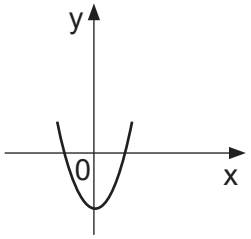
B)



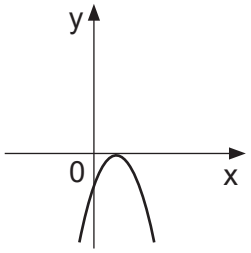
C)



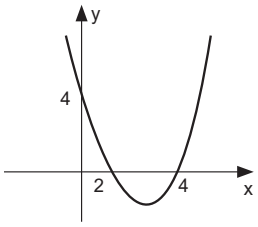
D)



E)



30. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, tiene como gráfico la parábola de la figura?



A) $g(x) = (x - 3)^2 + 1$

B) $h(x) = -(x - 3)^2 - 1$

C) $j(x) = (x - 3)^2 + 2$

D) $k(x) = 2(x - 2)(x - 4)$

E) $m(x) = \frac{1}{2}(x - 2)(x - 4)$

31. Sea la función f definida en los reales, mediante $f(x) = -2(x - 3)(x - 5)$, entonces las coordenadas del vértice de la parábola asociada a su gráfica son:

A) (4, –2)
B) (4, 2)
C) (4, –1)
D) (4, 1)
E) (2, –6)

32. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a la función $f(x) = -(x^2 + 4)$ si el dominio son todos los números reales?

A) La gráfica no intersecta al eje x.
B) El vértice de la parábola asociada a esta función está en el eje y.
C) El vértice de la parábola asociada a esta función está en el eje x.
D) Su gráfica tiene al eje y como eje de simetría.
E) El valor de x donde alcanza su máximo es x = 0.

Prohibida su reproducción total o parcial.

33. ¿Cuál de las siguientes funciones definidas en los reales, tiene como recorrido los reales menores o iguales que −1?

A) $g(x) = (x - 3)^2 - 1$
B) $h(x) = -(x - 3)^2 + 1$
C) $j(x) = -(x - 1)^2 + 2$
D) $k(x) = -(x - 1)^2 - 2$
E) $t(x) = -(x - 4)^2 - 1$

34. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = a(x - 2)^2 + 1$, con a un número real distinto de cero. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $a > 0$, el valor mínimo de f se alcanza para $x = 2$.
II) Si $a < 0$, el recorrido de f es $]-\infty, 1]$.
III) Si la gráfica pasa por el origen, entonces $a = -\frac{1}{4}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

35. Se puede determinar la función cuadrática, definida en los reales mediante $f(x) = ax^2 + c$, sabiendo que:

(1) La gráfica asociada a esta función pasa por el punto (1,4).
(2) Su mínimo es y = 1.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

36. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s), con respecto a las funciones de la forma $f(x) = (a - 1)x^2 - a$ con dominio los números reales?

I) Si $a > 1$, entonces la gráfica de la función es una parábola que se abre hacia arriba.
II) La gráfica de f intersecta al eje de las ordenadas en el punto $(0, -a)$.
III) Si $a < 1$, entonces el mínimo de la función es $-a$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

37. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = ax^2 + (a + 2)x + 2$, con $a \neq 0$.
¿Cuál de las siguientes relaciones se debe cumplir, para que la gráfica de la función intersecte al eje x en un solo punto?

A) $a = -2$
B) $a = 2$
C) $a^2 - 4a + 4 > 0$
D) $a^2 - 4a + 4 < 0$
E) $\frac{-(a + 2) + \sqrt{(a + 2)^2 - 8}}{2a}$

38. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - 4bx - 2$, con $b \neq 0$, entonces el valor de x donde la función alcanza su valor mínimo es:

A) 2b
B) −2b
C) b
D) $4b^2 + 2$
E) $-4b^2 - 2$

Prohibida su reproducción total o parcial.

39. ¿Cuál es el conjunto de todos los valores de a, para que la función definida por $f(x) = (x - a)^2 + 4a$, intersecte al eje x en dos puntos?

A) $]0, \infty[$
B) $]-\infty, 0[$
C) $]-\infty, 0]$
D) $[0, \infty[$
E) $\varnothing$

40. La gráfica de la función $f(x) = (a - 2)x^2 + 2(a - 1)x + a - 1$, con $a \neq 2$ y dominio los números reales, intersecta en dos puntos al eje x, si:

A) $a < 1$
B) $a = 1$
C) $a > 1$
D) $a > 2$
E) $a < 2$

41. Sea la función definida en los reales, mediante $f(x) = a(x - h)^2 + k$, con $a \neq 0$. Se puede determinar el eje de simetría de la parábola que representa a la gráfica de esta función sabiendo que:

(1) $h = 3$.
(2) El vértice de la parábola es el punto (3,2).

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

42. Sea la función cuadrática $f(x) = x^2 - ax - 2a^2$ con $a \neq 0$ y dominio el conjunto de los números reales. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La gráfica intercepta al eje x en dos puntos, para todo valor de **a**.
II) El valor mínimo de la función es $-\frac{9a^2}{4}$.
III) La gráfica asociada a esta función pasa por el punto $(-2a, -4a^2)$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

43. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s) con respecto a la función definida en los reales mediante $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$?

I) Si $b = 0$, el mínimo es $y = c$.
II) Si $c = 0$, uno de los ceros de la función es $x = -\frac{b}{a}$.
III) Si $b = 0$ y $c = 0$, entonces su gráfico intersecta a los ejes en el origen.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

44. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s) con respecto a la función definida en los reales mediante $f(x) = (x - p)^2$?

I) El vértice de la parábola asociada a su gráfica está en el eje x.
II) La ordenada del punto donde la gráfica intercepta al eje y es positiva.
III) El eje de simetría de la gráfica es la recta de ecuación $x = p$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

45. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = x^2 - ax + 6$, con $a \neq 0$. Si el valor de x donde la función alcanza su valor mínimo es –2, entonces a =

A) 4
B) –8
C) –4
D) 4 o –4
E) $-\sqrt{32}$ o $\sqrt{32}$.

46. La función $h(t) = pt - 5t^2$, modela la altura (en metros) que alcanza un proyectil al ser lanzado verticalmente hacia arriba a los t segundos. Se puede determinar esta función si se sabe que:

(1) A los 2 segundos alcanza una altura de 30 metros.
(2) La altura máxima la alcanza a los 2,5 segundos.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

47. Las ganancias de una empresa, medidas en millones de dólares, se modelan según la función cuadrática

$G(t) = -\frac{6}{32}(t - 9)^2 + 12$, donde t es la cantidad de años desde que fue inaugurada. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) A los 9 años se obtuvo la máxima ganancia.
B) Al primer año no obtuvo ganancia.
C) A los 8 y a los 10 años obtuvo la misma ganancia.
D) Después de los 9 años sus ganancias empezaron a disminuir.
E) La ganancia anual siempre fue inferior a 12 millones de dólares.

Prohibida su reproducción total o parcial.

48. La altura h(t) alcanzada, medida en metros, de un proyectil se modela mediante la función $h(t) = 20t - 5t^2$, donde t es la cantidad de segundos que transcurren hasta que alcanza dicha altura.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) A los 4 segundos llega al suelo.
II) A los 2 segundos alcanza su altura máxima.
III) Al primer y tercer segundo después de ser lanzado alcanza la misma altura.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

49. Se puede determinar el valor numérico del máximo de la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 2ax - a$, si se conoce:

(1) El valor numérico de la abscisa del vértice de la parábola asociada a la gráfica de esta función.
(2) El valor numérico de uno de los ceros de esta función.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

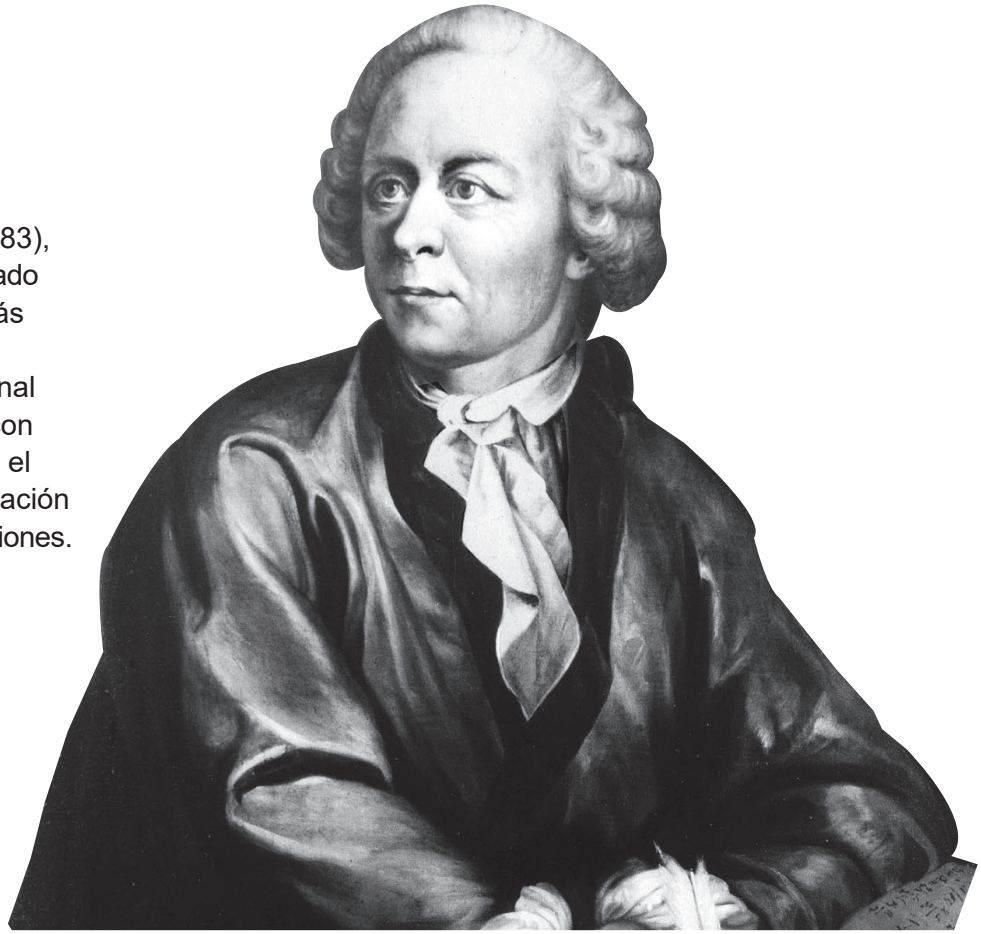
RESPUESTAS CAPÍTULO 6									
1. C	**2.** E	**3.** E	**4.** C	**5.** C	**6.** B	**7.** D	**8.** D	**9.** D	**10.** B
11. B	**12.** D	**13.** A	**14.** A	**15.** B	**16.** C	**17.** D	**18.** C	**19.** B	**20.** D
21. B	**22.** C	**23.** C	**24.** C	**25.** A	**26.** C	**27.** C	**28.** D	**29.** B	**30.** E
31. B	**32.** C	**33.** E	**34.** E	**35.** C	**36.** C	**37.** B	**38.** A	**39.** B	**40.** C
41. D	**42.** C	**43.** D	**44.** D	**45.** C	**46.** D	**47.** E	**48.** E	**49.** D	

Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
6

FUNCIONES

Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático suizo, considerado uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos, el número irracional e=2,71828…, se designa con esta letra en su honor. Fue el primero en introducir la notación f(x) para designar a las funciones.



CONCEPTOS CLAVES

- Dominio y Recorrido
- Imágenes y preimágenes
- Gráficos de funciones
- Traslación de gráficos
- Función compuesta

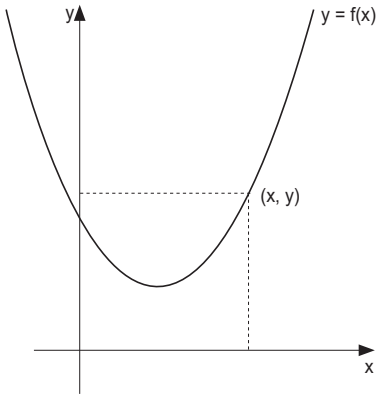
Prohibida su reproducción total o parcial.

CONCEPTO DE FUNCIÓN

Una función f definida de A a B relaciona los elementos de A con los de B, de modo que

(1) Todo elemento de A está relacionado con un elemento de B.
(2) Todo elemento de A se relaciona con un único elemento de B.

A se denomina el conjunto de partida y B el conjunto de llegada, al elemento del conjunto de partida se llama preimagen y al elemento con que se relaciona de B se llama imagen y se designa con la letra y.
Si la función la designamos con la letra f, entonces la notación y = f(x) hace alusión que “y” es la imagen de “x”(o que “x” es la preimagen de “y”). El conjunto de las preimágenes se llama dominio y el conjunto de las imágenes se llama recorrido.
En un sistema cartesiano, la imagen la pondremos en el eje vertical o eje de las ordenadas y la preimagen en el eje horizontal o eje de las abscisas.



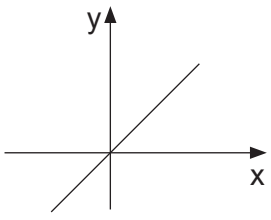
El gráfico de la función está formado por puntos (x,y) donde y = f(x).

GRÁFICOS DE FUNCIONES IMPORTANTES

Es importante comprender y recordar las gráficas de las siguientes funciones:

- **Función lineal y afín**

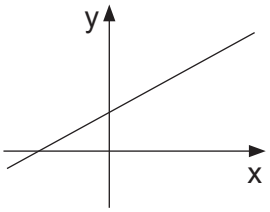
y = mx



Dom f: $\mathbb{R}$
Rect f: $\mathbb{R}$

f.lineal (pasa por el origen)

y = mx + n

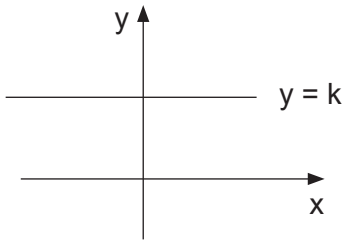


Dom f: $\mathbb{R}$
Rect f: $\mathbb{R}$

f.afín (no pasa por el origen)

Prohibida su reproducción total o parcial.

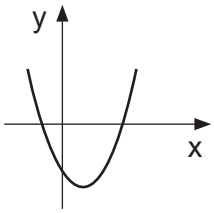
- **Función constante** $y=x$



Dom f: $\mathbb{R}$

Rec f: {k}

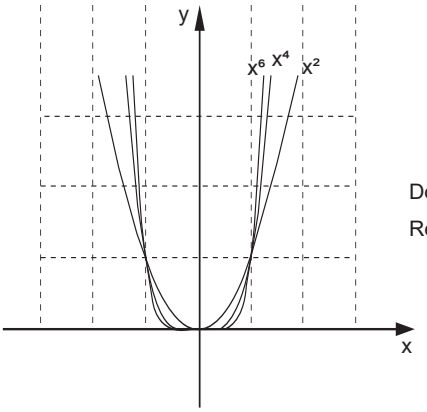
- **Función cuadrática (vista en cap. anterior)** $y = ax^2 + bx + c$



Dom f: $\mathbb{R}$

Rec f: $\left[\frac{4ac - b^2}{4a}, \infty \right[$ si $a > 0$ o $\left] -\infty, \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$ si $a < 0$

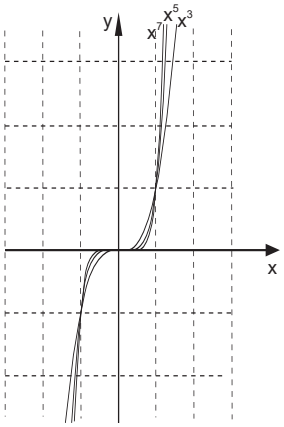
- **Función potencia** $y = x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$



Dom f: $\mathbb{R}$

Rec f: $\mathbb{R}_0^+$

F. Potencia Par

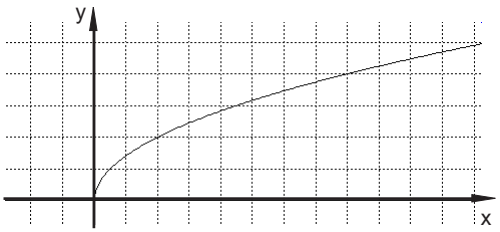


Dom f: $\mathbb{R}$

Rect f: $\mathbb{R}$

F. Potencia impar

- **Función raíz cuadrada** $y = \sqrt{x}$ * corresponde a la función inversa de la función cuadrática



Dom f: $\mathbb{R}_0^+$

Rec f: $\mathbb{R}_0^+$

Prohibida su reproducción total o parcial.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Supongamos que tenemos las funciones f y g, se denomina la composición f o g, diremos “f” compuesto con “g”, a la función que resulta de que primero actúa la función “g” y sobre esta imagen obtenida actúa posteriormente la función “f”.

Por definición, se tiene que $(fog)(x) = f(g(x))$.

Por ejemplo, supongamos que tenemos las funciones $f(x) = x^2 + x + 5$ y $g(x) = 2x + 3$, entonces $(fog)(x) = f(g(x))$, si sustituimos $g(x)$ por $2x + 3$, nos queda $f(2x + 3)$, ahora sustituimos $2x + 3$ en la “x” de la función f:

$f(2x + 3) = (2x + 3)^2 + (2x + 3) + 5$, desarrollando y reduciendo términos obtenemos que $(fog)(x) = 4x^2 + 14x + 17$.

Ahora calcularemos $(gof)(x)$, tenemos que $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x + 5) = 2(x^2 + x + 5) + 3 = 2x^2 + 2x + 13$.

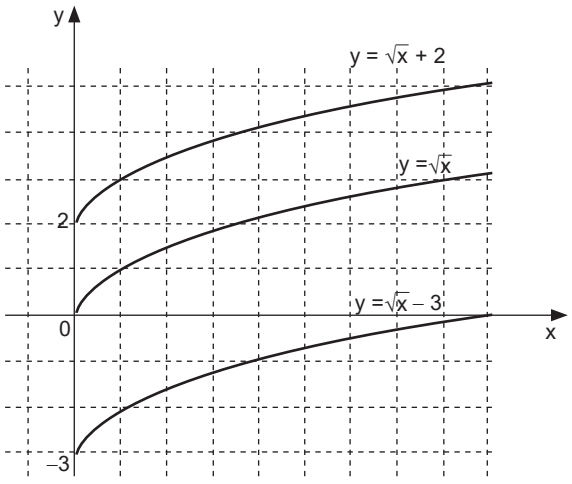
Como habrás observado, en general la composición de funciones no es conmutativa, es decir $(fog)(x) \neq (gof)(x)$.

TRANSFORMACIONES A LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES

Veremos a continuación como algunos cambios en la ecuación de una función modifica el gráfico de esta.

- **Traslación vertical**
  Si en la función $y = f(x)$ le sumamos o restamos una constante positiva “k” a $f(x)$ entonces la gráfica se traslada respectivamente hacia arriba o hacia abajo en “k” unidades.

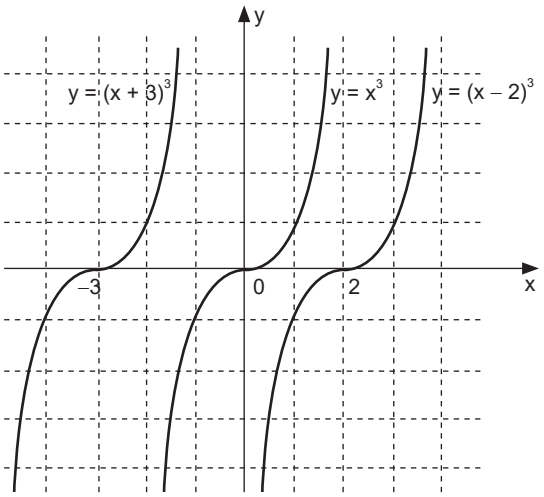
  Ejemplo:



Prohibida su reproducción total o parcial.

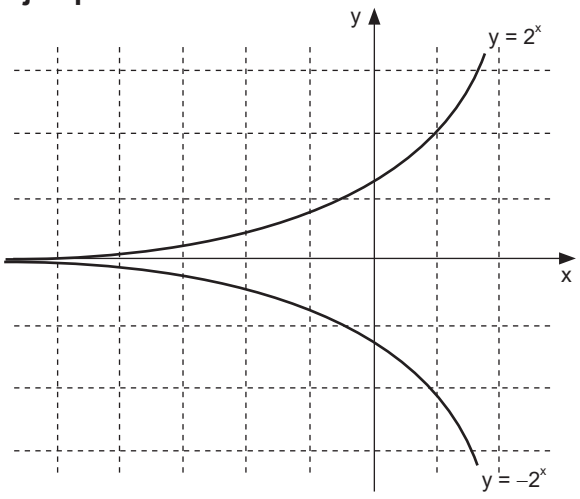
- **Traslación horizontal**
  Si en la función y = f(x) le sumamos o restamos una constante positiva “k” a la variable “x” entonces la gráfica se traslada respectivamente hacia la izquierda o hacia la derecha en “k” unidades.

  Ejemplo:



- **Reflexión en torno al eje x**
  Si en la función y = f(x), cambiamos el signo a f(x) entonces la gráfica se refleja en torno al eje x.

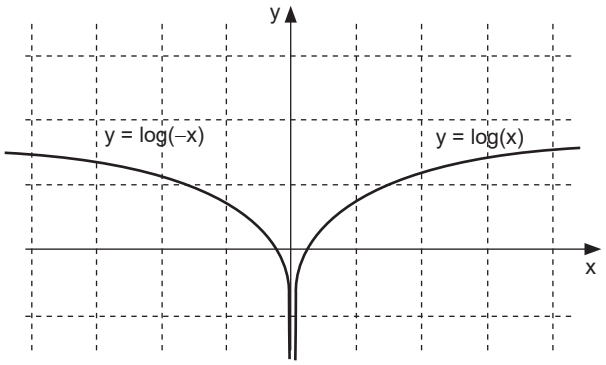
  Ejemplo:



Prohibida su reproducción total o parcial.

- **Reflexión en torno al eje y**
  Si en la función y = f(x), cambiamos el signo de "x" entonces la gráfica se refleja en torno al eje y.

  Ejemplo:



EJERCICIOS RESUELTOS

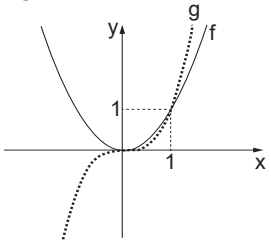
1. Sea la función f, cuyo dominio es el intervalo [h, ∞[, definida por $f(x) = \sqrt{x - h} + 2$.
Si la preimagen de 6 es 4, ¿cuál es el valor de h?

Solución:
Según la información dada, tenemos que f(4) = 6, o bien, que x = 4 si y = 6, reemplazando esto en la ecuación $y = \sqrt{x - h} + 2$, obtenemos $6 = \sqrt{4 - h} + 2$, si transponemos el 2 y elevamos al cuadrado a ambos lados de la ecuación, se tiene $16 = 4 - h$, por lo tanto $h = -12$.

2. Sean las funciones definidas en los reales mediante $f(x) = ax^2$ y $g(x) = ax^3$, con $a \neq 0$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

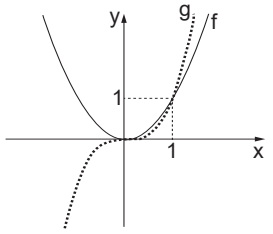
I) Si a > 0 y x < 1, entonces f < g.
II) Las gráficas se intersectan en dos puntos.
III) Si a < 0 y x > 1, entonces g < f.

Solución:
En la siguiente gráfica se muestra el caso en que a > 0, observa que si x < 1, entonces f > g, luego I es falsa.

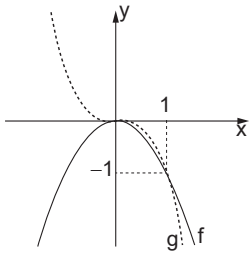


Prohibida su reproducción total o parcial.

II) Es verdadera, ya que tanto para a>0 y a<0, las gráficas se interceptan en el (0,0) y en el (1,1).

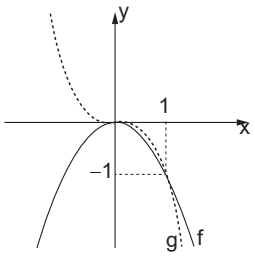


Caso a>0



Caso a<0

III) Si a<0 y x>1, observa en la siguiente gráfica que efectivamente g < f, luego III es verdadera.



Conclusión, II y III son verdaderas.

3. Un técnico cobra un costo fijo por la visita a domicilio más un cierto valor por hora trabajada. Se sabe que por 3 horas cobra $57.000 y por 4 horas $72.000. Determina la función que modela el costo según la cantidad x de horas trabajadas.

Solución:

Supongamos que por la visita a domicilio cobra $a y que cobra $b por cada hora de trabajo, entonces el costo por t horas de trabajo está dado por la función C(t)=a+bt.

Tenemos que para 3 horas cobra $57.000, entonces a+3b=57000, por 4 horas cobra $57.000, entonces a+4b=72.000.

Resolviendo el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} a + 3b = 57000 \\ a + 4b = 72000 \end{array}\right|$, obtenemos que b=15.000 y a=12.000,

luego la función que determina el costo a cancelar por x horas de trabajo es C(x)=12000+15000x.

4. Un modelo para la temperatura T, en grados Celcius (°C), de un líquido está dada por $T(t) = 80 - 2t$, donde t es el tiempo transcurrido en minutos.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) A los 12 minutos la temperatura del líquido será de 56 °C.
II) Para que la temperatura del líquido llegue a 0° C se requieren más de 30 min.
III) La temperatura disminuye a razón de 2 °C por minuto.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

Solución:

En I, para obtener la temperatura que habrá a los 12 minutos, basta reemplazar t por 12 en la función dada: $T(12) = 80 - 2 \cdot 12 = 56$, por lo tanto I es correcta.

En II, reemplazamos la temperatura por 0 °C, $0 = 80 - 2t$, despejando t se obtiene $t=40$, luego a los 40 minutos el líquido tendrá 0 °C, luego II es correcta.

La función $T(t) = 80 - 2t$, es de la forma $y=mx+n$, es decir es una función afín con pendiente m igual a -2, esto indica que la variable dependiente, en este caso la temperatura, disminuye 2 °C por cada unidad que aumenta la variable independiente, en este caso el tiempo, luego III es también es correcta.

Respuesta, E) I, II y III.

5. Sea la función f definida en los reales, mediante $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = x^2 - 6x$, entonces f(x)=

Solución:

Lo que haremos para resolver esta situación es hacer un cambio de variable.

Para ello a la expresión $\frac{x+2}{3}$ la designaremos con una nueva letra, por ejemplo u, entonces:

$u = \frac{x+2}{3}$, en esta ecuación despejamos x, con lo que obtenemos $x=3u-2$, entonces la expresión dada $f\left(\frac{x+2}{3}\right) = x^2 - 6x$, se transforma en $f(u) = (3u-2)^2 - 6(3u-2)$, desarrollando y reduciendo términos, obtenemos $f(u) = 9u^2 - 30u + 16$, ahora cambiamos "u" por "x" y obtenemos finalmente que $f(x) = 9x^2 - 30x + 16$

6. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x+2)=2f(x)+5$. Si $f(6)=59$, entonces $f(0)=$

Solución:

Como acá no tenemos explícitamente la función f, lo que haremos es darnos diversos valores para "x" de modo de relacionar las preimágenes 0 y 6.

Si nos damos el valor $x=4$, en la expresión dada podemos formar al lado izquierdo f(6) cuyo valor conocemos, entonces:

(1) Si $x=4 \rightarrow f(6) = 2f(4)+5$
(2) Si $x=2 \rightarrow f(4) = 2f(2)+5$
(3) Si $x=0 \rightarrow f(2) = 2f(0)+5$

En (1) reemplazamos f(6) por 59 y despejamos f(4) lo cual nos da 27, reemplazamos $f(4)=27$ en (2) y despejamos f(2) lo que da 11, reemplazando $f(2)=11$ en (3), despejamos f(0) y obtenemos 3.

Respuesta $f(0)=3$

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Si $f(x) = x^2 - 2x - 3$, entonces $f(2) + f(-1) =$

A) -7
B) -6
C) -3
D) 3
E) 5

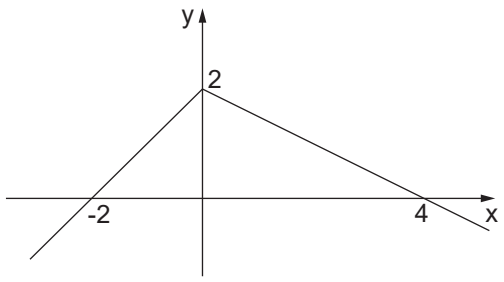
2. Sea la función $f(x) = 2x + 3$, entonces $f(a + b) - f(b) =$

A) $2a$
B) $2a + 6$
C) $2a - 3$
D) $2a - b$
E) $2a - b + 6$

3. Si $f(x) = ax + b$, ¿cuánto valen **a** y **b** respectivamente, si $f(2) = -1$ y $f(3) = -2$?

A) -1 y -1
B) -1 y 1
C) -2 y -1
D) -2 y 1
E) -3 y 5

4. En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función f definida en los reales.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) El máximo de la función es 2.
B) El recorrido de la función es $]-\infty , 2]$.
C) La imagen de 6 es -1.
D) Las preimágenes de 1 son -1 y 2.
E) Todo elemento del recorrido tiene 2 preimágenes.

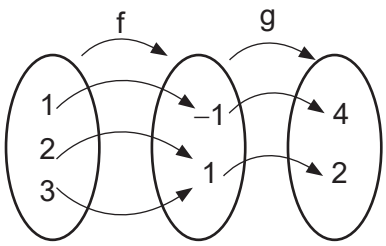
5. Sea la función definida en los reales mediante $f(x)=ax^n$, se puede determinar **a** y **n** sabiendo que:

(1) $f(2) = -16$
(2) $f(3) = -54$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

6. Sean las funciones f y g que se ilustran en el diagrama siguiente:



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) gof (2) = 2
II) gof (1) = 4
III) gof (3) = 2

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

7. Sean las funciones f y g definidas en los reales mediante $f(x) = 2x-1$ y $g(x) = x^2$, entonces ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

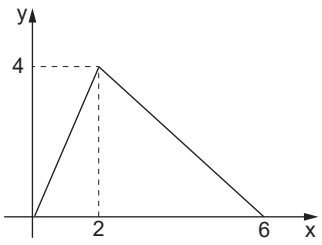
A) $(g \circ f)(5) = 81$
B) $(f \circ g)(x) = 2x^2-1$
C) Existe más de un valor de x de modo que $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$
D) El recorrido de $(f \circ g)(x)$ es el intervalo $[-1, \infty[$.
E) El recorrido de $(g \circ f)(x)$ es el intervalo $[0, \infty[$.

8. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto {2,4,6}, definida por $f(x) = x-1$, sea g una función con dominio {1,3,5}, definida por $g(x) = x+1$ y sea h una función con dominio {1,2,3,4,5,6} definida por $h(x) = 2x$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) 2 **no** pertenece al dominio de f o (g o h).
II) 2 **no** pertenece al dominio de g o (f o h).
III) 2 **no** pertenece al dominio de h o (f o g).

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

9. En la figura se muestra la gráfica de la función f definida en:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) (f o f) (2) = 2
B) (f o f) (4) = 4
C) (f o f) (1) = 4
D) (f o f) (5) = 1
E) (f o f) (3) = 3

Prohibida su reproducción total o parcial.

10. Sean las funciones f y g definidas en el conjunto de los números reales mediante $f(x) = x^2$ si $x>1$ y $2x - 3$ si $x\leq 1$; $g(x) = -x+2$ si $x>0$ y $3x^2 - 2$ si $x\leq 0$

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $fog(2) = -3$

II) $gof(3) = -7$

III) $go(fog)(-1) = 1$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

11. Si f y g son funciones definidas en el conjunto de los números reales mediante $f(x+2) = 3x + 1$ y $g(x+2) = 2x - 1$, entonces $(f \circ g)(x) =$

A) $(3x - 1)(2x - 3)$
B) $6x - 20$
C) $6x - 6$
D) $6x - 5$
E) $6x - 15$

12. Sean f y g funciones definidas en los reales, se puede determinar (fog)(5), sabiendo que:

(1) $g(5) = -10$ y $f(-10) = -3$.

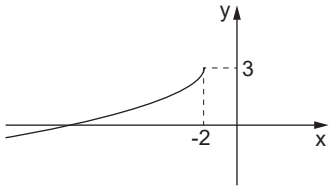
(2) $(fog)(2x+1) = -4x+5$

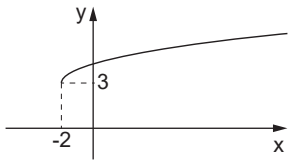
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

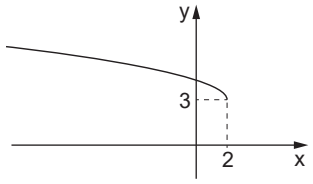
13. Sea la función f definida por $f(x) = \sqrt{2x + k}$, cuyo dominio es el intervalo $\left[-\frac{k}{2}, \infty\right[$. Si la preimagen de 5 es 11, ¿cuál es el valor de k?

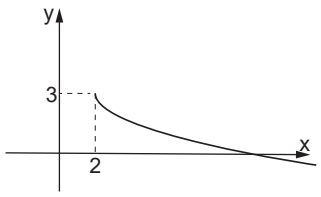
A) -17
B) 1
C) 3
D) 14
E) 111

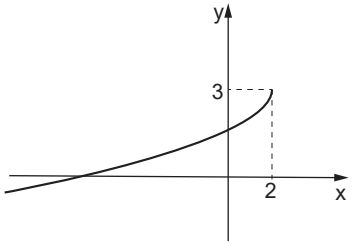
14. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor a la gráfica de la función $f(x)= -\sqrt{2 - x} + 3$?

A)


B)


C)


D)


E)


Prohibida su reproducción total o parcial.

15. Sea la función f definida por $f(x)= -\sqrt{x-2} -3$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El dominio de f es el intervalo $[2 , \infty[$.
II) El recorrido de f es el intervalo $]-3 , \infty[$.
III) El mínimo valor que alcanza f es -3.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

16. Sea f una función, con dominio el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = (x+2)^4 + 1$. Si m, n, p, q y r son funciones, todas con dominio el conjunto de los números reales, ¿con cuál de las siguientes traslaciones se obtiene la gráfica de f?

A) Trasladar la gráfica de $m(x) = x^4 + 1$, dos unidades horizontalmente hacia la derecha.
B) Trasladar la gráfica de $n(x) = (x+3)^4 + 1$, una unidad horizontalmente hacia la izquierda.
C) Trasladar la gráfica de $p(x) = x^4$, dos unidades horizontalmente hacia la derecha y una unidad verticalmente hacia arriba.
D) Trasladar la gráfica de $q(x) = (x+2)^4 + 4$, tres unidades verticalmente hacia arriba.
E) Trasladar la gráfica de $r(x) = (x+4)^4 + 5$, dos unidades horizontalmente hacia la derecha y cuatro unidades verticalmente hacia abajo.

17. Sean las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$ definidas en los números reales, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Sus gráficas se intersectan en dos puntos.
II) Si $x < 1$, entonces $f \leq g$.
III) Si $p > 1$, entonces la preimagen de **p** según f es mayor que la preimagen según g.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

18. Sean las funciones f y g definidas en los números reales, mediante $f(x)= \frac{3}{2}x - 1$ y $2g(x)-3x+5=0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Sus gráficas corresponden a rectas paralelas.
II) La gráfica de $f(x) - g(x)$ corresponde a una recta paralela al eje x.
III) $5f(x) - 2g(x)$ corresponde a una función lineal.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

19. Una función lineal f es de la forma f(x) = px, con p≠0, definida en el conjunto de los números reales.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) La imagen de **p** es un número real positivo.
II) La imagen de una suma es igual a la suma de las imágenes.
III) La imagen de un producto es igual al producto de las imágenes.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

20. Sean f una función definida en los reales mediante $f(x)=\sqrt{x-h}-k$, se puede determinar el valor numérico del mínimo de la función, sabiendo:

(1) El valor numérico de f(h).
(2) El recorrido de la función.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

21. En una piscina hay 1.500 litros y el desagüe bota medio litro por minuto.
La función que describe la cantidad de litros (L) que habrá en la piscina a las "x" horas después de abrir el desagüe es:

A) $L(x) = 1500 - \frac{x}{120}$
B) $L(x) = 1500 - \frac{x}{2}$
C) $L(x) = 1500 - 30x$
D) $L(x) = 1500 - 120x$
E) $L(x) = (1500 - 30)x$

22. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto a la función f definida por $f(x)=x^2-9$, para x>3?

I) Modela el área de un rectángulo de lados (x+3) cm y (x-3) cm.
II) Modela el área que resulta de restar el área de un cuadrado de lado 3 cm al área de un cuadrado de lado x cm.
III) Modela el área que resulta de restar el área de un cuadrado de lado $\sqrt{5}$ cm al área de un rectángulo de lados (x+2) y (x-2) cm.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

23. Un pediatra indica que hay que administrarle a un niño 0,025 gramos de un medicamento por cada kilo que este tenga. Según esto, ¿cuál de las siguientes funciones modela la cantidad de gramos que habría que administrarle a un niño que pesa **m** gramos?

A) $m \cdot 0{,}025$

B) $\frac{m}{0{,}025}$

C) $1000 \cdot m \cdot 0{,}025$

D) $\frac{m}{1000} \cdot 0{,}025$

E) $\frac{0{,}025 \cdot 1000}{m}$

24. En una casa hay un desperfecto en el baño, para su reparación se piden presupuestos a los maestros Juan y Pedro. Juan cobra una UF por la visita más 0,2 UF por hora de trabajo, mientras que Pedro cobra 0,3 UF por hora trabajada. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si el trabajo es inferior a 3 horas, Pedro es más económico.
B) Si el trabajo duró 12 horas, Juan es el más económico.
C) Si el trabajo dura 10 horas, ambos cobran lo mismo.
D) Si el maestro contratado fue Juan y cobró 2 UF, entonces trabajó 5 horas.
E) Para trabajos inferiores a 10 horas, Juan es el más económico.

25. Para el envío de un paquete, la empresa "Tunquén" cobra un cargo fijo de $1.500 más $300 por kilómetro recorrido, mientras que la empresa "TransCargo" cobra $400 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si el envío es inferior a 15 kilómetros es más económico Transcargo.
II) Para 15 kilómetros, ambas empresas cobran lo mismo.
III) Si el envío es superior a 15 kilómetros es más económico Tunquén.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

26. La población p(t) de peces en una piscina de cultivo se ha modelado según la función: $p(t) = 50 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$, donde t es la cantidad de meses transcurridos. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Al inicio habían 75 peces.
II) A los dos meses habían menos de 120 peces.
III) A los tres meses su población inicial se habrá más que triplicado.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

27. La temperatura T medida en grados Celcius (°C) de una habitación se modela a través de la función T(t) donde t es la cantidad de horas transcurridas desde el momento que se inició la medición.
Si $T(t) = 18 + 2t$, con $0 \leq t < 6$ y $T(t) = 54 - 4t$, con $6 \leq t \leq 10$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

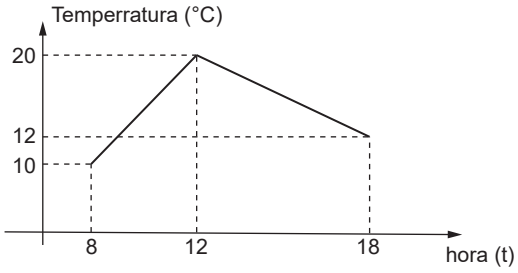
I) La temperatura subió 2 °C por hora durante las seis primeras horas y después bajó 4 °C por hora durante las siguientes 4 horas.
II) El máximo de la temperatura alcanzada durante la medición fue 30° C.
III) El mínimo de la temperatura alcanzada durante la medición fue 18° C.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

28. Una persona deposita $**p** en un banco que ofrece un interés mensual de 0,5%.
Si el capital se reajusta todos los meses, ¿cuál de las siguientes funciones determina el capital reajustado C(t) después de **t** meses?

A) $C(t) = 1{,}005 \cdot p \cdot t$
B) $C(t) = (1{,}05)^t \cdot p$
C) $C(t) = (1{,}005)^t \cdot p$
D) $C(t) = p(1 + 0{,}005t)$
E) $C(t) = (0{,}005)^t \cdot p$

29. En el siguiente gráfico se ilustra la temperatura T(t) de una habitación entre las 8 y las 18 horas. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) La función que modela la temperatura entre las 8 y 12 horas es $T(t) = 2{,}5t - 10$.
B) A las 10 la temperatura de la habitación era de 15° C.
C) La función que modela la temperatura entre las 12 y 18 horas es $T(t) = -\frac{4}{3}t + 36$.
D) Entre las 8 y las 12 horas la temperatura sube 2,5° C por hora.
E) A las 15 horas la temperatura era superior a los 16° C.

30. En una empresa, el costo de producir una cierta cantidad de artículos, comprende un costo fijo más un costo por cada artículo. Si se sabe que el costo de producir 20 artículos es $512.000 y el costo de producir 40 artículos es $524.000, ¿cuál de las siguientes funciones, modela el costo C(x) de producir **x** artículos?

A) $C(x) = 600x$
B) $C(x) = 500000x$
C) $C(x) = 500000+600x$
D) $C(x) = 500600x$
E) $C(x) = 600+500000x$

Prohibida su reproducción total o parcial.

31. El nivel del agua en un estanque cilíndrico es de h metros y baja en forma continua **q** metros por hora, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La función que modela la altura H del agua en el estanque (en m) a las x horas es $H(x) = h - qx$.

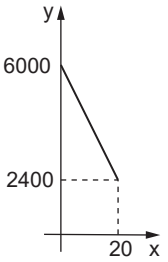
B) La cantidad de horas que hay que esperar para que la altura baje a la mitad es $\frac{h}{2q}$.

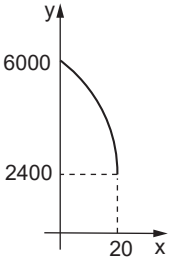
C) Después de $\frac{h}{q}$ horas no habrá agua en el estanque.

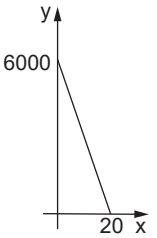
D) A los 45 minutos la altura del agua será $\frac{4h - 3q}{4}$.

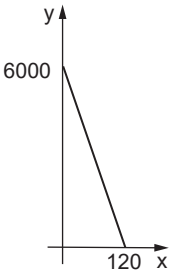
E) Para que la altura original del agua se reduzca en un 10% hay que esperar $\frac{9h}{10q}$ horas.

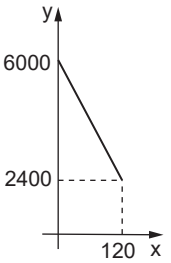
32. A una función teatral asisten 120 personas donde todas ellas cancelaron su entrada.
Si los adultos pagaron 50 US$ y los estudiantes 20 US$, ¿cuál de los siguientes gráficos representa mejor la recaudación obtenida, si x es la cantidad de estudiantes que asistieron?

A)


B)


C)


D)


E)


Prohibida su reproducción total o parcial.

33. Si f es una función definida en los reales tal que $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x - 1$, entonces f(x+1) =

A) x + 1
B) 2x – 2
C) 2x + 1
D) 2x
E) 2x – 1

34. Sea f una función definida en los reales mediante $f\left(\frac{x-5}{1-x}\right) = x+1$, entonces f(3) =

A) –3
B) –2
C) 3
D) 2
E) 1

35. Sea f una función definida en los reales, mediante f(x + 2) = 2f(x) + 3, Si f(8) = 61, entonces f(4) =

A) 3
B) 5
C) 6,5
D) 13
E) 30,5

36. Sean las funciones f y g, ambas con dominio en los números reales, definidas por $f(x)=ax^2$ y $g(x)=ax^3$, con **a** un número real distinto de cero, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si a>0 y 0<x<1, entonces f(x) > g(x).
II) Si a<0 y x<0, entonces f(x) < g(x).
III) Las gráficas de f y g se intersectan en dos puntos.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

37. Sean las funciones f y g con dominio en los números reales, definidas por $f(x) = x^4$ y $g(x) = x^2$, ¿cuál(es) de los siguientes conjuntos cumple(n) con que todos sus elementos satisfacen la desigualdad f(x) < g(x)?

I) [–1 , 0[
II)]0 , 1]
III)]–1 , 1[

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) Ninguno de ellos.

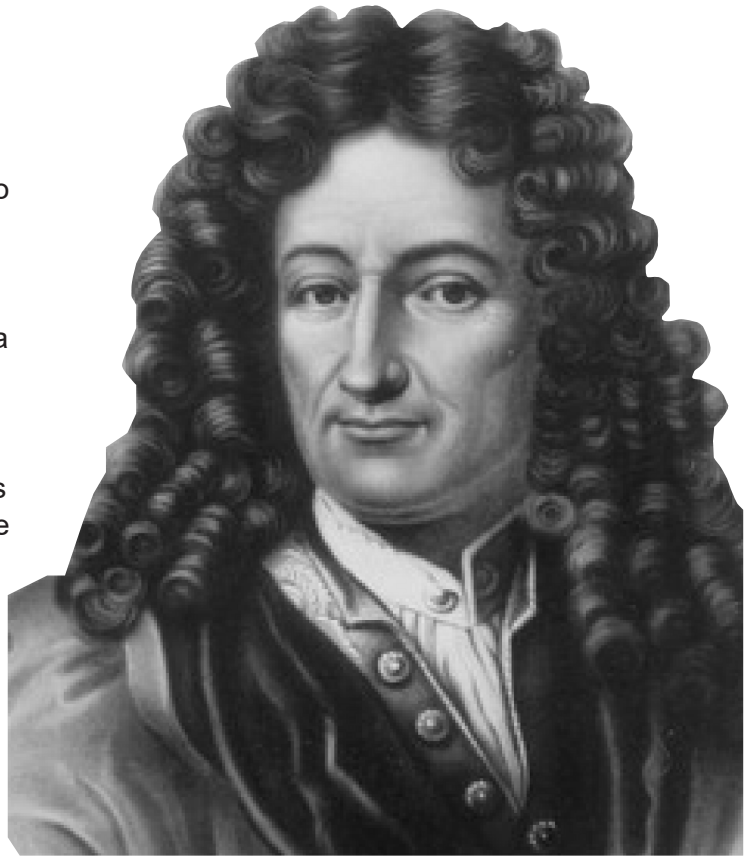
RESPUESTAS CAPÍTULO 7									
1. C	**2.** A	**3.** B	**4.** E	**5.** C	**6.** E	**7.** C	**8.** D	**9.** D	**10.** E
11. B	**12.** D	**13.** C	**14.** E	**15.** A	**16.** E	**17.** C	**18.** E	**19.** C	**20.** D
21. C	**22.** E	**23.** D	**24.** E	**25.** E	**26.** D	**27.** C	**28.** C	**29.** E	**30.** C
31. E	**32.** E	**33.** D	**34.** C	**35.** D	**36.** E	**37.** E			

Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
7

TIPOS DE FUNCIONES Y FUNCIÓN INVERSA

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) matemático, jurista, bibliotecario y político alemán.
El término “función” se le atribuye a él, este lo utilizó para designar a cantidades cuyas variaciones están regidas por alguna ley, concepto que no coincide con la definición actual.
Leibnitz y Newton, alguno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos, contribuyeron enormemente al desarrollo del concepto de función.



CONCEPTOS CLAVES

- Función inyectiva o uno a uno
- Función epiyectiva o sobreyectiva
- Función biyectiva
- Función inversa
- Gráfico de función inversa

Prohibida su reproducción total o parcial.

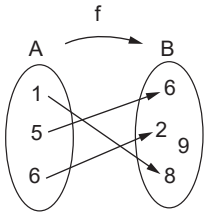
TIPOS DE FUNCIONES

Veremos ahora algunos tipos especiales de funciones, estas son las inyectivas, epiyectivas y las biyectivas.

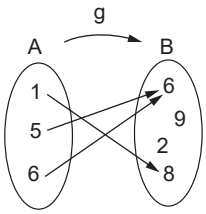
- **Funciones inyectivas**

  Las funciones inyectivas se caracterizan porque a imágenes distintas le corresponden preimágenes distintas, es decir no puede ocurrir que dos elementos del conjunto de partida tengan una misma imagen.

  En el siguiente diagrama sagital, podemos observar que la función f es inyectiva mientras que la g no, debido a que el 5 y el 6 tienen la misma imagen.

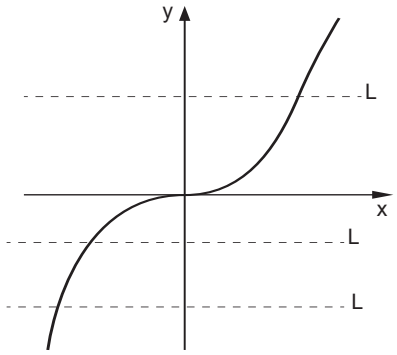


La función f es inyectiva, ya que a preimágenes distintas le corresponden imágenes distintas.

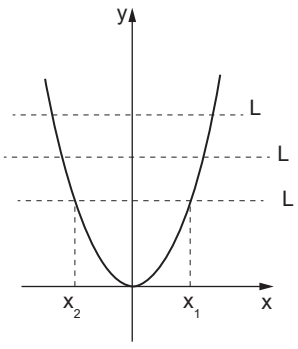


La función g NO es inyectiva, ya que a preimágenes distintas NO le corresponden imagenes distintas.

En un gráfico cartesiano, las funciones inyectivas se pueden reconocer por lo siguiente:

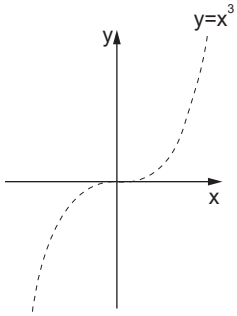


Una función es inyectiva si al trazar líneas paralelas al eje x, cada una de ellas corta al gráfico en un solo punto.
En la figura, cada recta L corta a la gráfica en un solo punto, por lo tanto la gráfica corresponde a una función inyectiva.



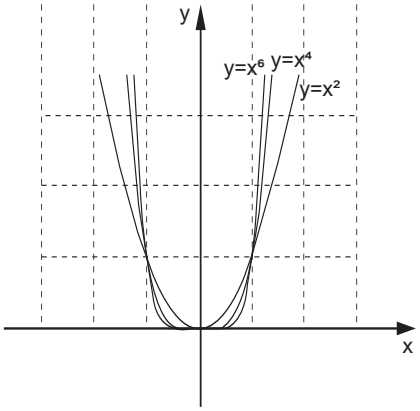
Esta función no es inyectiva, algunas líneas horizontales están cortando al gráfico en más de un punto. Esto se traduce en que x_1 y x_2 tienen la misma imagen.

Prohibida su reproducción total o parcial.



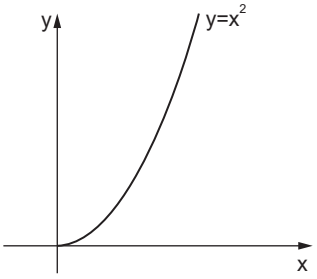
Las funciones potencia de exponente impar, es decir funciones del tipo $f(x)=x^n$, con n impar positivo son inyectivas.

Ejemplo de funciones no inyectivas:



Las funciones potencia de exponente par, es decir funciones del tipo $f(x)=x^n$, con n par positivo no son inyectivas.

Cuando una función no es inyectiva podemos restringir su dominio para que lo sea, por ejemplo la función $f(x)=x^2$ definida en los reales no es inyectiva, pero si restringimos la función para $x\geq 0$, resulta ser inyectiva:

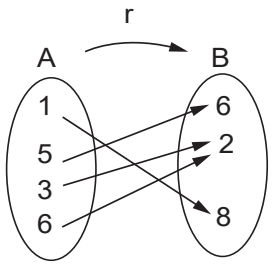


Observa que la función $f(x)=x^2$, definida para $x\geq 0$, resulta ser inyectiva, es decir restringiendo el dominio de una función podemos lograr que sea inyectiva.

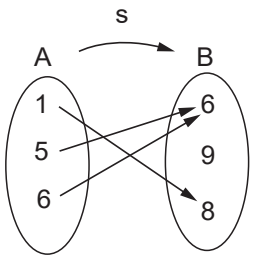
Prohibida su reproducción total o parcial.

- **Funciones epiyectivas**

Las funciones epiyectivas se caracterizan porque todo elemento del conjunto de llegada tiene alguna preimagen.



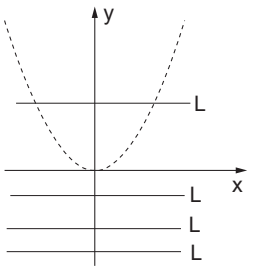
La función r es epiyectiva ya que todos los elementos del conjunto de llegada tienen preimagen.



La función s NO es epiyectiva ya que NO todos los elementos del conjunto de llegada tienen preimagen.

En un plano cartesiano, una función epiyectiva se caracteriza porque si trazamos una línea paralela al eje x por todo elemento del conjunto de llegada, esta debe cortar al gráfico en por lo menos un punto.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^4$ definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no es inyectiva, ya que los números negativos no tienen preimagen.

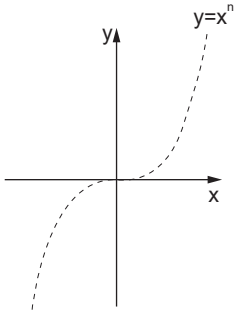


Al igual que en el caso de las funciones inyectivas, podemos restringir, en este caso el conjunto de llegada, para que las funciones se transformen en epiyectivas.
Por ejemplo, la función anterior, $f(x)=x^4$, si la definimos de $\mathbb{R} \rightarrow [0 , \infty[$ resulta ser epiyectiva.

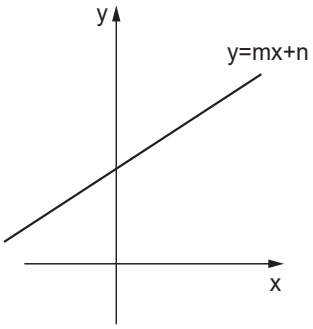
Prohibida su reproducción total o parcial.

- **Funciones biyectivas**

Son aquellas funciones que son inyectivas y epiyectivas a la vez.
Ejemplos de funciones biyectivas:



Funciones potencia de exponente impar



Las funciones lineales y afines son biyectivas.

Por lo ya visto anteriormente una función se puede restringir en su dominio y en su conjunto de llegada para que sea biyectiva.

Una de las propiedades importantes de las funciones biyectivas es que su inversa es también función.

FUNCIÓN INVERSA

Sea una función f definida del conjunto A al conjunto B, de modo que la imagen de x es y, entonces la función inversa hace el proceso contrario, es decir la imagen de y es x.
Como mencionamos anteriormente, se requiere que la función f sea biyectiva, para que la inversa sea también función.

- **Determinación algebraica de la función inversa**

Veamos esto con un ejemplo:
Supongamos que tenemos la función f definida para los reales mediante $f(x)=\sqrt{x-1}+2$ con f definida de $[1 , \infty[\rightarrow [2 , \infty[$.

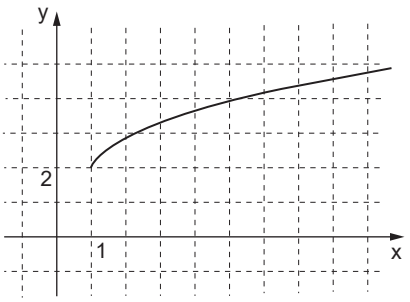
Prohibida su reproducción total o parcial.

De la ecuación $y=\sqrt{x-1}+2$, despejamos la variable x, para ello transponemos el 2 y elevamos a ambos lados de la ecuación:

$y-2=\sqrt{x-1}$ $\quad /(\ )^2$
$x=(y-2)^2+1$

Ahora cambiamos y por x y viceversa:
$y=(x-2)^2+1$, con lo que obtenemos la inversa de la función dada.

Tal como se observa en la siguiente gráfica la función debió ser definida de $[1, \infty[\rightarrow [2, \infty[$, para que sea biyectiva y de esta forma la inversa también es función.



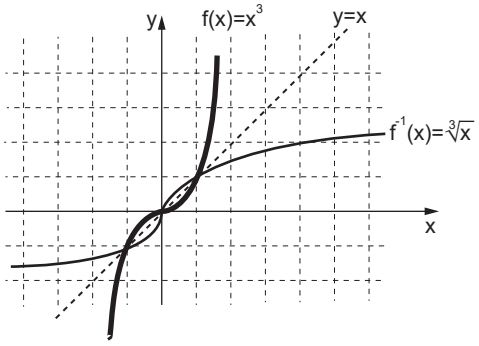
Si f hubiese sido definida de $[1 , \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, la inversa tendría el inconveniente que los menores que 2 no tendrían imagen debido a que no es epiyectiva.

Como ya lo mencionamos, siempre se puede restringir el conjunto de llegada al recorrido de la función, de esta forma se convierte la convertimos en una función epiyectiva.

- **Gráfica de la función inversa**

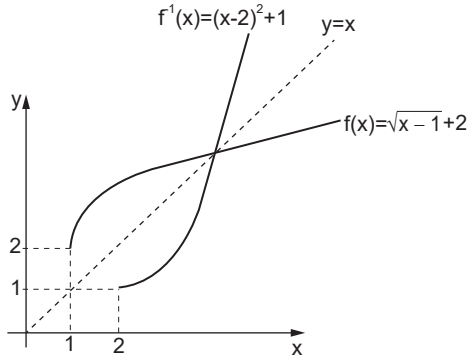
El gráfico de una función y la de su inversa son simétricos con respecto a la recta de ecuación y=x.

Por ejemplo, en la gráfica siguiente se observan las funciones $f(x)=x^3$ y su inversa $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.



Prohibida su reproducción total o parcial.

Observa como la función del ejercicio anterior: $f(x)=\sqrt{x-1}+2$ y su inversa $f^{-1}(x)=(x-2)^2+1$ tienen sus gráficas simétricas respecto a la recta de ecuación y=x.

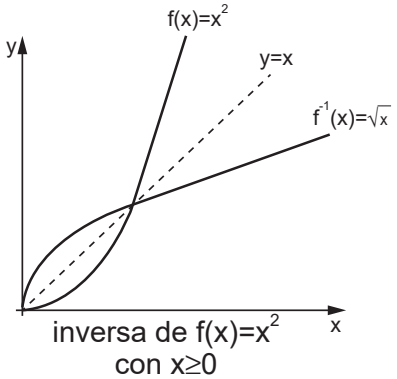


Como veremos a continuación, cuando calculamos la inversa de una función a la cual hemos restringido el dominio para convertirla en inyectiva, pueden surgir algunas dificultades, las que explicaremos a continuación con el desarrollo del siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Caso 1

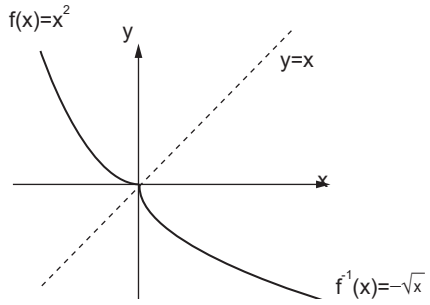
Sea la función $f(x)=x^2$, con $x\geq 0$, entonces tenemos que $y=x^2$, al queremos despejar la "x", tenemos dos posibilidades: $x=\pm\sqrt{y}$, pero como $x\geq 0$, desechamos el valor negativo, se tiene entonces que $x=\sqrt{y}$, ahora intercambiamos x por y y viceversa y obtenemos la inversa $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
Geométricamente, tendríamos lo siguiente:



Prohibida su reproducción total o parcial.

Caso 2

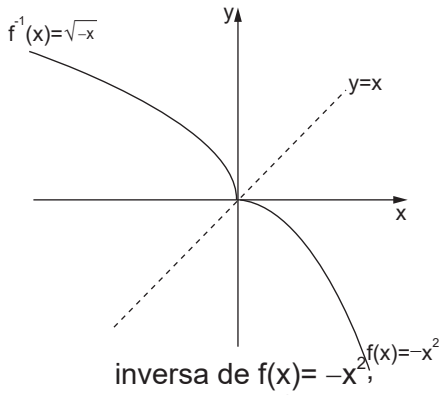
Sea la función $f(x)=x^2$, con $x\leq 0$, entonces tenemos que $y=x^2$, al queremos despejar la "x", tenemos dos posibilidades: $x=\pm\sqrt{y}$, pero como $x\leq 0$, desechamos el valor positivo, se tiene entonces que $x=-\sqrt{y}$, ahora intercambiamos x por y y viceversa y obtenemos la inversa $f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$
Geométricamente, tendríamos lo siguiente:



inversa de $f(x)=x^2$
con $x\leq 0$

Caso 3

Sea la función $f(x)=-x^2$, con $x\geq 0$, entonces tenemos que $y = -x^2$, al queremos despejar la "x", tenemos dos posibilidades:$x = \pm\sqrt{-y}$, pero como $x\geq 0$, desechamos el valor negativo, se tiene entonces que $x = \sqrt{-y}$, ahora intercambiamos x por y y viceversa y obtenemos la inversa $f^{-1}(x) =\sqrt{-x}$
Geométricamente, tendríamos lo siguiente:

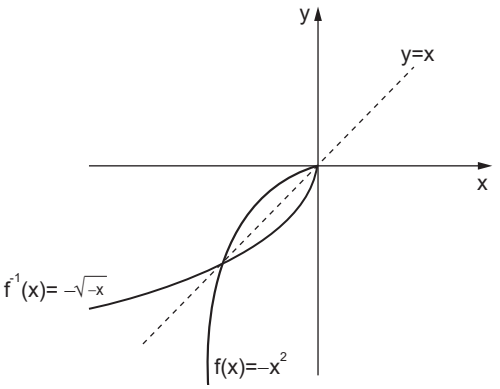


inversa de $f(x)= -x^2$,
con $x\geq 0$

Prohibida su reproducción total o parcial.

Caso 4

Sea la función $f(x)=-x^2$, con $x\leq 0$, entonces tenemos que $y=-x^2$, al queremos despejar la "x", tenemos dos posibilidades:$x = \pm\sqrt{-y}$, pero como $x\leq 0$, desechamos el valor positivo, se tiene entonces que $x =-\sqrt{-y}$, ahora intercambiamos x por y y viceversa y obtenemos la inversa $f^{-1}(x) =-\sqrt{-x}$
Geométricamente, tendríamos lo siguiente:



inversa de $f(x)= -x^2$,
con $x\leq 0$

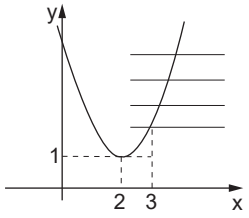
EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sea f: A $\rightarrow$ B, ¿cuál de las siguientes funciones **NO** es inyectiva?

A) $(x-2)^2+1$, con A=[3 , ∞[
B) x^4+1, con A=]$-\infty$, -1]
C) $(x+3)^4-2$, con A=]$-\infty$, -4]
D) $3x+1$, con A=]$-\infty$, -2]
E) $-(x-4)^6+3$, con A=[3 , ∞[

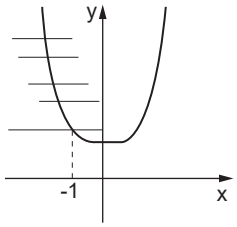
Solución:
Para resolver este ejercicio, ocuparemos las gráficas de las respectivas funciones.

A) La gráfica de $f(x)=(x-2)^2+1$, se muestra a continuación, observa que para $x\geq 3$, las rectas paralelas al eje x la cortan en un solo punto, luego es inyectiva.

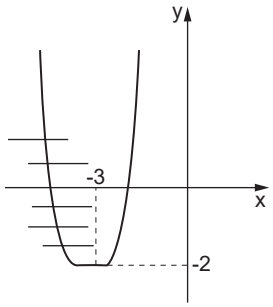


Prohibida su reproducción total o parcial.

B) Al igual que en el caso anterior, al trazar paralelas al eje x, estas cortan al gráfico en un solo punto, luego es inyectiva.

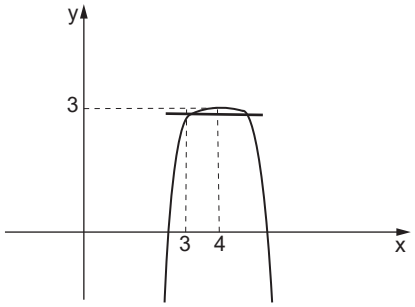


C) Para $x \leq -4$, las rectas paralelas al eje x cortan a la grafica en un solo punto, luego es inyectiva.



D) Por ser la función $f(x)=3x+1$ una función afín su gráfico es una recta, luego es inyectiva.

E) Observa en la gráfica que para valores de $x \geq 3$, las rectas paralelas la cortan en más de un punto, luego no es inyectiva para este dominio.



Prohibida su reproducción total o parcial.

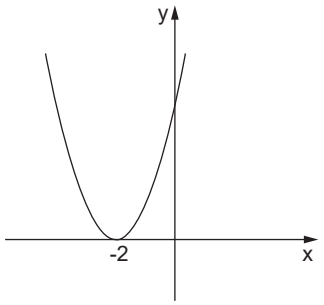
2. Sea f: $]-\infty , -2] \rightarrow B$ una función definida mediante $f(x) = (x+2)^2$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) f no es inyectiva.
II) Si B es $[0 , \infty[$ entonces f es epiyectiva.
III) Si f es biyectiva, entonces su inversa es $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} - 2$, con x en B.

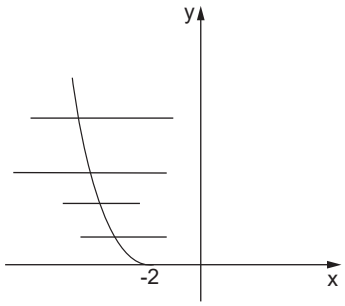
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Solución:

Sabemos que el gráfico de $f(x)=(x+2)^2$, corresponde a la gráfica de $g(x)=x^2$, desplazado 2 unidades hacia la izquierda:



Como el conjunto de partida es el intervalo es el intervalo $]-\infty , 2]$, la gráfica corresponde a la rama izquierda de la parábola y en este sector la función es inyectiva, ya que al trazar líneas paralelas al eje x, cada una de ellas intersecta al gráfico en un solo punto.



Por lo tanto I es falsa.

En el gráfico, observa que el recorrido corresponde al intervalo $[0 , \infty[$, como en II se definió el conjunto de llegada justamente como este intervalo, tenemos que la función es epiyectiva, luego II es verdadera.

En III, tenemos que la función es biyectiva por lo tanto su inversa también es función.

Para determinar la inversa de $y = (x+2)^2$, aplicamos raíz cuadrada a ambos lados:

$x = \pm\sqrt{y} - 2$, pero sabemos que $x \leq -2$, por lo tanto $x = -\sqrt{y} - 2$, ahora cambiamos x por y, y viceversa: $y = -\sqrt{x} - 2$, de modo que III también es verdadera.

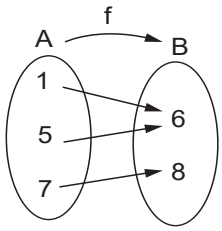
Respuesta, D) Solo II y III.

Prohibida su reproducción total o parcial.

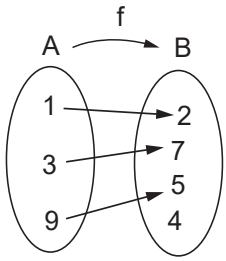
EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. ¿Cuál(es) de las siguientes funciones es (son) inyectivas?

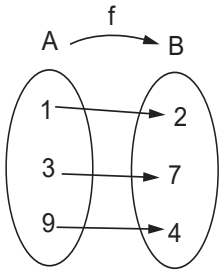
I)



II)



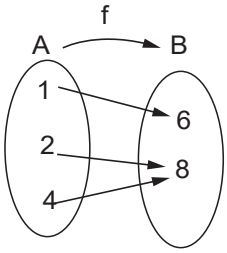
III)



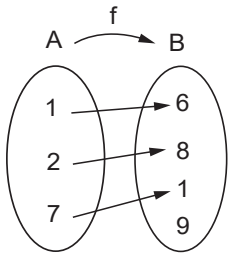
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y III
E) Solo II y III

2. ¿Cuál(es) de las siguientes funciones es (son) epiyectiva(s)?

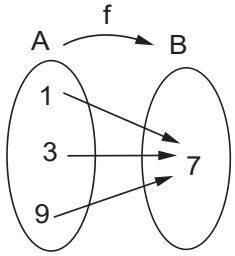
I)



II)



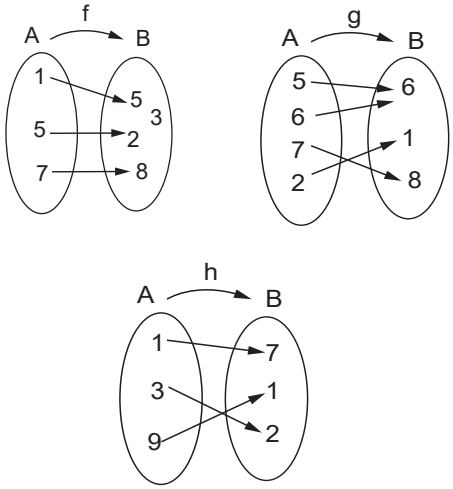
III)



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) Ninguna de ellas.

Prohibida su reproducción total o parcial.

3. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto a las funciones f, g y h que se presentan a continuación?



I) f y h son inyectivas.

II) g y h son epiyectivas.

III) h^{-1} es función.

A) Solo I

B) Solo III

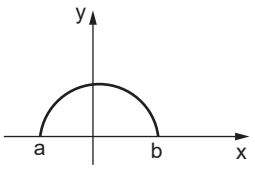
C) Solo I y II

D) Solo II y III

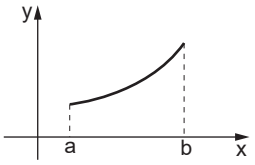
E) I, II y III

4. Los siguientes gráficos corresponden a funciones definidas de [a,b] $\rightarrow$ B, ¿cuál(es) de ellos corresponden a funciones inyectivas?

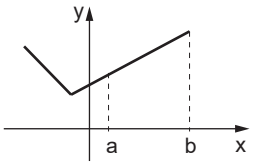
I)



II)



III)



A) Solo II

B) Solo III

C) Solo I y III

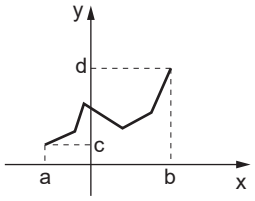
D) Solo II y III

E) Ninguna de ellas.

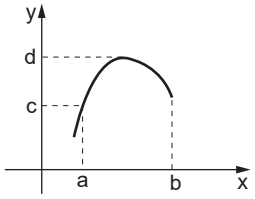
Prohibida su reproducción total o parcial.

5. Los siguientes gráficos corresponden a funciones definidas de [a,b] → [c,d], ¿cuál(es) de ellos corresponden a funciones epiyectivas?

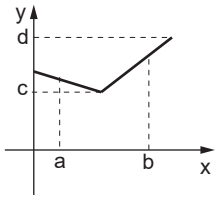
I)



II)

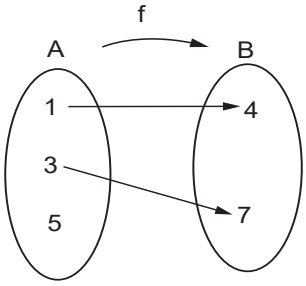


III)



A) Solo II
B) Solo III
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas

6. Sea f: A → B, una función epiyectiva cuyo diagrama sagital es el siguiente:

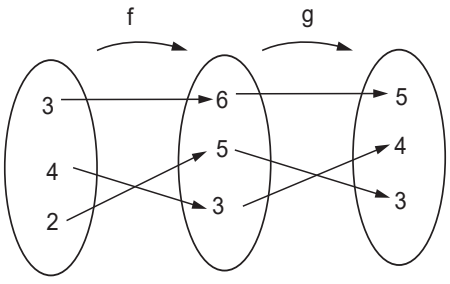


Si f(5) = a, ¿cuál de las siguientes condiciones se debe cumplir para que f sea inyectiva?

(1) $a \neq 4$
(2) $a \neq 7$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

7. Si en la figura adjunta se muestran las funciones f y g, entonces $(f \circ g^{-1})(4)$=



A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) Falta información para determinarlo.

Prohibida su reproducción total o parcial.

8. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x)=2x-1$, entonces $f(3) + f^{-1}(3)=$

A) 0

B) 3

C) 7

D) 8

E) $\frac{26}{5}$

9. Sea f: $[\,2\,,\infty[\rightarrow B$ definida mediante $f(x)=2\sqrt{x-2}-3$, si f es biyectiva, entonces la inversa de f es:

A) $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 - 2$, con x en B.

B) $\left(\frac{x+3}{2}\right)^2 + 2$, con x en B.

C) $\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - 2$, con x en B.

D) $\left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + 3$, con x en B.

E) $2\cdot\left(\frac{x+3}{2}\right)^2$, con x en B.

10. Sean f y g funciones definidas en los reales mediante $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ y $g(x) = 3x-1$,

¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$

II) $g^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

III) $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{3x+1}{6}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas.

11. Sean f y g funciones definidas en los reales mediante $f(x) = 2x+1$ y $g(x) = \frac{x+1}{2}$,

¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $(f^{-1} \circ g)(x) = \frac{x-1}{4}$

II) $(g \circ f^{-1})(x) = \frac{x+1}{4}$

III) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = x-1$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

12. Sea f: [4 , 12] $\to$ B definida por $f(x) = \sqrt{x-3}+2$, ¿cuál de los siguientes conjuntos debe ser el que corresponda a B para que f sea epiyectiva?

A) [2 , 5]
B) [3 , 5]
C) [3 , ∞[
D) [2 , ∞[
E) $\mathbb{R}^+$

13. Sean las siguientes funciones definidas de A $\to$ B, ¿cuál de ellas **NO** es inyectiva?

A) $(x-2)^2 + 3$, con A = [3,∞[
B) $(x+1)^2 + 2$, con A =]$-\infty$,-2]
C) $-\left(x+\frac{3}{2}\right)^4 - 2$, con A =]$-\infty$,$-2$]
D) $(x-4)^4 - 10$, con A = [3,∞[
E) $\sqrt[3]{x-3} + 6$, con A = [-3,∞[

14. Sean las siguientes funciones, ¿cuál de ellas es inyectiva?

A) $\sqrt{1-x^2}$, con $-1 < x < 1$
B) $\frac{x^4+1}{x^2}$, con $x \neq 0$
C) $\frac{1+x^2}{1-x^4}$, con $x^2 \neq 1$
D) $3^{x^2} - 1$, con $x > 0$
E) Ninguna de ellas.

15. Las siguientes funciones están definidas de A $\to$ [0 , ∞[, ¿cuál de ellas **NO** es epiyectiva?

A) $(x-8)^2$, con A = $\mathbb{R}$
B) $\sqrt{x+4}$, con A = [-4 , ∞[
C) 5^x, con A = $\mathbb{R}$
D) $\sqrt{(x+3)^2}$, con A = $\mathbb{R}$
E) $(3x-1)^4$, con A = $\mathbb{R}$

16. Las siguientes funciones están definidas de A $\to$ B , ¿cuál de ellas **NO** es inyectiva?

A) $f(x) = -(x-1)^2 + 4$, con A = [-3 ,1].
B) $f(x) = 2(x+1)^4 - 3$, con A = [0 , ∞[.
C) $f(x) = \left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 + 1$, con A = [0,2[.
D) $f(x) = -(1-2x)^4+1$, con A = $\left]-\infty\ ,\ \frac{1}{4}\right]$
E) $f(x) = 2(x-1)^5 - 3$, con A = [0,2].

17. Sea f: [p,q] $\to$ B, definida por $f(x)=x^2$, se puede determinar que f es inyectiva, sabiendo que:

(1) $pq > 0$
(2) $B = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

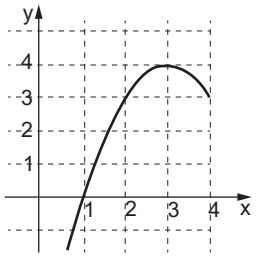
Prohibida su reproducción total o parcial.

18. Sea f: $\mathbb{R} \to [0 , \infty[$ definida mediante $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s) con respecto a esta función?

I) Es inyectiva.
II) Es epiyectiva.
III) La inversa es función.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas.

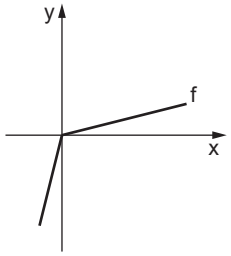
19. El gráfico de la figura corresponde al de la función f: $A \to B$, definida mediante $f(x)= -(x-3)^2+4$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



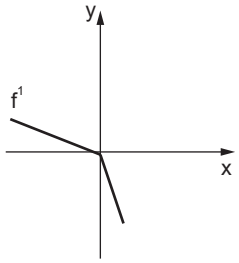
I) Si A=[1,4] y B=[0,4], entonces f es inyectiva.
II) Si A=[1,4] y B=[0,4], entonces f es epiyectiva.
III) Si A=[2,3] y B=[3,4], entonces f es biyectiva.

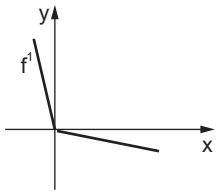
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

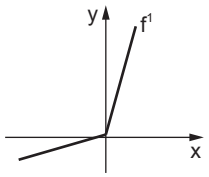
20. El siguiente gráfico corresponde al de la función f:

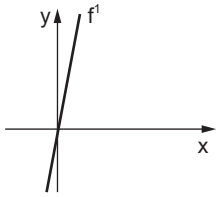


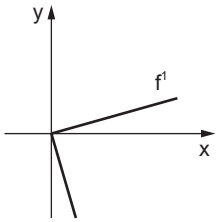
¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde al de la función f^{-1}?

A)


B)


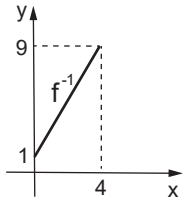
C)


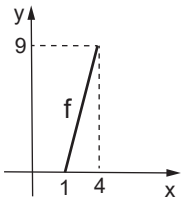
D)


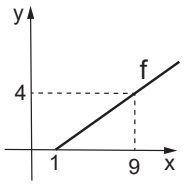
E)


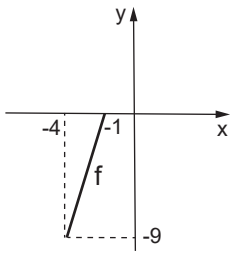
Prohibida su reproducción total o parcial.

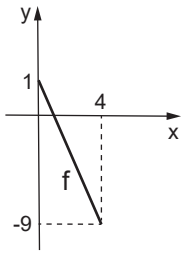
21. Si el gráfico de la figura corresponde al de f^{-1}, ¿cuál de las siguientes gráficas corresponde al de f?

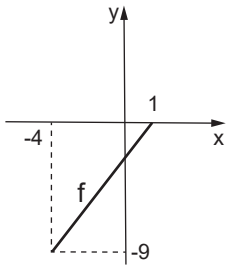


A)


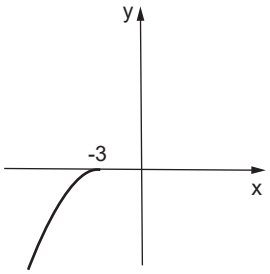
B)


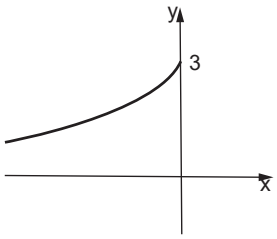
C)


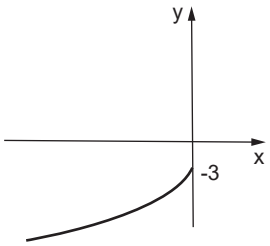
D)


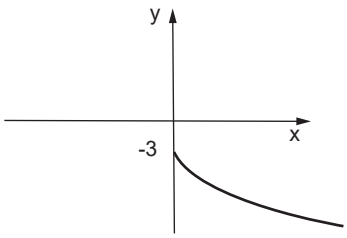
E)


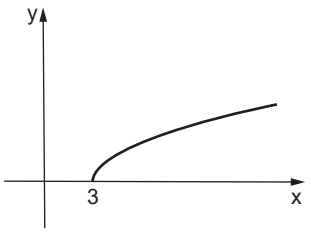
22. El gráfico de la figura corresponde al de la función biyectiva f. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde al de $f^{-1}(x)$?

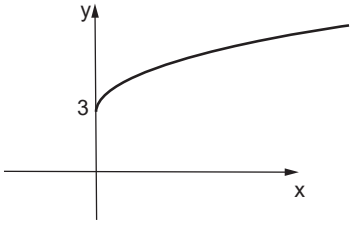


A)


B)


C)


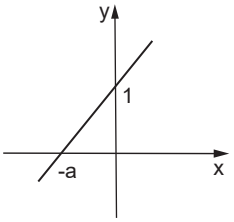
D)


E)


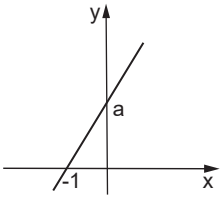
Prohibida su reproducción total o parcial.

23. Sea la función f definida en los números reales mediante f(x)=ax+a con a un número real positivo. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde al gráfico de la inversa de f?

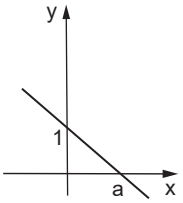
A)



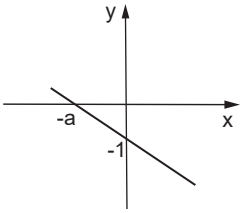
B)



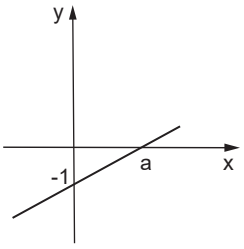
C)



D)

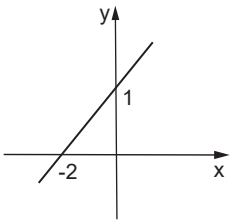


E)

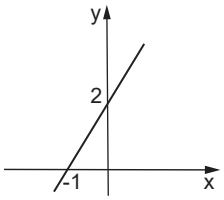


24. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = \frac{x-2}{2}$, ¿cuál de los siguientes gráficos representa mejor al de su inversa?

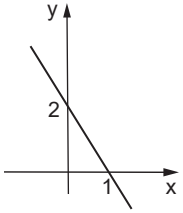
A)



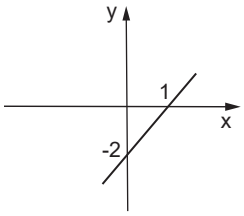
B)



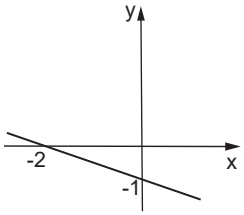
C)



D)



E)



Prohibida su reproducción total o parcial.

25. Sea la función f definida en los reales mediante $f(x) = px+q$ con $p\neq0$, $p\neq-1$ y $p\neq1$. ¿Para qué valor de x se tiene que $f(x) = f^{-1}(x)$?

A) $\frac{q}{p-1}$

B) $\frac{q}{1-p}$

C) $\frac{-q}{p+1}$

D) $\frac{q}{p+1}$

E) No existe tal valor.

26. Sea $f: \left]\frac{b}{a}, \infty\right[\to B$ una función definida por $f(x) = \sqrt{ax-b}$, con $a>0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) Si $B = \mathbb{R}^+$ entonces f es epiyectiva.

II) f es inyectiva independiente de B.

III) Si f es biyectiva, su inversa es $f^{-1}(x) = \frac{x^2+b}{a}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

27. Sea la función $f(x) = mx+n$ definida en los reales, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) Si $m\neq0$, entonces f es inyectiva.

B) Si $m=0$, entonces f no es inyectiva.

C) Si $m\neq0$, entonces f es biyectiva.

D) Si $m\neq0$ y $n=0$, entonces $f^{-1}(x)=\frac{1}{m}x$.

E) Si $m\neq0$ y $n\neq0$, entonces la inversa podría ser una función lineal.

28. Sea $f: A \to B$, definida por $f(x) = -(x+2)^4+4$. ¿Si los siguientes conjuntos corresponden al conjunto A, para cuál de ellos la función **NO** es inyectiva?

A) $]-2, 5]$

B) $]-5, -2]$

C) $]-\infty, -1]$

D) $\left]-6, -\frac{5}{2}\right]$

E) Para ninguno de ellos.

Prohibida su reproducción total o parcial.

29. Sea la función f: $A \to B$, definida por $f(x) = (x-2)^2$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $A =]-\infty, 0]$, entonces f es inyectiva.

II) Si $A = \mathbb{R}$ y $B = [0, \infty[$, entonces f es sobreyectiva.

III) Si $A =]-\infty, 2]$ y $B = [0, \infty[$ entonces su inversa es $f^{-1}(x) = 2-\sqrt{x}$ con x en B.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

30. Sea g: $[1, 3] \to [1, 5]$, definida por $g(x)=(x-3)^2+1$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) g es inyectiva.

II) g es epiyectiva.

III) Si g es biyectiva, entonces $g^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x-1}$, con x perteneciente a [1 , 5].

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

31. Sea f una función afín. En la siguiente tabla se muestran algunos valores de x y sus correspondientes imágenes (y):

x	y
3	2
5	-2

¿Cuál de las siguientes funciones corresponde a la inversa de f?

A) $-2x+8$

B) $\frac{x+8}{2}$

C) $\frac{8-x}{2}$

D) $\frac{x-8}{2}$

E) $\frac{x+16}{8}$

32. Si f^{-1} la inversa de f, cumple con que $f^{-1}(x-2) = 2x+3$, entonces $f(x) =$

A) $\frac{x-4}{2}$

B) $\frac{x+5}{2}$

C) $2x + 7$

D) $\frac{x-5}{2}$

E) $\frac{x-7}{2}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

33. Sean f y g dos funciones tales que $f(x + 2) = 3x - 1$ y $g^{-1}(x-2) = 2x + 3$, entonces $(fog)(5) =$

A) -10
B) -7
C) -5
D) -3
E) 5

34. Sea $f(x)= -\sqrt{x}$, definida para $x\geq 0$. Si f es biyectiva, entonces $f^{-1}(x)=$

A) x^2, si x es un real.
B) x^2, si $x\geq 0$.
C) $-x^2$, si $x>0$
D) x^2 si $x\leq 0$
E) $-x^2$ si $x\leq 0$

35. Sean f y g dos funciones definidas de los reales, mediante $f(x) = mx + n$ y $g(x) = nx + m$. Se puede determinar que g es la inversa de f sabiendo que:

(1) $m = -1$
(2) $n = -1$

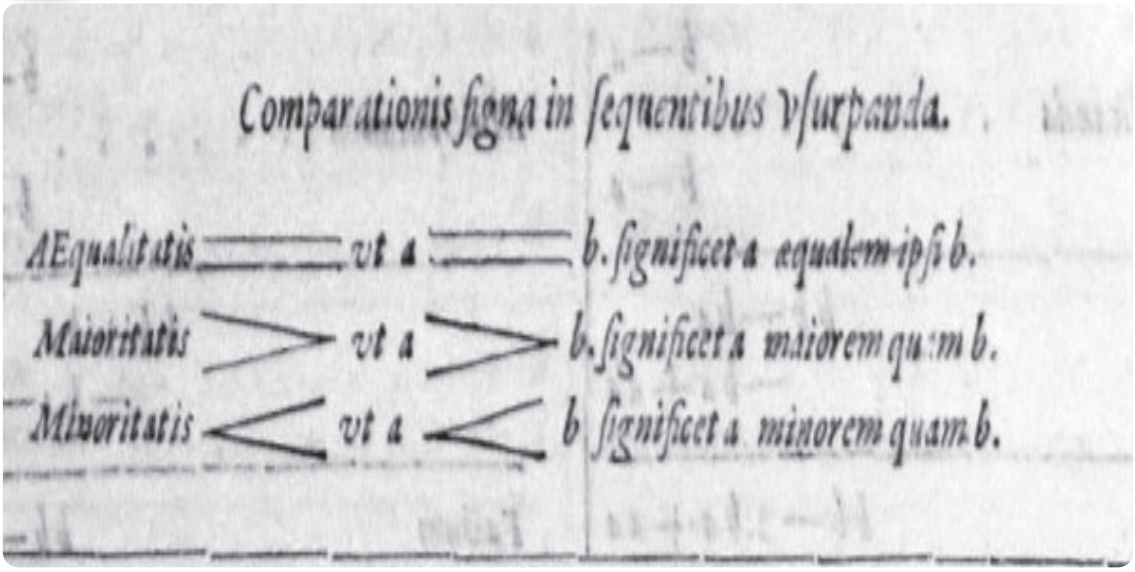
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS CAPÍTULO 8									
1. E	**2.** C	**3.** E	**4.** D	**5.** C	**6.** C	**7.** D	**8.** C	**9.** B	**10.** D
11. E	**12.** B	**13.** D	**14.** D	**15.** C	**16.** C	**17.** A	**18.** B	**19.** D	**20.** C
21. B	**22.** B	**23.** E	**24.** B	**25.** B	**26. E**	**27.** E	**28.** C	**29.** E	**30.** C
31. C	**32.** E	**33.** A	**34.** D	**35.** C					

Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
8

DESIGUALDADES E INECUACIONES



El primer matemático que introdujo los símbolos de desigualdad “>” (mayor que) y “<” (menor que) fue Thomas Harriot (1520-1621) en su manuscrito "Artis analyticae praxis", el cual fue publicado después de su muerte.
Los símbolos que aparecieron en la publicación se muestran en la figura, pero se cree que los editores modernizaron los símbolos originales ya que estos eran curvos parecidos a cuernos.

CONCEPTOS CLAVES

- Desigualdades
- Intervalos
- Inecuaciones
- Gráfico

Prohibida su reproducción total o parcial.

DESIGUALDADES

Una desigualdad es una expresión que utiliza los símbolos “>” (mayor), “<” (menor), “≥” mayor o igual o “≤” menor o igual.

Las desigualdades cumplen las siguientes propiedades:

1. Si se suman dos desigualdades de un mismo sentido se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c < d \end{array}\right| \rightarrow a + c < b + d \qquad \left.\begin{array}{l} a \leq b \\ c < d \end{array}\right| \rightarrow a + c < b + d$$

2. Si se suma o resta un número a ambos lados de una desigualdad, esta se conserva.

$a < b \rightarrow a + c < b + c \quad ; \quad a \leq b \rightarrow a - c \leq b - c$

3. Si se multiplica o divide a ambos lados de una desigualdad por un número positivo, esta se conserva.

$a < b \text{ y } c > 0 \rightarrow ac < bc \quad ; \quad a \leq b \text{ y } c > 0 \rightarrow ac \leq bc$

4. Si se multiplica o divide a ambos lados de una desigualdad por un número negativo, esta se invierte.

$a < b \text{ y } c < 0 \rightarrow ac > bc \quad ; \quad a \leq b \text{ y } c < 0 \rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

PROPIEDADES CON DESIGUALDADES EN LOS NÚMEROS REALES

En los números reales se cumplen las siguientes propiedades relativas a desigualdades:

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos positivos, entonces sus cuadrados mantienen la desigualdad:
  $0 < a < b \rightarrow a^2 < b^2$

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos negativos, entonces sus cuadrados invierten la desigualdad:
  $a < b < 0 \rightarrow a^2 > b^2$

- Si se tiene una desigualdad con ambos términos positivos o ambos negativos, entonces sus recíprocos invierten la desigualdad:
  $0 < a < b \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; $a < b < 0 \rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

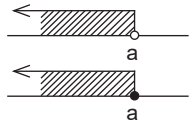
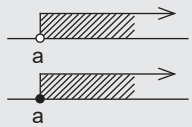
- Si se tiene un número entre cero y uno, entonces a mayor exponente de la potencia se obtiene un número cada vez menor:
  $0 < a < 1 \rightarrow \ldots a^4 < a^3 < a^2 < a$

- Si se tiene un número mayor uno, entonces a mayor exponente de la potencia se obtiene un número cada vez mayor:
  $a > 1 \rightarrow \ldots a^4 > a^3 > a^2 > a$

- La suma de los cuadrados de dos números es mayor o igual que el doble del producto de los números:
  $a^2 + b^2 \geq 2ab$

INTERVALOS DE NÚMEROS REALES

Un intervalo es un subconjunto de números reales, existen diversos tipos de intervalos, los cuales pasamos a detallar a continuación:

Tipo de Intervalo	Descripción	Notación Conjuntista	Notación de Intervalo	Gráfico
Cerrado	Considera todos los números que están entre dos números, considerando los extremos.	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
Abierto	Considera todos los números que están entre dos números, sin considerar los extremos.	$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	$]a, b[$	
Intervalo semi abierto por la izquierda (o semi cerrado por la derecha)	Considera todos los números que están entre dos números, sin considerar el extremo izquierdo.	$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	$]a, b]$	
Intervalo semi abierto por la derecha (o semi cerrado por la izquierda)	Considera todos los números que están entre dos números, sin considerar el extremo derecho.	$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	$[a, b[$	
Intervalo no acotado por la izquierda	Considera todos los números que son menores (o menores o iguales) que un cierto número.	$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ $\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	$]-\infty, a[$ $]-\infty, a]$	
Intervalo no acotado por la derecha	Considera todos los números que son mayores (o mayores o iguales) que un cierto número.	$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ $\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	$]a, \infty[$ $[a, \infty[$	

Prohibida su reproducción total o parcial.

TRADUCCIÓN DE ENUNCIADO CON DESIGUALDADES A EXPRESIÓN ALGEBRAICA

A continuación veremos cómo plantear algunos enunciados relacionados con desigualdades:

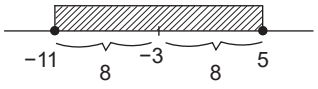
Enunciado	Expresión algebraica
A mayor que B	$A > B$
A menor que B	$A < B$
A mayor o igual que B	$A \geq B$
A menor o igual que B	$A \leq B$
A es a lo sumo igual a B	$A \leq B$
A es a lo menos B	$A \geq B$
A es a lo más B	$A \leq B$

EJERCICIOS RESUELTOS

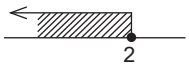
1. Los números que están a una distancia a los sumo igual a 8 del −3 y no son mayores que 2, corresponde al intervalo

Solución

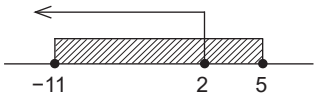
Los números que "están a una distancia a los sumo igual a 8 del −3" corresponde al intervalo:



Por otro lado los que " no son mayores que 2" corresponde al intervalo:



Intersectando los dos intervalos obtenidos:



Se obtiene el intervalo [−11, 2].

Prohibida su reproducción total o parcial.

2. Un servicio de taxis cobra una tarifa inicial de $1500 (llamada “bajada de bandera”) más $130 por cada 200 metros de recorrido (lo que se va cobrando cuando finaliza los 200 m). Si un cliente tiene $3.000, ¿para cuántos km de recorrido le alcanza?

Solución:
Tenemos que la tarifa es 1500 + 130x donde x es la cantidad de tramos de 200 metros que haya recorrido, entonces planteamos la inecuación $1500 + 130x \leq 3000$, cuya solución es $x \leq 11{,}53\ldots$, es decir los $3.000 le alcanzará para un recorrido a lo sumo igual a 11 tramos de 200 metros, si transformamos esto a kilómetros, calculamos $\frac{11 \cdot 200}{1000}$ lo que nos arroja 2,2 km. Por lo tanto, con $3.000 le alcanza para un recorrido inferior a los 2,2 km.

3. Una mamá debe comprar cuadernos universitarios, estos pueden ser tapa blanda o tapa dura cuyos valores respectivos son $800 y $1200. Si la cantidad de cuadernos de tapa dura deben ser 5 más que los de tapa blanda y su gasto no debe exceder los $35.000, ¿cuál es la mayor cantidad posible de cuadernos de tapa dura que puede comprar?

Solución:
Supongamos que compra “x” cuadernos de tapa blanda, por lo tanto debe comprar “x + 5” de tapa dura. El gasto es entonces 1200(x+5) + 800x, el cual no debe exceder los $35.000, por lo que el enunciado del problema nos conduce a la inecuación $1200(x + 5) + 800x \leq 35000$, dividiendo por 100, obtenemos la inecuación equivalente $12(x + 5) + 8x \leq 350$, resolviendo obtenemos que $x \leq 14{,}5$, por lo que el mayor valor posible para los cuadernos de tapa blanda es 14 y por ende el mayor valor posible para los de tapa dura es 19.

4. Si a y b son números reales negativos tal que a > b, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\frac{a}{b} > 1$

II) $\frac{a + b}{b} > 1$

III) $\frac{b - a}{a + b} > 1$

Solución:
Supongamos que I es correcta, tenemos que $\frac{a}{b} > 1$, multipliquemos a ambos lados de la desigualdad por b, como b < 0, la desigualdad se invierte, con lo que obtenemos a < b y esto contradice el enunciado, luego I es falsa.
Supongamos ahora que II es correcta, tenemos que $\frac{a + b}{b} > 1$, al igual que lo que hicimos anteriormente, multiplicamos a ambos lados por b y como b < 0, la desigualdad se invierte, obteniéndose a + b < b, restando b a ambos lados, se llega a que a < 0, lo cual es correcto, por lo tanto II es verdadera.
Veamos ahora la afirmación III, se afirma que $\frac{b - a}{a + b} > 1$, como a + b < 0, al multiplicar por a + b a ambos lados de la desigualdad esta se invierte, con lo que obtenemos: b − a < a + b, restando b a ambos lados, se concluye que −a < a, lo cual es falso ya que a < 0, luego III es falsa. Conclusión, solo II es verdadera.

Nota: el método utilizado en este ejercicio consiste en desarrollar la afirmación dada, convirtiéndola a otra expresión equivalente, si concluimos que esta es verdadera (o falsa) la original también será verdadera (o falsa).

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. El conjunto solución de la inecuación $x - 2x \leq - x + 3$ corresponde al conjunto:

A) $[1, \infty[$
B) $]- \infty, 1]$
C) $]- \infty, 0]$
D) $\square$
E) $\varnothing$

2. Dados los intervalos: $A =]2, 4[$ y $B = [3, 5[$, entonces $A \cap B =$

A) $[3, 4[$
B) $[3, 4]$
C) $]3, 4[$
D) $]2, 5]$
E) $[2, 5[$

3. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $-\frac{1}{3} \in \left]-\frac{2}{5}, -\frac{1}{4}\right[$

II) $2{,}7 \in \left[\frac{131}{50}, \frac{68}{25}\right[$

III) $1{,}\overline{9} \in \left]2, \frac{11}{5}\right]$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

4. La solución de la inecuación: $\frac{x}{2} + 2 > \frac{3}{4}x - 1$ es el conjunto de números reales "x" que cumplen con que:

A) $x < 12$
B) $x > 12$
C) $x < 4$
D) $x > 4$
E) $x < 6$

5. Si $a - 1 > 5$ y $b + 2 > -6$, entonces $a + b$ es:

A) mayor que -4.
B) mayor que 2.
C) mayor que -2.
D) menor que 2.
E) menor que -2.

6. ¿Cuál(es) de las siguientes inecuaciones es equivalente a la inecuación $-x - \frac{1}{2} \geq -3$?

I) $x \leq \frac{5}{2}$

II) $-x \geq \frac{1}{2} - 3$

III) $3 - \frac{1}{2} \leq x$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) Ninguna de ellas

Prohibida su reproducción total o parcial.

7. Sean x e y dos números reales tales que $\frac{x}{y} \geq 4$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $x \geq 4y$

II) $\frac{x}{y} - 4 \geq 0$

III) $\frac{x}{-y} \leq -4$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

8. Sean a, b y c números reales y $a \neq 0$, se puede determinar que $x < \frac{c - b}{a}$, sabiendo que:

(1) $ax < c - b$
(2) $a > 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

9. Si $x - 2y \leq -2$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $x - 2y + 2 \leq 0$

II) $\frac{x - 2y}{-2} \geq 0$

III) $x - 2y \leq 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

10. Si x es un número real tal que $0 < x < 1$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes inecuaciones **cumple** siempre x?

I) $x^2 < x$
II) $x^3 < x^2$
III) $x^4 > x^2$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

11. Si a y b son números reales tales que $ab > 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\frac{a}{b} > 0$

II) $\frac{b}{a} > 0$

III) $a^3b > 0$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

12. Si a, b y c son números reales tales que $a < b$, $b < c$ y $c < 0$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $a + b < 0$
II) $ab > 0$
III) $bc > ac$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

13. La edad de Juan está comprendida entre 12 y 15 años y la de Andrés es mayor que 16 y a lo sumo 28 años, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) La suma de las edades es mayor que 28.
II) La suma es menor que 43.
III) La diferencia positiva de sus edades es menor que 16.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

14. Sean a y b números reales, tales que $a \neq b$, se puede determinar que $\frac{a - b}{a + b} > 1$, sabiendo que:

(1) $b < 0$
(2) $a + b > 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

15. Los lados de un triángulo ABC miden $a = x$, $b = 2x - 3$ y $c = x + 5$, entonces para que exista este triángulo, x debe medir:

A) más de dos cm.
B) más de tres cm.
C) más de cuatro cm.
D) menos de cuatro cm.
E) menos de diez cm.

16. Leonardo tiene el doble de la edad de su hermano Francisco menos tres años.
Si la suma de sus edades está comprendida entre seis y doce años, entonces la edad de Leonardo está comprendida entre:

A) 3 y 5 años.
B) 3 y 7 años.
C) 2 y 5 años.
D) 2 y 7 años.
E) 1 y 6 años.

Prohibida su reproducción total o parcial.

17. Lo que le falta a un número para ser 27 es mayor o igual de lo que le falta a su doble para ser 30, por lo tanto el número es necesariamente:

A) mayor que 19.
B) a lo menos 19.
C) mayor que 57.
D) a lo menos 57.
E) a lo menos 3.

18. La edad de Carlos hace dos años era a lo sumo 20 años y la mitad de edad que tendrá en diez años será superior a ocho años. Entonces en tres años su edad estará en el intervalo:

A) [9, 25]
B)]9, 25[
C)]9, 25]
D)]10, 25]
E) [10, 24]

19. La suma de tres números consecutivos es a lo sumo 39, ¿cuál de las siguientes afirmaciones con respecto al mayor de los números es **siempre** verdadera?

A) es menor que 12.
B) es a lo sumo 12.
C) es menor que 14.
D) es a lo sumo 14.
E) es menor que 13.

20. Si p es un número real negativo, entonces **siempre** se cumple que:

I) $p^3 < p^2$

II) $p - 2p > p$

III) $\frac{p}{p-1} < 1$

Es (son) verdadera(s):

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

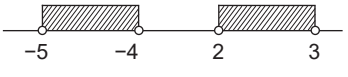
21. Los lados de un triángulo ABC cumplen con que $\frac{3}{5} < AB < 2$, $1 < BC < \frac{5}{2}$ y $3 < AC < \frac{38}{10}$, entonces ¿cuál de las siguientes opciones podría corresponder al perímetro de este triángulo?

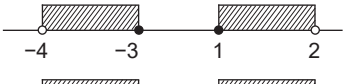
A) 4,0
B) 4,6
C) 4,7
D) 9,0
E) 12,2

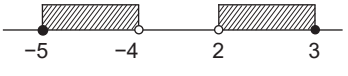
22. ¿En cuál de los siguientes gráficos se representa a todos los números reales que están a una distancia mayor que tres y menor o igual que 4 del −1?

A)

B)

C)


D)


E)


Prohibida su reproducción total o parcial.

23. "El doble del cuadrado de un número entero x es a lo sumo igual al sucesor del triple de x", se expresa mediante la desigualdad :

A) $2x^2 \leq 3(x + 1)$
B) $2x^2 < 3(x + 1)$
C) $2x^2 \geq 3x + 1$
D) $2x^2 < 3x + 1$
E) $2x^2 \leq 3x + 1$

24. "El cuadrado de **a** sumado con el cuadrado del doble de **b** es a lo menos el triple del cuadrado de **c**, se expresa mediante la desigualdad":

A) $a^2 + (2b)^2 > (3c)^2$
B) $a^2 + (2b)^2 \geq (3c)^2$
C) $a^2 + (2b)^2 > 3c^2$
D) $a^2 + (2b)^2 \geq 3c^2$
E) $a^2 + 2b^2 \geq 3c^2$

25. ¿Cuántos números enteros positivos existen que cumplen con que su triple sumado con los tres cuartos de su sucesor es menor a 12?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

26. En un rectángulo el largo mide 2 cm más que el ancho y su perímetro es a lo sumo 22 cm. Si los lados miden un número entero de cm, entonces la máxima área posible es:

A) 8 cm^2
B) 15 cm^2
C) 24 cm^2
D) 35 cm^2
E) 48 cm^2

27. En un estanque hay 80 m^3 de agua y una bomba extrae 1,2 m^3 por hora.
Para que queden menos de 26 m^3 en el estanque, se deben esperar por lo menos:

A) 42 h
B) 43 h
C) 44 h
D) 45 h
E) 46 h

28. Tres números consecutivos son tales que la suma entre los dos tercios del menor con los tres cuartos del intermedio es más grande que el término mayor.
¿Cuál es el menor valor posible para el término mayor?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

29. La temperatura en un cierto laboratorio está regulada de modo que es mayor a 5°C y a lo más llega a 20°C.
Si la conversión entre grados Celcius a Fahrenheit es $°F = \frac{9}{5}\,°C + 32°$, entonces se puede afirmar que la temperatura de la habitación:

A) fluctúa entre los 41 °F y 68 °F.
B) es superior a los 41 °F y a lo más llega a los 68 °F.
C) es a lo menos 41 °F y a lo más se llega a los 68 °F.
D) es a lo menos 41 °F y menor a los 68 °F.
E) ninguna de las afirmaciones anteriores.

Prohibida su reproducción total o parcial.

30. Un cuadrado tiene un área de a lo más 81 cm^2 y si sus lados aumentan en dos cm entonces el perímetro del nuevo cuadrado es superior a los 32 cm.
Si la medida del cuadrado original es un número entero de cm, ¿cuántos valores posibles existen para esta medida?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) Más de 4.

31. En una liquidación las blusas valen $5.000 y los pantalones $12.000.
Si Belén lleva 10 unidades más de pantalones que de blusas y su presupuesto es inferior a $256.000, ¿cuál es la cantidad máxima de blusas que puede llevar?

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 12

32. Juan ha ahorrado entre monedas de 100 y 500 pesos una suma inferior a $5.000, se sabe además que la cantidad de monedas de $100 supera en 8 unidades a las de $500.
Si hubiese ahorrado 2 monedas más de $100 y una más de $500, entonces lo ahorrado hubiese superado los $5.000.
¿Cuál de las siguientes opciones es correcta con respecto a la cantidad de monedas de $500 que ahorró?

A) Es inferior a 6.
B) Son 6.
C) Son 7.
D) Son 8.
E) Es superior a 8.

33. Un número está comprendido entre a y b, con $a < b$, si a este número se le resta un número negativo c y después se multiplica por un número negativo d, entonces el número obtenido es siempre mayor que:

A) $d(b + c)$
B) $d(b - c)$
C) $d(a + c)$
D) $d(a - c)$
E) b

34. Sea p un número real tal que $0 < p < 1$ y n un número entero positivo.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $p^{n+1} > p^n$
II) $np \geq p^n$
III) $p^n \leq np^n$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

35. Sean a y b dos números reales negativos, tal que $a > b$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 0$

II) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} > 0$

III) $\frac{1 + \frac{b}{a}}{1 - \frac{b}{a}} > 0$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

36. Sean a y b dos números reales negativos, tal que a > b, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $-a + b < a - b$

II) $(a - b)^3 > 0$

III) $\frac{a + b}{a - b} < 0$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

37. Sean m y n números reales y distintos tales que $m < n$ y $\frac{m + n}{m - n} > 1$, ¿cuál de las siguientes desigualdades es **siempre** verdadera?

A) $3n > 2m$
B) $n^2 > -n$
C) $m < 0$
D) $3n > 2n$
E) $3m > 2n$

RESPUESTAS CAPÍTULO 9									
1. D	**2.** A	**3.** C	**4.** A	**5.** C	**6.** C	**7.** D	**8.** C	**9.** E	**10.** C
11. E	**12.** C	**13.** E	**14.** C	**15.** C	**16.** B	**17.** E	**18.** C	**19.** D	**20.** E
21. C	**22.** E	**23.** E	**24.** D	**25.** B	**26. C**	**27.** E	**28.** C	**29.** B	**30.** C
31. A	**32.** B	**33.** B	**34.** D	**35.** A	**36. E**	**37.** C			

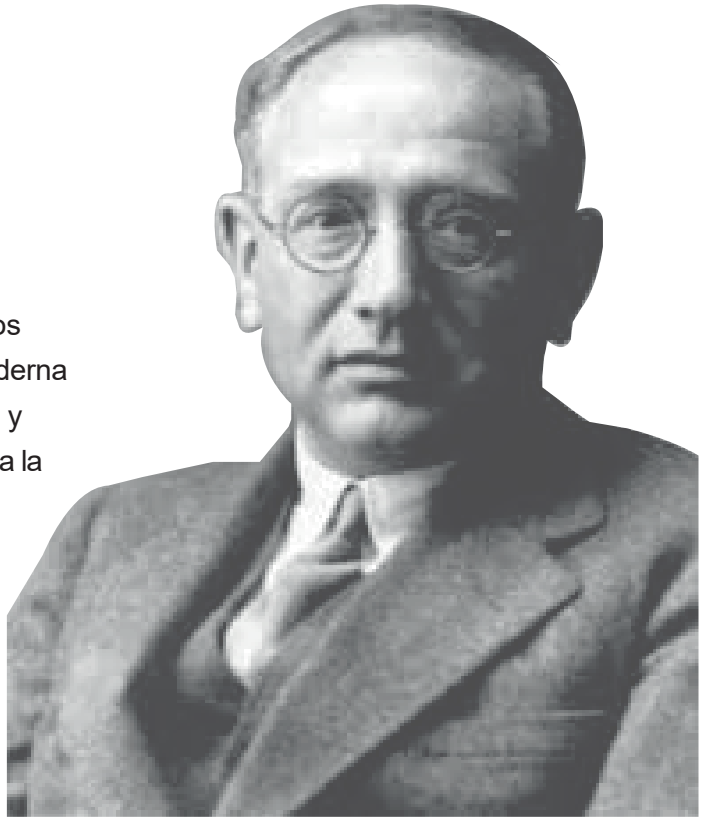
Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
9

PLANTEO DE PROBLEMAS

George Pólya (1887-1985)

matemático húngaro, es uno de los nombres míticos en la historia moderna de las matemáticas y sus estudios y publicaciones estuvieron referidas a la resolución de problemas.



CONCEPTOS CLAVES

- Traducción a lenguaje algebraico
- Sistemas de ecuaciones
- Ecuación de primer grado

Prohibida su reproducción total o parcial.

TRADUCCIÓN DE ENUNCIADO A LENGUAJE ALGEBRAICO

Si queremos resolver un problema, a través del planteo de una ecuación, debemos traducir lo expresado en el enunciado a lenguaje algebraico, para ello es conveniente considerar las siguientes conversiones.

El doble de x…….....	$2x$
El triple de x……..…….....	$3x$
El sucesor de n…….....	$n + 1$ (si $n \in \mathbb{N}$)
El antecesor de n ……..…….....	$n - 1$ (si $n \in \mathbb{Z}$)
El cuadrado de x…….....	x^2
El cubo de x…….....	x^3
El inverso aditivo u opuesto de x…….....	$-x$
A sumado con B…….....	$A + B$
A restado con B……..…….....	$A - B$
B disminuido en A…….....	$B - A$
A sustraído de B……..…….....	$B - A$
El producto entre A y B……..…….....	$A \cdot B$
El cuociente entre A y B…….....	$\frac{A}{B}$ (con $B \neq 0$)
El inverso multiplicativo o recíproco de x….....	x^{-1} o $\frac{1}{x}$ (si $x \neq 0$)
Suma de los cuadrados entre A y B……..…….....	$A^2 + B^2$
Cuadrado de la suma entre A y B…….....	$(A + B)^2$

Número de dos cifras con el dígito de las decenas es d y el de las unidades es u…..$10d + u$

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema lineal de ecuaciones, con dos variables y dos incógnitas, es de la forma:

$\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}$, donde las incógnitas son “x” e “y” y los demás son números reales.

Existen diversos métodos para resolver un sistema de ecuaciones, los más importantes son:

- Igualación
- Sustitución
- Reducción

Veamos algunos ejemplos, para distinguir cada uno de estos métodos.

Prohibida su reproducción total o parcial.

Igualación

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} 2x - y = 13 \\ 6x + y = 19 \end{array}$

Tanto en la primera como en la segunda ecuación despejamos "y" (o bien la otra incógnita):
Ecuación (1): $2x - y = 13 \rightarrow y = 2x - 13$
Ecuación (2): $6x + y = 19 \rightarrow y = 19 - 6x$, igualando ambas expresiones para "y", tenemos:
$2x - 13 = 19 - 6x \rightarrow 8x = 32 \rightarrow x = 4$
Reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones, obtenemos el valor de "y".
Por ejemplo si se reemplaza $x = 4$ en la primera ecuación, obtenemos $8 - y = 13 \rightarrow y = -5$.

Sustitución

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} 5x - y = 28 \\ 3x + 2y = 9 \end{array}$

Este método consiste en que en una de las dos ecuaciones despejamos una de las incógnitas, posteriormente, este valor obtenido se reemplaza en la otra ecuación.
Por ejemplo, si en la primera ecuación despejamos "y", tenemos que $y = 5x - 28$, ahora esta expresión la reemplazamos en la otra ecuación:
$3x + 2(5x - 28) = 9 \rightarrow 13x = 65 \rightarrow x = 5$, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema, obtenemos el valor de "y".
Si en la primera ecuación, reemplazamos x por 5, se obtiene: $25 - y = 28 \rightarrow y = -3$.

Reducción

Ejemplo:

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} 4x - 5y = 49 \\ 5x + 3y = 15 \end{array}$

Este método consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por ciertos factores, de modo que al sumar o restar ambas ecuaciones se elimine una de las incógnitas.
En este sistema, por ejemplo eliminaremos la incógnita "y" para ello multiplicaremos la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 5, de modo que los coeficientes de "y" queden cambiados de signo:

$\begin{array}{l|l} 4x - 5y = 49 & /\cdot 3 \\ 5x + 3y = 15 & /\cdot 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 12x - 15y = 147 \\ 25x + 15y = 75 \end{array}$, sumando ambas ecuaciones, se obtiene $37x = 222 \rightarrow x = 6$,

reemplazando este valor en cualesquiera de las ecuaciones, se obtiene $y = -5$.
En los ejercicios resueltos, veremos cómo los sistemas de ecuaciones nos permitirán resolver problemas.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Felipe tiene dos cuentas corrientes y en una de las cuentas tiene los $\frac{2}{3}$ de lo que tiene en la otra. Si saca $500.000 de una de ellas y la deposita en la otra, quedan iguales. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente en cada una de ellas?

Solución:

Supongamos que los montos que tiene en las cuentas corrientes son x y $\frac{2}{3}x$.

Si saca $ 500.000 y lo deposita en la otra, entonces en cada una de ellas tendrá:

$x - 500000$ y $\frac{2}{3}x + 500000$, asumimos que debe sacar de la que tiene más dinero ya que posteriormente se afirma que quedan iguales:

$x - 500000 = \frac{2}{3}x + 500000 \rightarrow x - \frac{2}{3}x = 1000000 \rightarrow \frac{1}{3}x = 1000000 \rightarrow x = 3000000$,

Por lo tanto, lo que tenía inicialmente en las cuentas era: $x = 3.000.000$ y $\frac{2}{3}x = 2000000$

2. Un número tiene dos cifras de modo que la cifra de las decenas tiene una unidad más que el triple de la cifra de las unidades.

Si se suma el número con el número que resulta de invertir sus cifras, resulta 99, ¿cuál es el número?

Solución:

Supongamos que la cifra de las unidades es x, entonces según la información dada, la cifra de las decenas es $3x + 1$.

Sabemos que si un número tiene dos cifras, donde las unidades es “u” y las decenas es “d”, entonces el número es u+10d, y en este caso el número es $x + 10 \cdot (3x + 1)$, entonces el número con las cifras invertidas sería $10x + (3x + 1)$.

El enunciado afirma que si se suman estos dos números el resultado es 99, entonces $x + 10 \cdot (3x + 1) + 10x + (3x + 1) = 99$, resolviendo esta ecuación se obtiene $x = 2$, por lo tanto el número es 72.

Prohibida su reproducción total o parcial.

3. La suma de las edades de dos hermanos es 25 años y en 5 años más uno va a tener los $\frac{3}{4}$ de lo que tendrá el otro. ¿Qué edades tienen actualmente?

Solución:

Supongamos que las edades son x e y, entonces x + y = 25, en cinco años más las edades serán x + 5; y + 5, entonces $x + 5 = \frac{3}{4}(y + 5)$.

Entonces el enunciado nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ x + 5 = \frac{3}{4}(y + 5) \end{array}\right|$, multiplicando la segunda ecuación por 4, para eliminar las fracciones, resulta:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ 4x + 20 = 3(y + 5) \end{array}\right|$, ordenando, se llega al sistema: $\left.\begin{array}{l} x + y = 25 \\ 4x - 3y = -5 \end{array}\right|$.

Podemos resolver este sistema con cualquiera de los métodos vistos anteriormente, acá lo resolveremos por sustitución.

Despejamos una incógnita de la primera ecuación, por ejemplo si despejamos"x", tenemos $x = 25 - y$, y esto lo reemplazamos en la segunda ecuación:

$4(25 - y) - 3y = -5$, resolviendo esta ecuación obtenemos y = 15, sustituyendo en cualesquiera de las ecuaciones obtenemos x = 10, luego las edades son 10 y 15 años.

4. Francisco lleva ahorrado $5.200 en monedas de $100 y $500.

Si el total de monedas son 20, ¿cuántas tiene de cada denominación?

Solución:

Supongamos que tiene x monedas de $100 e y monedas de $500, entonces podemos plantear el sistema de ecuaciones:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ 100x + 500y = 5200 \end{array}\right|$,

en este sistema se puede reducir la segunda ecuación si dividimos por 100:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x + 5y = 52 \end{array}\right|$, si restamos la segunda ecuación con la primera (o usando cualquier otro método), se obtiene: $5y - y = 32 \rightarrow y = 8$, reemplazando en cualquiera de las ecuaciones se concluye que x = 12, luego tiene 12 monedas de $100 y 8 monedas de $500.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. ¿Qué número entero es tal que al sumarle el triple de su antecesor da 77?

A) 19
B) 20
C) 21
D) 22
E) 24

2. ¿Qué número par es tal que al sumarlo con su sucesor par da 42?

A) 10
B) 12
C) 20
D) 22
E) 24

3. En un rectángulo el largo mide 3 cm más que el ancho y su perímetro es 54 cm.
¿Cuánto mide su largo?

A) 12 cm
B) 15 cm
C) 18 cm
D) 25,5 cm
E) 28,5 cm

4. Una piscina está llena hasta los $\frac{3}{5}$ de su capacidad.
Si le faltan 1.200 litros para llenarla, ¿cuál es su capacidad?

A) 480 litros
B) 800 litros
C) 2.000 litros
D) 3.000 litros
E) 3.200 litros

5. Si se divide el sucesor del doble de un número con el antecesor del número resulta 3, entonces ¿cuál es el sucesor del cuadrado del número?

A) 4
B) 5
C) 10
D) 17
E) 26

6. Un número entero sumado con el doble de su antecesor da 28.
¿Cuál es el antecesor del número?

A) 9
B) 10
C) 11
D) 21
E) 22

7. Se tienen tres números consecutivos, tales que la diferencia entre el cuadrado del intermedio con el cuadrado del menor equivale al triple del mayor.
Entonces uno de estos números puede ser:

A) –6
B) –5
C) 4
D) 5
E) 7

Prohibida su reproducción total o parcial.

8. Si un sector rectangular tiene un perímetro de 40 m y es de tal manera que su ancho tiene 4 m menos que su largo, la ecuación que permite conocer el ancho "x" es:

A) $2x + 4 = 40$
B) $4x + 4 = 40$
C) $2x - 4 = 20$
D) $2x + 4 = 20$
E) $2x + 8 = 20$

9. Raúl compró 1,2 kg de pan más una bolsa de papel de $50, pagó con un billete de $1.000 y una moneda de $100, y recibió un vuelto de $30.
Según la información dada, ¿cuánto cuesta un kilo de pan?

A) $\$833,\overline{3}$
B) $\$841,\overline{6}$
C) $850
D) $930
E) $\$933,\overline{3}$

10. Se puede determinar tres números consecutivos, sabiendo que:

(1) La suma del menor con el mayor da el doble del central.
(2) La suma de los tres números es 33.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

11. Las edades de dos hermanos suman 40 años y uno tiene los $\frac{3}{5}$ de los que tiene el otro.
¿Cuál es la diferencia entre sus edades?

A) 10 años
B) 15 años
C) 20 años
D) 25 años
E) 30 años

12. En un triángulo el ángulo menor mide 26° menos que el del medio y 28° menos que el mayor. ¿Cuánto mide el mayor de los ángulos interiores?

A) 42°
B) 60°
C) 68°
D) 70°
E) 78°

13. En un jardín hay 31 flores entre calas, orquídeas y pensamientos. Siendo las orquídeas un tercio de los pensamientos y estos cuatro más que las calas.
¿Cuántos son los pensamientos?

A) 6
B) 7
C) 14
D) 15
E) 21

Prohibida su reproducción total o parcial.

14. Una madre reparte $12.000 entre sus dos hijos de modo que el mayor recibió $3.000 más que el doble de lo que recibió el otro, ¿cuánto recibió el menor?

A) $2.000
B) $3.000
C) $6.000
D) $7.500
E) $9.000

15. Cuando uno de dos hermanos nació, el mayor tenía nueve años.
Si uno de ellos tiene un año más que el doble del otro, ¿cuánto suman sus edades?

A) 8
B) 12
C) 17
D) 25
E) 34

16. Un cuadrado tiene 14 cm más de perímetro que un triángulo equilátero. Si la suma de los perímetros de ambas figuras es 26 cm, ¿cuál es el área del cuadrado?

A) 4 cm²
B) 6 cm²
C) 8 cm²
D) 20 cm²
E) 25 cm²

17. Dos cajas pesan 102 kilos y si se sacan 7 kilos de una y se depositan en la otra, quedan iguales. ¿Cuántos kilos tiene la más pesada?

A) 48
B) 51
C) 56
D) 58
E) 65

18. Dos libros han costado $13.000 y el doble del precio del más barato vale $200 más de lo que cuesta el otro. ¿Cuál es la diferencia entre los precios de ambos libros?

A) $2.200
B) $3.200
C) $4.200
D) $4.400
E) $8.600

19. Las edades de Pedro y Luis están en la razón de 5:4 y hace tres años estaban en la razón 4:3. ¿Cuánto suman sus edades actuales?

A) 19 años.
B) 21 años
C) 24 años
D) 27 años.
E) 36 años.

20. Doña Pepa lleva 3 kg de tomates y 2 de limones en $1.300. Si hubiese llevado 2 kg de tomates y 3 de limones le habría costado $100 menos. ¿Cuánto vale cada kilo de limones?

A) $126
B) $150
C) $200
D) $250
E) $300

Prohibida su reproducción total o parcial.

21. Un taller mecánico vende aceite para autos en dos formatos, bidones de dos y cinco litros cada uno. En total en el taller hay 26 bidones y 100 litros de aceite.
¿Cuántos bidones de dos litros hay?

A) 8
B) 10
C) 12
D) 15
E) 16

22. Hace ”a” años las edades de dos hermanos sumaban “10 a”. ¿Cuál será el promedio de sus edades en “a” años más?

A) 5,5 a
B) 6 a
C) 6,5 a
D) 7 a
E) 12 a

23. Paula ahorró $11.000 en monedas de $100 y $500, se puede saber cuántas monedas de cada tipo ahorró sabiendo que:

(1) Son 30 monedas.
(2) Lo ahorrado en monedas de $500 es 10 veces lo ahorrado en monedas de $100.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

24. En un campeonato de fútbol, si un equipo gana un partido recibe 3 puntos y si empata gana 1 punto. Si en 6 partidos un equipo permanece invicto con 14 puntos, ¿cuántos partidos ha ganado?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

25. En una compra de útiles escolares, Pedro compra dos lápices de mina y cuatro de pasta en $1.800. Si el lápiz de pasta cuesta $150 más que el lápiz de mina, ¿qué valor tiene este último?

A) $150
B) $200
C) $250
D) $350
E) $400

26. Un matrimonio tiene tres hijos: el mayor y dos gemelos. El mayor tenía dos años cuando nacieron los gemelos y actualmente sus edades suman 14 años, ¿qué edad tienen los gemelos?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Prohibida su reproducción total o parcial.

27. Se puede determinar un número de dos cifras, sabiendo que:

(1) La suma de las cifras es 9.

(2) Si se suma el número con el que resulta de invertir sus cifras resulta 99.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

28. Un peluquero en tres días de trabajo recaudó $180.000. En el segundo día atendió a dos clientes más que en el primer día y en el tercer día atendió 4 más que en el primer día. Si a cada uno de los clientes le cobró $6.000 por el corte, ¿cuántos atendió el segundo día?

A) 8
B) 10
C) 12
D) 18
E) 20

29. Con un hilo de 64 cm se construye un rectángulo cuyo largo mide 4 cm más que el ancho. ¿Cuál es el área de este rectángulo?

A) 252 cm²
B) 396 cm²
C) 572 cm²
D) 780 cm²
E) 1.020 cm²

30. Felipe compra un ramo de flores que contenía 18 claveles y 6 rosas en $6.600.
Si las rosas valen $100 más que los claveles, ¿cuánto vale cada una de las rosas?

A) $200
B) $250
C) $300
D) $350
E) $450

31. En una fiesta hay 12 mujeres más que hombres. Si se retiran 4 mujeres y 2 hombres, el número de hombres equivaldría a la mitad del número de mujeres.
¿Cuántos hombres había en un principio?

A) 10
B) 12
C) 14
D) 20
E) 24

32. En un juego de tiro al blanco se asignan 100 puntos por cada acierto y se descuentan 50 por cada error. Si un jugador lanzó 30 veces obteniendo 1500 puntos ¿cuál fue el número de aciertos?

A) 10
B) 15
C) 20
D) 25
E) 29

Prohibida su reproducción total o parcial.

33. Pedro tiene $A y su hermano Diego tiene $B. Si Pedro le da $200 a Diego quedan ambos con igual cantidad de dinero y si el padre de ellos le hubiese dado $ 500 a Pedro y le hubiese quitado $100 a Diego, entonces Pedro quedaría con el doble de lo que tendría Diego.
¿Cuál de los siguientes sistemas permite determinar el dinero que tenían inicialmente?

A) $\begin{cases} A + 200 = B - 200 \\ 2(A - 500) = B + 100 \end{cases}$

B) $\begin{cases} A + 200 = B - 200 \\ 2(A + 500) = B - 100 \end{cases}$

C) $\begin{cases} A - 200 = B + 200 \\ 2(A + 500) = B - 100 \end{cases}$

D) $\begin{cases} A + 200 = B - 200 \\ A + 500 = 2(B - 100) \end{cases}$

E) $\begin{cases} A - 200 = B + 200 \\ A + 500 = 2(B - 100) \end{cases}$

34. Francisco tiene $p en a monedas de $50 y b monedas de $100.
Si el total de monedas son 10, ¿cuál de los siguientes sistemas permite determinar cuántas monedas tiene de cada denominación?

A) $\begin{cases} a + b = 10 \\ \frac{50}{a} + \frac{100}{b} = p \end{cases}$

B) $\begin{cases} a + b = 10 \\ 100a + 50b = p \end{cases}$

C) $\begin{cases} a + b = 10 \\ \frac{a}{50} + \frac{b}{100} = p \end{cases}$

D) $\begin{cases} a + b = 10 \\ \frac{a}{50} + \frac{b}{100} = 10 \end{cases}$

E) $\begin{cases} a + b = 10 \\ 50a + 100b = p \end{cases}$

35. Un número sumado con la mitad de la edad de Pablo da 40. Si se suman las edades de Pablo con la de su hermano Joaquín resultan 20 años y si se suma la edad de Pablo con el doble de la edad de Joaquín resulta 28 años, ¿cuál es el número?

A) 8
B) 12
C) 20
D) 34
E) 68

Prohibida su reproducción total o parcial.

36. En un supermercado, 3 kilos de paltas y 2 kilos de tomate valen $8.900. Se puede determinar cuánto vale el kilo de paltas si se sabe que:

(1) 2 kilos de paltas y 3 kilos de tomates valen $7.350.

(2) El kilo de paltas vale $1.550 más que el kilo de tomates.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

37. El promedio de dos números es 29 y si se dividen el cuociente resulta 3 y el resto 2. ¿Cuál es el número mayor?

A) 14
B) 15
C) 29
D) 43
E) 44

38. Juan va a comprar bebidas y papas fritas , para ello lleva $ 3600.
Si comprara 3 latas de bebida y 2 bolsas de papas le faltarían $ 100 y si comprara 2 latas de bebida y 3 bolsas de papas, le sobrarian $ 50. ¿Cuánto vuelto recibiría, si compra una bolsa de papas y una lata de bebida?

A) $1.450
B) $2.150
C) $2.250
D) $2.350
E) $2.170

39. En un cine la entrada normal vale $600 más que la de estudiantes.
A una función asisten 50 personas de las cuales 10 cancelaron entrada de estudiantes, recaudándose $114.000, ¿cuánto valía la entrada para estudiantes?

A) $1.400
B) $1.800
C) $2.000
D) $2.200
E) $2.400

40. Un vaso está lleno de agua, si se bota el 20% de su contenido, el vaso con el agua tendrían una masa de 320 gramos y si se hubiese botado un tercio de su contenido, habrían tenido una masa de 300 gramos. ¿Cuál es la masa del vaso?

A) 150 gramos
B) 160 gramos
C) 180 gramos
D) 200 gramos
E) 20 gramos

41. Los alumnos de un curso deben reunir fondos para comprar un TV para su sala, para ello, se dividirá el dinero a recaudar en partes iguales. Se puede determinar cuánto es el dinero a reunir sabiendo que:

(1) Si cada uno aporta $4000 sobrarían $12.000.

(2) Si cada uno aporta $3000 faltarían $16.000.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

42. Un número tiene dos cifras donde la cifra de las unidades es p y la de las decenas es b. SI la suma de las cifras es 5 y si al número se le suma 9 resulta el número con las cifras invertidas, ¿cuál de los siguientes sistemas permite determinar las cifras del número?

A) $b + p + p + b = 5$
$10b + p + 9 = 10p + b$

B) $10b + p + 9 = 10b + p$
$10b + p = 5$

C) $b + p + 9 = p + b$
$b + p = 5$

D) $10p + b + 9 = 10b + p$
$b + p = 5$

E) $10b + p + 9 = 10p + b$
$b + p = 5$

43. Si a un número que tiene dos cifras se le resta la suma de sus cifras resulta 54 y si al número se le resta el que resulta al invertir sus cifras resulta 27. ¿Cuál el doble del número?

A) 12
B) 18
C) 63
D) 72
E) 126

44. Juan quiere instalar una enciclopedia en una biblioteca cuyos compartimientos son de igual tamaño. Al ponerla en los compartimientos se da cuenta que si coloca cuatro tomos en cada compartimiento le sobraría un tomo y si los pone de a cinco el último compartimiento quedaría vacío. ¿Cuántos compartimientos tiene la biblioteca?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 7
E) 8

45. Un vehículo recorre una cierta distancia a una rapidez constante de 90 km/h, si hubiese ido a 100 km/h se hubiese demorado 5 minutos menos. ¿Qué longitud tenía el trayecto?

A) 50 km
B) 60 km
C) 70 km
D) 75 km
E) 120 km

46. En un curso, la razón entre el número de hombres y el número de mujeres es 5 : 3 y si se retiran 4 hombres y se agregan tres mujeres, la razón es 7 : 6. ¿Qué diferencia había inicialmente entre hombres y mujeres?

A) 3
B) 5
C) 10
D) 15
E) 20

Prohibida su reproducción total o parcial.

47. x cuadernos de un mismo tipo valen $p, si comprara dos más le harían un descuento de un 5%, en este caso ¿cuánto hubiese pagado?

A) $\frac{(x + 2)p}{x} - \frac{5}{100}$

B) $(0,95) \cdot \frac{(x + 2)p}{x}$

C) $(0,05) \cdot \frac{(x + 2)p}{x}$

D) $(0,95) \cdot \frac{xp}{x + 2}$

E) $(0,9) \cdot \frac{(x + 2)p}{x}$

48. Se obtienen $150.000 como capital final al invertir un monto "x" durante 48 meses. Si al transcurrir un año el capital aumenta un 10% respecto a lo acumulado el año anterior, ¿cuál de las siguientes ecuaciones permite determinar el capital x, suponiendo que no hubo depósitos ni retiros durante todo el período?

A) $150000 = x(1 + 0,1)^{48}$

B) $150000 = x(1+0,1)^4$

C) $150000 = x(1+0,01)^4$

D) $x = 150000(1+0,1)^4$

E) $x(1+0,1 \cdot 4) = 150000$

49. El largo de un rectángulo se disminuye en 10 cm y el ancho aumenta en 10 cm, obteniéndose un rectángulo que tiene 50 cm² más que el original. ¿Cuál es la diferencia en cm, entre los lados distintos del rectángulo original?

A) 5

B) 10

C) 15

D) 30

E) Falta información para determinarlo.

50. En una compañía de electricidad, el cobro mensual consiste en un modelo lineal, donde se aplica un cargo fijo de $F más un monto que depende de la cantidad de kWh consumidos. Si por el consumo de x kWh se ha cobrado un monto de $T, ¿cuál de las siguientes expresiones corresponde(n) al valor de la cuenta por un consumo de (x + 2) kWh?

I) $\left(\frac{T - F}{x}\right) \cdot (x + 2)$

II) $F + \frac{(T - F) \cdot (x + 2)}{x}$

III) $T + 2\left(\frac{T - F}{x}\right)$

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

51. El 50% de la mitad de un número es 20 , entonces el número es:

A) 5

B) 10

C) 20

D) 40

E) 80

52. a es el 10% de b y b es el 10% de c, Si c = 10, entonces a =

A) 0,01

B) 0,1

C) 1

D) 10

E) 100

Prohibida su reproducción total o parcial.

53. Una camisa con un 20% de descuento cuesta $ 4.000. ¿Cuánto costaría sin la rebaja?

A) $ 4.800
B) $ 5.000
C) $ 5.200
D) $ 5.400
E) $ 5.500

54. En un curso hay 1 mujer por cada 4 hombres. ¿Que % del curso son mujeres?

A) 20%
B) 25%
C) 30%
D) 40%
E) 80%

55. El 12% de 50, es equivalente con:

I) 20% de 30
II) 30% de 20
III) 15% de 40

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

56. Se ha cancelado $ 42.000, que corresponde al 60% de una deuda, ¿Cuánto falta por pagar?

A) $ 14.000
B) $ 28.000
C) $ 30.000
D) $ 70.000
E) $ 112.000

57. El 20% del área de un cuadrado es 20 cm^2, ¿Cuál es su perímetro?

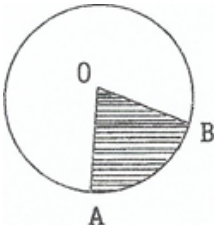
A) 100 cm
B) 40 cm
C) 25 cm
D) 20 cm
E) 10 cm

58. De un libro de 120 páginas, he leído 96. ¿Qué % me queda por leer?

A) 1%
B) 5%
C) 20%
D) 25%
E) 40%

59. ¿Qué % de la superficie del círculo de centro 0, está sombreada, si $\measuredangle AOB = 72^0$?

A) $\frac{1}{5}$ %
B) 5%
C) 20%
D) 25%
E) 40%



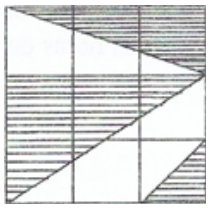
60. Un rectángulo tiene lados de 8 y 10 cm. Si el largo aumenta en un 20% y el ancho disminuye en un 25%. ¿En que % varía el área?

A) Disminuye un 10%
B) Aumenta un 10%
C) No varía
D) Disminuye más de un 10%
E) Aumenta más de un 10%

Prohibida su reproducción total o parcial.

61. La figura está formada por 9 cuadrados congruentes. ¿Aproximadamente, que % del cuadrado ABCD está sombreado?

A) 50%
B) 55%
C) 60%
D) 65%
E) 70%



62. Un hotel con capacidad para 800 pasajeros está completo; si un día se va un 30% de los pasajeros y llega un 15% de la capacidad, ¿Cuántos pasajeros faltan para que el hotel esté nuevamente completo?

A) 680
B) 634
C) 560
D) 240
E) 120

63. Una emisora transmite 16 horas al día. Si su programación consiste en un 65% de música popular, 25% de música folcklórica y el resto corresponde a música selecta, entonces, ¿Cuántas horas dedica la emisora a música selecta?

A) 1h 6 min.
B) 1h 10 min.
C) 1h 36 min.
D) 2 horas
E) Ninguna de las anteriores

64. Un poste tiene enterrado el 20% de su longitud total. Si la parte no enterrada mide 12m. ¿Cuál es la longitud total del poste?

A) 2,4 m.
B) 9,6 m.
C) 27 m.
D) 18 m.
E) 15 m.

65. El 25% de la edad del padre es la del hijo, y el 30% de la edad del hijo es 3. ¿Qué edad tiene el padre?

A) 30
B) 40
C) 50
D) 60
E) 70

66. a sumado con el 30% de 6 da el 40% de 8. Entonces el 10% de a es:

A) 0,05
B) 0,5
C) 0,14
D) 1,4
E) 14

67. Sólo 12 alumnas de un curso de 30, han pagado una cuota para un paseo. ¿Qué % del curso falta por pagar?

A) 40%
B) 45%
C) 55%
D) 60%
E) 65%

Prohibida su reproducción total o parcial.

68. En un cierto día, el % de asistencia de un curso fue de un 70%, si los asistentes eran 28, ¿cuántos alumnos en total tiene el curso?

A) 12
B) 36
C) 38
D) 40
E) 52

69. En una hacienda, el 20% de la tierra se destina a una plantación de árboles forestales, y un 25% del terreno restante para papas y el resto que corresponde a 66 hectáreas, se destina al cultivo de cereales. ¿Cuántas hectáreas tiene el terreno?

A) 29,7
B) 110
C) 120
D) $146\frac{2}{3}$
E) 165

70. Después de retirar el 10% de lo que tenía ahorrado en una cuenta, me quedó un saldo de $13.500, ¿cuánto tenía al principio?

A) $ 13.635
B) $ 14.000
C) $ 14.850
D) $ 15.000
E) Ninguna de las anteriores

RESPUESTAS CAPÍTULO 5									
1. B	**2.** C	**3.** B	**4.** D	**5.** D	**6.** A	**7.** B	**8.** D	**9.** C	**10.** B
11. A	**12.** D	**13.** D	**14.** B	**15.** D	**16.** E	**17.** D	**18.** C	**19.** D	**20.** C
21. B	**22.** D	**23.** D	**24.** D	**25.** B	**26.** C	**27.** E	**28.** B	**29.** A	**30.** D
31. B	**32.** C	**33.** E	**34.**E	**35.** D	**36.** D	**37.** E	**38.** B	**39.** B	**40.** D
41. C	**42.** E	**43.** E	**44.** C	**45.** D	**46.** C	**47.** B	**48.** B	**49.** C	**50.** D
51. E	**52.** B	**53.** B	**54.** A	**55.** E	**56.** B	**57.** B	**58.** C	**59.** C	**60.** A
61. B	**62.** E	**63.** C	**64.** E	**65.** B	**66.** C	**67.** D	**68.** D	**69.** B	**70.** D

Prohibida su reproducción total o parcial.

MINIENSAYO N°2

EJE ÁLGEBRA y FUNCIONES

Tiempo: 70 minutos

1. Si $x - 2y = 3$, entonces $x^2 - 4xy + 4y^2 =$

A) 3
B) 6
C) 7
D) 9
E) 12

2. ¿Cuál es la diferencia, en unidades cúbicas, en ese orden, de los volúmenes de dos cubos cuyas aristas miden $(a + 2)$ y $(a - 2)$ unidades?

A) 64
B) 16
C) 8
D) $4(3a^2 + 4)$
E) $12a(2 + a)$

3. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) factor(es) de la expresión $(1 + x)^2 - (1 + x)(1 - x)$?

I) $2x$
II) $2 + 2x$
III) $x + x^2$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

4. ¿Cuál de las siguientes expresiones **NO** es equivalente a la expresión $4x^2 - 24x + 32$?

A) $(2x - 4)(2x - 8)$
B) $(4 - 2x)(8 - 2x)$
C) $(4x - 8)(x - 4)$
D) $4x(x - 6) + 32$
E) $4x^2 - 4(6x + 8)$

5. Sean **a** y **b** números reales, tales que $a + b = 6$ y $ab = 2$, entonces $a^2 + 8ab + b^2 =$

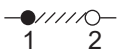
A) 52
B) 48
C) 44
D) 42
E) 40

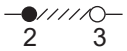
6. Si $a - b = -4$ y $ab = 2$, entonces $a^2 + b^2 =$

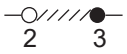
A) 20
B) 16
C) 18
D) 14
E) 10

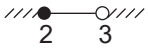
Prohibida su reproducción total o parcial.

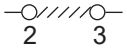
7. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor al conjunto solución de las inecuaciones $1 \leq x - 1 < 2$?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

8. La diferencia entre los precios de dos artículos es \$300. Si se compran dos del más barato y tres del más caro cuestan \$7.350, entonces ¿cuánto vale el más barato?

A) \$ 1.290
B) \$ 1.350
C) \$ 1.590
D) \$ 1.650
E) \$ 3.300

9. Sea el sistema de ecuaciones,
$\begin{array}{l}(a-1)x + by = 3 \\ (b+1)x - ay = -1\end{array}$, si la solución del sistema es (3,2), entonces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) $b > a$
B) $a + b < 0$
C) $ab > 0$
D) $a - b > 0$
E) $2a + b < 0$

10. Sea el sistema de ecuaciones,
$\begin{array}{l}kx - (k-2)y = 10 \\ (k+3)x - ky = 15\end{array}$, ¿para qué valor de "k" el sistema tiene infinitas soluciones?

A) -3
B) -2
C) 0
D) 6
E) No existe tal valor de k.

11. El perímetro de un rectángulo es 50 cm, ¿cuál de las siguientes funciones modela el área de este rectángulo si "x" es la medida de uno de sus lados?

A) $g(x) = -x^2 + 25x$
B) $h(x) = x^2 - 25x$
C) $j(x) = -x^2 + 50x$
D) $k(x) = -x^2 - 50x$
E) $m(x) = -x^2 + 50x$

12. En los rectángulos en que el largo (x) es igual al doble del ancho, la diagonal en función del largo es:

A) $2x\sqrt{5}$
B) $x\sqrt{5}$
C) $\frac{x}{2}\sqrt{5}$
D) $2x\sqrt{3}$
E) $\frac{3}{2}x$

Prohibida su reproducción total o parcial.

13. ¿Cuál(es) de las siguientes relaciones se puede(n) escribir como una función cuadrática de la forma $f(x) = kx^2$, con k una constante y con dominio el conjunto de los reales positivos?

I) El área de un cubo en función de su arista.
II) El área de un triángulo equilátero en función de su lado.
III) El área de una semicircunferencia en función de su diámetro.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

14. El monto C(t) que tiene ahorrado Cristina en una cuenta corriente se modela con la función $C(t) = 500000 - 25000t$, donde t es el número de meses transcurridos desde que abrió la cuenta. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Su ahorro baja mensualmente $25.000.
II) Al inicio tenía $500.000
III) A los 20 meses ya no tendrá dinero en su cuenta.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

15. Sean f y g funciones definidas en los reales mediante $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x + 3$, ¿cuál es la preimagen del cero en la función compuesta (fog)(x)?

A) -5
B) 5
C) -3
D) -2 o -3
E) $-\frac{5}{2}$

16. En un rectángulo, el largo mide 3 cm más que el ancho, se puede determinar las longitudes de estos lados, sabiendo que:

(1) Su área es 108 cm^2.
(2) Su diagonal mide tres cm más que su largo.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

17. Sea las función definida mediante $f(x) = -\sqrt{x - 2} + 3$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Su dominio es el conjunto $[2 , \infty[$.
II) La preimagen del -2 es 27.
III) Su gráfica intersecta al eje x en un punto de abscisa 11.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

18. Sea la ecuación de segundo grado, $(k-3)x^2 - kx + 4 = 0$, ¿cuál(es) (es) son los posibles valores de "k" para que las soluciones sean reales e iguales?

I) 3
II) 4
III) 12

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) I, II y III

19. ¿Cuál es el conjunto de todos los valores de "a" para que la ecuación en x, $(x+a)^2+2a-1=0$ tenga dos soluciones reales y distintas?

A) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$
B) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$
C) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$
D) $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$
E) $\mathbb{R}$

20. Sea f una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales, definida por $f(x) = a(x-3)^2 + 2$, con **a** un número real distinto de cero. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) La gráfica pasa por el punto $(2,2+a)$.
II) El recorrido de la función son los números reales mayores o iguales que 2.
III) El vértice de la parábola asociada a la función es el punto (3,2).

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

21. La altura h(t) (en metros) que alcanzará un proyectil después de t segundos de haber sido disparado, está dada por la fórmula: $h(t) = 20t - 5t^2$. ¿A los cuántos segundos alcanzará una altura de 15 m?

I) 1
II) 2
III) 3

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

22. Un número tiene dos cifras, el dígito de las unidades es **b** y el de las decenas es **a**. Se sabe que la suma de las cifras es 10 y si se suma el número con el doble del número que resulta de invertir sus cifras resulta 189, ¿cuál de los siguientes sistemas permite resolver el problema de determinar las cifras del número?

A) $\begin{aligned} a + b &= 10 \\ ab + 2ba &= 189 \end{aligned}$

B) $\begin{aligned} a + b &= 10 \\ 10ab + 2(10ba) &= 189 \end{aligned}$

C) $\begin{aligned} a + b &= 10 \\ 10a + b + 2(10b + a) &= 189 \end{aligned}$

D) $\begin{aligned} a + b &= 10 \\ 10b + a + 2(10a + b) &= 189 \end{aligned}$

E) $\begin{aligned} 10a + b &= 10 \\ 10b + a + 2(10a + b) &= 189 \end{aligned}$

23. Sea la ecuación cuadrática, $ax^2+(a-1)x+2=0$, se puede determinar el valor de **a** sabiendo que:

(1) Una de las soluciones es $x = -2$.

(2) El discriminante de la ecuación es 25.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

24. Sea f una función definida en los reales, mediante $f(x + 1) = 3f(x - 1) - 2$, si $f(6) = 82$, entonces $f(0) =$

A) 4

B) 2

C) $\frac{35}{9}$

D) $\frac{32}{9}$

E) $\frac{8}{3}$

25. La parábola que representa a la gráfica de una función cuadrática cuyo dominio son los números reales, intersecta al eje de las abscisas solo en el punto (2,0) y al eje de las ordenadas en el punto (0,–8). ¿Cuál de las siguientes funciones, con dominio el conjunto de los números reales, está asociada a esta parábola?

A) $g(x) = -2x^2 - 8x - 8$

B) $h(x) = -2x^2 + 4x - 8$

C) $p(x) = -x^2 + 4x - 4$

D) $r(x) = -x^2 + 4x - 8$

E) $m(x) = -2x^2 + 8x - 8$

Prohibida su reproducción total o parcial.

26. Sea f: $]-\infty,-3] \to B$ una función definida por $f(x) = -(x+3)^2$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) f es inyectiva.

II) Si $B =]-\infty,0]$ entonces f es epiyectiva.

III) Si f es biyectiva su inversa es $f^{-1}(x) = -3 + \sqrt{-x}$, con x en B.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

27. Sea f una función definida en los reales mediante $f(x) = 4 \cdot \sqrt[3]{x-2} + 3$, entonces $f^{-1} =$

A) $\left(\frac{x-3}{4}\right)^3 - 2$
B) $\left(\frac{x-3}{4}\right)^3 + 2$
C) $\left(\frac{x-4}{3}\right)^3 + 2$
D) $\left(\frac{x-4}{3}\right)^3 - 2$
E) $\left(\frac{x-3}{4}\right)^2$

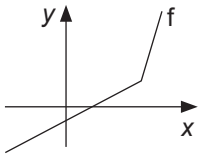
28. Si $f^{-1}(x-3) = 2x + 4$, entonces $f(4) =$

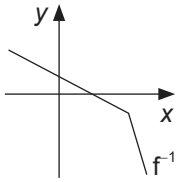
A) –4
B) –3
C) $-\frac{3}{2}$
D) 18
E) Falta información para determinarlo.

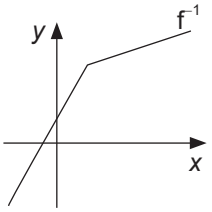
29. Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por f(x)=mx, con $m \neq 0$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

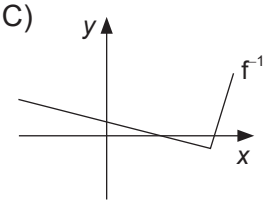
A) La imagen de m es un número real positivo.
B) si m = -1, entonces $f^{-1}(x) = f(x)$.
C) (f o f)(x) tiene como gráfica una recta cuya pendiente es positiva.
D) Si la gráfica de f es una recta con pendientes positiva, entonces f^{-1} tiene como gráfica una recta con pendiente negativa.
E) f y f^{-1} son funciones lineales.

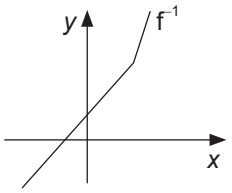
30. El gráfico adjunto, corresponde al de la función f definida en los reales. ¿Cuál de las siguientes alternativas representa mejor al gráfico de su función inversa?

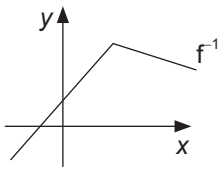


A)


B)


C)


D)


E)


Prohibida su reproducción total o parcial.

31. Sea f: A $\rightarrow$ B, definida por $f(x) = 3x^2 + 2$, se puede determinar que la inversa de f es función, sabiendo que:

(1) $A =]-\infty,-1[$

(2) $B = [5,\infty[$

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

32. Sean m y n dos números reales tales que $m+n>0$ y $m-n>0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $m^2 > n^2$

II) $m > 0$

III) $\frac{m+n}{m-n} > 1$

A) Solo I

B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) Solo I y III

33. Si $a > b > 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) El área del rectángulo de lados **a** + **2b** y **a** es mayor al área del rectángulo de lados **b** y **b** + **2a**.

II) El área de un rectángulo de lados **2a** y **a** es mayor que el área de un rectángulo de lados **a** + **b** y **b**.

III) La suma de las áreas de los cuadrados de lados **a** y **b** es mayor que el área de un rectángulo de lados **a** + **1** y **b**.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

34. La diferencia entre las edades de Pedro y Antonio es mayor que 15 y menor que 18 años y la diferencia entre las edades de Antonio y Luis es a lo menos 10 y a lo más 12 años, entonces la diferencia entre las edades de Pedro y Luis es:

A) a lo sumo 30 años.

B) a lo menos 25 años.

C) un valor entre los 25 y 30 años.

D) superior a los 30 años.

E) inferior a los 25 años.

Prohibida su reproducción total o parcial.

35. Si m y n son enteros, tal que $m > n > 0$, ¿cuál(es) de las siguientes expresiones es (son) **siempre** mayor(es) que $\frac{m}{n}$?

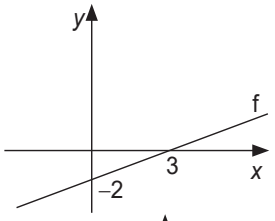
I) $\frac{m}{m+n}$

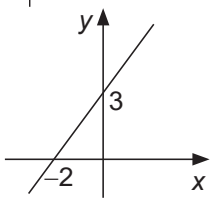
II) $\frac{m^2 - n^2}{mn - n^2}$

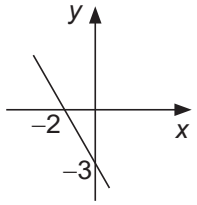
III) $\frac{mn + m^2}{m^2 - n^2}$

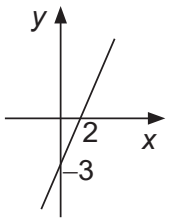
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

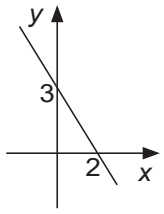
36. La siguiente gráfica corresponde a la de la función $y = f(x)$, ¿cuál de las siguientes gráficas representa mejor a la gráfica de $y = -f^{-1}(x)$?

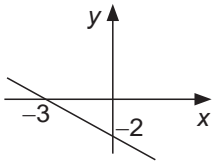


A)


B)


C)


D)


E)


37. Sean a y b dos números reales tales que $a < b < 0$, ¿cuál de las siguientes desigualdades es (son) siempre verdadera(s)?

I) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

II) $\frac{a - b}{a + b} > 0$

III) $\frac{a - b}{a + b} > \frac{a}{b}$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

38. Sean a y b números reales, tales que $a \neq b$, se puede determinar que $\frac{a - b}{a + b} > 1$, sabiendo que:

(1) $a + b > 0$
(2) $b < 0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJE

GEOMETRÍA

Capítulo
10

TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

M. C. Escher (1898 - 1972) fue un destacado artista, en muchas de sus afamadas obras se destaca el uso de las transformaciones isométricas como la traslación, la reflexión y una rotación, las que serán materia de estudio del presente capítulo.

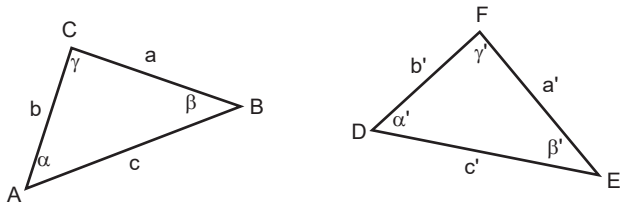
CONCEPTOS CLAVES

- Criterios de congruencia de triángulos
- Traslación
- Reflexión en torno a una recta
- Reflexión en torno a un punto
- Rotación en torno a un punto

Prohibida su reproducción total o parcial.

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son congruentes cuando sus ángulos y sus lados homólogos tienen igual medida.



$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha' & a = a' \\ \beta = \beta' & b = b' \\ \gamma = \gamma' & c = c' \end{cases}$$

Los siguientes criterios, permiten establecer la congruencia entre dos triángulos con la mínima información posible.

- Criterio L – L – L
  Dos triángulos son congruentes cuando sus lados homólogos son congruentes.

- Criterio L – A – L
  Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados homólogos congruentes y el ángulo comprendido entre ellos.

- Criterio A – L – A
  Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos homólogos congruentes y el lado común entre ellos.

- Criterio L – L – A>
  Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados homólogos congruentes y el ángulo opuesto al mayor de estos lados.

(a > b)

Prohibida su reproducción total o parcial.

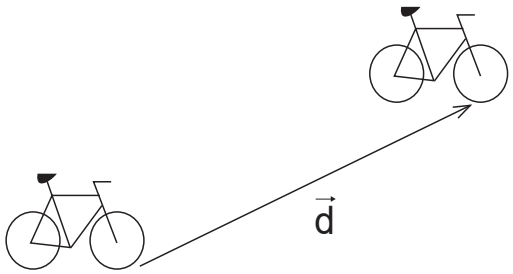
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

Las transformaciones isométricas en el plano son cuatro:

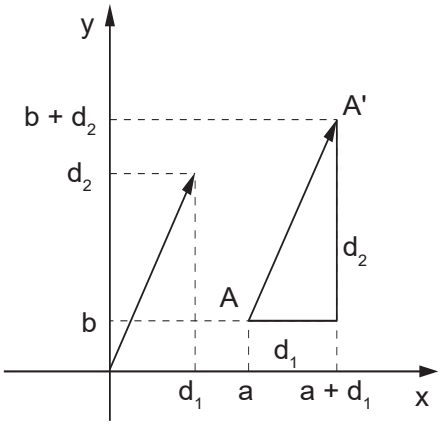
1. Traslación
2. Reflexión con respecto a una recta o simetría axial.
3. Reflexión con respecto a un punto o simetría puntual.
4. Giro o rotación.

Las isometrías o transformaciones isométricas convierten a una figura en otra que resulta ser congruente con la original.

- **Traslación**
  Cuando efectuamos una traslación, todos los puntos de la figura se mueven según una cierta dirección, la cual queda determinada por el vector dirección:

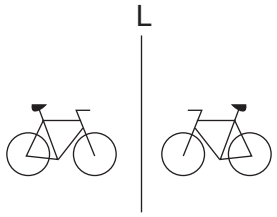


En un sistema cartesiano, la dirección queda determinada por un vector dado como par ordenado.
Si al punto (a, b) lo trasladamos en la dirección (d_1, d_2), entonces queda en el punto $(a + d_1, a + d_2)$.



Prohibida su reproducción total o parcial.

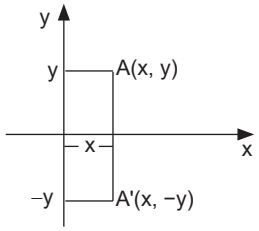
- **Reflexión con respecto a una recta (Simetría Axial)**
  En este caso la transformación produce el “efecto espejo”:



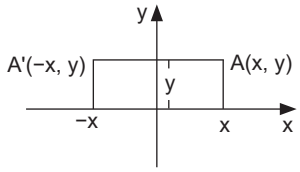
La figura de la izquierda se ha reflejado con respecto a la recta L, o se le ha aplicado una simetría o bien una simetría axial, quedando convertida en la figura de la derecha.

En un sistema cartesiano, es útil saber las siguientes simetrías axiales:

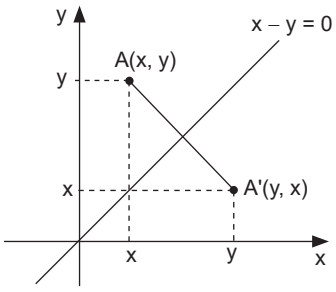
A) Simetría con respecto al eje x
En este caso el punto (x, y) queda en el punto (x, –y):



B) Simetría con respecto al eje y
El punto (x, y) queda en el punto (–x, y):

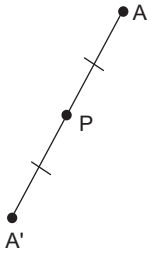


C) Simetría con respecto a la recta de ecuación x – y = 0
En este caso el punto (x, y) queda en el punto (y, x):

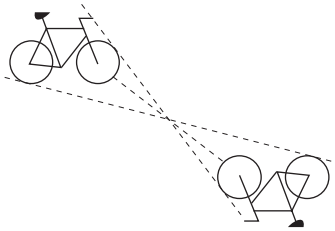


Prohibida su reproducción total o parcial.

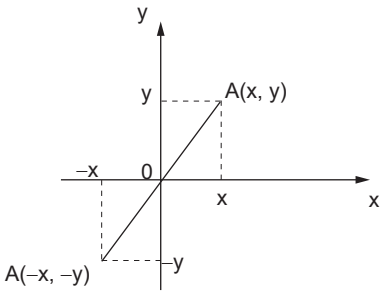
- **Reflexión con respecto a un punto (Simetría puntual)**
  Si a un punto A le aplicamos una simetría con respecto a P, entonces su imagen quedará en la recta $\overleftrightarrow{AP}$, de modo que P es el punto medio entre A y su imagen.



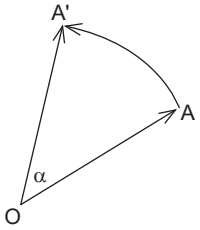
  Si a una figura le aplicamos una reflexión con respecto a un punto, entonces la figura quedará girada en 180° con respecto a este punto.

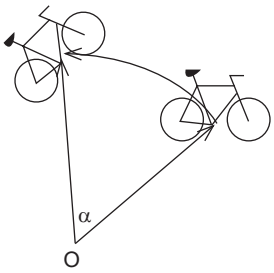


  En un sistema cartesiano, cuando a un punto (x, y) se le aplica una reflexión con respecto al origen, queda en el punto (–x, –y):



- **Rotación o giro con respecto a un punto**
  Si el punto A se gira en α° con respecto al punto O de la figura, entonces queda en un punto A' de modo que OA = OA' y $\measuredangle AOA' = \alpha$.
  Se entenderá, a no ser que se indique lo contrario, que el sentido del giro es contrario al sentido del movimiento de las manecillas del reloj (sentido antihorario).

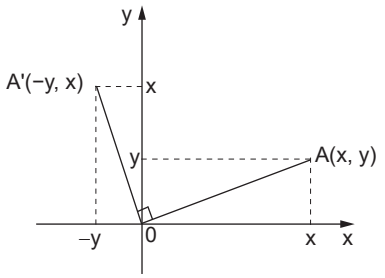




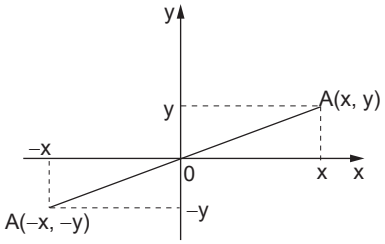
Prohibida su reproducción total o parcial.

A continuación se muestran las rotaciones en sentido antihorario con respecto al origen para ángulos de 90°, 180° y 270°.

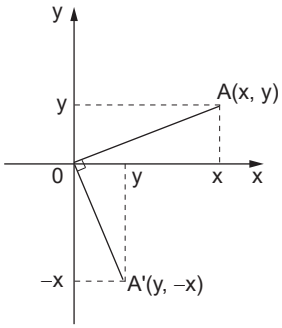
A) Rotación en 90°
El punto (x, y) queda en el (–y, x):



B) Rotación en 180°
El punto (x, y) queda en el (–x–y):



C) Rotación en 270°
El punto (x, y) queda en el (y, –x):



Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS RESUELTOS

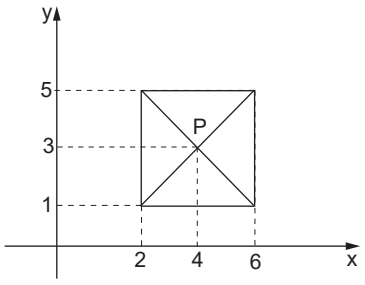
1. A un punto se le efectúa una traslación en la dirección (–2,3) , luego se le aplica una rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al origen, quedando en el punto (2,5), ¿cuál era el punto inicial?

Solución:
Supongamos que el punto inicial era (a,b), al aplicarle una traslación en la dirección (–2,3) queda en el punto (a – 2, b + 3).
Por otro lado, al aplicarle un giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen, el punto (x, y) queda en el punto (–y, x), en este caso, el punto (a – 2, b + 3) quedará en el punto (–(b + 3), a – 2), si igualamos este punto al (2,5), obtenemos que –(b + 3) = 2 y a – 2 = 5.
Resolviendo estas ecuaciones, se concluye que a = 7 y b = –5, por lo tanto el punto inicial era el (7,–5).
Otra forma de resolver este ejercicio, es aplicando las transformaciones inversas desde el punto final hasta llegar el punto inicial; es decir al (2, 5) le aplicamos primero un giro en sentido horario con respecto al origen, luego al punto obtenido le aplicamos una traslación según la dirección (2, –3), obteniéndose de esta forma el punto inicial.

2. ¿Cuál(es) de las siguientes transformaciones permite(n) que el punto (6,5) quede en el punto (2,1)?

I) Una traslación según la dirección (–4,–4).
II) Una reflexión con respecto al punto (4,3).
III) Una rotación en 90° en sentido antihorario con respecto al punto (6,1).

Solución:
En I, podemos obtener la dirección de traslación restando el punto final (2,1) con el punto inicial: $\vec{d}$ = (2, 1) – (6, 5) = (–4, –4), por lo tanto I es correcta.
Para ver si las afirmaciones II y III son verdaderas, nos ayudaremos con una figura, aunque se pueden utilizar otros métodos que no la requieren.
Observa que el punto (4, 3) es el punto medio entre el (6, 5) y el (2, 1), por lo tanto el (2, 1) se puede obtener a partir del (6, 5) través de una reflexión con respecto al (4, 3), por lo tanto II es verdadera.



Para III, podemos utilizar que la figura que se forma es un cuadrado, por lo tanto si giramos el punto (6, 5) en 90° sentido **antihorario** con respecto al punto (6, 1) obtenemos el (2, 1), luego III es verdadera.
En conclusión, todas son verdaderas.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Si el punto (–3,5) se refleja en torno al eje y, queda en el punto:

A) (3, –5)
B) (5, –3)
C) (–5, –3)
D) (3, 5)
E) (5, 3)

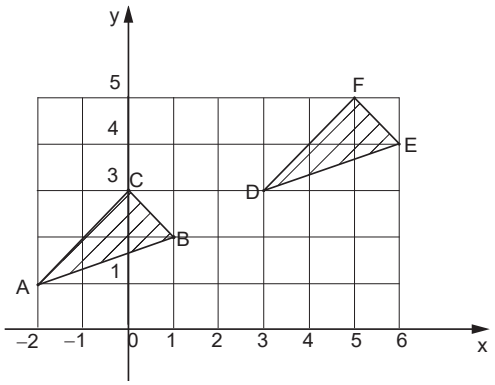
2. Si el punto (3,2) se gira en 90° en sentido antihorario en torno al origen, queda en el punto:

A) (2, –3)
B) (3, –2)
C) (–2, –3)
D) (2, 3)
E) (–2, 3)

3. El punto (2, 5) se traslada quedando en el punto (−3, 2), ¿cuál es la dirección de la traslación?

A) (–3, –5)
B) (3, 5)
C) (–5, –3)
D) (–1, 7)
E) (7, –1)

4. ¿En qué dirección se debe trasladar el ∆ABC para que se transforme en el ∆DEF?



A) (5, 1)
B) (5, 2)
C) (2, 5)
D) (–5, 2)
E) (–5, –2)

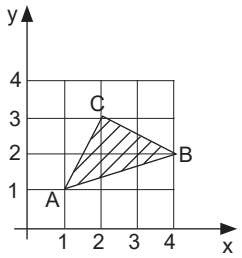
5. ¿Cuál(es) de las siguientes transformaciones permite(n) que el punto (2, 2) quede en el punto (–2, 2)?

I) Reflexión en torno al eje x, seguida de una simetría puntual con respecto al origen.
II) Una traslación en la dirección (–4, 0).
III) Una traslación en la dirección (–4, –4), seguida de una reflexión con respecto al eje y.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

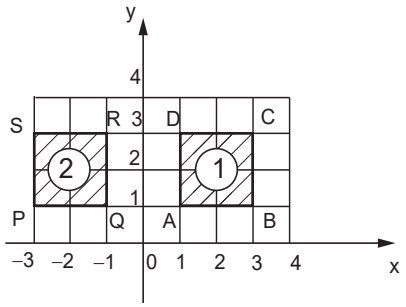
Prohibida su reproducción total o parcial.

6. Si al ∆ABC de la figura, se le aplica una traslación vertical de modo que el vértice C queda en el eje x, ¿cuáles serían las nuevas coordenadas de B?



A) (1, –2)
B) (4, –2)
C) (3, –1)
D) (3, –2)
E) (4, –1)

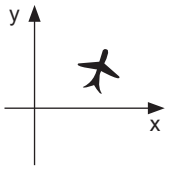
7. ¿Qué transformaciones isométricas se podrían haber aplicado al cuadrado 2 para que se transforme en el cuadrado 1?

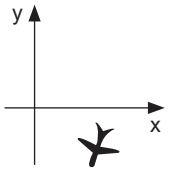


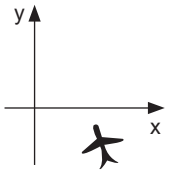
I) Una traslación en la dirección (2, 0).
II) Un giro en sentido horario en 90º en torno al origen.
III) Una reflexión en torno al eje de las abscisas.

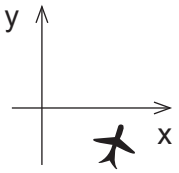
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

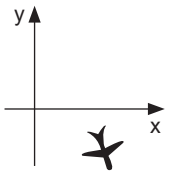
8. A la figura que está en el primer cuadrante se le aplica una reflexión con respecto al origen y después una reflexión con respecto al eje y.
¿Cuál(es) de las siguientes alternativas ilustra la posición donde queda finalmente?

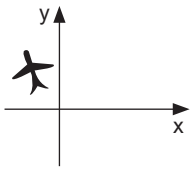


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Prohibida su reproducción total o parcial.

9. Al aplicar una rotación de centro en O en 180° a la figura, se obtiene:

A)

B)

C)

D)

E)

10. Los puntos (a, b) y (x, y) son simétricos respecto al eje y, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) a = x
II) y = b
III) b = x

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) Solo I y III

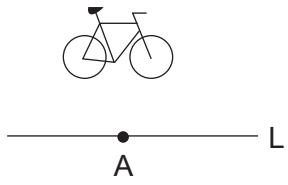
11. Se puede determinar las coordenadas del punto (a,b) si se sabe que:

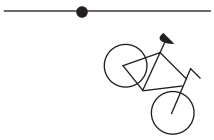
(1) Es simétrico del punto (–2,3) con respecto al eje y.
(2) Es simétrico del punto (–2,–3) con respecto al origen.

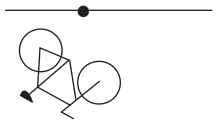
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

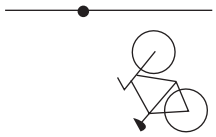
Prohibida su reproducción total o parcial.

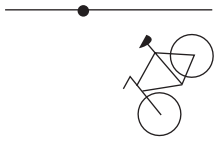
12. A la bicicleta de la figura se le ha aplicado primero un giro en sentido horario con centro en A y un ángulo de 30º y después una reflexión en torno a la recta L.
¿Cuál de las siguientes alternativas representa mejor a la posición dónde queda?

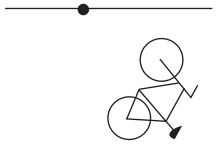


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

13. El punto (–2, 3) se refleja en torno al origen quedando en el punto (a, b), entonces a – b =

A) –5
B) –1
C) 1
D) 2
E) 5

14. ¿Cuál de las siguientes transformaciones permite que el punto (–a, b) quede en el punto (b, a)?

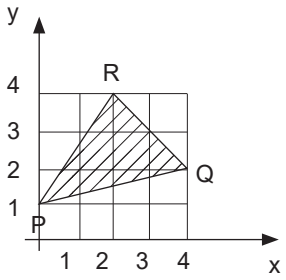
A) Reflexión en torno al eje x.
B) Reflexión en torno al eje y.
C) Reflexión en torno al origen.
D) giro en 90° en sentido horario con respecto al origen.
E) giro en 90° en sentido antihorario con respecto al origen.

15. ¿En qué dirección se debe trasladar el punto (a , b) para que quede en el punto (b, a)?

A) (–a, –b)
B) (b, a)
C) (–b , –a)
D) (a – b, b – a)
E) (b – a, a – b)

Prohibida su reproducción total o parcial.

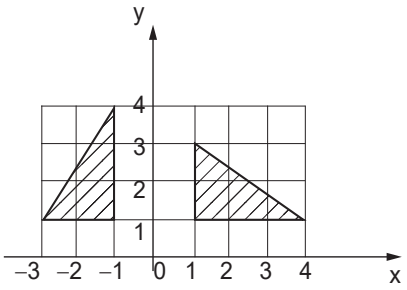
16. El ΔPQR se ha trasladado dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia abajo, ¿cuál(es) de los siguientes puntos corresponde a uno de sus nuevos vértices?



I) (0, 2)
II) (6, −1)
III) (4, 3)

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

17. Con respecto a los triángulos rectángulos de la figura, se afirma que:



I) Son congruentes.
II) Uno de ellos se obtiene a partir del otro girándolo en 90° en torno al origen.
III) Son simétricos respectos del eje y.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

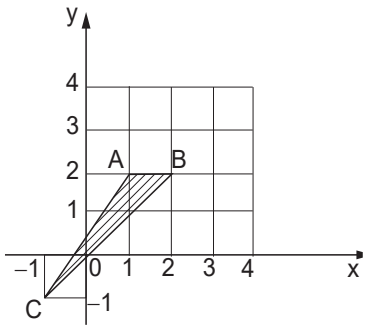
18. Si se rota el punto (4, 3) en 90° en sentido horario y luego se refleja respecto al eje y, sería equivalente a:

A) hacer sólo una simetría en torno al origen.
B) hacer una traslación con dirección (–4, –3).
C) hacer un giro en 270° en torno al origen en sentido antihorario.
D) hacer una rotación en 90° en torno al origen en sentido antihorario.
E) hacer una reflexión en torno a la recta $x + y = 0$.

19. Al aplicar al punto (8, 5) una simetría central con centro en (–2, 4) se obtiene:

A) (–8, –5)
B) (–6, 1)
C) (4, 3)
D) (–5, 8)
E) (–12,3)

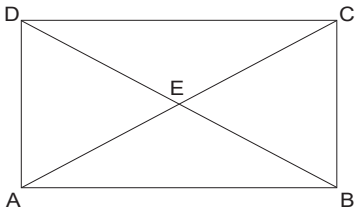
20. Si al triángulo ABC de la figura se le aplica una reflexión en torno al eje x, resulta un triángulo cuyos vértices son:



A) (1,–2) ; (2,–2) ; (–1,1)
B) (–1,2) ; (–2,2) ; (1,1)
C) (2,1) ; (2,2) ; (1,1)
D) (2,–1) ; (2,–2) ; (–1,1)
E) (–1,–2) ; (–2,–2) ; (1,1)

Prohibida su reproducción total o parcial.

21. ABCD es un rectángulo y E es el punto de intersección de las diagonales.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) Si a $\overleftrightarrow{AD}$ se le aplica una simetría puntal respecto a E se transforma en $\overleftrightarrow{BC}$.
II) Si el ΔABC se refleja en torno al punto E se transforma en el ΔCDA.
III) Si el ΔBCD se refleja en torno a $\overleftrightarrow{BD}$ se transforma en el ΔBAD.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

22. ¿Cuál de las siguientes transformaciones permite que el punto (x,y) quede en el punto (y,x)?

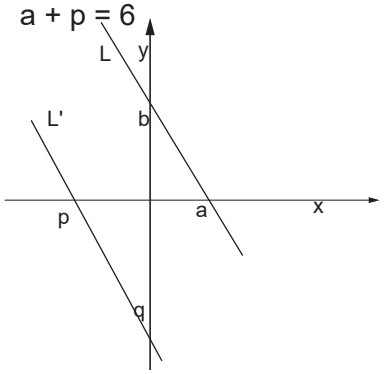
A) Reflexión en torno a la recta $x - y = 0$.
B) Rotación con centro en el origen en 270° y después una reflexión en torno al eje x.
C) Rotación con centro en el origen en 90° y después una reflexión en torno al eje y.
D) Reflexión con respecto al punto $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$.
E) Con cualesquiera de las anteriores.

23. ¿Cuál de las siguientes transformaciones **no** permite que el punto A(–a , a) quede en el punto A'(–a,–a)?

A) Reflexión en torno al eje x.
B) Traslación en la dirección (0, –2a).
C) Rotación en 90° en sentido antihorario. con respecto al origen.
D) Rotación en 90° en sentido horario con respecto al punto (–2a,0).
E) Rotación en 45° en sentido antihorario con respecto al punto (a, a).

24. Las rectas L y L' de la figura son paralelas, en ella se muestran las intersecciones de las respectivas rectas con los ejes coordenados. Se puede determinar una posible dirección para que la recta L se transforme en la recta L', sabiendo que:

(1) $q - b = -8$
(2) $a + p = 6$



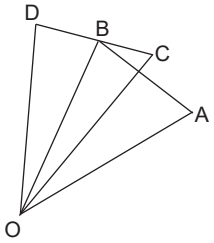
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

25. ¿Cuál de las siguientes informaciones es suficiente para establecer que dos triángulos sean congruentes?

A) Sus ángulos respectivos son congruentes.
B) Sus perímetros son iguales.
C) Sus áreas son iguales.
D) Sus lados respectivos son congruentes.
E) Cada una de las anteriores.

26. Se puede determinar que $\overline{CD}$ se ha obtenido de girar $\overline{AB}$ en torno a O si:

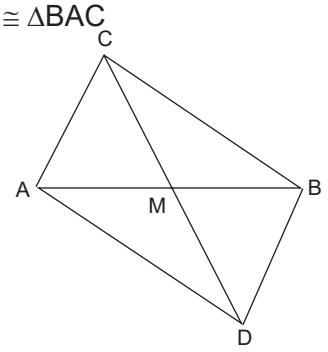


(1) OA = OC ; OB = OD
(2) $\sphericalangle COA \cong \sphericalangle DOB$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

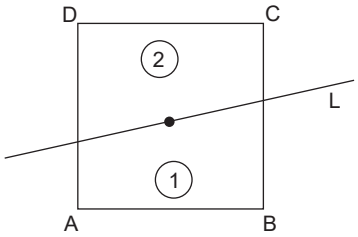
27. En la figura, M es el punto medio del lado $\overline{AB}$ del triángulo ABC. Si a C se le aplica una simetría puntual con respecto a M quedando en el punto D, ¿cuál(es) de las siguientes congruencias es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) $\Delta CAM \cong \Delta DAM$
II) $\Delta AMC \cong \Delta BMD$
III) $\Delta ABD \cong \Delta BAC$



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

28. ABCD es un cuadrado y por el punto "O" donde se intersectan sus diagonales, se traza una recta L que no pasa por los vértices del cuadrado, tal como se muestra en la figura.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) Los vértices opuestos del cuadrado están a la misma distancia de la recta L.
II) Los trapecios 1 y 2 son simétricos con respecto a la recta L.
III) Los trapecios 1 y 2 son simétricos con respecto al punto "O".

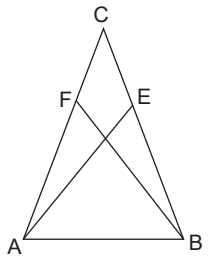
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

29. En la figura, el triángulo ABC es isósceles de base $\overline{AB}$, E y F son puntos sobre sus lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Se puede determinar que $\overline{FB} \cong \overline{AE}$, sabiendo que:

(1) $\overline{FE} \,//\, \overline{AB}$

(2) $\sphericalangle CFB \cong \sphericalangle CEA$

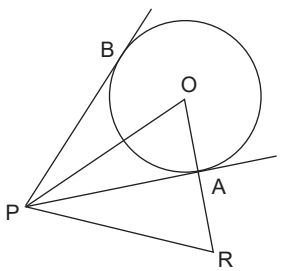


A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

30. En la figura, se han trazado desde el punto P las tangentes $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ a la circunferencia de centro O, donde A y B son respectivamente los puntos de tangencia.
Si A es el punto medio de $\overline{OR}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si el ΔPAR se refleja con respecto a $\overline{PA}$ se obtiene el ΔPAO.
II) El ΔPAR se puede obtener a partir del ΔPOB después de dos reflexiones axiales
III) El ΔBPA se puede obtener mediante una rotación del ΔRPO en torno al punto P.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III



31. si $x \neq y$, ¿cuál de las siguientes opciones **no** permite que el punto (x, y) se transforme en el (x, –y),?

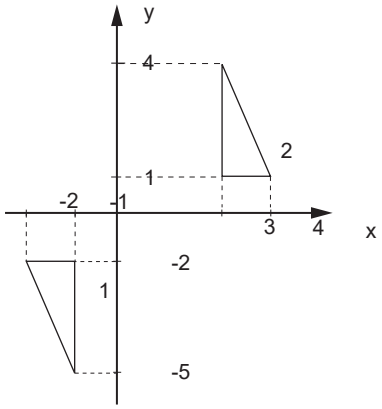
A) Una reflexión con respecto al origen y después una reflexión en torno al eje y.
B) Una traslación en la dirección (0, –2y).
C) Un giro en 180° con respecto al origen y después una traslación en la dirección (2x, 0)
D) Un giro en 90° en sentido horario.
E) Una reflexión en torno a la recta de ecuación $x - y = 0$ y después un giro en 90° con respecto al origen en sentido horario.

32. Un punto se traslada en la dirección (2, 2) y después se gira en 90° en sentido antihorario con respecto al origen quedando en el punto (–a, a + 2), entonces el punto original era el:

A) (a, a + 2)
B) (a, a – 2)
C) (a – 2, a)
D) (–a, a – 2)
E) (a – 2, –a)

Prohibida su reproducción total o parcial.

33. Con respecto a la información dada en la figura, ¿cuál de las siguientes transformaciones **no** permite que la fig. 1 se obtenga a partir de la fig. 2?



A) Con una simetría con respecto a un punto que no es el origen.

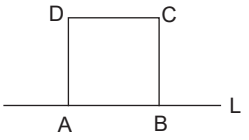
B) Con dos simetrías.

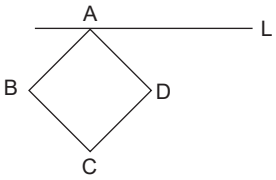
C) Con una traslación y con un giro en 180°.

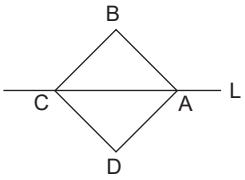
D) Con una simetría respecto del eje x y luego una simetría con respecto a una recta vertical.

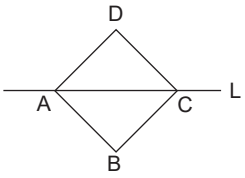
E) Con una simetría respecto al origen y luego una traslación.

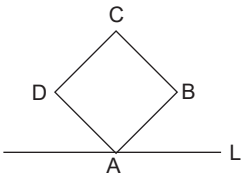
34. El cuadrado ABCD de la figura, tiene su lado $\overline{AB}$ sobre la recta horizontal L.
Si el cuadrado si gira en 30°, con respecto al punto A, en sentido antihorario y después se gira en 75° en sentido horario con respecto al mismo punto, ¿cuál de las siguientes figuras indica mejor la posición donde queda el cuadrado después de aplicar estas dos rotaciones?

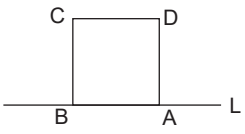


A)


B)


C)


D)


E)


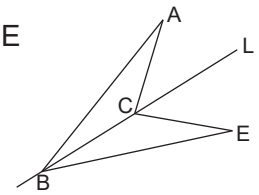
Prohibida su reproducción total o parcial.

35. Al punto A(−3,2) se le aplica una traslación de modo que su imagen queda en el eje y a la misma distancia del origen que se encuentra A. ¿cuál es una posible dirección para esta traslación?

A) $(-3, 2 - \sqrt{13})$
B) $(3, \sqrt{13} - 2)$
C) (3, 3)
D) (–3, –3)
E) $(3, \sqrt{5} - 2)$

36. Se puede determinar que el ΔBCA es simétrico del ΔBCE con respecto a L si:

(1) AC = CE
(2) BA = BE



A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

37. Sea el triángulo equilátero ABC, al vértice A se le aplica una reflexión en torno al lado $\overline{BC}$ obteniéndose el punto A', al vértice B se le aplica una reflexión en torno al lado $\overline{AC}$ obteniéndose el punto B' y al vértice C se le aplica una reflexión en torno al lado $\overline{AB}$ obteniéndose el punto C', ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones con respecto al triángulo A'B'C' es (son) verdadera(s)?

I) Es equilátero.
II) Tiene el doble del perímetro que el ΔABC.
III) Tiene el doble del área que el ΔABC.

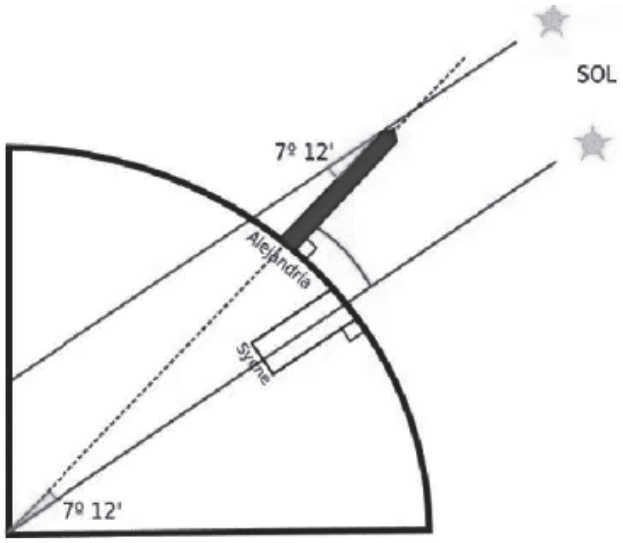
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESPUESTAS CAPÍTULO 10									
1. D	**2.** E	**3.** C	**4.** B	**5.** C	**6.** E	**7.** B	**8.** D	**9.** C	**10.** B
11. D	**12.** E	**13.** E	**14.** D	**15.** E	**16.** B	**17.** C	**18.** E	**19.** E	**20.** A
21. C	**22.** E	**23.** E	**24.** A	**25.** D	**26. C**	**27.** D	**28.** D	**29.** D	**30.** C
31. D	**32.** B	**33.** D	**34.** C	**35.** B	**36. C**	**37.** C			

Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
11

GEOMETRÍA DE PROPORCIÓN



Eratóstenes, sabio griego (276 a.C- 294 a. C) utilizando geometría elemental y una simple proporción, pudo concluir que el radio de la Tierra es de 6366 km, muy cercano al valor real que es aproximadamente 6371 km.

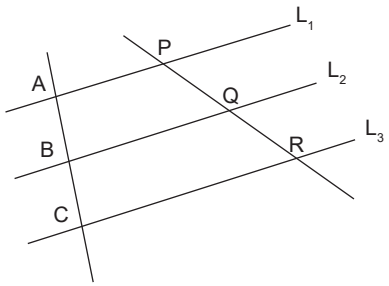
CONCEPTOS CLAVES

- Teorema de Thales
- Semejanza de triángulos
- Razón de Semejanza
- Razón de Homotecia
- Homotecia

Prohibida su reproducción total o parcial.

TEOREMA DE THALES

Si tenemos un conjunto de rectas paralelas y estas son cortadas por dos rectas, entonces los segmentos que se determinan sobre una de las rectas secantes son proporcionales a los segmentos que se determinan sobre la otra recta secante.

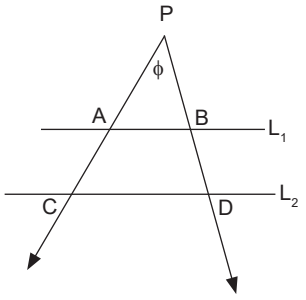


Si $L_1 // L_2 // L_3$, entonces:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

Teorema particular de Thales

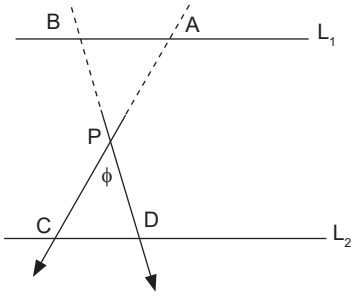
Si los lados de un ángulo se cortan por dos o más paralelas entre sí, los segmentos que se determinan sobre una de las transversales son proporcionales a los segmentos que se determinan sobre la otra transversal.



$(L_1 // L_2)$

$$\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BD}$$

Lo anterior, también es válido si las rectas cortan a las prolongaciones de los lados del ángulo:



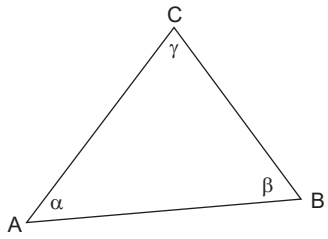
$(L_1 // L_2)$

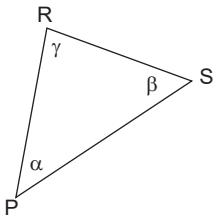
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}$$

Prohibida su reproducción total o parcial.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Dos triángulos son semejantes, si se puede establecer una correspondencia entre los vértices de modo que sus ángulos homólogos son congruentes y los lados homólogos son proporcionales:



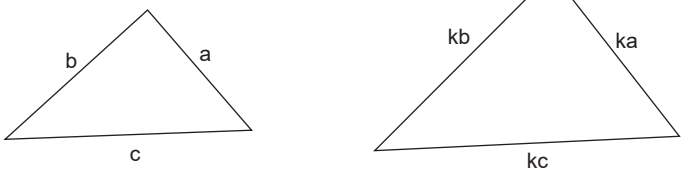


$\Delta ABC \sim \Delta PSR$

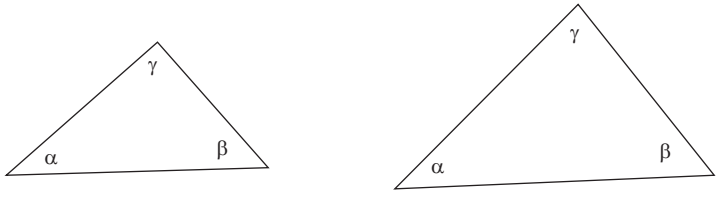
Tenemos que $\frac{AB}{PS} = \frac{BC}{SR} = \frac{AC}{PR} = k$, donde "k" es un número real positivo llamado "razón de semejanza".

Los criterios de semejanza, corresponden a la información mínima necesaria para establecer que dos triángulos son semejantes.

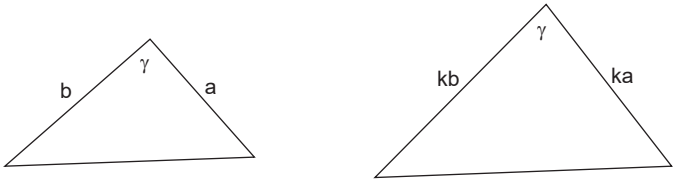
- Criterio L − L − L
  Dos triángulos son semejantes si sus lados homólogos son proporcionales.



- Criterio A − A − A
  Dos triángulos son semejantes si sus ángulos homólogos son congruentes.



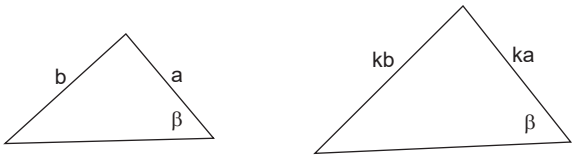
- Criterio L − A − L
  Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y los ángulos que forman estos lados, respectivamente congruentes.



Prohibida su reproducción total o parcial.

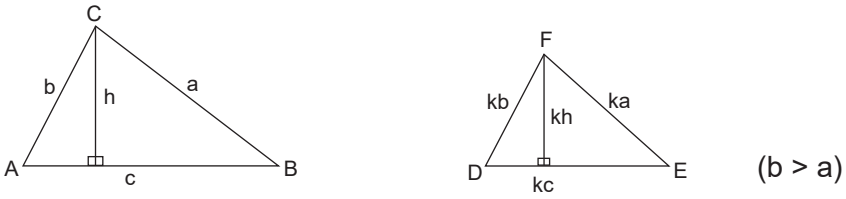
- Criterio L − L − A

  Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados homólogos proporcionales y los ángulos opuestos a los mayores de estos lados, respectivamente congruentes.



Teorema de la semejanza

Si dos triángulos son semejantes, con razón de semejanza “k”, entonces sus perímetros también están en la razón k y sus áreas están en la razón k^2.



(b > a)

Observa en la figura que la razón entre los perímetros es efectivamente k:

$$\frac{\text{Perímetro } \Delta DEF}{\text{Perímetro } \Delta ABC} = \frac{ka + kb + kc}{a + b + c} = k$$

Y la razón entre sus áreas es k^2:

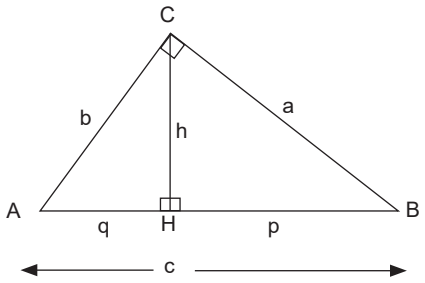
$$\frac{\text{Área } \Delta DEF}{\text{Área } \Delta ABC} = \frac{\frac{kh \cdot kc}{2}}{\frac{hc}{2}} = k^2$$

Observación: este teorema nos permite encontrar la razón entre los perímetros o las áreas de dos figuras semejantes si conocemos la razón entre dos elementos homólogos.

Prohibida su reproducción total o parcial.

APLICACIÓN DE SEMEJANZA: TEOREMA DE EUCLIDES

El triángulo ABC de la figura es un triángulo rectángulo en C y p y q son las proyecciones de a y b sobre la hipotenusa c.
Entonces se cumplen las siguientes propiedades:



- **Teorema de Euclides referente a la altura**
  El cuadrado de la altura equivale al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa:

$$h^2 = pq$$

- **Teorema de Euclides referente al cateto**
  El cuadrado de un cateto equivale al producto entre la hipotenusa y la proyección de este cateto sobre ella:

$$a^2 = pc \ ; \ b^2 = qc$$

- **Cálculo de altura**
  La altura correspondiente a la hipotenusa equivale al producto de las longitudes de los catetos dividido por la longitud de la hipotenusa:

$$h = \frac{ab}{c}$$

Prohibida su reproducción total o parcial.

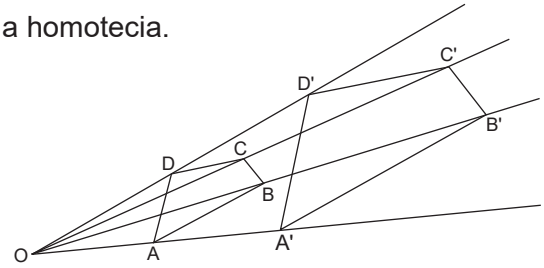
HOMOTECIA

Si se tienen dos figuras semejantes y son tales que:

1. Sus lados homólogos son paralelos.

2. Al unir sus vértices correspondientes por líneas, todas ellas concurren a un mismo punto (llamado centro o foco de homotecia).

Entonces se trata de una homotecia.



En esta figura, al cuadrilátero ABCD se le ha aplicado una homotecia con centro en O y razón λ, obteniéndose el cuadrilátero homotético A'B'C'D'.

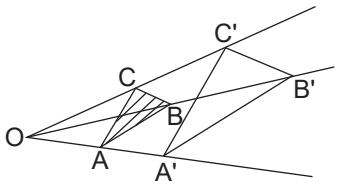
La razón de homotecia en términos absolutos, se puede calcular mediante la razón entre una longitud en la figura imagen con el homólogo en la figura original, por ejemplo:

$|\lambda| = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ ... O bien $|\lambda| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ ...

Además, por el teorema de la semejanza, tenemos que: $\frac{\text{perímetro A'B'C'D'}}{\text{perímetro ABCD}} = k$ y $\frac{\text{Área A'B'C'D'}}{\text{Área ABCD}} = k^2$

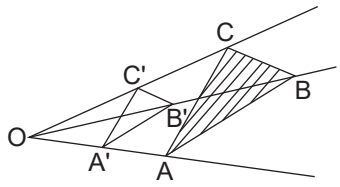
En el caso en que el punto original y la imagen queden a distinto lado con respecto al centro de la homotecia, la razón será negativa.

A continuación, la interpretación geométrica de acuerdo a las magnitudes que tome la razón de homotecia:



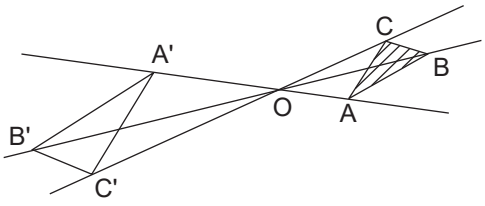
$\lambda > 1$

la figura resultante es mayor que la original



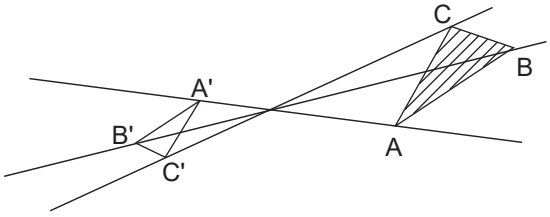
$0 < \lambda < 1$

la figura resultante es menor que la original



$\lambda < -1$

la figura resultante es mayor que la original y el centro queda entre cada punto y su imagen.



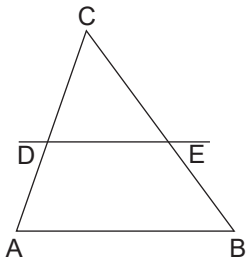
$-1 < \lambda < 0$

la figura resultante es menor que la original y el centro queda entre cada punto y su imagen.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En la figura, las rectas AD y BE se intersectan en C y $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$.
Si CE = 10 cm, BE = 5 cm y área $\triangle$DEC = 60 cm^2, ¿cuál es el área del trapecio ABED?



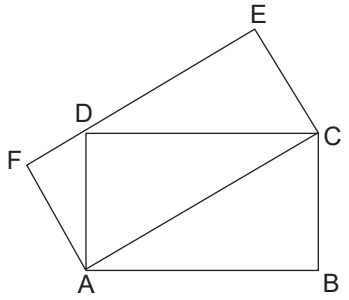
Solución:

Tenemos que los triángulos ABC y DEC son semejantes (A, A, A), además como CE : EB = 2 : 1, entonces CE : CB = 2 : 3, por lo tanto la razón de semejanza entre estos triángulos es 2 : 3 y por el teorema de la semejanza la razón entre sus áreas será 4 : 9. Como el área del DEC es 60 cm^2, planteamos una proporción:

$$\frac{\text{área } \triangle DEC}{\text{área } \triangle ABC} = \frac{4}{9} \rightarrow \frac{60}{\text{área } \triangle ABC} = \frac{4}{9} \rightarrow \text{área } \triangle ABC = = \frac{9 \cdot 60}{4} = 135 \text{ cm}^2$$

Como área $\triangle$ABC = 135 cm^2 y área $\triangle$DEC = 60 cm^2 $\rightarrow$ área ABED = 135 − 60 = 75 cm^2.

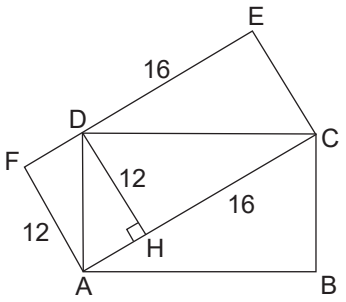
2. Sobre la diagonal $\overline{AC}$ del rectángulo ABCD se ha construido el rectángulo ACEF, de modo que D pertenece al lado $\overline{EF}$.
Si AF = 12 cm y DE = 16 cm, ¿cuál es el perímetro de ABCD?



Prohibida su reproducción total o parcial.

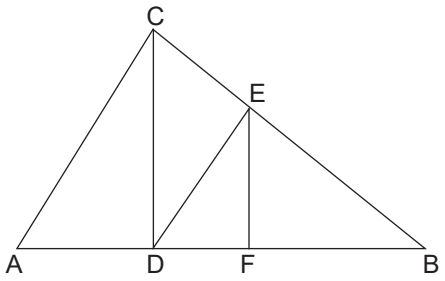
Solución:

Un método para calcular los lados del triángulo ADF es ocupar la semejanza entre ΔADF y ΔDCE, otro método equivalente es ocupar el teorema de Euclides en el ΔADC; para ello tracemos una recta DH perpendicular a $\overline{AC}$, entonces DH = AF = 12 cm, HC = DE = 16 cm:



Por teorema de Euclides, $12^2 = AH \cdot HC \rightarrow AH = 9$ cm.
Usando teorema de Pitágoras en ΔAHD : $9^2 + 12^2 = AD^2 \rightarrow AD = 15$ cm
Idem en ΔDHC: $12^2 + 16^2 = DC^2 \rightarrow DC = 20$ cm, luego AD = 15 cm y DC = 20 cm, por lo tanto el perímetro de ABCD es 70 cm.

3. El ABC de la figura es rectángulo en C, los puntos D y F están en $\overline{AB}$ y E en $\overline{BC}$, de modo que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ y $\overline{EF} \perp \overline{AB}$. Si CD = 9 cm y EF = 4 cm, entonces ¿cuánto mide $\overline{DE}$?

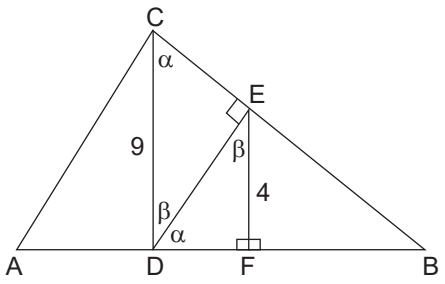


Solución:

Tal como se muestra en la siguiente figura, los triángulos CED y DFE son semejantes por tener sus ángulos homólogos congruentes.

Prohibida su reproducción total o parcial.

Si ∢DCE = α y ∢CDE = β, entonces ∢EDF = α y ∢DEF = β:



Por la semejanza de triángulos, tenemos que:

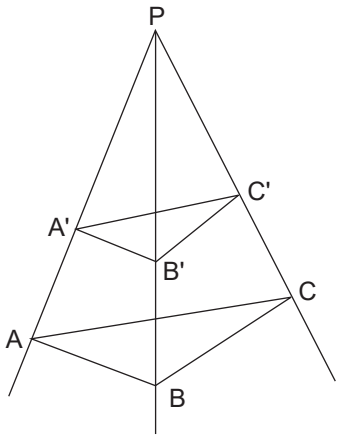
$\frac{CD}{DE} = \frac{ED}{FE} \rightarrow \frac{9}{DE} = \frac{ED}{4}$, multiplicando cruzado, tenemos que $DE^2 = 36 \rightarrow DE = 6$ cm.

4. En la figura, al ΔABC se le ha aplicado una homotecia con centro en P, siendo A'B'C' su homotético. Si AA' : A'P = 2 : 3, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La razón de homotecia es 0,6.

II) $\frac{\text{perímetro } \Delta A'B'C'}{\text{perímetro } \Delta ABC} = \frac{3}{5}$

III) Área A'B'C' es un 36% del área del ABC.



Solución:

Como AA' : A'P = 2 : 3 $\rightarrow$ PA' : PA = 3 : 5; como la razón de homotecia (k) en términos absolutos es la razón entre la distancias del centro al punto imagen y del centro al original, entonces:

$k = \frac{PA'}{PA} = \frac{3}{5}$, pero $\frac{3}{5} = 0{,}6$, luego I es correcta.

Para II, por ser $\overline{AB}$ // $\overline{A'B'}$, tenemos que $\Delta ABP \sim \Delta A'B'P$, entonces $\frac{A'B'}{AB} = \frac{PA'}{PA} = \frac{3}{5}$.

Por otro lado, $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ y la razón entre los lados homólogos es $\frac{3}{5}$, entonces la razón entre sus perímetros es la misma, luego II es verdadera.

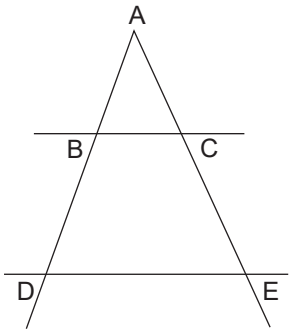
Para III, como la razón de semejanza entre los triángulos ABC y A'B'C' es $\frac{3}{5}$, tenemos que las razón entre las áreas de estos triángulos es el cuadrado de la razón de semejanza, esto es $\frac{9}{25}$, lo que equivale a $\frac{36}{100}$, por lo tanto III es también verdadera.

Respuesta, I, II y III son verdaderas.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. En la figura, las rectas DB y CE se intersectan en A y $\overline{BC}$ // $\overline{DE}$. Si BC = 2 cm, DE = 5 cm y BD mide un cm más que AB, entonces AB mide:



A) 1 cm

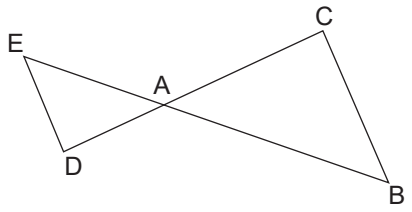
B) $\frac{2}{3}$ cm

C) $\frac{3}{2}$ cm

D) 2 cm

E) 3 cm

2. En la figura, los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{BE}$ se intersectan en el punto A. Si $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$, DA = 4 cm, DC = 12 cm y BC = 6 cm, entonces DE mide:



A) 1,5 cm

B) 2 cm

C) 3 cm

D) 4 cm

E) 4,5 cm

3. En la figura, $\overline{BC}$ // $\overline{DE}$ y C y B pertenecen respectivamente a $\overline{AE}$ y $\overline{AD}$. Si AC = 8 cm y CE = 6 cm, entonces x =

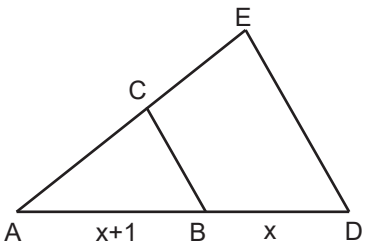
A) 2 cm

B) 3 cm

C) 4 cm

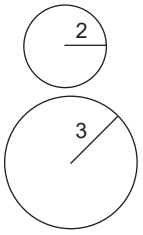
D) 5 cm

E) $\frac{2}{3}$ cm



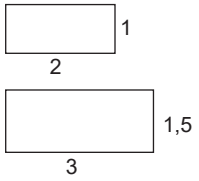
4. ¿En cuál(es) de las siguientes situaciones existe una semejanza entre las figuras?

I)



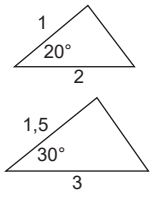
Las figuras son circunferencas

II)



Las figuras son rectángulos

III)



A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

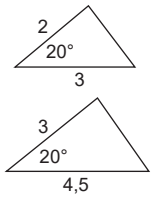
D) Solo II y III

E) I, II y III

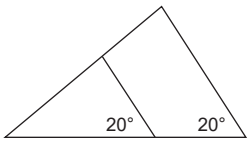
Prohibida su reproducción total o parcial.

5. ¿En cuál(es) de las siguientes situaciones hay dos triángulos semejantes?

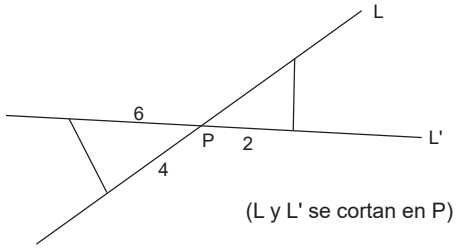
I)



II)



III)



(L y L' se cortan en P)

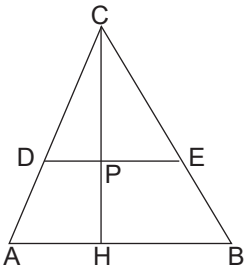
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

6. Un poste vertical de 2,7 metros de alto, proyecta una sombra en el suelo de 1,8 metros y en ese mismo instante un niño cercano a él, parado verticalmente al suelo, proyecta una sombra de 80 cm, ¿cuál es la estatura del niño?

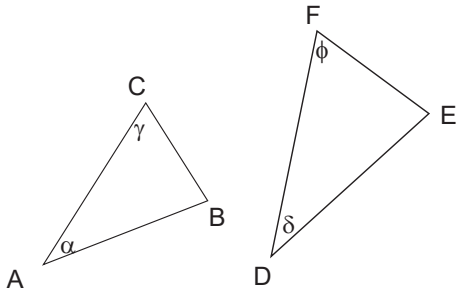
A) 90 cm
B) 100 cm
C) 120 cm
D) 150 cm
E) 160 cm

7. En la figura, $\overline{CH}$ es la altura del triángulo ABC y los puntos D y E están en los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de este triángulo, de modo que $\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$. Si las rectas CH y DE se intersectan en P, DE = 16 cm, CP : PH = 2 : 1, entonces AB mide:

A) 18 cm
B) 24 cm
C) 28 cm
D) 30 cm
E) 32 cm



8. Se puede determinar que los triángulos ABC y DEF son semejantes, sabiendo que:

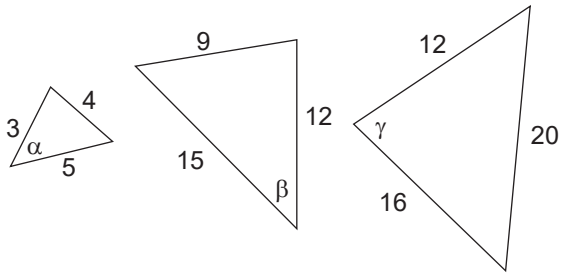


(1) DE=1,2AB y FE=1,2BC
(2) $\alpha+\gamma=\delta+\phi$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

9. Según los datos dados en la figura, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) $\alpha + \beta = \gamma$

II) $\alpha = \beta$

III) $\alpha > \beta$

A) Solo I

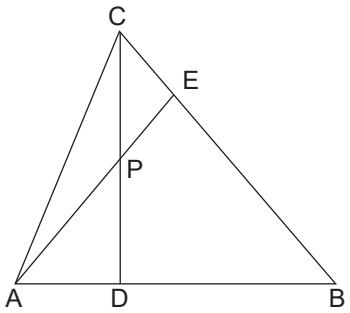
B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) Ninguna de ellas.

10. En la figura, $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$ son alturas del ΔABC, si AD=3 cm, PD=4 cm y CE = 2 cm, entonces ¿cuánto mide $\overline{PC}$?



A) 1,2 cm

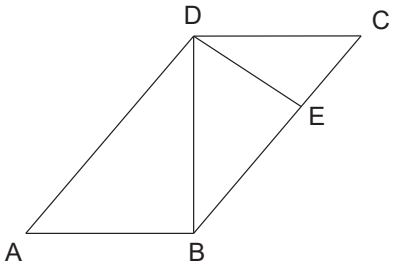
B) 2,5 cm

C) $2,\overline{6}$ cm

D) $3,\overline{3}$ cm

E) No se puede determinar.

11. En la figura, ABCD es un paralelogramo, E pertenece al lado $\overline{BC}$ y los ángulos ABD y DEC son rectos. Si AB = 6 cm, BD = 8 cm, entonces $\overline{DE}$ mide:



A) 4,2 cm

B) 4,8 cm

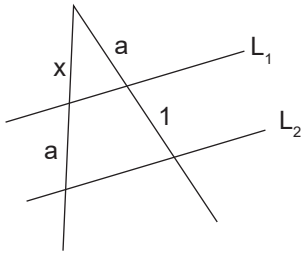
C) 4,0 cm

D) 6,0 cm

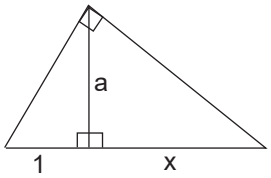
E) 6,2 cm

12. ¿En cuál de las siguientes situaciones se cumple que $a^2=x$?

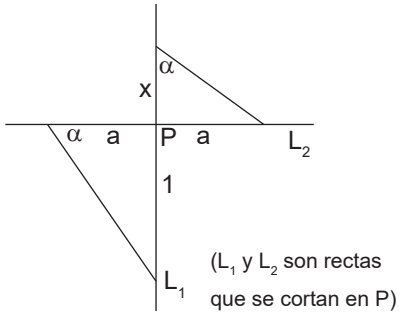
I) $L_1 // L_2$



II)



III)



A) Solo I

B) Solo II

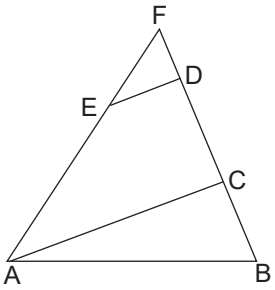
C) Solo I y II

D) Solo I y III

E) I, II y III

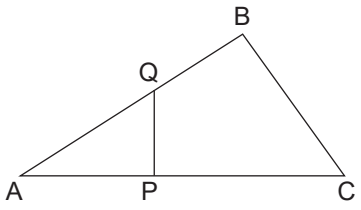
Prohibida su reproducción total o parcial.

13. En la figura, C y D pertenecen a $\overline{BF}$, $\overline{ED}$ // $\overline{AC}$ y $\overline{AC} \perp \overline{BF}$. Si ED = 4 cm, DC = 6 cm, AB = 13 cm y BC = 5 cm, entonces EF =



A) 5 cm
B) 6 cm
C) $2\sqrt{13}$ cm
D) $2\sqrt{5}$ cm
E) 9,6 cm

14. En la figura, los ángulos APQ y ABC son rectos y los puntos P y Q pertenecen a $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si BQ = 1 cm y AQ = BC = 3 cm entonces $\overline{AP}$ mide:

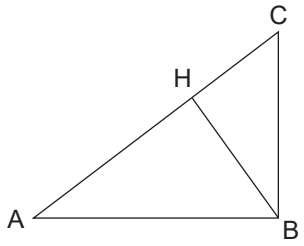


A) 1,6 cm
B) 1,8 cm
C) 2 cm
D) 2,4 cm
E) 3,2 cm

15. Si $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, donde $\overline{AB}$ es el homólogo del lado $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ es el homólogo de $\overline{EF}$, AB = a cm y DE = 1,5 a cm.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

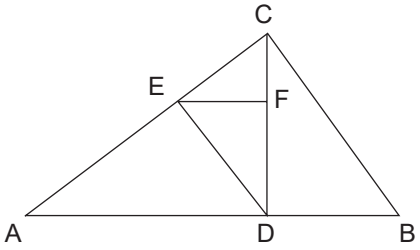
A) Si el perímetro del triángulo ABC es 18 cm, entonces el perímetro del triángulo DEF es 27 cm.
B) Si el $\sphericalangle ACB$ es recto, entonces el $\sphericalangle DFE$ también.
C) Si el área del triángulo DEF es 54 cm^2, entonces el área del triángulo ABC es 24 cm^2.
D) Si $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$ // $\overline{EF}$, entonces $\overline{AC}$ // $\overline{DF}$.
E) Todas las anteriores son verdaderas.

16. En la figura, el triángulo ABC es rectángulo en B y $\overline{BH}$ es una de sus alturas. Si AH : HC = 2 : 1 y AB = 4 cm, entonces $\overline{BC}$ mide:



A) 2 cm
B) $\sqrt{2}$ cm
C) $\sqrt{6}$ cm
D) $2\sqrt{6}$ cm
E) $2\sqrt{2}$ cm

17. El $\triangle ABC$ de la figura es rectángulo en C, los puntos D, E y F están respectivamente sobre los segmentos AB, AC y CD, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ // $\overline{AB}$. Si DF = 3 cm y DF = 3CF, entonces la longitud de $\overline{BC}$ es:



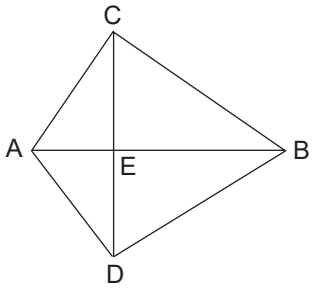
A) 8 cm
B) $6\sqrt{3}$ cm
C) $8\sqrt{3}$ cm
D) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm
E) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ cm

Prohibida su reproducción total o parcial.

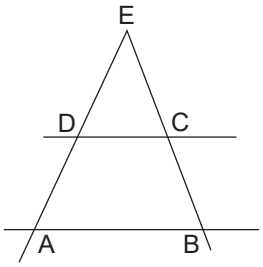
18. El $\triangle ABC$ es rectángulo en C, E es la intersección de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y CE = ED.
Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, ¿cuál(es) de las siguientes semejanzas es (son) verdadera(s)?

I) $\triangle CEB \sim \triangle DEB$
II) $\triangle AEC \sim \triangle DEB$
III) $\triangle AED \sim \triangle CEB$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III



19. En la figura, las rectas AB y CD son paralelas y AD y BC se intersectan en el punto E. Si AB = 9 cm, DC = 6 cm, CE = 4 cm y AE = 7,5 cm, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) El perímetro del trapecio ABCD es 19,5 cm.
II) El perímetro del triángulo DCE es 15 cm.
III) La razón entre las áreas de los triángulos DCE y ABE es 2 : 3.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

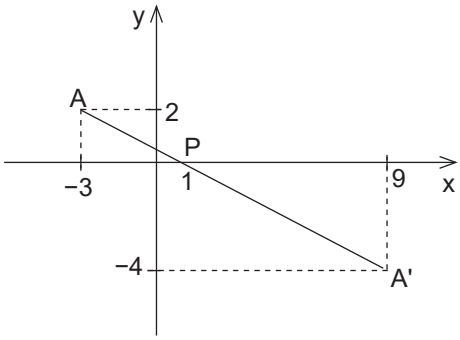
20. Un sitio rectangular está representado en un mapa por un rectángulo de lados 10 y 30 cm. Si la escala del mapa es 1:100, entonces el área del sitio en m^2 es:

A) 30 m^2
B) 300 m^2
C) 3000 m^2
D) 30000 m^2
E) 300000 m^2

21. Un fundo tiene un terreno de 16 hectáreas (1 hectárea = 10.000 m^2) y está representado en un mapa por una figura de área 100 cm^2, ¿cuál es la escala del mapa?

A) 1 : 400
B) 1 : 4000
C) 1 : 20
D) 1 : 160000
E) 1 : 16000000

22. En la figura, al punto A(−3,2) se le ha aplicado una homotecia con centro en P(1,0) quedando en el punto (9,−4). Si al punto (0,4) se le aplica la misma homotecia, quedará en el punto:

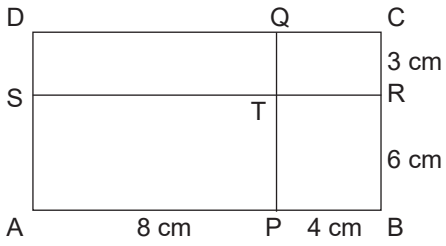


A) (2,−8)
B) (3,−8)
C) (6,−8)
D) (3,−4)
E) (2,−6)

Prohibida su reproducción total o parcial.

23. En la figura, P,Q, R y S son puntos de los lados del rectángulo ABCD. Las rectas SR y PQ son paralelas a los lados del rectángulo, intersectándose en el punto T.

Según las medidas dadas, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



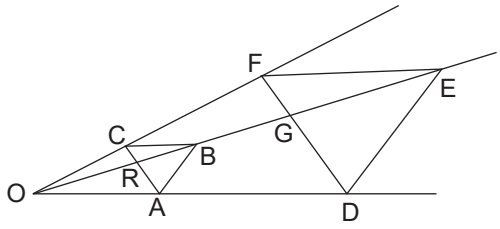
I) QTRC se obtiene de PTSA al aplicar una homotecia con centro en T y razón −0,5.

II) ABCD se obtiene de APTS al aplicar una homotecia con centro en A y razón 4 : 3.

III) TQDS se obtiene de TPBR al aplicar una homotecia con centro en T y razón −2.

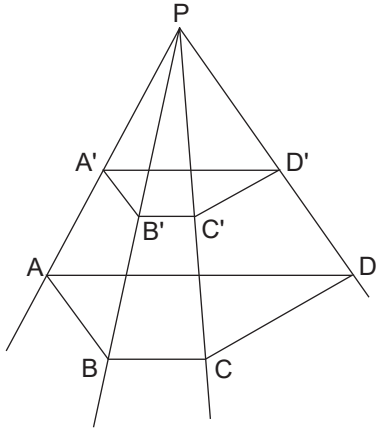
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

24. Al triángulo ABC de la figura, se le aplicó una homotecia con centro en O y razón $\lambda = \frac{5}{2}$, transformándose en el triángulo DEF. Si OR=2 cm y RB=1 cm, entonces BG=



A) 4,5 cm
B) 3,5 cm
C) 3 cm
D) 2 cm
E) 2,5 cm

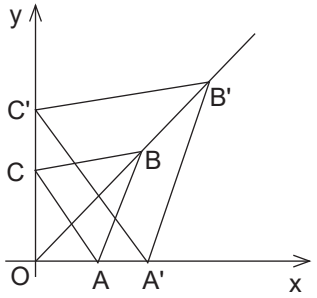
25. Al cuadrilátero ABCD de la figura se le ha aplicado una homotecia con centro en P transformándose en el cuadrilátero A'B'C'D'. Si PB : BB' = 5 : 2 y área del cuadrilátero ABCD es A cm^2, entonces el área del cuadrilátero homotético es:



A) $\frac{2}{5}$ A cm^2
B) $\frac{3}{5}$ A cm^2
C) $\frac{4}{25}$ A cm^2
D) $\frac{9}{25}$ A cm^2
E) $\frac{4}{9}$ A cm^2

Prohibida su reproducción total o parcial.

26. En la figura, al ΔABC se le ha aplicado una homotecia con centro en el origen cuya imagen es el $\Delta A'B'C'$.
Si el punto B(3,6) se transforma en el punto B'(5,10), ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdaderas?

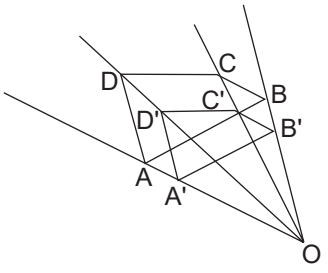


I) Si OC = 6 cm, entonces CC' = 4cm.
II) Si área ΔABC = 12 cm^2, entonces área $\Delta A'B'C'$ = 20 cm^2.
III) Si BB' = 8 cm, entonces OB' = 20 cm.

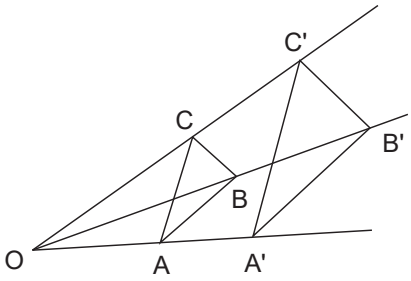
A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

27. Al cuadrilátero ABCD se le ha aplicado una homotecia con centro en O, transformándose en el cuadrilátero A'B'C'D' cuya área es un 64% del cuadrilátero original.
Si el perímetro de A'B'C'D' es 20 cm, ¿cuál es el perímetro de ABCD?

A) 16 cm
B) 25 cm
C) 31,25 cm
D) 32,8 cm
E) 56 cm



28. Al ΔABC de la figura, se le ha aplicado una homotecia con centro en O, transformándose en el triángulo A'B'C'. Se puede determinar la razón de homotecia, sabiendo que:

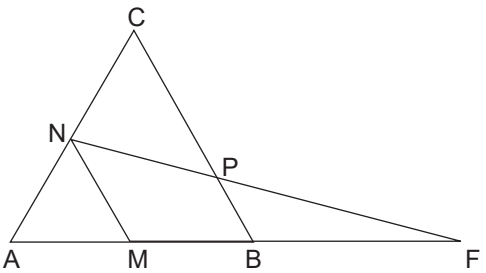


(1) $\dfrac{\text{perímetro } \Delta OA'B'}{\text{perímetro } \Delta OAB} = \dfrac{5}{2}$

(2) El área de OABC es un 16% del área de OA'B'C'.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

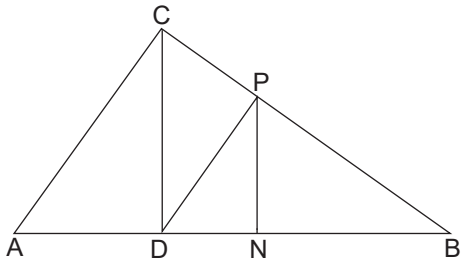
29. En la figura, el triángulo ABC es equilátero cuyo lado mide 12 cm, M y N son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si F es punto de la recta AB, NF y BC son rectas que se interceptan en P y CP es a PB como 2 es a 1, entonces $\overline{BF}$ mide :



A) 3 cm
B) 4 cm
C) 8 cm
D) 12 cm
E) 18 cm

Prohibida su reproducción total o parcial.

30. En la figura, el triángulo ABC es rectángulo en C, D y N pertenecen al lado $\overline{AB}$ y P pertenece al lado $\overline{BC}$, de modo que $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, $\overline{DP} \perp \overline{BC}$ y $\overline{DB} \perp \overline{NP}$. Si PB = 2 cm y NB = 1 cm, entonces $\overline{AC}$ mide:

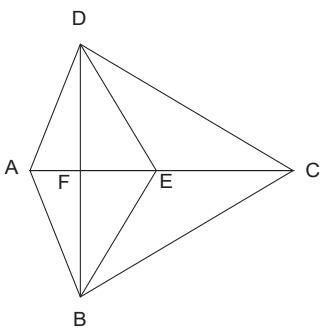


A) 8 cm
B) $2\sqrt{3}$ cm
C) $4\sqrt{3}$ cm
D) $8\sqrt{3}$ cm
E) $2\sqrt{15}$ cm

31. ABCD es un cuadrilátero, con ángulos interiores rectos en B y D. Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, son perpendiculares y se intersectan en F, de modo que F es el punto medio de $\overline{BD}$. Si E es el punto medio de $\overline{AC}$, DE = 5 cm y FE = 3 cm, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

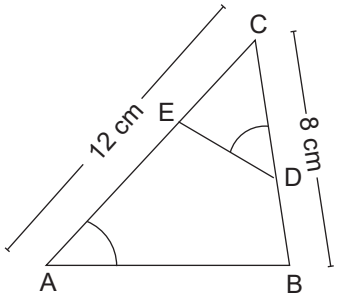
I) El perímetro del $\triangle$BED es 18 cm.
II) El área del cuadrilátero ABCD es 40 cm^2.
III) El perímetro del cuadrilátero ABCD es $12\sqrt{5}$ cm.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

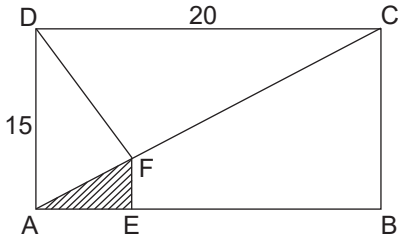


32. En la figura, $\measuredangle$CDE $\cong \measuredangle$CAB y CD : DB = 3 : 1, entonces AE =

A) 4 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 9 cm
E) 11 cm



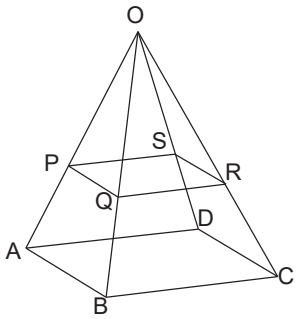
33. ABCD es un rectángulo, $\overline{DF} \perp \overline{AC}$, $\overline{FE} \perp \overline{AB}$ y los puntos F y E están en AC y AB respectivamente. Si AD = 15 cm y DC = 20 cm, entonces AE =



A) 7,2 cm
B) 6,8 cm
C) 6,5 cm
D) 6,2 cm
E) 6,0 cm

Prohibida su reproducción total o parcial.

34. En la figura, se tiene una pirámide de base rectangular, que se ha cortado por un plano paralelo a la base, determinándose el cuadrilátero PQRS:



¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\frac{\text{Perímetro PQRS}}{\text{Perímetro ABCD}} = \frac{OP}{OA}$

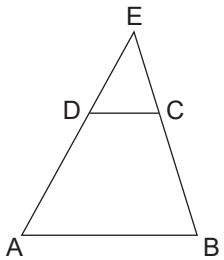
II) $\frac{\text{Área PQRS}}{\text{Área ABCD}} = \frac{PR}{DB} \cdot \frac{PQ}{AB}$

III) $\frac{\text{Perímetro OPR}}{\text{Perímetro OAC}} = \frac{\text{Perímetro PQRS}}{\text{Perímetro ABCD}}$

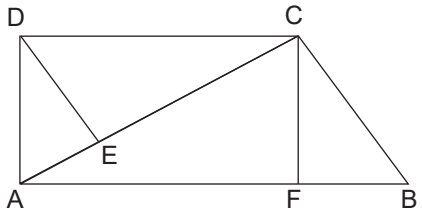
A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

35. En la figura, $\overline{CD}$ es paralelo a $\overline{AB}$, con D y E puntos de $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ respectivamente.
Si DC : AB = 2 : 3 y el área del ΔDCE es 40 cm^2, ¿cuál es el área del trapecio ABCD?

A) 10 cm^2
B) 20 cm^2
C) 50 cm^2
D) 60 cm^2
E) 90 cm^2



36. En la figura, AFCD es un rectángulo, F pertenece a $\overline{AB}$ y $\sphericalangle$DEC y $\sphericalangle$ACB son rectos. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

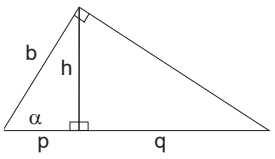


I) $AE \cdot AC = AD \cdot CF$
II) $AE \cdot BC = AD \cdot BF$
III) $AE \cdot FA = CF \cdot AD$

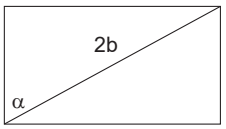
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

37. En la figura adjunta, se muestra un triángulo y un rectángulo:

triángulo



rectángulo

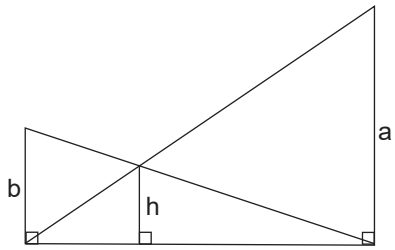


¿Cuál es el área del rectángulo?

A) $4p^2q$
B) $p\sqrt{pq}$
C) $2p\sqrt{pq}$
D) $4p\sqrt{pq}$
E) $p\sqrt{p(p+q)}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

38. Según la información dada en la figura h =



A) $\frac{a + b}{b}$

B) $\frac{ab}{a + b}$

C) $\frac{a + b}{a}$

D) $\frac{2ab}{a + b}$

E) $\frac{a + b}{2ab}$

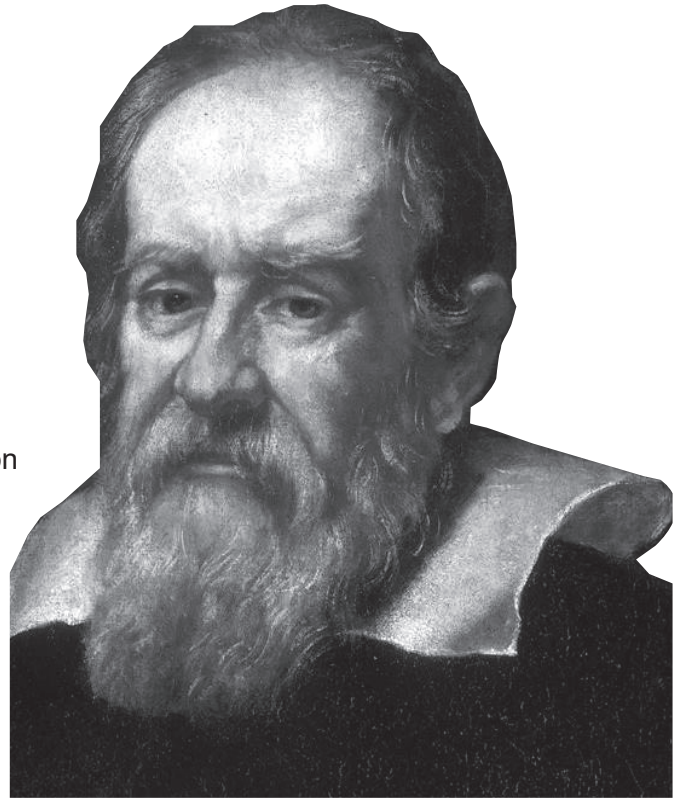
RESPUESTAS CAPÍTULO 11									
1. D	**2.** C	**3.** B	**4.** C	**5.** E	**6.** C	**7.** B	**8.** C	**9.** D	**10.** D
11. B	**12.** E	**13.** A	**14.** D	**15.** E	**16.** E	**17.** E	**18.** E	**19.** C	**20.** B
21. B	**22.** B	**23.** A	**24.** D	**25.** D	**26. C**	**27.** B	**28.** D	**29. D**	**30.** D
31. E	**32.** C	**33.** A	**34.** E	**35.** C	**36. C**	**37.** D	**38. B**		

Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
12

VECTORES

En la descripción del movimiento parabólico, Galileo se dio cuenta que se componía de un movimiento vertical y uno horizontal, para combinar estos dos movimientos se tenía que crear un nuevo campo teórico; esto abrió las puertas a nuevos entes llamados vectores, los cuales son fundamentales en la modelación de fenómenos físicos.



CONCEPTOS CLAVES

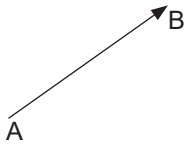
- Vector de posición
- Ponderación de un vector
- Igualdad entre vectores
- Operatoria con vectores

Prohibida su reproducción total o parcial.

ELEMENTOS BÁSICOS

- **Vector geométrico**

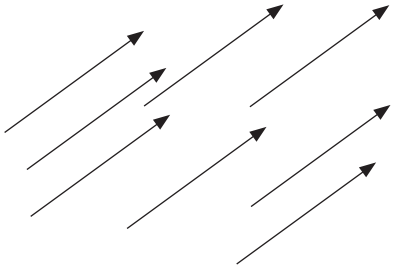
  Un vector geométrico se distingue por tener un punto inicial (u origen), un punto final, una dirección, un sentido y una magnitud.



  La magnitud o “largo” del vector también se denomina longitud o norma.

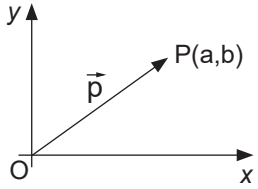
- **Vectores equipolentes**

  Son aquellos que tienen igual dirección, sentido y magnitud.



- **Vector de posición**

  Supongamos que tenemos un punto P en el plano cartesiano bidimensional, el vector cuyo punto inicial es el origen del sistema cartesiano y el punto final es el punto P, se llama vector de posición del punto P y generalmente se designa utilizando la letra minúscula que designa al punto:



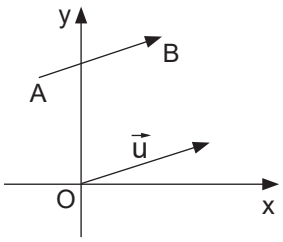
Prohibida su reproducción total o parcial.

Como hay una correspondencia biunívoca entre los puntos y los vectores de posición, cuando hablemos de vectores en un sistema cartesiano, podemos referirnos ya sea a la flecha que va desde al origen al punto o bien a las coordenadas del punto al cual estamos haciendo referencia.

En la figura, cuando hablamos del vector $\vec{p}$, podemos referirnos a $\overrightarrow{OP}$ en el sentido geométrico o a las coordenadas del punto P, es decir $\vec{p}$ = (a,b).

- **Vector libre**

Un vector libre es aquél cuyo punto inicial no coincide con el origen del sistema cartesiano. Como veremos más adelante, todo vector se puede asociar a un vector equipolente con él, cuyo punto inicial sea el origen del sistema cartesiano.



El vector libre $\overrightarrow{AB}$ es equipolente al vector $\vec{u}$

IGUALDAD Y OPERATORIA ENTRE VECTORES

- **Igualdad de vectores**

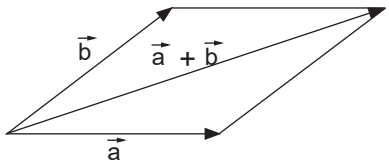
Dos vectores son iguales cuando sus respectivas coordenadas son iguales:

En $\mathbb{R}^2$: $(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$

- **Adición de vectores**

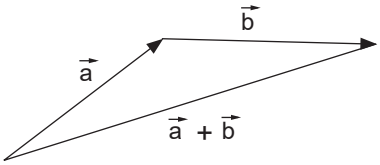
Para sumar dos vectores se aplica la ley del triángulo o la ley del paralelogramo, de acuerdo a la posición en que se encuentran los vectores.

Si los vectores tienen el punto de partida en común, ocupamos la ley del paralelogramo:

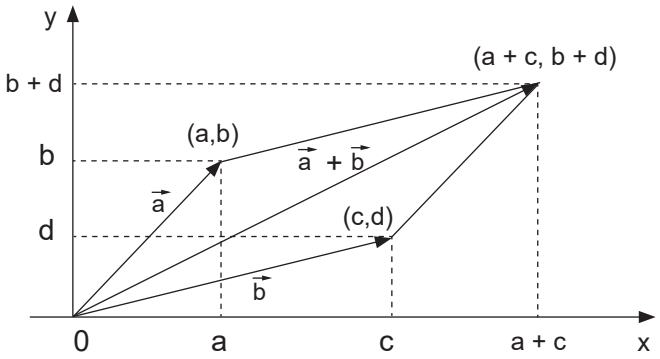


Prohibida su reproducción total o parcial.

Si el punto de llegada de uno de los vectores coincide con el punto de inicio del otro, ocupamos la ley del triángulo:



Si se trata de sumar vectores dados en coordenadas, la suma se obtiene sumando las coordenadas respectivas:



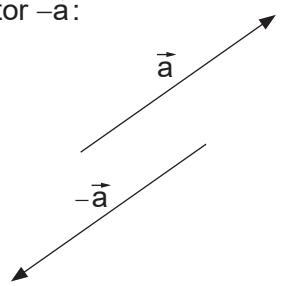
En $\mathbb{R}^2$:

$$(a,b) + (c,d) = (a + c\ ,\ b + d)$$

- **Sustracción de vectores**

El inverso aditivo u opuesto de un vector es aquél que tiene misma dirección, misma longitud, pero distinto sentido.

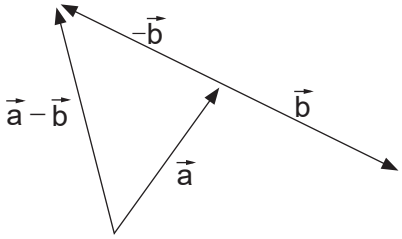
El opuesto de $\vec{a}$ es el vector $-\vec{a}$:



Ahora, para restar dos vectores, al primero se le suma el opuesto del segundo

$$\vec{a} - \vec{b} = a + (-\vec{b})$$

Geométricamente, la resta de vectores se visualiza de la siguiente forma:

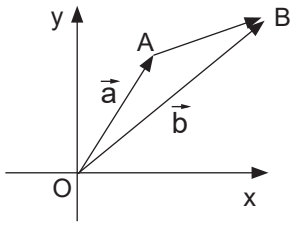


Prohibida su reproducción total o parcial.

Cuando los vectores están dados por sus coordenadas, la resta se obtiene restando las coordenadas respectivas:

En $\mathbb{R}^2$: $(a,b) - (c,d) = (a - c\ ,\ b - d)$

Es importante considerar que si tenemos dos puntos en $\mathbb{R}^2$, podemos determinar un vector libre $\overrightarrow{AB}$, restando el vector de posición de B con el vector de posición de A (punto final menos el punto inicial):



Observa en la figura que

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

En $\mathbb{R}^2$: Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ $\leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} = (\ b_1 - a_1, b_2 - a_2\ )$

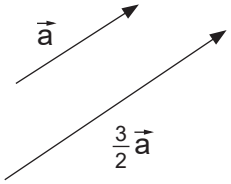
- **Ponderación de un vector**

  La ponderación es una operación entre un escalar (lo que asumiremos en este caso que es un número real) y un vector.

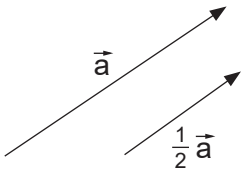
  Si tenemos un vector $\vec{a}$ y lo ponderamos por el escalar λ, obtenemos el vector $\lambda\vec{a}$, el cual tiene la misma dirección que $\vec{a}$, pero su sentido y el módulo pueden variar dependiendo de la magnitud y signo del escalar (siempre que $\lambda \neq 0$)

  Geométricamente, tenemos las siguientes situaciones:

SI $\lambda > 1$, el vector conserva el sentido y aumenta su módulo:

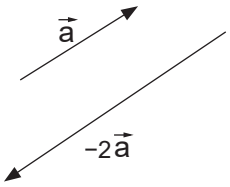


SI $0 < \lambda < 1$, el vector conserva el sentido y disminuye su módulo:

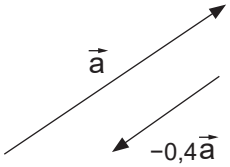


Prohibida su reproducción total o parcial.

SI $\lambda < -1$, el vector, cambia el sentido y aumenta su módulo:



SI $-1 < \lambda < 0$, el vector conserva la dirección, cambia el sentido y disminuye su módulo:



En el caso que los vectores estén dados por sus coordenadas, entonces multiplicamos el ponderador, con cada una de sus coordenadas:

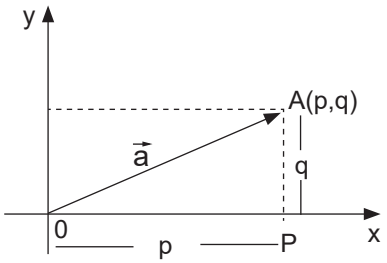
$$\text{En } \mathbb{R}^2: \ \lambda\,(a,b) = (\lambda a\ ,\ \lambda b)$$

LONGITUD O NORMA DE UN VECTOR

La longitud o norma de un vector es la distancia que hay entre el punto de partida y el punto de llegada y se designa con el símbolo $||\vec{a}||$ o bien $|\vec{a}|$.
Si los vectores están dados en términos de sus coordenadas, tenemos que

$$\text{En } \mathbb{R}^2\text{: Si } \vec{a} = (p,q) \ \leftrightarrow \ ||\vec{a}|| = \sqrt{p^2 + q^2}$$

Se puede comprobar si utilizamos el teorema de Pitágoras.
En $\mathbb{R}^2$, en el ΔOPA, utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos que $OA^2 = OP^2 + PA^2$, entonces $OA = \sqrt{p^2 + q^2}$.



$$|OA| = ||\vec{a}|| = \sqrt{p^2 + q^2}$$

El módulo tiene las siguientes propiedades:

1. $||\vec{a}|| \in \mathbb{R}$ y $||\vec{a}|| \geq 0$
2. $||\vec{a} + \vec{b}|| \leq ||\vec{a}|| + ||\vec{b}||$ (desigualdad triangular)
3. $||\lambda\vec{a}|| = |\lambda|\ ||\vec{a}||$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Prohibida su reproducción total o parcial.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

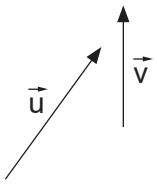
Para calcular la distancia entre dos puntos, tenemos la siguiente expresión:

En $\mathbb{R}^2$, Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura, ¿cuál de las alternativas representa mejor a su suma?



A)

B)

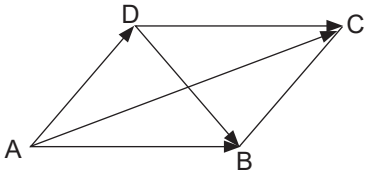
C)

D)

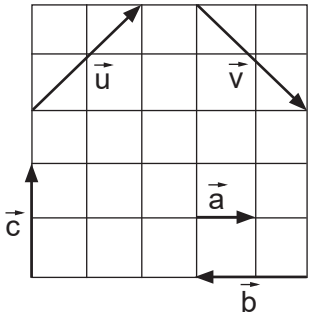
E)

2. En la figura, ABCD es un paralelogramo, entonces $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} =$

A) $\overrightarrow{AD}$
B) $2\overrightarrow{AD}$
C) $\overrightarrow{AB}$
D) $2\overrightarrow{AB}$
E) $\vec{0}$



3. En la figura, si todos los cuadrados son congruentes, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) $\vec{u} + \vec{v} = -2\vec{b}$
II) $\vec{c} + 2\vec{a} = \vec{u}$
III) $\vec{v} - \vec{u} = 2\vec{c}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

4. ¿Cuál de los siguientes vectores tiene una longitud distinta a los demás?

A) $(1 - \sqrt{2}\ , 1 + \sqrt{2})$
B) $(1\ , -\sqrt{5})$
C) $(-2\ , \sqrt{2})$
D) $(\sqrt{3}\ , -\sqrt{3})$
E) $(-\sqrt{2},\ \sqrt{3})$

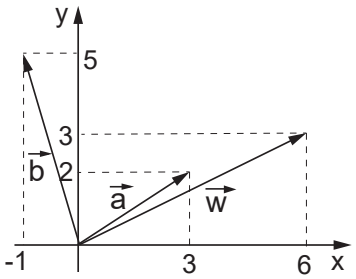
5. Sea el vector $\vec{v} = (u + 1, u + 4)$, se puede determinar este vector, sabiendo que:

(1) Su longitud es 15 unidades.
(2) $(u+1)(u+4)>0$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

6. Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{w}$, ¿qué vector hay que sumarle a $\vec{a} - \vec{b}$ para que resulte el vector w?



A) (1,5)
B) (2,5)
C) (1,6)
D) (2,6)
E) (4,−4)

7. Sean los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$, tales que $\vec{p} + \vec{q} = (2 , -5)$ y $\vec{p} - 2\vec{q} = (-4, 1)$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) $\vec{p} - \vec{q} = (-2, -1)$
B) $\vec{p} + 2\vec{q} = (4, -7)$
C) $2\vec{p} - \vec{q} = (-2, -4)$
D) $\vec{p} - 3\vec{q} = (6, -5)$
E) $3\vec{p} - 4\vec{q} = (-8, -1)$

8. Si $\vec{u} = (6,-3)$ y $\vec{u} - \vec{v}$ está en el tercer cuadrante, ¿cuál de los siguientes vectores podría corresponder a $\vec{v}$?

A) (2,5)
B) (–2,–4)
C) (7,2)
D) (10,–7)
E) (12,–4)

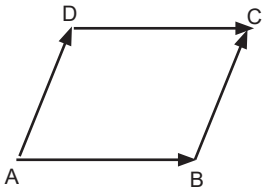
9. Sean los vectores $\vec{u} = (3,-1)$, $\vec{v} = (2,1)$ y $\vec{w} = (-1,2)$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $\vec{u} - \vec{v} = -\vec{w}$
II) $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{v} - \vec{w}$
III) $|\vec{u} + 2\vec{w}| = |\vec{v} - \vec{w}|$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

10. Se puede determinar que ABCD es un paralelogramo, sabiendo que:

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$
(2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$



A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

11. Sea el vector $\vec{a} = (p-1, p)$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Existen exactamente dos valores de p para los cuales la longitud de $\vec{a}$ es 5 unidades.

II) Si $0 < p < 1$, entonces $\vec{a}$ está en el segundo cuadrante.

III) Si $\vec{a}$ está en uno de los ejes coordenados su longitud es una unidad.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

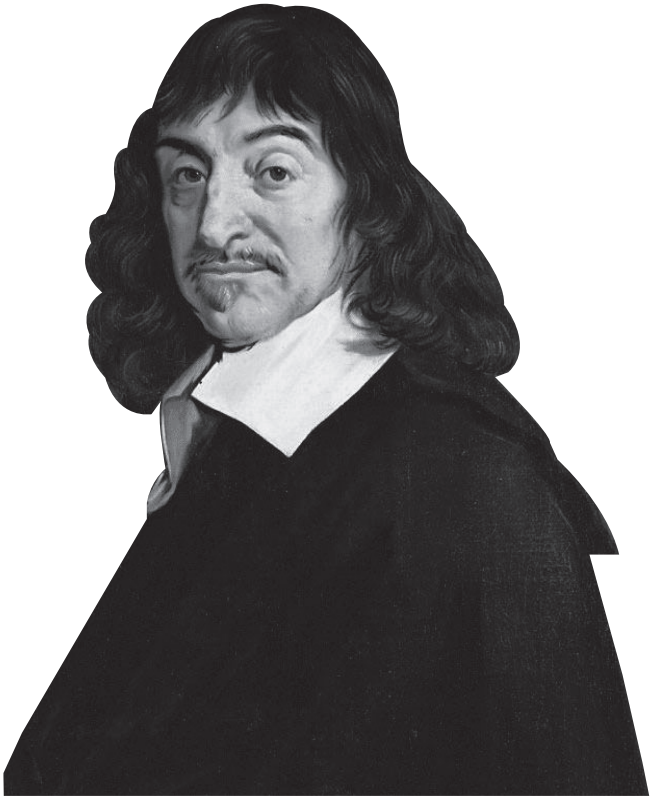
RESPUESTAS CAPÍTULO 12									
1. B	**2.** D	**3.** C	**4.** E	**5.** E	**6.** D	**7.** D	**8.** C	**9.** E	**10.** B
11. E									

Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
13

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Los orígenes de la Geometría Analítica se atribuyen a René Descartes (1596-1650) lo que se puede hallar en el apéndice La Géométrie de su obra "Discurso del Método", aunque se sabe que el matemático Pierre de Fermat utilizaba este método antes que esta publicación.



CONCEPTOS CLAVES

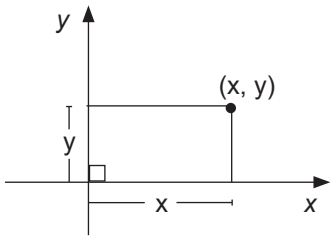
- Distancia entre dos puntos
- Ecuación general de recta
- Sistema de ecuaciones
- Ecuación principal de recta
- Pendiente

Prohibida su reproducción total o parcial.

ELEMENTOS BÁSICOS

- **Sistema cartesiano**

  Todo punto en un sistema cartesiano queda determinado por un par ordenado, donde la primera coordenada se llama abscisa y la segunda se llama ordenada:



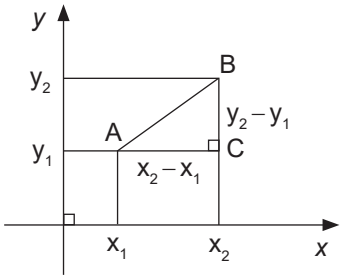
«x»: abscisa
«y»: ordenada

- **Distancia entre dos puntos**

  La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ está dada por la fórmula:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

  Esta fórmula se puede demostrar si se utiliza el teorema de Pitágoras en el triángulo ACB, rectángulo en C.



En ΔABC: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

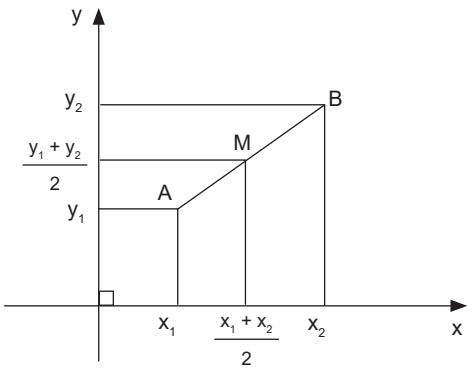
$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, por lo tanto:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

- **Punto medio de un segmento**

  Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces el punto medio M del segmento AB tiene como coordenadas

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Prohibida su reproducción total o parcial.

- **Pendiente de una recta**

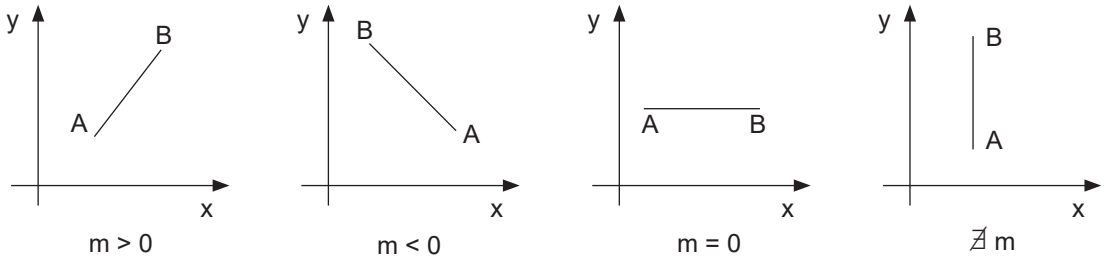
Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces la pendiente **m** del segmento AB se define como

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, con $x_1 \neq x_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente es un indicador de cuánto varía la variable "y" al variar "x".
Tenemos las siguientes situaciones:
Si la pendiente es positiva, el segmento forma un ángulo agudo con el eje «x».
Si la pendiente es negativa, el segmento forma un ángulo obtuso con el eje «x».
Si la pendiente es cero, el segmento es paralelo al eje «x».
Si la pendiente no existe, el segmento es paralelo al eje «y».

Las situaciones anteriores se ilustran en los siguientes gráficos:



Ejemplo:

Supongamos que tenemos los puntos A(3,1) , B(4,3) y C(-2,-9) y queremos determinar si los tres puntos están sobre una misma recta (es decir son colineales).

Solución:

Un método es calcular las pendientes de dos trazos, por ejemplo $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, si estas resultan ser iguales entonces los puntos son colineales.

Pendiente de $\overline{AB}$: $\dfrac{3-1}{4-3} = 2$, pendiente de $\overline{BC}$: $\dfrac{-9-3}{-2-4} = \dfrac{-12}{-6} = 2$, luego como las pendientes son iguales se deduce que los puntos son colineales.

Segundo método, calcularemos las distancias, AB, BC y AC, si resulta que la suma de las dos menores nos da la mayor, entonces los puntos son colineales.

$AB = \sqrt{(4-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{(-2-4)^2 + (-9-3)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ y

$AC = \sqrt{(-2-3)^2 + (-9-1)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ y como podemos comprobar fácilmente que, AB+AC = BC, entonces los tres puntos son colineales.

Prohibida su reproducción total o parcial.

ECUACIÓN DE RECTA

Todos los puntos (x, y) que satisfacen una ecuación de tipo ax + by + c = 0, con a, b y c números reales, se encuentran sobre una recta.
Para determinar una ecuación de recta se necesitan dos puntos, o un punto y su pendiente.

- **Ecuación por dos puntos**
  La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se puede determinar a través de la fórmula:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (\text{con } x_1 \neq x_2)$$

- **Ecuación punto pendiente**
  Supongamos que tenemos el punto (x_1, y_1) y queremos determinar la ecuación de la recta que pasa por este punto y tiene pendiente "m", para ello ocupamos la ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

  Esta ecuación se denomina ecuación punto − pendiente.

- **Ecuación general de la recta**
  Es una ecuación en dos variables x e y, donde uno de sus miembros es igual a cero:

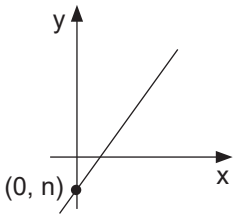
$$ax + by + c = 0$$

- **Ecuación principal de la recta**
  Si en la ecuación general despejamos la variable "y", obtenemos una ecuación del tipo:

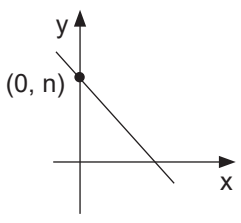
$$y = mx + n$$

  Esta ecuación se llama ecuación principal de la recta, donde "m" corresponde a la pendiente de la recta o coeficiente de dirección y "n" es el coeficiente de posición e indica donde la recta intersecta el eje "y".

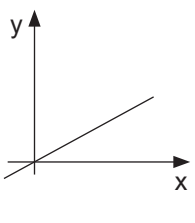
  Por ejemplo, podemos tener las siguientes situaciones:



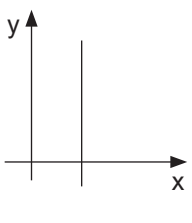
m > 0
n < 0



m < 0
n > 0



m > 0
n = 0

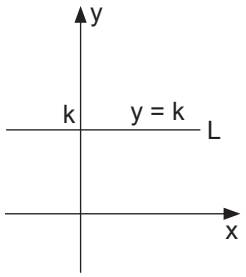


∄ m
∄ n

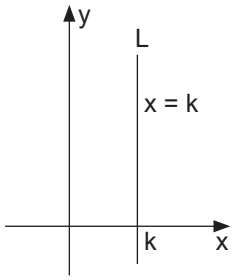
Prohibida su reproducción total o parcial.

- **Rectas paralelas a los ejes**

  Una recta paralela al eje x es de la forma y = k, donde k es una constante:



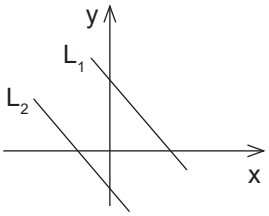
  Una recta paralela al eje y es de la forma x = k, donde k es una constante:



RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

- **Rectas paralelas**

  Dos rectas son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente:

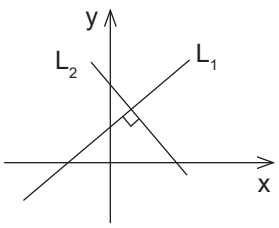


Sean las rectas: L_1: $y = m_1x + n_1$ y L_2: $y = m_2x + n_2$:

$L_1 \parallel L_2$ si y solo sí $m_1 = m_2$

- **Rectas perpendiculares**

  Dos rectas son perpendiculares si y solo sí el producto de las pendientes es -1:



Sean las rectas: L_1: $y = m_1x + n_1$ y L_2: $y = m_2x + n_2$

$L_1 \perp L_2$ si y solo sí $m_1 \cdot m_2 = -1$

Prohibida su reproducción total o parcial.

Observación: los teoremas mencionados, tanto como el de las rectas paralelas como el de las rectas perpendiculares, son válidos cuando ambas pendientes están definidas.
Por ejemplo si una recta es paralela al eje "x" y otra es paralela al eje "y", resultan ser pendiculares pero el producto de sus pendientes **no** es -1, ya que la horizontal tiene pendiente cero y la vertical tiene una pendiente no definida en los reales.

Ejemplo: determina una recta que pasa por el punto $(-4, 5)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $2x - 3y + 4 = 0$

Solución:

Sabemos que la recta de ecuación $ax + by + c = 0$ tiene como pendiente $m = -\frac{a}{b}$, en este caso la recta de ecuación $2x - 3y + 4 = 0$, tendría pendiente $m = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$, como las rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes es -1,

entonces $\frac{2}{3} \cdot m_2 = -1 \rightarrow m_2 = -\frac{3}{2}$. Luego, de la recta que buscamos sabemos que pasa por el punto $(-4, 5)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{2}$, ocupando la ecuación punto pendiente,

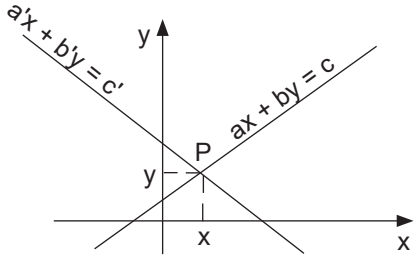
obtenemos la recta de ecuación $y - 5 = -\frac{3}{2}(x + 4)$, si la desarrollamos obtenemos la ecuación general $3x + 2y + 2 = 0$.

SISTEMA DE ECUACIONES

Este tema ya lo vimos en el cap 4, pero lo volveremos a estudiar para conectarlo con la ecuación de la recta. Cuando resolvemos un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones lineal en dos incógnitas, como el siguiente:

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}$$

Lo que estamos haciendo es encontrar el punto P donde se intersectan las rectas:



Habíamos visto que al resolver un sistema de la forma $\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}$, tenemos tres situaciones:

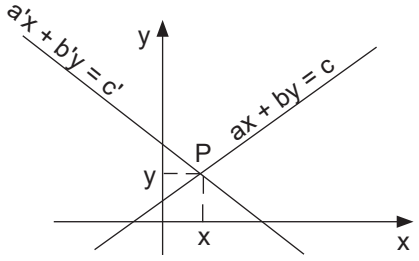
Prohibida su reproducción total o parcial.

- **Sistema compatible determinado**

Esto ocurre cuando las pendientes de las rectas son distintas, por lo tanto se intersectan en un solo punto, luego la solución del sistema es un solo valor tanto para “x” como para “y”.

En la ecuación ax+by=c, tenemos que su pendiente $m_1 = -\frac{a}{b}$, mientras que en la recta a’x+b’y=c’, su pendiente es $m_2 = -\frac{a'}{b'}$, como las pendientes son distintas, tenemos que $-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}$, o equivalentemente $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

De lo anterior deducimos que si $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, entonces las rectas son secantes y el sistema tendría una única solución.



Si $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, entonces las rectas son secantes y la solución del sistema es única.

- **Sistema compatible indeterminado**

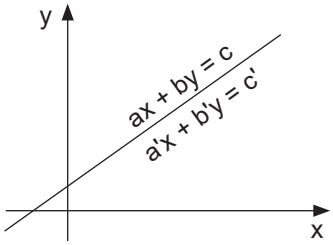
Esto ocurre cuando las rectas tienen igual pendiente e igual coeficiente de posición, en este caso hay infinitas soluciones tanto para “x” como para “y”.

Esto ocurre cuando todos los coeficientes son proporcionales $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ y las rectas son paralelas concidentes.

Tenemos que en la recta de ecuación ax+by=c, su pendiente es $m_1 = -\frac{a}{b}$ y su coeficiente de posición es $n_1 = \frac{c}{b}$, mientras que en la recta de ecuación a’x+b’y=c’, su pendiente es $m_2 = -\frac{a'}{b'}$ y $n_2 = \frac{c}{b}$, si ambas ecuaciones corresponden a una misma recta, entonces $m_1 = m_2 \leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$ o bien $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ y $n_1 = n_2 \leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$ o bien $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

De lo anterior se deduce que si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, las rectas son paralelas coincidentes y el sistema tendría infinitas soluciones.

Prohibida su reproducción total o parcial.



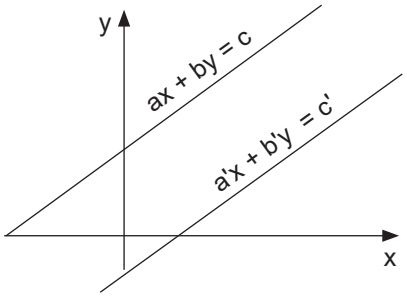
Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, entonces las rectas son coincidentes, y el sistema tendría infinitas soluciones.

- **Sistema incompatible**

En este caso las rectas tienen igual pendiente y distinto coeficiente de posición, las rectas no se intersectan, luego el sistema no tiene soluciones.

Según lo visto, que tuviesen igual pendiente, era equivalente a $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ y si tenían distinto coeficiente de posición, era equivalente a $\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, entonces si se cumple que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, las rectas serían paralelas no coincidentes.

Gráficamente la situación es la siguiente:



Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, entonces las rectas son paralelas no coincidentes, entonces el sistema no tiene solución.

Ejemplo:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{array}{|l} 3x - ky = 2 \\ 2x + 3y = 4 \end{array}$, determina el valor de **k** para que el sistema no tenga soluciones.

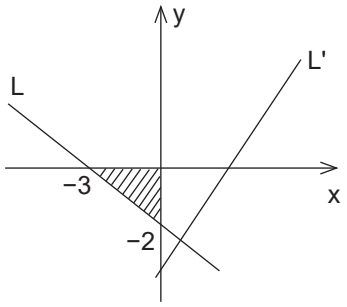
Solución:

Si el sistema no tiene soluciones debe ocurrir que $\frac{3}{2} = -\frac{k}{3} \neq \frac{2}{4}$, tenemos que efectivamente $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{4}$, por lo tanto trabajamos solo con la primera proporción: $\frac{3}{2} = -\frac{k}{3}$, multiplicando cruzado y despejando, obtenemos que $k = -\frac{9}{2}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En la figura las rectas L y L' son perpendiculares.
Si L' pasa por el punto (3, 1), ¿cuál es la intersección de esta recta con el eje y?



Solución:

Utilizando el triángulo sombreado de la figura, podemos deducir que la pendiente de L es $-\frac{2}{3}$,

también se puede obtener el mismo resultado si ocupamos la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Como las rectas son perpendiculares, el producto de las pendientes es −1, entonces

$-\frac{2}{3} \cdot m \rightarrow m = \frac{3}{2}$, luego L' pasa por el punto (3, 1) y tiene pendiente $\frac{3}{2}$, para poder obtener su ecuación puedes ocupar la ecuación punto pendiente $y - y_1 = m(x - x_1)$, o bien podemos utilizar lo siguiente:

Supongamos que la ecuación principal de L' es y = mx + n, pero $m = \frac{3}{2}$, luego la ecuación es de la forma $y = \frac{3}{2}x + n$, pero la recta pasa por el punto (3, 1), luego x = 3, y = 1, es una solución de esta ecuación, reemplazando obtenemos $1 = \frac{3}{2} \cdot 3 + n \rightarrow n = -\frac{7}{2}$, luego la recta L' intersecta al eje y en el punto $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

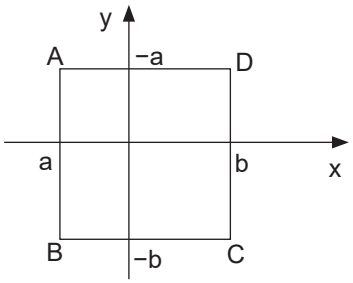
2. Sea ABCD un cuadrilátero cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.
Si las coordenadas de tres de sus vértices son A(a, −a), B(a, −b), C(b, −b), con ab < 0 y a < b, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones con respecto a este cuadrilátero es (son) verdadera(s)?

I) Es un cuadrado.

II) Su área es $(a + b)^2$ unidades cuadradas.

III) Su centro es el punto $\left(\frac{a + b}{2}, \frac{-a - b}{2}\right)$

Solución:
Como ab < 0 y a < b, se deduce que a < 0 y b > 0, luego −a > 0 y −b < 0, por lo tanto los vértices se ubican tal como se ilustra en la siguiente figura:



Observa que los lados del cuadrilátero miden b − a, lo cual se puede visualizar por simple inspección o bien por la fórmula de distancia entre dos puntos.
Como todos los lados son congruentes y los ángulos interiores son rectos (por ser los lados paralelos a los ejes), se tiene que el cuadrilátero es un cuadrado, por lo tanto I es correcta.
Como cada lado mide b – a unidades, el área del cuadrado es $(b - a)^2$, luego II es falsa.
Ahora, por ser un cuadrado, el centro de la figura se ubica en el punto medio de una diagonal, entonces si ocupamos la fórmula del punto medio para el trazo A(a, – a) y C(b, – b), obtenemos $\left(\frac{a + b}{2}, \frac{-a - b}{2}\right)$, luego III es verdadera. Conclusión, solo I y III son verdaderas.

3. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} px - 3y = 6 \\ x + 2y = -5 \end{array}$, ¿para qué valor de **p** el sistema no tiene soluciones?

Solución:
Recordemos que para que un sistema del tipo $\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}$ no tenga soluciones, debe ocurrir que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$, en este caso, entonces debe ocurrir que $\frac{p}{1} = \frac{-3}{2} \neq \frac{6}{-5}$, observa que $\frac{-3}{2} \neq \frac{6}{-5}$, por lo tanto solo trabajamos con la proporción $\frac{p}{1} = \frac{-3}{2}$, de donde se obtiene que $p = -\frac{3}{2}$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

4. Sea la recta L de ecuación $mx + ny = 0$. Si $mn \neq 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) La recta $mx + ny + p = 0$, se puede obtener a partir de L por medio de una traslación.

II) Si L se traslada en la dirección $(0, n)$, se obtiene la recta de ecuación $mx + ny - n = 0$.

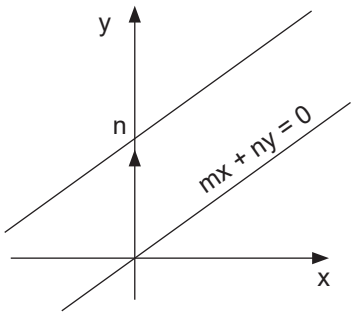
III) Si L se rota en torno al origen en 90° se obtiene la recta $nx - my = 0$.

Solución:

En I, al trasladar una recta se obtiene una recta paralela a ella, por lo tanto basta con comprobar que las rectas son paralelas.

Recordemos que la pendiente m de la recta $ax + by + c = 0$ es $m = -\frac{a}{b}$, entonces en el caso de la recta de ecuación $mx + ny = 0$, la pendiente es $-\frac{m}{n}$ y en la recta de ecuación $mx + ny + p = 0$, obtenemos la misma pendiente; como las pendientes son iguales, entonces las rectas son paralelas, luego I es verdadera.

Para II, la recta dada tiene como ecuación $mx + ny = 0$, esta es una recta que pasa por el origen, si se traslada en la dirección (0,n) se obtiene una recta paralela a ella y con coeficiente de posición "n":



La pendiente de $mx + ny = 0$, sabemos que es $-\frac{m}{n}$ y su coeficiente de posición es "n", utilizando la ecuación principal de la recta $y = mx + n$, obtenemos que la ecuación de recta es $y = -\frac{m}{n}x + n$.

Desarrollándola, obtenemos $mx + ny - n^2 = 0$, luego II es falsa.

Para III, como L es una recta que pasa por el origen, al girarla en 90° con respecto al origen se obtiene una recta que también pasa por el origen y es perpendicular a la primera.

Como $nx - my = 0$ es una recta que pasa por el origen, basta con comprobar que es perpendicular con L.

Por otro lado, la pendiente de $mx + ny = 0$ es $-\frac{m}{n}$ y la pendiente de $nx - my = 0$ es $\frac{n}{m}$,

como $-\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{m} = -1$, entonces las rectas son perpendiculares, luego III es verdadera.

Respuesta, solo I y III son verdaderas.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Sean los puntos: A(–3, 2) y B(1, 4), ¿cuál es la pendiente de la recta que pasa por estos puntos?

A) $\frac{1}{2}$

B) 2

C) –2

D) $-\frac{1}{2}$

E) 0

2. ¿Cuál es la pendiente de la recta de ecuación $2x - 3y - 5 = 0$?

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{3}{2}$

C) $-\frac{3}{2}$

D) $\frac{2}{5}$

E) 2

3. ¿Cuál(es) de los siguientes puntos pertenece(n) a la recta de ecuación $3x - y - 4 = 0$?

I) (−1, −7)

II) (2, 2)

III) (4, 8)

A) Solo I

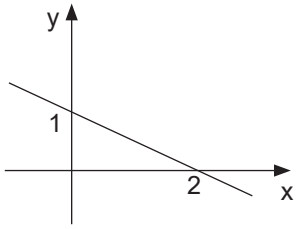
B) Solo I y II

C) Solo II y III

D) Solo I y III

E) I, II y III

4. ¿Cuál es la ecuación de la recta de la figura?



A) $x - 2y + 1 = 0$

B) $x + 2y - 1 = 0$

C) $x - 2y + 2 = 0$

D) $2x + y - 2 = 0$

E) $x + 2y - 2 = 0$

5. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones corresponde a una ecuación de una recta paralela a la recta de ecuación $3x - 2y - 1 = 0$?

A) $6x + 4y - 1 = 0$

B) $2x - 3y - 2 = 0$

C) $2x + 3y - 1 = 0$

D) $6x - 4y - 5 = 0$

E) $x - 2y - 3 = 0$

6. Si el punto $(k + 1, k - 3)$ pertenece a la recta de ecuación $3x - 2y + 4 = 0$, entonces k =

A) –13

B) –1

C) 1

D) 3

E) 7

Prohibida su reproducción total o parcial.

7. La intersección de las rectas de ecuaciones $y = 3x - 2$; $4x - y = 4$ es el punto:

A) (4, 2)
B) (2, 4)
C) (1, 1)
D) (0, –2)
E) (–1, –5)

8. Con respecto a la recta de ecuación: $3x - 2y - 6 = 0$, se afirma que:

I) Corta al eje x en (0, 2).
II) Corta al eje y en (–3, 0).
III) Su pendiente es $\frac{3}{2}$.

¿Cuál(es) de las afirmaciones anteriores es (son) verdadera(s)?

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y II
E) Ninguna de ellas.

9. El punto medio del segmento AB, con A(–1, 5) y B(3, 7) pertenece a la recta de ecuación:

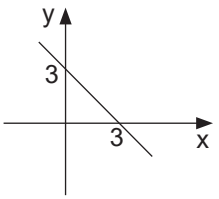
A) $2x + y = 0$
B) $2x - y = 0$
C) $x - 2y = 0$
D) $6x + y = 0$
E) $3x - y + 3 = 0$

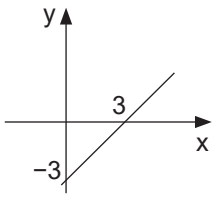
10. Se puede determinar el valor de "k" sabiendo que:

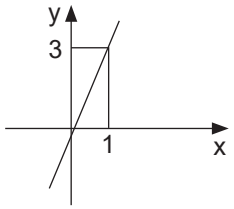
(1) La distancia entre los puntos (k+1,k) y (–1,5) es 5 unidades.
(2) El punto (k+1,k) está en la recta de ecuación 5x–3y–9=0.

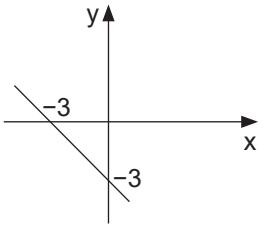
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

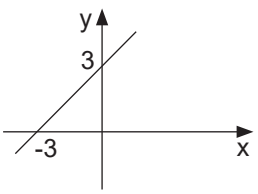
11. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor al de la recta de ecuación $x - y - 3 = 0$?

A)


B)


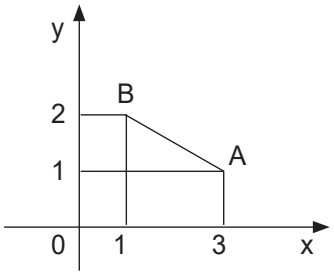
C)


D)


E)


Prohibida su reproducción total o parcial.

12. ¿En qué punto la recta AB de la figura intercepta al eje y?



A) (0,5)

B) $\left(0, \frac{5}{2}\right)$

C) (0,3)

D) (3,0)

E) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

13. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente –2 y pasa por el punto (2, 1)?

A) $2x + y + 5 = 0$

B) $2x + y - 5 = 0$

C) $2x + y + 4 = 0$

D) $2x + y - 4 = 0$

E) $2x + y + 3 = 0$

14. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto (–2, 2) y es paralela a la recta de ecuación: $3x - y + 1 = 0$?

A) $3x - y + 8 = 0$

B) $3x - y - 8 = 0$

C) $x + 3y - 4 = 0$

D) $x + 3y + 4 = 0$

E) $3x + y + 4 = 0$

15. El área del triángulo delimitado por la recta de ecuación $x - 3y - 6 = 0$ y los ejes coordenados medida en unidades cuadradas es:

A) 6

B) 12

C) 18

D) 20

E) 30

16. ¿Cuánto debe valer "t" para que los puntos P(2, 1); Q(−2, 1) y R(0, t) sean los vértices de un triángulo isósceles de base $\overline{PQ}$?

A) 2

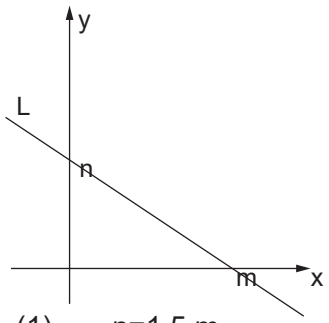
B) 4

C) −3

D) Para cualquier valor real.

E) Para cualquier valor real distinto de 1.

17. Se puede determinar la pendiente de la recta L de la figura, sabiendo que:



(1) n=1,5 m

(2) La recta L es perpendicular a la recta de ecuación $2x-3y+12=0$.

A) (1) por sí sola

B) (2) por sí sola

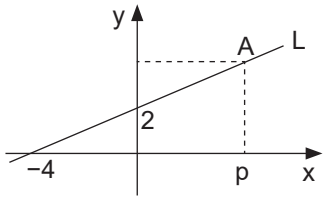
C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

18. El punto A de la figura, pertenece a la recta L. Si la abscisa de A es p, ¿cuál es su ordenada?



A) p

B) $\frac{p}{2}$

C) $\frac{p}{4}$

D) $\frac{p}{2} + 2$

E) $\frac{p}{2} + 4$

19. Si las rectas de ecuaciones $y = 5x - 1$; $2x + ky - 3 = 0$ son perpendiculares, entonces k =

A) $-\frac{2}{5}$

B) -10

C) $\frac{1}{10}$

D) $\frac{2}{5}$

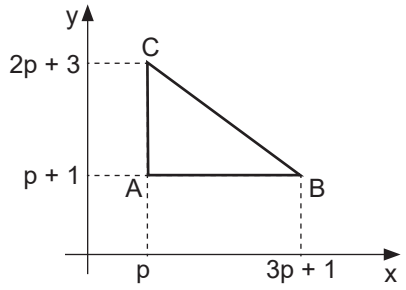
E) 10

20. Los puntos A(2, 1) y B(2, 4) son los vértices consecutivos de un cuadrado, ¿cuál(es) de los siguientes puntos podría(n) corresponder a alguno de los otros vértices?

I) (−2, 4)
II) (−1, 1)
III) (5, 1)

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

21. Los lados del ΔABC de la figura son paralelos a los ejes coordenados.
Si el lado $\overline{BC}$ es paralelo a la recta de ecuación $2x + 3y = 5$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera con respecto a este triángulo?



A) Su área es 27 unidades cuadradas.
B) Uno de sus vértices es el (13,5).
C) Uno de sus lados mide $\sqrt{117}$ unidades.
D) Uno de sus catetos mide $\frac{2}{3}$ de lo que mide el otro cateto.
E) La altura desde A tiene pendiente $\frac{2}{3}$.

22. Con respecto a la recta de ecuación $2x - y - 3 = 0$, se afirma que:

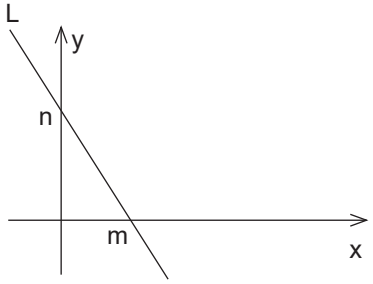
I) Pasa por el punto (4,5).
II) Intercepta a uno de los ejes en (−3,0).
III) Es perpendicular a la recta de ecuación $x + 2y - 6 = 0$.

¿Cuál(es) de las afirmaciones anteriores es (son) verdadera(s)?

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

23. Una posible ecuación para la recta que pasa por el origen del sistema cartesiano y es paralela a L es:



A) $mx + ny = 0$

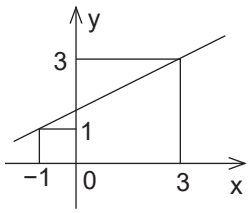
B) $mx - ny = 0$

C) $nx - my = 0$

D) $nx + my = 0$

E) $nx + my - mn = 0$

24. ¿Cuál es la ordenada de un punto de abscisa 2 que pertenece a la recta de la figura?



A) −1

B) 1

C) 1,2

D) 2,5

E) $2,\overline{6}$

25. Dos rectas son perpendiculares y se interceptan en el punto (−2, 3).
Si una de las rectas tiene como ecuación $y = -x + 1$, ¿cuál es la ecuación de la otra recta?

A) $y = x + 1$

B) $y = -x + 1$

C) $y = -x + 3$

D) $y = x + 5$

E) $y = x + 3$

26. Si la distancia entre los puntos (2,3) y (5 , n − 3) es 5, ¿cuál(es) de los siguientes valores puede tomar **n**?

I) 2

II) 1

III) 10

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y III

D) Solo II y III

E) I, II y III

27. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los puntos: (−1,3) y (2,5), ¿cuál es el área de este cuadrado, en unidades cuadradas?

A) 3

B) 5

C) 13

D) 65

E) 73

28. Sea ABC un triángulo cuyos vértices son A(2, 3), B(5, 3) y C(0, m).
Si el área de ABC es 6 unidades cuadradas, ¿cuál de los siguientes valores podría corresponder a m?

I) 4

II) −1

III) 7

A) Solo I

B) Solo III

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

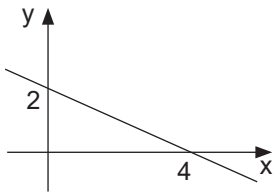
29. Sean los puntos A(3,1), B(5,7) y C(x,y), se puede determinar que A, B y C están sobre una misma línea recta, sabiendo que:

(1) La pendiente de $\overline{BC}$ es 3.
(2) AB + BC = AC

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

30. En la figura se muestra la gráfica de la recta de ecuación px + qy = 2, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **siempre** verdadera?

A) p = 2q
B) q = 2p
C) q + 2p = 0
D) p + q = 3
E) q – p = 2



31. Sea L la recta que pasa por los puntos A(p,q) y B(q,p), con p ≠ q ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La recta L tiene pendiente −1.
II) Una posible ecuación para L es x + y = p + q.
III) L forma con los ejes coordenados un triángulo isósceles.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) I, II y III
E) Ninguna de ellas.

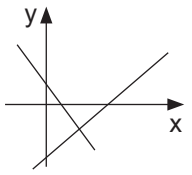
32. Sea el cuadrilátero ABCD cuyos vértices son A(a,0), B(0,b), C(−b,0) y D(0,−a) con a y b reales positivos.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

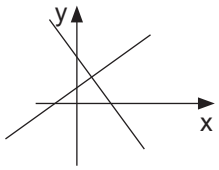
I) Si a ≠ b, entonces el cuadrilátero es un trapecio isósceles.
II) Si a = b, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.
III) El doble del área del cuadrilátero es $(a + b)^2$.

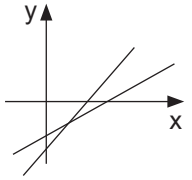
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

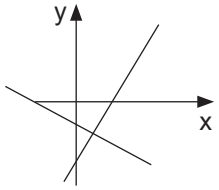
33. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor al sistema:

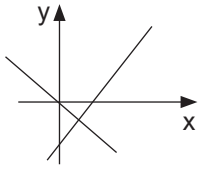
$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{array}\right| \ ?$$

A)


B)


C)


D)


E)


Prohibida su reproducción total o parcial.

34. Los puntos (−4,0); (2,0) y (0,3) son los vértices de un paralelogramo.
¿Cuál(es) de los siguientes puntos puede ser el cuarto vértice?

I) (6,3)
II) (0,−3)
III) (−2,−3)

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

35. Se sabe que la recta L_1 intersecta al eje x en el punto (a,0) y la recta L_2 intersecta al eje y en el punto (0,b). Se puede determinar que L_1 y L_2 se intersectan en el primer cuadrante, sabiendo que:

(1) $ab > 0$
(2) Las pendientes de L_1 y L_2 son positivas.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

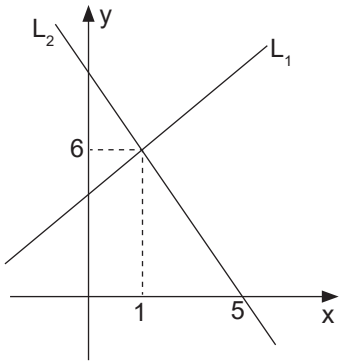
36. Los puntos A(-4,6) y B(4,12) son los extremos de un diámetro de una circunferencia.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) El centro de la circunferencia está en el eje de las ordenadas.
II) El radio de la circunferencia mide 5 unidades.
III) El punto (−7,2) está en la circunferencia.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

37. En la figura, las rectas L_1 y L_2 son perpendiculares.
¿En qué punto la recta L_1 intersecta al eje y?

A) (0,7)
B) $(0, \frac{16}{3})$
C) (0,9)
D) (0,12)
E) $(0, \frac{15}{2})$



Prohibida su reproducción total o parcial.

38. Sean las rectas de ecuaciones $3x + 2y = 12$; $x = p$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

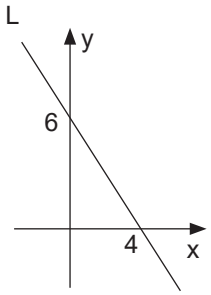
I) Si $p > 4$, las rectas se intersectan en el cuarto cuadrante.

II) Si $0 < p < 4$, las rectas se cortan en el primer cuadrante.

III) Si $p < 0$, las rectas se cortan en el segundo cuadrante.

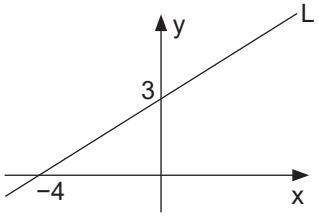
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

39. La recta L de la figura, se gira en 90° en sentido antihorario con respecto al punto (0, 6), entonces una ecuación posible de la recta resultante es:



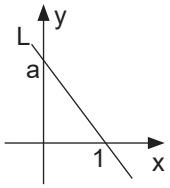
A) $2x + 3y + 18 = 0$
B) $2x - 3y + 12 = 0$
C) $2x - 3y + 18 = 0$
D) $3x + 2y - 18 = 0$
E) $3x - 2y + 18 = 0$

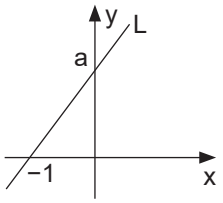
40. La recta L de la figura, se gira en 180° en sentido antihorario, con respecto al origen del sistema cartesiano, entonces una ecuación posible de la recta resultante es:

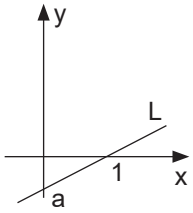


A) $3x - 4y + 12 = 0$
B) $-3x + 4y + 12 = 0$
C) $-4x + 3y + 12 = 0$
D) $4x + 3y + 12 = 0$
E) $3x + 4y + 12 = 0$

41. ¿Cuál de los siguientes gráficos podría representar a la recta de ecuación $y = -ax + a$?

I)


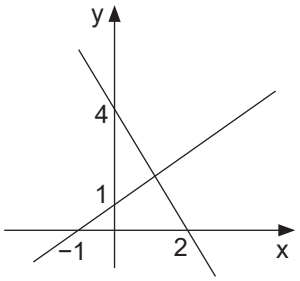
II)


III)


A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

42. Con respecto a las rectas cuyo gráfico en el sistema cartesiano se muestra a continuación, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) Una de las rectas tiene pendiente −2.
II) Las rectas son perpendiculares.
III) Se intersectan en el punto (1,2).

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

43. Con respecto a la recta de ecuación $(a + 1)x + (a - 1)y - (a^2 - 1) = 0$, con $a^2 \neq 1$ se afirma que:

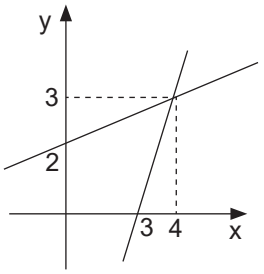
I) Intersecta al eje x en el punto $(a - 1,0)$.
II) Intersecta al eje y en el punto $(0,a + 1)$.
III) Si $a \in]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$ la pendiente es positiva.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

44. Sean las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones L_1: $px - 3y = 6$; L_2: $2x + 5y = r$
Los valores respectivos de p y r para que las rectas se corten en el punto $(1, -1)$ son:

A) 1 y −1
B) −1 y 1
C) 3 y −3
D) −3 y −3
E) 3 y 1

45. ¿Cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones, está representado por la gráfica que se muestra a continuación?



A) $3x - y = 9$; $4x - y = 2$
B) $3x - y = -9$; $4x - y = -2$
C) $3x - y = 9$; $x - 4y = -8$
D) $3x + y = 9$; $4x - y = 8$
E) $4x - y = 13$; $4x - y = -2$

46. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{array}{l} px + 4y = 12 \\ 3x + 8y = q \end{array}$, los valores respectivos que deben tomar p y q para que el sistema tenga infinitas soluciones son respectivamente:

A) $\frac{1}{2}$ y 12
B) $\frac{1}{3}$ y 24
C) $\frac{3}{2}$ y 24
D) $\frac{2}{3}$ y 18
E) $\frac{1}{2}$ y 18

Prohibida su reproducción total o parcial.

47. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} x + ay = 1 \\ ax + y = b \end{array}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si a = 0, el sistema tiene una única solución.

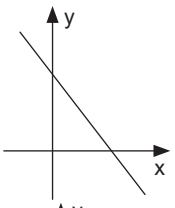
II) Si a = b = −1, el sistema tiene infinitas soluciones.

III) Si $a^2 \neq 1$, el sistema tiene una única solución.

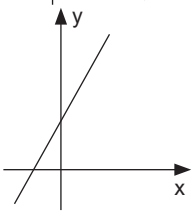
A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

48. ¿Cuál(es) de los siguientes gráficos podría(n) corresponder al de la recta de ecuación ax + y = c, si ac > 0?

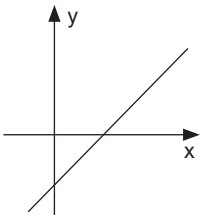
I)



II)



III)



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

49. Sean las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones, L_1: ax + y = 2a ; L_2: x − y = 1 − a, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si a ≠ −1, las rectas se intersectan en el punto (1,a).

II) Si a = 1, las rectas son perpendiculares.

III) Si a = −1, las rectas son paralelas no coincidentes.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

50. Sean los puntos A(p,q) y B(s,t) dos puntos en el plano cartesiano y m es la pendiente de la recta que pasa por ambos. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si p ≠ s y q = t, entonces m = 0.

II) Si p > s y q < t, entonces m < 0.

III) Si (t − q)(s − p) > 0, entonces m > 0.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

RESPUESTAS CAPÍTULO 13									
1. A	**2.** A	**3.** E	**4.** E	**5.** D	**6.** A	**7.** B	**8.** C	**9.** E	**10.** B
11. B	**12.** B	**13.** B	**14.** A	**15.** A	**16.** E	**17.** D	**18.** D	**19.** E	**20.** E
21. E	**22.** C	**23.** D	**24.** D	**25.** D	**26.** C	**27.** C	**28.** D	**29.** D	**30.** B
31. D	**32.** E	**33.** D	**34.** D	**35.** E	**36.** C	**37.** B	**38.** E	**39.** C	**40.** B
41. D	**42.** D	**43.** C	**44.** C	**45.** C	**46.** C	**47.** E	**48.** D	**49.** C	**50.** E

Prohibida su reproducción total o parcial.

MINIENSAYO N°3

EJE GEOMETRÍA

Tiempo: 45 minutos

1. Si el punto (2,4) se traslada en la dirección (a,b) queda en el punto (3,3), entonces $a + b =$

A) –3
B) –2
C) 0
D) 2
E) 3

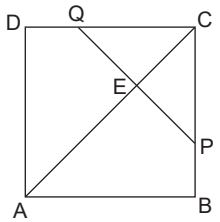
2. El punto (–b,a) se traslada en la dirección (a, b) quedando en el punto (3,5), entonces el punto inicial es el:

A) (4,1)
B) (1,4)
C) (–1,4)
D) (–1,–4)
E) Falta información para determinarlo.

3. Al punto (a,b) se le aplicó una traslación paralela al eje x en dos unidades a la izquierda y después se reflejó en torno al eje y quedando en el punto (5,–7), ¿cuál era el punto inicial?

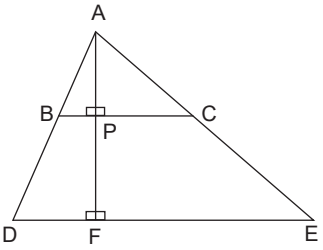
A) (–5,–5)
B) (7,7)
C) (–7,–7)
D) (3,7)
E) (–3,–7)

4. ABCD es un cuadrado, P y Q son puntos sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, tales que PB = QD. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es siempre verdadera?



A) AQ = AP
B) QP = 2EC
C) DP = BQ
D) $\sphericalangle PQD \cong \sphericalangle QPB$
E) AQ = AE

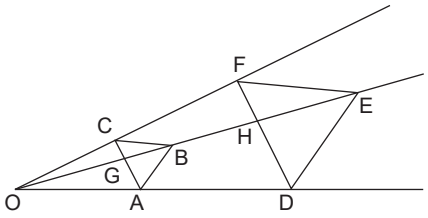
5. En la figura, B y C pertenecen respectivamente a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$ del triángulo ABC. Si $\frac{AB}{BD} = \frac{2}{3}$, ¿cuál es la razón entre las áreas de los triángulos ABC y ADE?



A) 2 : 3
B) 2 : 5
C) 4 : 5
D) 4 : 9
E) 4 : 25

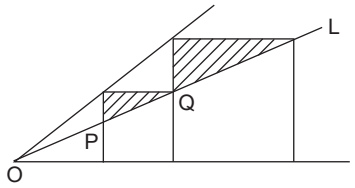
Prohibida su reproducción total o parcial.

6. En la figura, al triángulo ABC se le ha aplicado una homotecia con centro en O, obteniéndose el triángulo DEF. Si las intersecciones de las rectas AC y DF con OE son los puntos G y H respectivamente y OA : AD = 2 : 3, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?



A) OG : OH = 2 : 5
B) La razón de homotecia es 2,5.
C) Si AB = 4 cm, entonces DE = 10.
D) El área del ∆ABC es un 16% del área del ∆DEF.
E) Si ∢CAB = 20°, entonces ∢FDE = 50°.

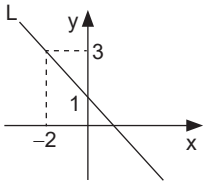
7. En la figura, se tienen dos cuadrados homotéticos, con centro de la homotecia "O". L es una recta que pasa por O y por el vértice Q de uno de los cuadrados e intercepta a uno de los lados del mismo cuadrado en P. Se puede determinar la razón (en cualquier orden) entre las áreas de los triángulos sombreados, sabiendo:

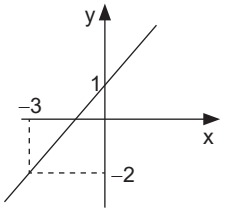


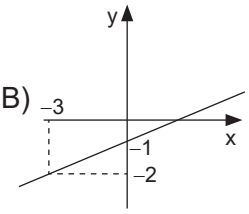
(1) La razón en que P divide al trazo OQ.
(2) La razón entre los perímetros de los cuadrados.

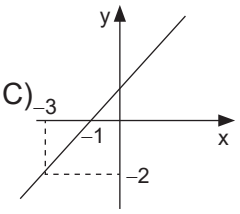
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

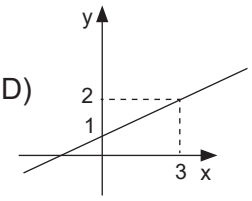
8. La recta L de la figura, se gira en 90° en torno al origen, ¿cuál es gráfico de la línea resultante?

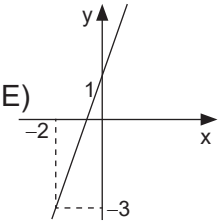


A)


B)


C)


D)


E)


Prohibida su reproducción total o parcial.

9. ¿Cuánto debe valer k para que las rectas de ecuaciones $(k-1)x-2y=3$; $kx+3y=-1$ sean perpendiculares?

A) 2

B) 5

C) $\frac{3}{5}$

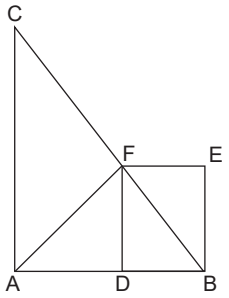
D) $\frac{5}{3}$

E) -2 o 3

10. La recta L de ecuación $(k+1)x+(k-1)y+12=0$ pasa por el punto $(5,-7)$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La pendiente de L es negativa.
B) k es un número entero positivo.
C) La recta L intercepta al eje y en el semieje negativo.
D) La recta L pasa por el punto $(16,-20)$.
E) La recta L pasa por el primer cuadrante.

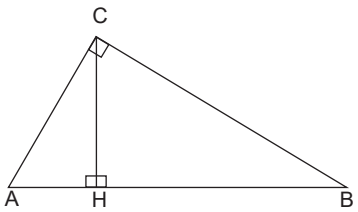
11. En la figura el triángulo CAB es rectángulo en A, $\overline{AF}$ es una altura de este triángulo y FDBE es un cuadrilátero de ángulos rectos. Si F y D pertenecen a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, se puede determinar que este cuadrilátero es un cuadrado, sabiendo que:



(1) $CF = FB$
(2) $AC = 2EB$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

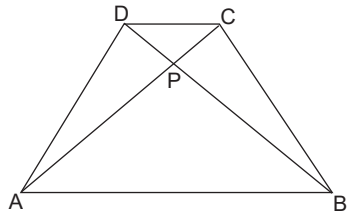
12. En la figura, H divide interiormente a $\overline{AB}$ en la razón 4 : 5 y $\overline{AC}$ mide 12 cm, ¿cuál es el área del ABC?



A) $18\sqrt{5}$ cm^2
B) $36\sqrt{5}$ cm^2
C) $54\sqrt{5}$ cm^2
D) $72\sqrt{5}$ cm^2
E) $144\sqrt{5}$ cm^2

Prohibida su reproducción total o parcial.

13. ABCD es un trapecio cuyas diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares y se intersectan en el punto P. Si AB = 15 cm, CD = 5 cm, PC = 3 cm, entonces PB mide:



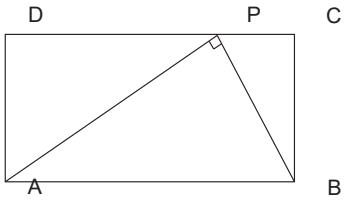
A) 9 cm
B) 12 cm
C) 16 cm
D) 17 cm
E) $3\sqrt{21}$ cm

14. Los vértices del triángulo ABC tienen coordenadas A(–3,–1), B(–1,–1) y C(–1,4), si a este triángulo se le aplica una homotecia con centro en (2,1) y razón de homotecia –2, ¿cuál(es) de los siguientes puntos corresponde(n) a los vértices del triángulo homotético?

I) (12,5)
II) (8,5)
III) (8,–5)

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

15. En la figura, ABCD es un rectángulo y P es un punto del lado $\overline{CD}$, de modo que P divide interiormente a $\overline{DC}$ en la razón 4 : 1. Si $\overline{BC}$ mide 12 cm, entonces el perímetro del rectángulo es:



A) 42 cm
B) 84 cm
C) 54 cm
D) $24 + 10\sqrt{3}$ cm
E) $30 + 18\sqrt{5}$ cm

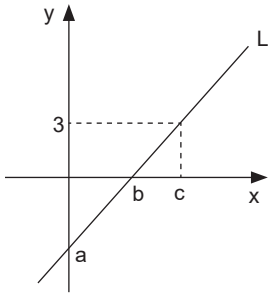
16. Sea el punto P(p+1, p–3), si este punto pertenece a una circunferencia de centro O(–8,–9) y radio 15, entonces el o los posibles valores de p es (son):

I) –18
II) 3
III) 9

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Ninguno de ellos.

17. La ecuación de la recta L de la figura es $3x - 2y - 6 = 0$, entonces $a + b - c =$

A) –5
B) –3
C) –1
D) 1
E) 2



Prohibida su reproducción total o parcial.

18. Sean las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones, $L_1: ax + y = 2a$; $L_2: x - y = 1 - a$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si $a \neq -1$, las rectas se intersectan en el punto (1,a).
II) Si $a = 1$, las rectas son perpendiculares.
III) Si $a = -1$, las rectas son paralelas no coincidentes.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

19. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{|l} (a+1)x + 2ay = 16 \\ (3a+1)x + 3(2a-1)y = 40 \end{array}$$

, ¿para qué valor de "a" este sistema tiene infinitas soluciones?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 5
E) No existe tal valor.

20. ABCD es un cuadrado, donde las coordenadas de los vértices consecutivos A y B son respectivamente A(p,–p) y B(4p,–p), con $p > 0$. Se puede determinar los demás vértices, en función de **p**, sabiendo que:

(1) Están en el primer cuadrante.
(2) Una de las diagonales del cuadrado tiene pendiente 1.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

21. Sean los vectores $\vec{a} = (p,q)$ y $\vec{b} = (-2p,-2q)$ con $pq \neq 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

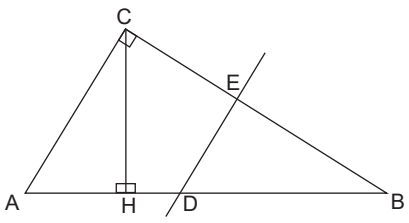
I) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen la misma dirección.
II) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}|$
III) $\vec{a} + 3\vec{b} = \vec{b} - 3\vec{a}$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

22. Sean los vectores: $\vec{a} = (4,-1)$, $\vec{b} = (2,5)$ y $\vec{c} = (-1,3)$, ¿cuánto debe ser el ponderador λ para que se cumpla que $\vec{b} + \lambda\vec{c} = \lambda\vec{b} - \vec{a}$?

A) –2
B) –1
C) 2
D) 4
E) No existe tal valor.

23. En la figura, E y D son puntos de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. Si $\overleftrightarrow{ED}$ es la simetral de $\overline{BC}$, AC = 60 cm y BC = 80 cm, ¿cuál es el perímetro del cuadrilátero CHDE?



A) 120 cm
B) 132 cm
C) 142 cm
D) 152 cm
E) 936 cm

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJE

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Capítulo
14

ESTADÍSTICA

Con la llegada de los grandes computadores, ahora podemos procesar una enorme cantidad de datos, lo que ha contribuido al avance en áreas muy diversas como la medicina, el deporte, robótica, o la sociología, la que nos ayuda a estudiar el comportamiento y el consumo humano.

Existen dos tipos de estadística, la descriptiva y la inferencial. En este capítulo veremos la primera, la que se dedica a analizar los datos obtenidos, graficándolos y calculando diversos parámetros, como la media, los percentiles, el rango, etc.

Por otra parte, la estadística inferencial se preocupa de sacar conclusiones de una población a partir de una muestra de ella, por ejemplo la media poblacional a partir de la media de una muestra, tema que veremos en el último capítulo de este texto.

CONCEPTOS CLAVES

- Organización de datos
- Representación de datos
- Medidas de tendencia central
- Medidas de dispersión
- Medidas de posición

Prohibida su reproducción total o parcial.

ORGANIZACIÓN DE DATOS

Si tenemos un conjunto de datos, existen diversas formas de organizarlos, acá veremos solo los más frecuentes.

- **Diagrama de tallo y hojas**

Este diagrama permite ordenar los datos de tal forma que los de mayor frecuencia se destaquen sobre los demás, esto también se produce en un gráfico de barras como veremos más adelante. En este diagrama se coloca en el tallo la o las cifras de mayor valor posicional y en las hojas las cifras restantes.
Por ejemplo, las siguientes notas: 3,2 ; 3,5 ; 4,1 ; 4,7 ; 4,9, 5,1 ; 5,5 ; 5,8 ; 5,9 ; 6,0 ; 6,5 ; 7,0 en un diagrama de tallo y hojas quedarían de la siguiente forma:

Tallo	Hojas
3	2 5
4	1 7 9
5	1 5 8 9
6	0 5
7	0

- **Tabla de frecuencias**

En las tablas de frecuencias, al lado del dato aparece la frecuencia del dato, es decir la cantidad de veces que se repite.

Ejemplo:

Dato	Frecuencia
12	3
15	4
18	7
21	6

También podemos disponer de una tabla de frecuencias acumuladas, donde aparece la cantidad de datos que son menores o iguales que él:

Dato	Frecuencia acumulada
12	3
15	7
18	14
21	20

Prohibida su reproducción total o parcial.

Por ejemplo, que el dato 18 tenga una frecuencia acumulada de 14 indica que hay 14 datos que son menores o iguales que él.
También podemos tener una tabla de frecuencias relativas, esta indica que parte es la frecuencia del dato con respecto al total, esta se expresa en números decimales.
Siguiendo con el mismo ejemplo, tenemos que el dato 12 se repite 3 veces de un total de 20, es decir en términos de fracciones es $\frac{3}{20}$, o bien 3 : 20 = 0,15 en decimal.

Dato	Frecuencia	Frecuencia relativa
12	3	0,15
15	4	0,2
18	7	0,35
21	6	0,3

Si la frecuencia relativa la expresamos en términos porcentuales, se denomina frecuencia relativa porcentual:

Dato	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
12	3	0,15	15%
15	4	0,2	20%
18	7	0,35	35%
21	6	0,3	30%

También podemos tener tablas con frecuencias relativas acumuladas o frecuencias porcentuales acumuladas:

Dato	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada	Frecuencia relativa porcentual	Frecuencia acumulada porcentual
12	3	0,15	0,15	15%	15%
15	4	0,2	0,35	20%	35%
18	7	0,35	0,70	35%	70%
21	6	0,3	1,0	30%	100%

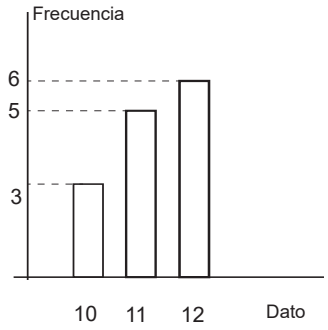
Prohibida su reproducción total o parcial.

GRÁFICOS

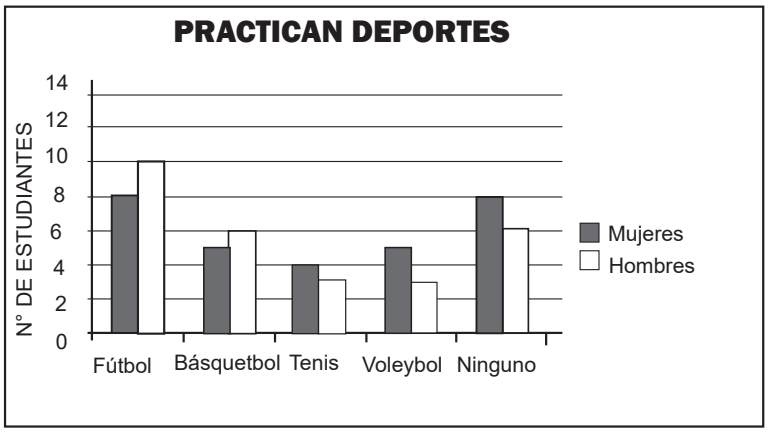
Existen diversos gráficos para representar datos, entre ellos uno de los más importantes es el gráfico de barras, en el cual las altura de las columnas que se presentan están relacionadas con las frecuencias de los datos.

- **Gráfico de barras**

En el eje horizontal se colocan los datos y en el vertical las frecuencias de los datos, tal como se muestra en el siguiente ejemplo:



También existen los gráficos de barras dobles que nos permiten comparar dos variables:



Prohibida su reproducción total o parcial.

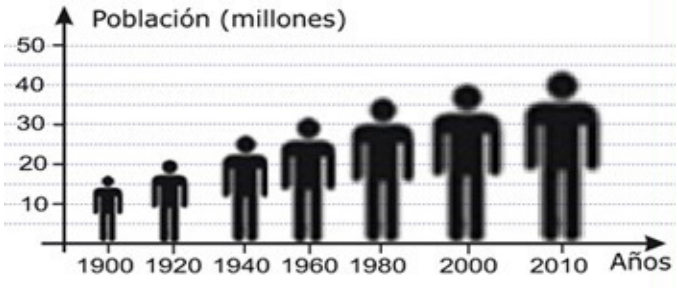
- **Otros gráficos**

También tenemos otros tipos de gráficos como los de línea, los circulares y los pictogramas.

De línea:

Circulares:

Pictogramas:



MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central son la media, la mediana y la moda .

- **Media , media aritmética o promedio $\overline{x}$**

A) Si se tiene datos dados sin frecuencia, la media se calcula sumando los datos y dividiendo esta suma por el total de datos.

Datos: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rightarrow$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Prohibida su reproducción total o parcial.

B) Si los datos vienen dados en una tabla de frecuencia, entonces la media se calcula multiplicando cada dato con su respectiva frecuencia, se suman estos productos y se divide por el total de datos.

Datos:

Dato	Frecuencia
x_1	f_1
x_2	f_2
...	...
x_n	f_n

$$\rightarrow \quad \bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + ... + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

C) Si los datos vienen dados en una tabla de frecuencia relativas, entonces la media se calcula multiplicando cada dato con su respectiva frecuencia relativa y se suman todos estos productos.

Datos:

Dato	Frecuencia relativa
x_1	r_1
x_2	r_2
...	...
x_n	r_n

$$\rightarrow \quad \bar{x} = x_1 \cdot r_1 + x_2 \cdot r_2 + ... + x_n \cdot r_n$$

Nota: si en la tabla se indicaran las frecuencias relativas porcentuales, se efectúa la misma operación anterior pero se dividiría por 100.

- **Mediana**

Si se ordenan los datos en sentido creciente o decreciente, la mediana es el dato que se ubica al centro (en el caso de ser uno) o es la media de los dos datos centrales.

Si el número de datos es n y n es impar, la mediana es el dato de lugar $\frac{n+1}{2}$.

En el caso que n fuera par, la mediana es la media entre los datos de lugares $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} + 1$.

- **Moda**

La moda es el dato que tiene mayor frecuencia.
Si todos los datos tienen la misma frecuencia diremos que no hay moda (muestra amodal).
Un conjunto de datos puede tener más de una moda.(muestra multimodal)

Prohibida su reproducción total o parcial.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión nos indican cuan dispersos están los datos, acá veremos el rango.

- **Rango**

Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.
Este estadígrafo puede ser cero en el caso en que todos los datos son iguales y es positivo en el resto de los casos.

MEDIDAS DE POSICIÓN O PERCENTILES

El percentil k, o P_k es un valor tal que el k% de los datos es menor o igual que él.
Los percentiles más importantes son los cuartiles, los quintiles y los deciles.
Los cuartiles dividen a los datos en 4 partes iguales, el primer cuartil corresponde al percentil 25, el segundo cuartil corresponde al percentil 50, la que ya conocemos como mediana y el tercer cuartil corresponde al percentil 75, se representan como Q_1, Q_2 y Q_3 respectivamente.
Los cuartiles los ocuparemos para construir el diagrama de cajón y bigotes, el que veremos más adelante.
Los quintiles dividen los datos en cinco partes iguales, el primer quintil corresponde al percentil 20, el segundo quintil al percentil 40, etc.
El primer decil corresponde al percentil 10, el segundo decil al percentil 20, el octavo decil al percentil 80, etc.
Si tenemos n datos (no agrupados en intervalos), el percentil k corresponde al dato de lugar $\frac{k}{100} \cdot (n+1)$.

Si este valor corresponde a un número decimal, calculamos la media entre los dos datos más cercanos a él.

Ejemplo:
Arturo obtuvo las siguientes notas en la asignatura de Inglés: 3 , 4 , 5 , 5 , 5 , 6 , 6, 7.
Calcular el primer cuartil y el percentil 60.

Solución:

El primer cuartil, corresponde al percentil 25, entonces calculamos $\frac{25}{100} . (8 + 1) = 2{,}25$, por lo que calculamos la media entre el segundo y el tercer dato, esto es 4,5.

El percentil 60 o tercer quintil, se calcula mediante $\frac{60}{100} . (8 + 1) \approx 5{,}4$, de modo que calculamos la media entre el quinto y sexto dato, lo que nos da 5,5.

Prohibida su reproducción total o parcial.

- **Diagrama de cajón y bigotes**

El diagrama de cajón y bigotes, es una representación visual de cuan dispersos están los datos entre los valores mínimo, los cuartiles y el valor máximo.

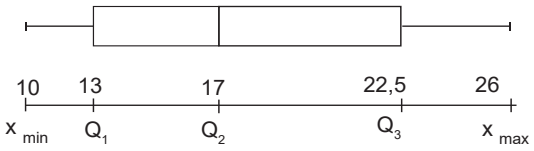
Ejemplo:

Supongamos que las edades de los nietos de una familia son: 10, 12, 12, 14, 16, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 26.

Tenemos que el dato mínimo es 10, el primer cuartil es Q_1=13, el segundo cuartil o mediana es Q_2=17, tercer cuartil o Q_3=22,4 y el dato máximo igual a 26.

El diagrama de cajón y bigotes es un rectángulo donde en el extremo izquierdo se ubica Q_1, en el extremo derecho Q_3, y la mediana es una línea que separa a este rectángulo.

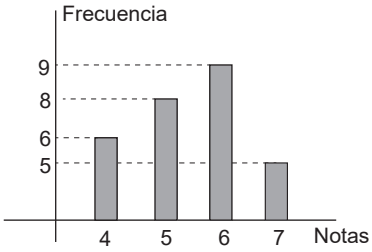
Desde los extremos de este rectángulo o caja salen los bigotes que son segmentos que se extienden hasta el valor mínimo y al valor máximo por el otro:



Se llama valor intecuartílico a la diferencia entre Q_3 y Q_1, en este caso es 22,5−13=9,5, lo que indica que en un rango de 9,5 años está el 50% de los datos. Por otro si consideramos la partición que produce la mediana, en este ejemplo el lado derecho es mayor que el lado izquierdo, lo que indica que los datos están más dispersos entre la mediana y el tercer cuartil.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En el siguiente gráfico se muestra la distribución de notas de un cierto curso en la última prueba de Física.



¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada en el gráfico?

A) La mediana es 5,5.
B) La moda es 6,0.
C) La media es inferior a la mediana.
D) El rango es 3.
E) El primer cuartil es 4.

Prohibida su reproducción total o parcial.

Solución:

A) Para calcular la mediana, en primer lugar que determinar cuántos datos son, para ello sumamos las frecuencias: 6+8+9+5=28. Como es un número par de datos, los centrales son los de lugares 14 y 15, si sumamos las frecuencias del 4 y del 5 suman 14, por lo tanto el dato de lugar 14 es 5 y el dato 15 es 6, si calculamos la media entre 5 y 6 nos 5,5 por lo tanto la mediana es 5,5 y A es verdadera.

B) La moda es el dato con mayor frecuencia, en este caso es el 6, por lo tanto es correcta.

C) Para calcular la media tenemos que multiplicar cada dato con su frecuencia, sumar estos productos y el resultado dividirlo con la suma de las frecuencias, entonces $\bar{x} = \frac{4 \cdot 6 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 5}{6 + 8 + 9 + 5} = \frac{153}{28} \approx 5{,}46$, como la mediana era 5,5, se tiene que la afirmación es verdadera.

D) El rango es la diferencia entre el dato mayor y el menor, en este caso 7– 4, por lo tanto es verdadera.

E) El primer cuartil es el dato $\frac{1}{4} \cdot (28 + 1) = 7{,}25$, por lo tanto es la media entre los datos de lugares 7 y 8, ambos datos son 5, por lo tanto su media es 5, luego E) es falsa.

2. Debido a los malos resultados en la última prueba de Biología el profesor decide subir todas las notas en dos décimas.

¿Cuál de los siguientes estadígrafos **NO** resulta alterado?

I) Media.
II) Rango.

Solución:

I) Por propiedad de la media, si a todos los datos se le suma una constante, la media aumenta esa misma constante, por lo tanto la media también aumenta en dos décimas, luego I es falsa.

II) El rango es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor, supongamos que el dato mayor es X y el menor es Y, entonces el rango es X – Y; si X e Y aumentan en 0,2 el rango sería (X – 0,2) – (Y– 0,2) = X – Y, luego el rango no resulta alterado.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Se tienen los siguientes datos: 20; 15; 13; 11 ; _ , si la media de los cinco datos es 14,¿qué dato falta?

A) 1
B) 10
C) 11
D) 14
E) 21

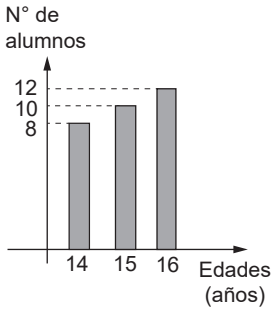
2. Las edades de los seleccionados de un colegio para un torneo de baby futbol son las siguientes: 16, 16, 17, 18, 16, 17, 18, 17. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La media es menor a 17 años.
II) La mediana es 16,5.
III) El primer cuartil es 16.

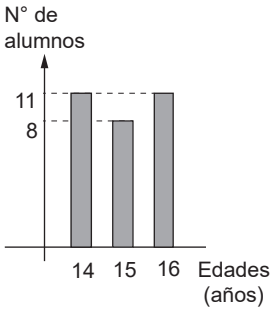
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo I y III
E) I, II y III

3. En los siguientes gráficos se muestran las distribuciones de edades de dos cursos de un colegio.

2 Medio A



2 Medio B

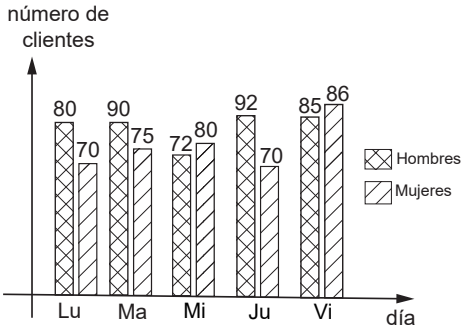


¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada?

A) La media de las edades del 2° A es superior a la del 2°B.
B) La mediana de las edades de ambos cursos es la misma.
C) El tercer quintil del 2°A es superior al correspondiente del 2°B.
D) En ambos cursos, los que tienen 16 años son menos del 40 %.
E) En ambos cursos, menos del 65% tiene a lo sumo 15 años.

Prohibida su reproducción total o parcial.

4. El número de asistentes a una película durante una semana distribuidos según el sexo, fueron los siguientes:



Se puede afirmar que:

I) La media de los asistentes de sexo masculino fue de 83,8 diarios.

II) La media de los asistentes de sexo femenino fue de 76,2 diarios.

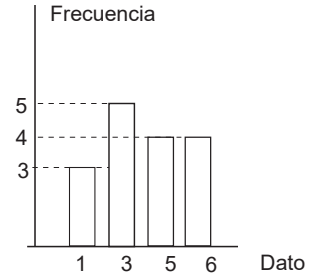
III) La media de asistentes fue de 160 diarios.

Es (son) verdadera(s):

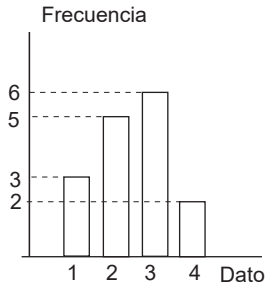
A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

5. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada en los siguientes gráficos?

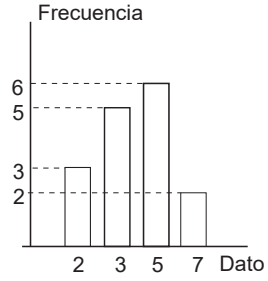
muestra P



muestra Q



muestra R



A) Q y R no tienen la misma moda.
B) En P y R el primer cuartil es 3.
C) En Q la media es inferior a 3.
D) P y R tienen la misma mediana.
E) En R la media y la mediana coinciden.

Prohibida su reproducción total o parcial.

6. En una reunión de apoderados se consulta a los padres por la cantidad de hijos que tienen, obteniéndose lo siguiente:

Nº de hijos	0	1	2	3	4
Nº de familias	4	7	8	4	2

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La media de hijos por familia es superior a 1,7.
II) La moda es 8.
III) La mediana es 3.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

7. Los puntajes obtenidos por Francisco en los primeros cuatro ensayos de PSU Matemática durante el semestre fueron 550, 650, 720 y 740 puntos. Si el total de ensayos que rindió son 5, se puede determinar el puntaje del ensayo faltante, sabiendo que:

(1) La media de los puntajes fue 672 puntos.
(2) La mediana de los puntajes fue 700 puntos.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

8. Se han elegido una cantidad de alumnos de un colegio para representarlos en una Olimpiada de Matemática.
Según la información dada en la siguiente tabla, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdaderas?

Edad (años)	Frecuencia	Frecuencia relativa
15	4	
16	5	0,2
17		
18	9	

I) La frecuencia relativa para los 15 años es 0,16.
II) El total de alumnos es 25.
III) La frecuencia acumulada para los 17 años es 16.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

9. Los resultados de una prueba de Ciencias en dos cursos de 4º medio fueron los siguientes:

Curso	Número de alumnos	Media del curso
4°A	20	5,0
4°B	30	6,0

Según estos datos, ¿cuál es la media de estos alumnos de cuarto medio en esta prueba?

A) 5,2
B) 5,4
C) 5,5
D) 5,6
E) 5,8

Prohibida su reproducción total o parcial.

10. Se puede determinar la media de las estaturas de los estudiantes de un curso, si se sabe:

(1) La media de las estaturas de cada sexo.

(2) El porcentaje de mujeres del curso.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

11. En la siguiente tabla se muestran las temperaturas máxima y mínima en la Antártica durante una semana:

Días	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes
T. máx	2°	3°	2°	0°	3°
T. mín	-2°	-1°	-1°	-3°	-3°

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera?

I) La media de las temperaturas máximas tiene más de 4 grados de diferencia con la media de las temperaturas mínimas.

II) La mediana de las temperaturas máximas tiene más de 4 grados de diferencia con la media de las temperaturas mínimas.

III) Las temperaturas máximas están más dispersas que las temperaturas mínimas.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

12. Se toma una muestra para el estudio de las edades de los alumnos de preescolar de un colegio. La frecuencia y la frecuencia acumulada de los datos se ilustra en la siguiente tabla:

Edad	Frecuencia	Frecuencia acumulada
2	1	
3		n
4	3n + 5	3n + 10

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La frecuencia relativa para los tres años es 0,2.
II) La media es 3,76.
III) El total de los datos de la muestra es 25.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

13. Se tienen 5 números negativos, ¿cuál(es) de los siguientes estadígrafos también son siempre negativos?

I) El rango.
II) La media.
III) El primer cuartil.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

14. Se tienen tres datos P, Q y R con sus respectivas frecuencias relativas p, q y r:

Dato	Frecuencia relativa
P	p
Q	q
R	r

Se puede determinar la mediana de estos datos si se sabe que:

(1) $p + q > 0,5$
(2) $r = 0,4$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

15. La media de las notas de 20 alumnos en la última prueba de Matemática es 5,8 y una de las pruebas por error se anotó un 4,4 y era un 6,4.
Después de hacer la corrección, la media:

A) aumentará en dos décimas.
B) disminuirá en dos décimas
C) disminuirá en una décima.
D) aumentará en una décima.
E) no variará.

Prohibida su reproducción total o parcial.

16. En la siguiente tabla, se muestra la frecuencia relativa para las edades de los estudiantes de primer año de ingeniería en una universidad.

Edad	Frecuencia relativa
18	0,3
19	0,6
20	0,1

¿Cuál de las siguientes afirmaciones **NO** se puede deducir de la información dada?

A) La media es inferior a 19 años.
B) La media es menor que la mediana.
C) El 70% tiene a lo menos 19 años.
D) La media y la moda no coinciden.

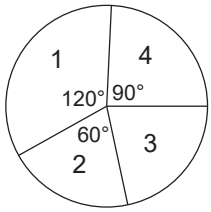
17. Un dado es lanzado una cierta cantidad de veces y los resultados obtenidos se indican en la tabla de frecuencias siguiente:

x	f
1	0
2	5
3	4
4	3
5	2
6	x

¿Cuánto debe valer x para que la media de los datos sea 3,5?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

18. En una caja hay fichas numeradas con los números del 1 al 4.
En el siguiente gráfico circular se muestra la distribución según el número marcado.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA** con respecto a los números marcados en las fichas?



A) La moda es el 1.

B) La media es inferior a 3,0.

C) La frecuencia relativa para el 2 equivale a los $\frac{2}{3}$ de la frecuencia relativa para el 3.

D) La frecuencia relativa porcentual para el 3 es un 25%.

E) Las frecuencias relativas del 3 y del 4 son distintas.

Prohibida su reproducción total o parcial.

19. Se toman dos muestras para estudiar el número de artículos fallados que produce una máquina, para ello se toman dos muestras A y B de tamaños distintos. En la siguiente tabla se muestra el tamaño relativo de cada muestra y el % de artículos fallados en cada muestra:

	Muestra A	Muestra B
Tamaño	60 %	40 %
% artículos fallados	10 %	20 %

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Más del 50% de los artículos son de la muestra A y no tienen fallas.
II) Más del 80% no presentan fallas.
III) Hay más artículos fallados en la muestra B que en la muestra A.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

20. Para el control de calidad en la vida útil de un cierto artículo, se toman dos muestras. En las siguientes tablas se muestran los años de vida útil del artículo con p < q <r:

Muestra A		Muestra B	
Años de vida útil	Frecuencia	Años de vida útil	Frecuencia
p	2	p	3
q	5	q	4
r	3	r	3

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La media de los años de la muestra A es mayor que la media de la muestra B.
II) La mediana de los años de ambas muestras es la misma.
III) La moda de los años de ambas muestras es la misma.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

RESPUESTAS CAPÍTULO 14									
1. C	**2.** D	**3.** D	**4.** E	**5.** E	**6.** A	**7.** D	**8.** E	**9.** D	**10.** C
11. B	**12.** D	**13.** D	**14.** E	**15.** D	**16.** E	**17.** B	**18.** E	**19.** E	**20.** E

Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
15

PROBABILIDADES

Los orígenes de la probabilidad se remontan desde el siglo XVI, cuando Gombauld, propuso a Pascal un problema de cómo repartir las apuestas entre los jugadores antes de que el juego concluya.
Actualmente, las probabilidades presentan múltiples aplicaciones en áreas tan diversas como la meteorología, la biología, la química, la astronomía, la aviación comercial, la industria farmacéutica, la medicina, la industria, la predicción de atentados terroristas, etc.

CONCEPTOS CLAVES

- Regla de Laplace
- Ley de los Grandes Números
- Probabilidad de unión de eventos
- Probabilidad de intersección de eventos
- Probabilidad Condicional
- Eventos independientes

Prohibida su reproducción total o parcial.

REGLA DE LAPLACE

La regla de Laplace, nos permite calcular la probabilidad de un evento como el cuociente entre los casos favorables y los casos totales. La restricción a esta regla es que los casos son equiprobables, es decir todos los elementos del espacio muestral tienen la misma probabilidad.

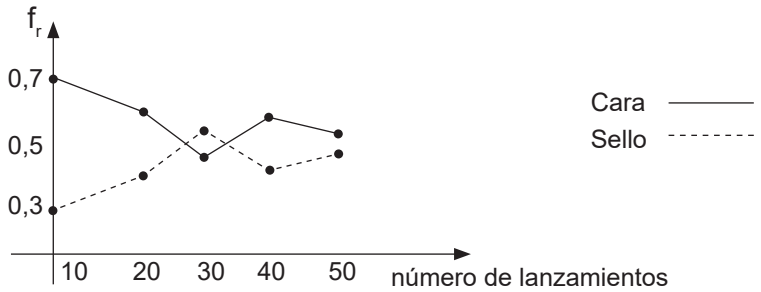
$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

Observación: si se lanza una moneda dos veces y afirmamos que los elementos del espacio muestral son cara-cara, sello-sello y cara-sello, por lo tanto la probabilidad de cara-sello es $\frac{1}{3}$, es un error debido a que los elementos del espacio muestral no son equiprobables. En este caso debes considerar como espacio muestral {cara-cara, sello-sello, cara-sello, sello-cara}, por lo tanto la probabilidad de cara-sello es $\frac{2}{4}$ o un 50%.

Prohibida su reproducción total o parcial.

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

La ley de los Grandes Números señala que si un experimento se repite muchísimas veces, la frecuencia relativa de la ocurrencia del suceso se irá acercando a un valor constante, ese valor constante es la probabilidad del suceso.
En la gráfica se observan, como a medida que aumentamos el número de lanzamientos de una moneda, la frecuencia relativa del número de caras y el número de sellos se acerca 0,5, lo que corresponde a la probabilidad del evento.



Ejemplo:
Supongamos que lanzamos una pareja de dados y sumamos los puntajes de ambos dados, obtenemos el siguiente espacio muestral:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La probabilidad de que los dados sumen 5 son 4 casos de 36:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	(5)	6	7
2	3	4	(5)	6	7	8
3	4	(5)	6	7	8	9
4	(5)	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Por la Ley de Laplace, tenemos que la probabilidad es $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, por otra parte, por la Ley de Los Grandes Números, si repetimos este experimento muchísimas veces, la frecuencia relativa se irá acercando a este valor. Por ejemplo si lanzamos 3.600 veces esta pareja de dados, tendremos que aproximadamente 400 veces la suma será 5, pero no podemos asegurar que exactamente sea esa cantidad de veces.

Prohibida su reproducción total o parcial.

PROBABILIDAD DE UNIÓN E INTERSECCIÓN DE EVENTOS

Sean A y B dos eventos, para calcular la probabilidad de $A \cup B$, esto es, que ocurra uno o el otro, ocupamos la siguiente propiedad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Donde $A \cap B$ se refiere a que ocurran ambos eventos (intersección de los eventos).

Ejemplo:
En una fábrica hay dos turnos, el diurno y el nocturno, la distribución por sexo se muestra en la siguiente tabla:

	hombres	mujeres
diurno	32	18
nocturno	22	8

Si se elige un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje en el turno nocturno o sea de sexo femenino?

Solución:

La probabilidad pedida corresponde a la unión de eventos, por lo tanto tenemos que ocupar la propiedad: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Tenemos que, en el turno nocturno, trabajan $22 + 8 = 30$ personas y el total de empleados es $32 + 18 + 22 + 8 = 80$, luego $P(\text{nocturno}) = \frac{30}{80}$. Por otro lado, la probabilidad de elegir a alguien del sexo femenino es $\frac{26}{80}$, además la probabilidad de que ocurran ambos eventos, es decir que sea del turno nocturno y sea del sexo femenino es $\frac{8}{80}$.

Entonces, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{80} + \frac{26}{80} - \frac{8}{80} = \frac{48}{80} = \frac{3}{5}$.

Observación: al calcular la probabilidad de que trabaje en el turno nocturno dijimos que eran 30 personas de un total de 80, al calcular la probabilidad de que sea de sexo femenino es 26 de 80, si sumamos ambas cantidades, obtenemos 56 de 80, pero estaríamos considerando las personas de sexo femenino que trabajan en el turno nocturno en ambas cantidades, por esto debemos restar 8 de 80, por lo tanto $P(A \cup B) = \frac{30}{80} + \frac{26}{80} - \frac{8}{80}$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

La probabilidad de $A \cap B$ se puede calcular multiplicando las probabilidades de A y B, solo en el caso en que los eventos sean independientes, esto es que la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, solo si A y B son independientes.

Por ejemplo si lanzamos un dado y una moneda, la probabilidad de que en el dado salga un 4 y en la moneda salga un sello, se calcula multiplicando la probabilidad de ambos eventos, ya que la ocurrencia de uno no afecta al otro, entonces, $P(4 \text{ y } S) = P(4) \cdot P(S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Si lanzamos un dado y una moneda, la probabilidad de que en el dado salga un 4 o en la moneda salga el sello, debemos calcularlo utilizando la propiedad: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

En este caso $P(4) = \frac{1}{6}$, $P(S) = \frac{1}{2}$ y por lo visto anteriormente $P(4 \text{ y } S) = P(4) \cdot P(S) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$,

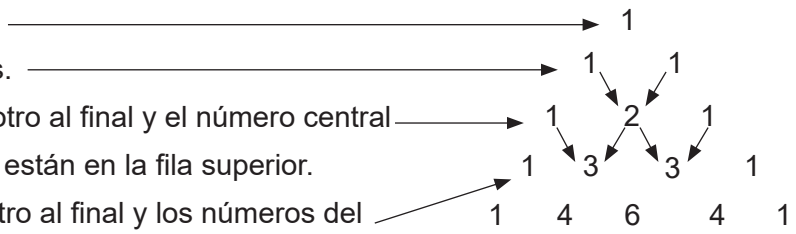
luego $P(4 \text{ o } S) = P(4) + P(S) - P(4 \text{ y } S) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

TRIÁNGULO DE PASCAL

El triángulo de Pascal es una configuración numérica, donde en cada fila se empieza y se termina con un uno y los términos del medio se obtienen al sumar los dos términos cercanos que están en la fila superior.

- Primera fila, ponemos un uno.
- Segunda fila, ponemos dos unos.
- Tercera fila, un uno al principio, otro al final y el número central es la suma de los dos unos que están en la fila superior.
- Cuarta fila, un uno al principio, otro al final y los números del medio se obtienen sumando los números cercanos de la fila superior, etc.



Veamos ahora, como se aplica al cálculo de probabilidades.
Supongamos que lanzamos 4 monedas, entonces nos dirigimos a la quinta fila, o bien nos podemos guiar buscando aquella fila cuyo segundo número es un 4:

	1	4	6	4	1
Ponemos entonces	C^4	C^3S	C^2S^2	CS^3	S^4

Observa que los exponentes de C van bajando mientras los de S van subiendo, pero si sumas ambos siempre se obtiene 4.
Entonces $4C^3S$, hace alusión que hay cuatro casos en que hay tres caras y un sello, $6C^2S^2$, nos indica que hay seis casos en que hay dos caras y dos sellos, $4CS^3$, indica que hay cuatro casos que hay una cara y tres sellos, etc. El total de casos se obtiene sumando todos los coeficientes: $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$.
De lo anterior, tenemos entonces que si lanzamos 4 monedas la probabilidad de que salgan dos caras y dos sellos, son 6 casos de un total de 16, es decir la probabilidad es $\frac{6}{16}$ o bien $\frac{3}{8}$.

Para calcular la probabilidad de obtener a lo más dos caras, tendríamos 11 casos favorables:

1	4	6	4	1
C^4	C^3S	C^2S^2	CS^3	S^4

Luego la probabilidad es $\frac{11}{16}$.

El triángulo de Pascal lo podemos ocupar siempre que tengamos solo dos casos posibles, como cara-sello, encendido-apagado, varón-hembra, verdadero-falso, etc. Además el método visto en esta sección, es válido cuando ambos eventos son equiprobables.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En una caja se tienen 9 bolitas de igual peso y tamaño numeradas del 1 al 9, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bolita par o divisor de 6?

Los números pares presentes en estas bolitas son 2, 4, 6, 8, luego la probabilidad de sacar una bolita par es $\frac{4}{9}$, los números divisores de 6 son 1, 2, 3, 6, por lo tanto la probabilidad de elegir un número divisor de 6 es $\frac{4}{9}$.

Como la probabilidad pedida es una unión de eventos, ocupamos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, en este caso $P(A) = \frac{4}{9}$, $P(B) = \frac{4}{9}$ y $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$, ya que hay dos elementos en común.

Luego, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

2. Se lanzan dos dados comunes y se suman los números obtenidos, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera?

Solución:

A) La probabilidad de que la suma sea 4 es igual a la probabilidad de que la suma sea 10.

B) La probabilidad de que la suma sea a lo más 5 es $\frac{5}{18}$.

C) La suma más probable es 7.

D) La probabilidad de que la suma sea par e impar es la misma.

E) La probabilidad de que la suma sea par o múltiplo de 3 es $\frac{5}{6}$.

Solución:

Para mayor orden y visualización ocuparemos en la resolución de este ejercicio la siguiente tabla de doble entrada:

A) En la figura se muestra que hay 3 casos en que la suma es 4 y 3 casos en que la suma es 10, por lo tanto A es verdadera:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	(4)	5	6	7
2	3	(4)	5	6	7	8
3	(4)	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	(10)
5	6	7	8	9	(10)	11
6	7	8	9	(10)	11	12

Prohibida su reproducción total o parcial.

B) En la figura se muestran los 10 casos en que la suma es a lo más 5, por lo tanto la probabilidad es $\frac{10}{36}$ o $\frac{5}{18}$, luego la afirmación es verdadera.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

C) En el diagrama se observa que la suma más probable es 7, ya que es la suma que presenta más casos:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

D) Hay tantos casos, en que la suma sea para como los que la suma es impar, luego la afirmación es verdadera.

	1	2	3	4	5	6
1	②	3	④	5	⑥	7
2	3	④	5	⑥	7	⑧
3	④	5	⑥	7	⑧	9
4	5	⑥	7	⑧	9	⑩
5	⑥	7	⑧	9	⑩	11
6	7	⑧	9	⑩	11	⑫

○

18 pares
18 impares

E) Ya vimos que hay 18 casos en que la suma es par, de que la suma sea múltiplo de 3 son los casos 3, 6, 9 y 12 y estos son 12 casos:

	1	2	3	4	5	6
1	2	③	4	5	⑥	7
2	③	4	5	⑥	7	8
3	4	5	⑥	7	8	⑨
4	5	⑥	7	8	⑨	10
5	⑥	7	8	⑨	10	11
6	7	8	⑨	10	11	⑫

Pero los casos en que se cumple que la suma es par y múltiplo de 3, son aquellos en que la suma es 6 o 12, estos son 6, luego $P(A \cap B) = \frac{6}{36}$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, luego la afirmación es falsa.

Prohibida su reproducción total o parcial.

3. Una librería ha comprado una partida de lápices rojos y azules de las marcas A y B.
Se sabe que el total de lápices es 90, de los cuales 40 son de la marca B y hay un total de 10 rojos de los cuales 4 son de la marca B. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

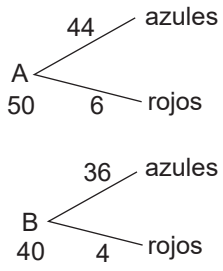
I) Si se elige un lápiz al azar, es mayor la probabilidad de obtener un lápiz rojo en la marca A que en la marca B.

II) Si se elige un lápiz al azar, la probabilidad de elegir uno azul de la marca B es mayor al 50%.

III) Si se elige al azar un lápiz dentro de los azules, la probabilidad de que sea de A es $\frac{11}{20}$.

Solución:

La información dada en el enunciado se puede ordenar en un diagrama de árbol como se muestra a continuación:



I) La probabilidad de obtener rojo de la marca A es $\frac{6}{50}$ = 0,12, mientras que en la marca B es $\frac{4}{40}$ = 0,1, luego la afirmación es verdadera.

II) La probabilidad de elegir un lápiz azul de la marca B es $\frac{36}{90}$ lo que es menor a al 50%, por lo tanto II es falsa.

III) Los lápices azules son 44 + 36 = 80, y de estos los que son de A son 44, luego la probabilidad es $\frac{44}{80}$ o bien $\frac{11}{20}$, luego la afirmación es verdadera.

Conclusión, I y III son verdaderas.

Prohibida su reproducción total o parcial.

4. Se lanza una moneda 5 veces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera?

A) La probabilidad de sacar menos de 2 caras es $\frac{3}{16}$.

B) La probabilidad de sacar más de 2 caras es $\frac{1}{2}$.

C) La probabilidad de sacar a lo más 3 sellos es $\frac{13}{16}$.

D) Es igual de probable sacar a lo más 1 sello que a lo sumo 2 caras.

E) La probabilidad más alta es cuando se obtienen 3 sellos o 3 caras.

Solución:
Para resolver este ejercicio podríamos ocupar el triángulo de Pascal de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & & 10 & 5 & 1 \\ c^5 & c^4s & c^3s^2 & & c^2s^3 & cs^4 & s^5 \end{array}$$

A) Tal como se indica en la figura, que salgan menos de 2 caras son 6 casos de un total de 32, $\frac{6}{32} = \frac{3}{16}$, luego es verdadera.

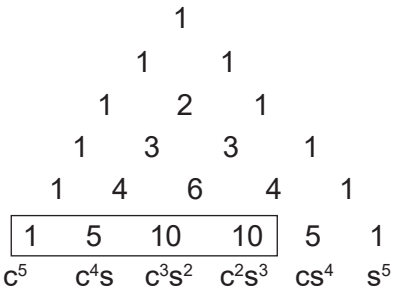
$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & & 10 & \boxed{5} & \boxed{1} \\ c^5 & c^4s & c^3s^2 & & c^2s^3 & cs^4 & s^5 \end{array}$$

B) Que salgan más de 2 caras son 16 casos de 32 (ver fig.), luego la probabilidad es $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$, la afirmación es verdadera.

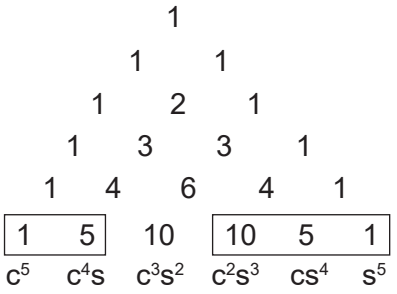
$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\ \boxed{1} & \boxed{5} & \boxed{10} & & 10 & 5 & 1 \\ c^5 & c^4s & c^3s^2 & & c^2s^3 & cs^4 & s^5 \end{array}$$

Prohibida su reproducción total o parcial.

C) Que salgan a lo más 3 sellos, son 26 casos de 32 (ver fig.), como $\frac{26}{32} = \frac{13}{16}$, la afirmación es verdadera.

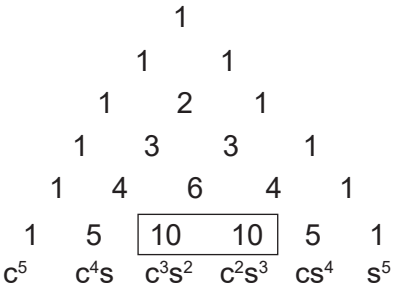


D) Sacar a lo más 1 sello son 6 casos y a lo sumo 2 caras son 16:



Luego las probabilidades no son iguales, la afirmación es falsa.

E) Las probabilidades más altas son efectivamente para 3 sellos o 3 caras, ya que tienen 10 casos cada una, luego la afirmación es verdadera.



5. Se tienen tres cajas: A, B y C. En A hay tres bolitas blancas y dos negras, en B hay 2 blancas y tres negras y en C hay 4 blancas y 2 negras. Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de sacar 2 bolitas blancas y una negra?

Solución:

En esta situación los casos favorables son bbn, bnb, nbb, calcularemos cada una de estas probabilidades y luego las sumamos.

Caso bbn, la probabilidad de blanca en A es $\frac{3}{5}$, blanca en B es $\frac{2}{5}$ y negra en C es $\frac{2}{6}$, entonces $P(bbn) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{25}$, análogamente obtenemos que $P(bnb) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{6}{25}$ y $P(nbb) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{75}$, sumando las tres probabilidades, obtenemos: $\frac{2}{25} + \frac{6}{25} + \frac{8}{75} = \frac{32}{75}$, que es la probabilidad pedida.

Prohibida su reproducción total o parcial.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

La probabilidad de que ocurra el evento A sabiendo que ocurrió el evento B, se anota P(A/B) y se calcula mediante el siguiente cuociente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (\text{con } P(B) \neq 0)$$

De esta definición, podemos deducir que $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$, expresión que nos permite calcular la probabilidad de una intersección cuando los eventos son dependientes, es decir la ocurrencia de uno afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.
Por ejemplo, si un vendedor vende agua mineral en los buses, la probabilidad de que venda más su producto aumentará en un día soleado, por lo tanto ambos eventos son dependientes.

Ejemplo:
Se ha hecho una encuesta a los 132 estudiantes de cuarto medio, acerca si participarán en las olimpiadas interescolares. El resultado obtenido muestra que 25 hombres participarán y 27 mujeres de las 72 no participarán.
Si ordenamos la información dada en una tabla de doble entrada, obtendremos lo siguiente:

	Participa	No participa	Total
Hombres	**25**	35	60
Mujeres	45	**27**	**72**
Total	70	62	**132**

Podemos ahora calcular las siguientes probabilidades condicionales:

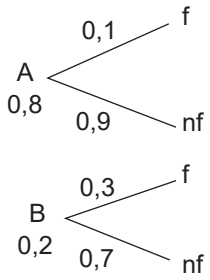
- La probabilidad de que participará dado que es hombre es $\frac{25}{60}$.
- La probabilidad de que sea mujer dado que no participará $\frac{27}{62}$.
- La probabilidad de que sea hombre dado que participará $\frac{25}{70}$, etc.

Veamos ahora como calcular la probabilidad de una intersección en el caso de eventos dependientes.

Prohibida su reproducción total o parcial.

Ejemplo:
Supongamos que una máquina produce dos artículos A y B, donde el 80% de la producción es de A, además se sabe que el 10% de los artículos de A resultan fallados y el 70% de los artículos de B no tienen fallas.

La información anterior se puede ordenar en un diagrama de árbol, para una mejor comprensión:



Observa que 0,1 es la probabilidad de que un artículo fallado sabiendo que es del tipo A, esto corresponde a la probabilidad condicional, es decir $P(f/A) = 0,1$. Además $P(f/B) = 0,3$, $P(nf/A) = 0,9$ y $P(nf/B) = 0.7$.

Si quisiéramos calcular la probabilidad de que un artículo sea fallado y sea del tipo A, esto correspondería a la probabilidad de una intersección, entonces ocupamos que $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$, en este caso $P(f \cap A) = P(f/A) \cdot P(A) = 0,1 \cdot 0,8 = 0,08$.

Analogamente la probabilidad de que el artículo sea fallado y del modelo B, sería $P(f \cap B) = P(f/B) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06$.

La probabilidad de hallar un artículo fallado sería entonces 0,06 + 0,08 = 0,14, es decir un 14%. Puedes hacer el mismo cálculo para la probabilidad de que un artículo no esté fallado y evidentemente se debería obtener (100 − 14)%.

- **Eventos independientes**

  Si A y B son eventos independientes implica que la ocurrencia de A no afecta la ocurrencia de B, es decir $P(A/B) = P(A)$, pero $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, entonces si A y B son independientes, se tiene que $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$, si multiplicamos esta igualdad por P(B), obtenemos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

  Tenemos entonces la siguiente propiedad, si A y B son eventos independientes, entonces

  $$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

  De lo anterior podemos justificar entonces que si lanzamos una moneda tres veces, la probabilidad de que salga una cara y dos sellos (en ese orden) es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, ya que el resultado de cada lanzamiento es independiente de lo que ocurrió en el anterior.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS RESUELTOS

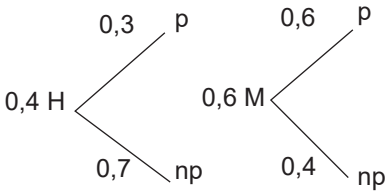
1. En un gimnasio se ha hecho un estudio y se ha determinado que la probabilidad de que un socio sufra un desgarro muscular dado que no hizo precalentamiento previo es 0,8 y la probabilidad de que un individuo no haga precalentamiento es de un 10%, ¿cuál es la probabilidad de que una persona sufra un desgarro y no haya hecho precalentamiento?

Solución:

Si definimos D como el evento de que el sujeto sufra un desgarro y NP como el evento de que no haya hecho precalentamiento, entonces según el enunciado, tenemos $P(D/NP) = 0,8$ y $P(NP) = 0,1$, como $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$, tenemos que la probabilidad pedida es $P(D/NP) \cdot P(NP) = 0,8 \cdot 0,1 = 0,08$, es decir un 8%.

2. Para un estudia acerca de la obesidad de una población se ha consultado a una cierta cantidad de personas si habitualmente practican deportes.
De los encuestados resultó que el 40% son hombres, de los cuales 30% practica deportes y de las mujeres el 40% declaró no practicarlo.
Si de los encuestados se elige una persona que declaró que no practica deportes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:
Para una mejor claridad ordenaremos la información dada en un esquema de árbol:



Calculemos primero la probabilidad de elegir un encuestado que no practique deportes, como ya vimos en el ejemplo anterior, la probabilidad de que no practique deportes y sea del sexo masculino se determina con $P(np/H) \cdot P(H)$, esto es $0,7 \cdot 0,4$, de la misma forma, la probabilidad de que sea mujer y no practique deportes es $P(np/M) \cdot P(M)$ es $0,4 \cdot 0,6$, por lo que la probabilidad de que un sujeto de los encuestados no practique deportes es $0,7 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6$.
Por otro lado, la probabilidad pedida es la probabilidad condicional $P(M/NP)$, por definición de la probabilidad condicional, tenemos que $P(M/NP) = \frac{P(M \cap NP)}{P(NP)}$, pero $P(M \cap NP) = 0,4 \cdot 0,6$, por otro lado en el cálculo anterior obtuvimos que $P(NP) = 0,7 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6$, por lo tanto la probabilidad pedida es

$\frac{0,4 \cdot 0,6}{0,7 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,6}$, o bien $\frac{0,24}{0,52} = \frac{24}{52} = \frac{6}{13}$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. ¿Cuál de los siguientes eventos es más probable al lanzar un dado?

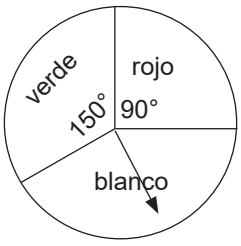
A) Que salga un número impar.
B) Que salga un múltiplo de seis.
C) Que salga un número divisor de seis.
D) Que salga un número primo.
E) Que salga un número menor que cuatro.

2. Al lanzar un dado, la probabilidad que el resultado sea par o primo es:

A) 1
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{3}{5}$
E) $\frac{5}{6}$

3. Según la ruleta de la figura, ¿cuál es la probabilidad de que **no** salga el color blanco en dos lanzamientos seguidos?

A) $\frac{1}{9}$
B) $\frac{4}{9}$
C) $\frac{5}{9}$
D) $\frac{8}{9}$
E) $\frac{4}{6}$



4. ¿Cuál es la probabilidad de que en la ruleta del ejercicio anterior salga el color blanco ya sea en el primer o en el segundo lanzamiento?

A) $\frac{1}{9}$
B) $\frac{2}{9}$
C) $\frac{3}{9}$
D) $\frac{4}{9}$
E) $\frac{5}{9}$

5. Si se lanzan dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que el primero sea un número par y el segundo sea un múltiplo de tres?

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{5}{6}$
E) $\frac{5}{12}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

6. Dos eventos son complementarios si su intersección es vacía y la unión es igual al espacio muestral. ¿Cuál de las siguientes pares de eventos son complementarios?

A) Al lanzar un dado, “que salga un primo” y “que salga un número compuesto” .
B) Elegir “un ausente” o “un presente” al elegir un estudiante al azar de la lista del curso.
C) Al lanzar dos monedas, “que salga más de una cara” o “más de un sello”.
D) Elegir una prueba corregida al azar y esta tenga una nota “mayor que 4” o “menor que 4”.
E) Todos los anteriores.

7. La probabilidad de que un evento ocurra es p, ¿cuál es la probabilidad de que no ocurra en dos intentos seguidos?

A) $1 - p^2$
B) $(1 - p)^2$
C) $1 + p^2$
D) p^2
E) $p^2 - 1$

8. Si se lanzan tres dados, ¿cuál es la probabilidad que la suma sea menor que 18?

A) $\frac{1}{216}$
B) $\frac{1}{18}$
C) $\frac{215}{216}$
D) $\frac{17}{18}$
E) 1

9. En una caja se tienen diez bolitas numeradas del 0 al 9. Si se extraen dos con reposición, ¿cuál es la probabilidad de que las bolitas extraídas sean impares e iguales?

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{1}{10}$
C) $\frac{5}{81}$
D) $\frac{2}{9}$
E) $\frac{1}{20}$

10. En una caja hay 7 bolitas numeradas del 1 al 7, si se saca una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea impar o mayor que 4?

A) $\frac{3}{7}$
B) $\frac{4}{7}$
C) $\frac{5}{7}$
D) $\frac{6}{7}$
E) 1

11. En un juego se tira un dado y una moneda y gana aquel que obtiene una cara y un seis, ¿cuál es la probabilidad de ganar en este juego?

A) $\frac{1}{12}$
B) $\frac{2}{12}$
C) $\frac{8}{12}$
D) $\frac{1}{8}$
E) $\frac{2}{8}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

12. En una tómbola hay 15 bolitas negras y 15 rojas, cada color numeradas del 1 al 15, ¿cuál es la probabilidad de que al elegir una bolita salga el número 13 o salga de color negro?

A) $\frac{14}{30}$

B) $\frac{15}{30}$

C) $\frac{16}{30}$

D) $\frac{17}{30}$

E) $\frac{18}{30}$

13. La distribución por sexo en los dos cursos de primero medio de un colegio, se muestra en la siguiente tabla:

	hombres	mujeres
1° A	20	10
1° B	18	12

Si de estos alumnos(as) se elige un(a) alumno(a) al azar, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que sea mujer es $\frac{22}{60}$.

II) La probabilidad de que sea del 1ºA es $\frac{1}{2}$.

III) La probabilidad de que sea un estudiante varón del 1ºB es $\frac{18}{30}$.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

14. Se lanzan 4 dados, ¿cuál es la probabilidad de que tres marquen un número par y uno marque un número impar?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{1}{8}$

C) $\frac{1}{4}$

D) $\frac{3}{16}$

E) $\frac{3}{8}$

15. Se tienen dos cajas con bolitas negras y blancas. La primera tiene 3 blancas y 4 negras y la segunda dos blancas y 6 negras. Si se elige una bolita de cada caja (cada caja tiene la misma probabilidad de ser elegida), ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una de las bolitas sea negra?

A) $\frac{3}{7}$

B) $\frac{25}{28}$

C) $\frac{19}{28}$

D) $\frac{9}{28}$

E) $\frac{3}{28}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

16. En una caja hay solo bolitas de colores verdes, rojas y blancas todas del mismo tipo. Se puede determinar la probabilidad de extraer una bolita blanca o una roja sabiendo que:

(1) La probabilidad de sacar una bolita blanca es un 40%.

(2) La probabilidad de sacar una bolita verde es el doble de la probabilidad de sacar una roja.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

17. Se tienen tres cajas cada una con tres bolitas de colores: verde, rojo y amarillo.
Si se extrae una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

A) $\frac{1}{27}$

B) $\frac{1}{9}$

C) $\frac{2}{9}$

D) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{2}{3}$

18. Un portal de ventas de automóviles de internet ofrece 200 vehículos entre camionetas y autos, de los cuales hay nuevos y usados. Se sabe que, los autos nuevos son 40, el total de camionetas 98 y los vehículos usados corresponden al 55%. Si se elige un vehículo al azar, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que sea una camioneta nueva es 0,25.
II) La probabilidad de que sea una camioneta usada es 0,24.
III) La probabilidad de que sea un auto o un vehículo nuevo es 0,96.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

19. Se ha lanzado un dado dos veces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que la suma sea 8 es $\frac{5}{36}$.
II) La probabilidad de que las dos veces salga el mismo número es $\frac{1}{6}$.
III) La probabilidad de que el número que salga la primera vez sea a lo sumo igual al número que salga la segunda vez es $\frac{15}{36}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

20. Se lanzan dos dados y se suman los números obtenidos, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que la suma sea 5 es igual a la probabilidad de que la suma sea 9.
II) 7 es la suma con mayor probabilidad.
III) La probabilidad de que la suma sea a lo más 6 es igual a la probabilidad de que la suma sea mayor que 7.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

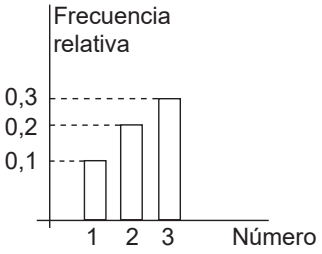
21. En una caja hay 4 bolitas blancas y 2 negras y en otra hay 4 bolitas blancas y 6 negras.
Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de sacar por lo menos una bolita blanca?

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{4}{5}$
D) $\frac{4}{15}$
E) $\frac{11}{15}$

22. En una caja hay bolitas marcadas con los números marcados del 1 al 4. En el siguiente gráfico se muestra la frecuencia relativa de algunos de estos números.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de sacar una bolita marcada con el 1 o el 4 es igual a la probabilidad de sacar una bolita marcada con el 2 o el 3.
II) La probabilidad de sacar un impar tiene la misma probabilidad que sacar un 4.
III) La probabilidad de sacar a lo más un 2 es igual a la probabilidad de sacar un 3.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III



23. En una cartera, la señora Eugenia tiene 3 monedas, una de \$50, una de \$100 y una de \$500. Si saca dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que saque más de \$150?

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{2}{3}$
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$
E) $\frac{3}{4}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

24. En una caja hay 3 bolitas blancas y 2 rojas, en otra caja hay 2 blancas y 4 rojas. Si se saca una bolita de cada caja, ¿cuál es probabilidad de que sean del mismo color?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{4}{15}$

C) $\frac{7}{15}$

D) $\frac{8}{15}$

E) $\frac{14}{15}$

25. Un dado cargado es tal que la probabilidad de que salga un número par y múltiplo de tres es 0,1, que salga un impar y divisor de seis es 0,2 y que salga un número par y divisor de 12 es 0,6, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 5?

A) 0,1

B) 0,2

C) 0,25

D) 0,3

E) 0,4

26. Sean A y B dos eventos, se puede determinar la probabilidad de que ocurra B, sabiendo:

(1) La probabilidad de que ocurra A o B.

(2) La probabilidad de que ocurra A y no B.

A) (1) por sí sola

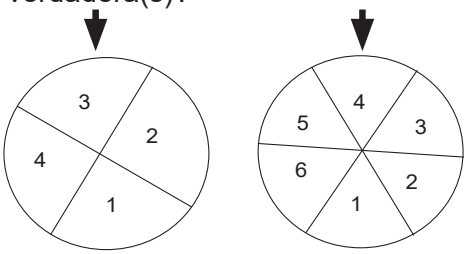
B) (2) por sí sola

C) Ambas juntas, (1) y (2)

D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)

E) Se requiere información adicional

27. Las ruletas de las figuras tienen sus sectores circulares respectivos congruentes.
Si se lanzan las dos ruletas y se suman los números obtenidos, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?



I) La probabilidad de que la suma sea 7 es $\frac{1}{6}$.

II) La probabilidad de que la suma sea mayor que 8 es $\frac{1}{8}$.

III) La probabilidad de que la suma sea menor que 5 es $\frac{1}{4}$.

A) Solo I

B) Solo II

C) Solo I y II

D) Solo II y III

E) I, II y III

28. Un jardín infantil tiene 43 bebés en sala cuna, de los cuales 23 son de sexo femenino. Si 9 de los bebés se enfermaron en el invierno pasado, de los cuales 4 eran niñitos, ¿cuál es la probabilidad de que si elige un bebé al azar este sea de sexo femenino o se enfermó en invierno?

A) $\frac{32}{43}$

B) $\frac{27}{43}$

C) $\frac{9}{43} \cdot \frac{27}{43}$

D) $\frac{1}{43}$

E) $\frac{5}{43}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

29. En una caja hay bolitas rojas, verdes y amarillas. Si se saca una bolita al azar, se sabe que la probabilidad de sacar una que no sea amarilla es $\frac{2}{3}$, la probabilidad de sacar una roja o amarilla es $\frac{4}{5}$, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bolita roja?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{7}{15}$

D) $\frac{8}{15}$

E) $\frac{3}{4}$

30. En una tómbola hay bolitas marcadas con números enteros positivos, se sabe que hay 8 bolitas amarillas y 12 rojas, de las amarillas hay 5 marcadas con números impares y de las rojas hay 4 marcadas con números pares. Si se elige una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea amarilla o par?

A) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{1}{5}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{3}{20}$

E) $\frac{3}{5}$

31. Un plantel de fútbol está formado por 3 arqueros, 6 defensas, 8 mediocampistas y 4 delanteros. Si se eligen dos jugadores al azar, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que los dos sean delanteros es $\frac{1}{35}$.

II) La probabilidad de que uno sea delantero y el otro arquero es $\frac{1}{35}$.

III) La probabilidad de que ninguno sea defensa es $\frac{1}{2}$.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y IIII

32. Se lanza una moneda 4 veces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones **NO** es verdadera?

A) La probabilidad de que salgan a lo menos 2 caras es $\frac{11}{16}$.

B) La probabilidad de que salgan a lo más 3 sellos es $\frac{15}{16}$.

C) La probabilidad de que salgan tantas caras como sellos es $\frac{3}{8}$.

D) La probabilidad de que salga solo 1 sello es menor a la probabilidad de que salgan por lo menos 3 sellos.

E) La probabilidad de que salgan menos de 2 sellos es igual a la probabilidad de que salgan a lo más 2 caras.

Prohibida su reproducción total o parcial.

33. Una moneda está cargada de tal forma que es cuatro veces más probable que se obtenga una cara que un sello. Si la moneda se lanza dos veces, ¿cuál es la probabilidad de **NO** obtener dos caras?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{7}{16}$

C) $\frac{1}{25}$

D) $\frac{8}{25}$

E) $\frac{9}{25}$

34. En un comedor hay 4 ampolletas, las cuales pueden estar encendidas o apagadas independientemente unas de otras y para cada ampolleta la probabilidad de estar prendida es igual a la probabilidad de estar apagada. Si un niño juega con las 4 luces prendiéndolas y apagándolas, ¿cuál es la probabilidad de que queden dos encendidas y dos apagadas?

A) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{1}{4}$

C) $\frac{3}{8}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{1}{2}$

35. Se lanzan dos dados y una moneda, ¿cuál es probabilidad de que en la moneda salga sello y que los dados sumen 6?

A) $\frac{1}{18}$

B) $\frac{1}{24}$

C) $\frac{7}{12}$

D) $\frac{5}{72}$

E) $\frac{32}{36}$

36. Los alumnos de un cierto colegio deben optar por la asignatura de Artes o Música, pudiendo elegir una de ellas, ambas o ninguna. Si se elige un alumno al azar, se puede determinar la probabilidad de que elija Música y no Arte, sabiendo:

(1) La probabilidad de que elija Arte o Música es 0,8.
(2) La probabilidad de que elija Arte y no Música 0,5

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

37. Una moneda está cargada de modo que la probabilidad de que salga cara es 0,6, si se lanza dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que salga una cara y un sello?

A) 0,24
B) 0,25
C) 0,48
D) 0,5
E) 0,52

Prohibida su reproducción total o parcial.

38. Se toma una muestra a las máquinas A y B para estudiar su efectividad en la producción de ciertos artículos. Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

Máquina	No fallados	fallados
A	114	6
B	142	8

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Es más probable hallar un artículo fallado en la muestra de B que en la muestra de A.

II) Si se elige un artículo al azar la probabilidad de que esté fallado y que haya sido producido por A es $\frac{1}{20}$.

III) Si se elige un artículo al azar la probabilidad de que esté fallado o sea producido por B es $\frac{156}{270}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

39. La probabilidad de que salga cara en una moneda cargada es el triple de que caiga en sello. Si se lanza la moneda 800 veces, por la Ley de los Grandes Números, la cantidad de caras que deberían salir es cercano a:

A) 200
B) 250
C) 300
D) 400
E) 600

40. Se toma un test de 4 preguntas de verdadero o falso a 1.600 personas y cada una de ellas las contesta al azar. La Ley de los Grandes Números permite afirmar que:

A) en un grupo de 400 personas, hay 100 que tienen 3 buenas.
B) en un grupo de 500 personas hay aproximadamente 100 obtienen 2 preguntas buenas.
C) aproximadamente, el 20% de las personas obtuvo 4 preguntas buenas.
D) aproximadamente, el 25% obtuvo una pregunta buena.
E) aproximadamente, un 40% obtuvo más de 2 preguntas buenas.

41. Se lanzan 12.000 veces dos dados no cargados, entonces según la Ley de los Grandes Números, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) 1000 veces la suma saldrá un 4.
B) aproximadamente, 6.000 veces la suma será a lo sumo igual a 6.
C) aproximadamente, 2.000 veces la suma será a lo menos 10.
D) por cada 1200 veces, 200 veces la suma será un 7.
E) por cada 1100 veces aproximadamente, en 1000 la suma será 8.

Prohibida su reproducción total o parcial.

42. Según la Ley de los Grandes Números, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si se lanzan tres monedas 8000 veces en 1000 de ellas saldrá solo una cara.

II) Si se lanzan dos monedas 18000 veces, en la mitad de las veces saldrá solo una cara.

III) Si se lanzan 4 monedas 16.000 veces, en un 25% de las veces saldrán solo 3 caras.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) Solo II y III
E) Ninguna de ellas.

43. En la tabla adjunta se muestra la distribución por color de las bolitas que se encuentran en una caja. Si los colores que aparecen en la tabla son los únicos que tienen las bolitas, las bolitas son de igual tamaño y tienen un solo color, ¿cuál es la probabilidad de elegir una bolita que sea roja o blanca?

color	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
rojo			0,2
verde	3		0,15
azul		12	
blanco			

A) 0,2
B) 0,24
C) 0,25
D) 0,3
E) 0,6

44. Un curso está formado por 18 hombres y 12 mujeres. Si se elige un estudiante al azar, la probabilidad de que haya asistido al paseo de fin de año es $\frac{5}{6}$ y la probabilidad de que sea una mujer que no asistió al paseo es $\frac{1}{10}$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Si se elige un estudiante de los que asistieron al paseo, la probabilidad de que sea de sexo masculino es $\frac{16}{25}$.

II) Si se elige al azar uno de los estudiantes dentro de los que no fue al paseo, la probabilidad de que sea de sexo femenino es $\frac{3}{5}$.

III) Si se elige un estudiante al azar, la probabilidad de que sea hombre y no haya asistido al paseo es $\frac{1}{15}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

45. En una pequeña empresa hay 20 funcionarios que se dividen en administrativos y vendedores. Se sabe que hay 6 mujeres de las cuales hay 2 administrativos y el total de vendedores es 12.
Si se elige una persona al azar de esta empresa, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera?

I) La probabilidad de que sea una mujer vendedora es 0,2.
II) La probabilidad de que sea un administrativo de cualquier sexo o de sexo femenino es 0,7.
III) La probabilidad de elegir un administrativo de cualquier sexo es 0,4.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

46. En una caja hay solo bolitas de colores verdes, rojas y blancas todas del mismo tipo. Se puede determinar la probabilidad de extraer una bolita blanca, sabiendo:

(1) La probabilidad de sacar una bolita verde o blanca es 0,65.
(2) La probabilidad de sacar una bolita roja o blanca es 0,55.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

47. Se lanza una moneda no cargada 5 veces, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de obtener más de tres sellos es igual a la probabilidad de obtener menos de 2 sellos.
II) La probabilidad de obtener más de 4 caras es igual a la probabilidad de obtener más de 4 sellos.
III) La probabilidad de obtener a lo sumo 3 caras es igual a la probabilidad de obtener menos de 3 sellos.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

48. En una oficina trabajan 8 hombres y 6 mujeres. Si se va a elegir una comisión formada por tres integrantes, ¿cuál es la probabilidad de que esté integrada por 2 hombres y una mujer?

A) $\frac{2}{13}$
B) $\frac{6}{13}$
C) $\frac{8}{13}$
D) $\frac{6}{49}$
E) $\frac{144}{243}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

49. En una caja hay solo bolitas negras y blancas todas del mismo tipo, numeradas con números enteros. Se puede determinar la probabilidad de extraer una bolita par y negra, sabiendo:

(1) La probabilidad de sacar una bolita blanca es $\frac{5}{9}$.

(2) La probabilidad de sacar una negra e impar es $\frac{1}{3}$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

50. En un curso de primer año de universidad se elige un estudiante al azar, la probabilidad de que sea mujer o haya aprobado el curso es 0,8, la probabilidad de que sea se sexo femenino es 0,5. Si la probabilidad de que sea mujer y haya aprobado el curso es 0,1, ¿cuál es la probabilidad de elegir a alguien que haya aprobado el curso?

A) 0,1
B) 0,2
C) 0,3
D) 0,4
E) 0,5

51. En una cierta ciudad la probabilidad de que un vehículo presente problemas de frenado dado que es un día lluvioso es 0,6. La probabilidad de que llueva en esa ciudad es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad de que esté lloviendo y presente fallas en los frenos?

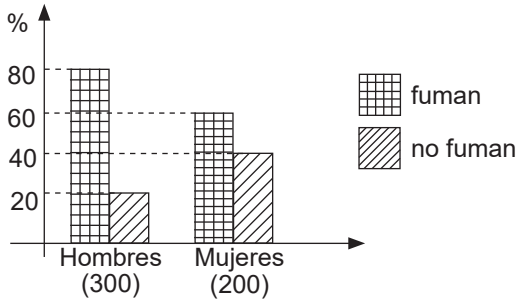
A) 0,08
B) 0,12
C) $0,\overline{3}$
D) 0,5
E) 0,6

52. La probabilidad de que el sistema de calefacción de un bus se dañe dado que es un día en que la temperatura supere los 35° es 0,1. Si la probabilidad de que el sistema de calefacción se dañe y que la temperatura supere los 35° es 0,02, ¿cuál es la probabilidad de que la temperatura supere los 35°?

A) 0,002
B) 0,02
C) 0,2
D) 0,5
E) 0,05

Prohibida su reproducción total o parcial.

53. Para un estudio acerca de la saludad de una población, se encuesta a 500 personas para saber si fuman o no, el resultado se muestra en el siguiente gráfico:



Si se elige un encuestado al azar, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que sea mujer dado que es fumador es $\frac{1}{3}$.

II) La probabilidad de que sea hombre dado que es no fumador es $\frac{3}{7}$.

III) Si se elige un hombre, la probabilidad de que este sea fumador es $\frac{4}{5}$.

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

54. En un club deportivo, la probabilidad de elegir una mujer sabiendo que practican tenis es 0,3 y la probabilidad de elegir una persona que practique tenis dado que es del sexo femenino es 0,6. Si la probabilidad de elegir una mujer dentro de los socios del club es 0,1, ¿cuál es la probabilidad de que elegir al azar uno de los socios de este club, este practique tenis?

A) 0,1
B) 0,2
C) 0,3
D) 0,018
E) 0,02

55. A y B son eventos tales que $P(A \cup B) = 0{,}65$; $P(A) = 0{,}3$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $P(B) = \frac{9}{20}$

II) $P(A/B) = \frac{2}{9}$

III) $P(B/A) = \frac{1}{3}$

A) Solo I
B) Solo III
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

Prohibida su reproducción total o parcial.

56. En un curso de 30 alumnos de cuarto medio, la probabilidad de elegir un estudiante de sexo masculino es un 60%, además se sabe que hay 14 varones que pagaron el polerón de generación. Si la probabilidad de elegir un hombre dentro de los que no han pagado el polerón es $\frac{2}{3}$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de elegir un estudiante de este curso que sea mujer y haya pagado el polerón es $\frac{1}{3}$.

II) La probabilidad de que al elegir un estudiante, este sea hombre sabiendo que pagó el polerón es superior al 50%.

III) Si se elige un estudiante al azar, la probabilidad de que sea hombre o no pagó el polerón es $\frac{2}{3}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

57. En una caja hay dados blancos y rojos, y se sabe que la probabilidad de elegir un dado blanco es 0,6. Tanto los dados blancos como rojos están cargados, de modo que en los dados blancos la probabilidad de que salga un número par es 0,7 y en los rojos la probabilidad de que salga impar es 0,6. Si se elige uno de los dados al azar y se lanza, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que salga par es un 58%.

II) Es más probable de que sea blanco y marque impar que sea rojo y marque par.

III) Si se sabe que sale impar, la probabilidad de que sea rojo es $\frac{4}{7}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

58. Sean A y B dos eventos independientes, cuyas probabilidades no son nulas.
Se puede determinar P(A/B) sabiendo que:

(1) La probabilidad de que ocurra A y B es 0,16.

(2) La probabilidad de que ocurra A es 0,2.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

59. Se tienen dos cajas A y B y en cada una de ellas hay bolitas numeradas con números enteros. Se sabe que la probabilidad de elegir la caja A es 0,4, la probabilidad de elegir una bolita par en la caja A es 0,6 y la probabilidad de sacar una bolita impar en la caja B es 0,7. Si se saca una bolita de cada caja y se suman los valores obtenidos, ¿cuál es la probabilidad de que esta suma sea un número par?

A) $0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,3$
B) $0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,7$
C) $0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,7$
D) $0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6$
E) $0,6 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,6$

60. A y B son dos eventos cuyas probabilidades no son nulas.
¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) Si A = B, entonces P(A/B) = P(B/A).
II) Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces P(A/B) = P(B/A).
III) Si P(A/B) = P(B/A), entonces P(A) = P(B).

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

61. En un curso de introducción al cálculo de una universidad, cierta cantidad de estudiantes se eximieron del examen final. Si se elige al azar un estudiante, se puede determinar la probabilidad de que este se haya eximido, sabiendo que es de sexo femenino, sabiendo que:

(1) La probabilidad de sea de sexo masculino es 0,6.
(2) La probabilidad de que sea del sexo femenino y se haya eximido es 0,3.

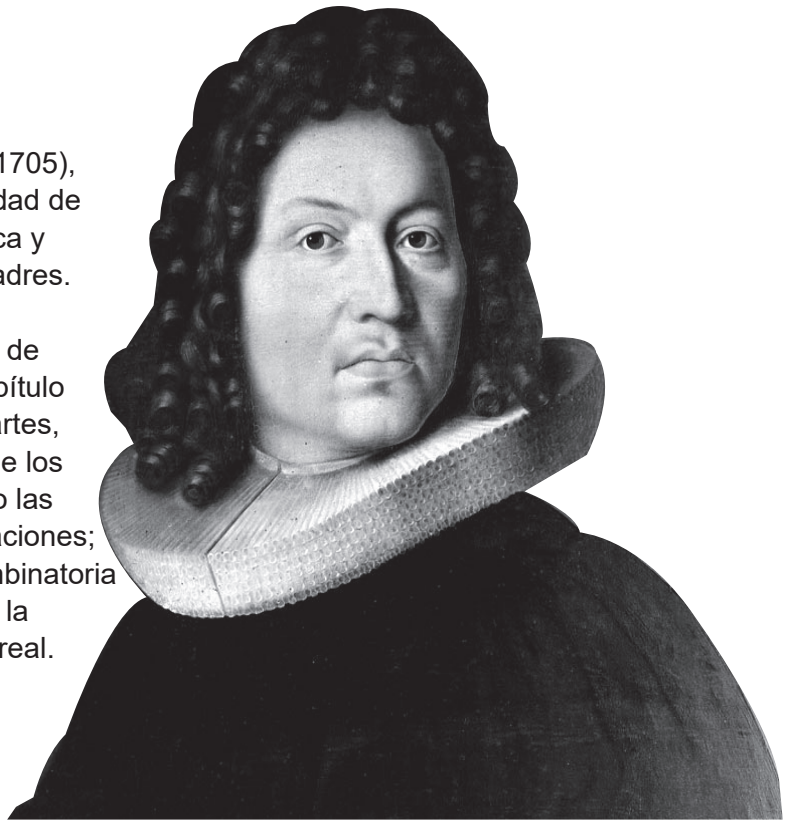
A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

RESPUESTAS CAPÍTULO 15									
1. C	**2.** E	**3.** B	**4.** E	**5.** C	**6.** B	**7.** B	**8.** C	**9.** E	**10.** C
11. A	**12.** C	**13.** C	**14.** C	**15.** B	**16.** C	**17.** C	**18.** C	**19.** C	**20.** E
21. C	**22.** E	**23.** B	**24.** C	**25.** B	**26.** C	**27.** E	**28.** B	**29.** C	**30.** E
31. D	**32.** E	**33.** E	**34.** C	**35.** D	**36.** E	**37.** C	**38.** C	**39.** E	**40.** D
41. C	**42.** E	**43.** E	**44.** E	**45.** D	**46.** C	**47.** C	**48.** B	**49.** C	**50.** D
51. B	**52.** C	**53.** E	**54.** B	**55.** E	**56.** E	**57.** E	**58.** B	**59.** E	**60.** C
61. C									

Prohibida su reproducción total o parcial.

Capítulo
16

COMBINATORIA Y PROBABILIDADES



Jacob Bernoulli, matemático suizo (1654-1705), estudió Filosofía y Biología en la Universidad de Basilea, conjuntamente estudió Matemática y Astronomía en contra del deseo de sus padres. A fines del Siglo XVII escribió la obra "Ars Conjectandi", en la cual se enuncia la Ley de los Grandes Números que vimos en el capítulo anterior. Esta obra se separa en cuatro partes, en algunas de ellas se estudian algunos de los temas que veremos en este capítulo como las permutaciones, los arreglos y las combinaciones; en la tercera parte de la obra se ve la combinatoria aplicada al cálculo de probabilidades y en la última parte se ven aplicaciones a la vida real.

CONCEPTOS CLAVES

- Principio multiplicativo y aditivo
- Combinaciones
- Permutaciones

Prohibida su reproducción total o parcial.

PRINCIPIO MULTIPLICATIVO Y ADITIVO

En este capítulo estudiaremos la Combinatoria, que es una rama de la Matemática, que se preocupa del análisis y construcción de técnicas para el conteo de casos.
Uno de las técnicas más básicas son el principio aditivo y el principio multiplicativo.

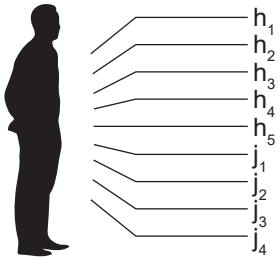
- **Principio Aditivo**

  Si un suceso ocurre de m formas distintas y otro suceso ocurre de n formas distintas, entonces hay m + n formas de que ocurra uno o el otro suceso.

  Ejemplo:

  Supongamos que tu padre te invita a una cafetería y tienes 5 opciones de helado y 4 sabores de jugo. Si debes elegir un helado o jugo, entonces tienes 5 + 4 posibilidades.
  En este caso las elecciones están en paralelo, es como si estuviésemos ante 9 caminos que están enfrente de nosotros y debemos elegir solo uno:

Principio aditivo



Se debe elegir entre 5 sabores de helado o 4 sabores de jugo.
Las elecciones se nos presentan en paralelo, como 9 opciones distintas.

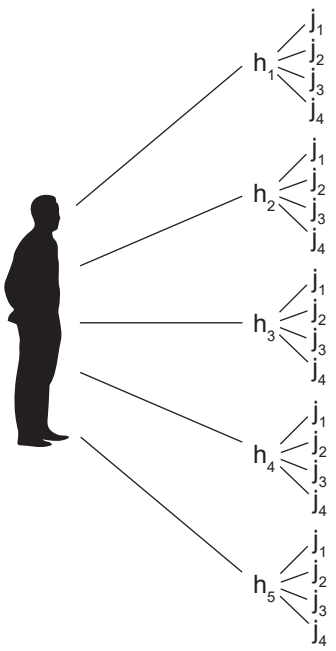
Prohibida su reproducción total o parcial.

- **Principio Multiplicativo**

  Si un suceso ocurre de m formas distintas y otro suceso ocurre de n formas distintas, entonces hay m·n formas de que ocurran ambos sucesos.

Ejemplo:

Siguiendo con el ejemplo anterior, si ahoras debes elegir un helado y un jugo, entonces tienes 5 · 4 posibilidades.
En este caso las elecciones están en serie, es como si primero tendríamos 5 caminos a elegir y por cada elección de este, tendríamos después otras 4 elecciones:

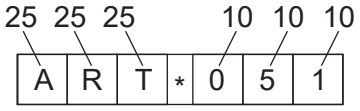


Principio multiplicativo

Se debe elegir entre 5 sabores de helado y 4 sabores de jugo.
Las elecciones se nos presentan en serie, generándose 20 opciones distintas.

Ejemplo:

Supongamos que vamos a construir patentes formadas por tres letras y tres dígitos, donde las letras son elegidas de un alfabeto de 25 letras. Por el principio multiplicativo podemos determinar que existen 25 · 25 · 25 · 10 · 10 · 10 = 15.625.000 patentes distintas.



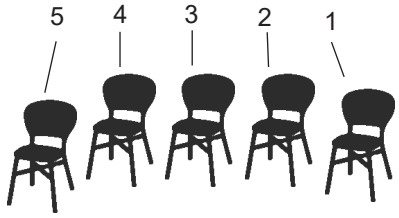
Prohibida su reproducción total o parcial.

PERMUTACIONES

Se define el factorial de un número entero positivo n como el producto entre los enteros consecutivos desde el 1 hasta n, con n ≥ 2. El símbolo utilizado para el factorial es n!, entonces $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, además se define 0! = 1 y 1! = 1.

El factorial de un número está estrechamente relacionado con la cantidad de formas que podemos ordenar una cierta cantidad de objetos distintos en una fila, lo que se denomina una permutación simple. Lo que explicaremos con el siguiente ejemplo:

Supongamos que hay 5 personas que se van a sentar en 5 asientos que están dispuestos uno al lado de otro. Entonces si las personas pasan de una a una a sentarse en los asientos, tenemos que la primera tiene 5 opciones, la segunda tiene solo 4 opciones (ya que fue ocupado uno de los asientos por la primera persona) la tercera tiene tres opciones, etc., hasta la quinta que le queda una sola opción, por el principio multiplicativo, la cantidad de formar en que se pueden sentar las 5 personas en las sillas es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, lo que corresponde a 5!. Lo anterior es equivalente a afirmar que la cantidad de formas que se pueden ordenar 5 personas en un fila es 5!, lo que corresponde a una permutación de 5 elementos.



La cantidad de formas que 5 personas se pueden sentar en 5 sillas es 5! y esto corresponde a una permutación.

- **Permutación con repetición**
  Supongamos que tenemos n objetos, donde hay algunos repetidos, entonces la cantidad de formas en que podemos ordenarlos en fila es una permutación con repetición.
  Supongamos que de los n objetos, hay n_1 de un tipo, n_2 de otro, etc., entonces la cantidad de formas que podemos ordenarlos es $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \, n_p!}$.

  Ejemplo:
  Supongamos que tenemos tres bolitas rojas dos verdes y una azul, la cantidad de formas de ordenarlas en una fila es $\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$, si desarrollamos los factoriales y simplificamos, tenemos

  $$\frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \cancel{4}^{2} \cdot 5 \cdot 6}{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 60 \text{ formas distintas.}$$

Prohibida su reproducción total o parcial.

COMBINACIONES

Llamaremos combinación cuando tenemos **n** objetos diferentes y vamos a elegir **k** de ellos, sin importar el orden y sin repetir los elementos.

La cantidad de combinaciones de k objetos de un total de n (con n ≥ k), se designa con el símbolo C_k^n o bien $C^{n,k}$ (existen muchas más notaciones) y corresponde al valor del coeficiente binomial $\binom{n}{k}$, el cual se calcula de la siguiente forma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Ejemplo:

En un curso de 20 personas vamos a formar grupos de trabajo de 6 integrantes, entonces la cantidad de grupos diferentes que podemos formar corresponde a una combinación de 20 sobre 6, lo que se calcula con $\binom{20}{6}$.

Usando la definición tenemos que $\binom{20}{6} = \frac{20!}{(20-6)! \cdot 6!} = \frac{20!}{14! \cdot 6!}$, si expandimos los factoriales y simplificamos, tenemos $\frac{20!}{14! \cdot 6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 14 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 15 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 19 = 38.760$

Tenemos entonces que se pueden formar 38.760 grupos de seis personas de un total de 20.

- **Combinaciones con repetición**

  Si tenemos **n** objetos y vamos a formar subconjuntos de tamaño **k** y podemos repetir los elementos en cada elección, entonces corresponde a una combinación con repetición de **n** sobre **k**, en este caso lo calculamos con el coeficiente binomial $\binom{n+k-1}{k}$.

  Ejemplo:

  Seis amigos van a un restaurante y cada uno elige una bebida, si se disponen de 10 tipos diferentes de bebidas, ¿cuántas elecciones distintas se pueden realizar?

  En este caso dos o más amigos pueden pedir la misma bebida, por lo tanto se trata de una combinación con repetición, de 6 elementos de un total de 10, entonces calculamos $\binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6}$, si haces el cálculo de este coeficiente binomial obtendrás 5.005 posibilidades distintas.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En un curso hay 18 niños y 12 niñas y el profesor seleccionará una comisión formada por 2 hombres y 2 mujeres. ¿De cuántas formas puede realizar esta elección?

Solución:

El elegir 2 niños del total de 18 corresponde a una combinación, puesto que los niños no se repiten y no importa el orden interno de la elección, por lo tanto esto se puede realizar de $\binom{18}{2}$ formas. Por lo mismo, el elegir 2 mujeres se puede realizar de $\binom{12}{2}$ formas. Como queremos elegir 2 hombres y 2 mujeres, ocupando el principio multiplicativo, tenemos que esta elección se puede realizar de $\binom{18}{2} \cdot \binom{12}{2}$ formas distintas.

2. Seis hermanos se ordenan en una fila para sacarles una foto. Si todos tienen estaturas diferentes, ¿de cuántas formas se pueden ordenar de modo que los más altos se ubiquen al centro?

Solución:

Tal como se muestra en la siguiente figura, los más altos se ubican al centro:

La forma de ordenar los otros 4 hermanos es una permutación simple, es decir, 4!, pero los dos centrales se pueden permutar, lo que se puede realizar de 2! formas, por lo tanto por el principio multiplicativo, las formas posibles en que se pueden ordenar los 6 hermanos de modo que los mayores se ubiquen al centro es $4! \cdot 2! = 48$ formas distintas.

Prohibida su reproducción total o parcial.

3. En un restaurante, el menú se compone de dos entradas que puede ser ensalada o empanadas de queso, el plato principal puede ser pollo o carne acompañado de ensalada, arroz o puré y de postre hay fruta, helado o flan de chocolate.

Si se elige al azar un menú, ¿cuál es la probabilidad de que tenga empanadas y budín de chocolate?

Solución:

Para la entrada tenemos 2 posibilidades, para el plato de fondo 2, para el acompañamiento 3 y 3 posibilidades de postre, por el principio multiplicativo tenemos $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ menús diferentes. De todos estos diferentes menús, que son los casos totales, veremos cuántos tienen como entrada empanadas y de postre budín de chocolate.

Tenemos para la entrada una posibilidad, para el plato de fondo 2, para el acompañamiento 3 y para el postre 1, por lo tanto hay $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$ casos favorables. Por la regla de Laplace la probabilidad pedida es $\frac{6}{36}$, o bien $\frac{1}{6}$.

4. En un curso hay 14 hombres y 16 mujeres. De estos alumnos el profesor debe elegir 7 estudiantes para que vayan a recolectar fondos para una institución de beneficencia.

¿Cuál es la probabilidad de que el grupo elegido esté integrado por 3 hombres y 4 mujeres?

Solución:

Como en cada elección los alumnos no se pueden repetir y no importa el orden en que son elegidos, entonces se trata de una combinación de 30 sobre 7, esto es, existen $\binom{30}{7}$ formas de elegir los 7 alumnos. Por otro lado, por el principio multiplicativo, elegir 3 hombres y 4 mujeres, se puede realizar de $\binom{14}{3} \cdot \binom{16}{4}$ formas. Por la regla de Laplace, tenemos que la probabilidad pedida es $\frac{\binom{14}{3} \cdot \binom{16}{4}}{\binom{30}{7}}$.

5. Se ordenan aleatoriamente en una fila tres hombres y tres mujeres, ¿cuál es la probabilidad de que hayan quedado ordenados alternados según sexo?

Solución:

La cantidad de formas que se pueden ordenar en una fila, corresponde a una permutación de 6 elementos, esto es 6!.

La cantidad de formas en las que quedan alternados según sexo, es por ejemplo hmhmhm, acá podemos permutar los tres hombres y las tres mujeres, esto es $3! \cdot 3!$, además se puede empezar con mujer o con hombre, entonces la cantidad de formas que queden alternados por sexo es $3! \cdot 3! \cdot 2$, por lo tanto la probabilidad pedida es $\frac{3! \cdot 3! \cdot 2}{6!}$ o bien $\frac{1}{10}$.

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJERCICIOS DE PRÁCTICA

1. Una línea de buses llega a 20 ciudades de todo el país. Si se requieren hacer carteles que se pondrán en cada bus, indicando la ciudad de origen y de llegada del trayecto. ¿Cuántos carteles distintos habrá que confeccionar?

A) 20^2

B) $\binom{20}{2}$

C) $\binom{19}{2}$

D) $20 \cdot 19$

E) 40

2. Un grupo de 6 alumnos han realizado un trabajo de investigación, si se van a elegir dos al azar para que realicen la presentación, ¿de cuántas maneras se puede hacer esta elección?

A) 30

B) 36

C) 15

D) 20

E) 12

3. En una caja hay seis bolitas numeradas del 1 al 6, si se eligen 3 sin reposición para formar un número de 3 cifras, ¿cuántos de estos números se pueden formar?

A) 15

B) 20

C) 60

D) 120

E) 216

4. Una clave de internet está compuesta por 4 dígitos los cuales no pueden ser los cuatro iguales, ¿cuántas claves distintas se pueden formar?

A) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

B) $\binom{10}{4} \cdot 4!$

C) $\binom{10}{4} \cdot 4! - 10$

D) $10^4 - 10$

E) $9 \cdot 10^3 - 9$

5. En una fila de 5 sillas se sientan dos hombres y tres mujeres, ¿de cuántas maneras se pueden sentar, si los del mismo sexo deben quedar juntos?

A) 2

B) $2 \cdot 3$

C) $2! \cdot 3!$

D) $2! \cdot 3! \cdot 2$

E) $2 \cdot 3 \cdot 2$

6. En el ejercicio anterior, ¿de cuántas maneras se pueden sentar de modo que queden alternados por sexo?

A) 2

B) $2 \cdot 3$

C) $2! \cdot 3!$

D) $2! \cdot 3! \cdot 2$

E) $2 \cdot 3 \cdot 2$

Prohibida su reproducción total o parcial.

7. En el ejercicio anterior, ¿de cuántas maneras se pueden sentar de modo que los hombres queden juntos?

A) 2
B) $2 \cdot 3$
C) $2! \cdot 3!$
D) $2! \cdot 3! \cdot 2$
E) $4! \cdot 2!$

8. Una persona tiene 6 pantalones y 4 camisas, si elige 5 prendas, ¿de cuántas maneras puede elegir 3 pantalones y 2 camisas?

A) 26
B) 120
C) 132
D) 240
E) 1440

9. Se ordenan 6 libros distintos en un librero, uno al lado de otro, ¿de cuántas maneras se pueden ordenar de modo que dos en específico deben quedar al centro?

A) $4!$
B) $5!$
C) $4! \cdot 2!$
D) $4 \cdot 2$
E) $5! \cdot 2!$

10. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en una fila 5 fichas rojas y 4 verdes?

A) 9
B) $9!$
C) $9 \cdot 8$
D) 63
E) 126

11. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en fila las 7 letras de la palabra CARACAS?

A) $7!$
B) $7 \cdot 6$
C) 420
D) 120
E) 60

12. Francisco, Leonardo, Eduardo, Sebastián y Carlos se presentan a una interrogación oral para un examen final de un curso. Si el profesor debe elegir solo tres y entre ellos debe estar Carlos, ¿de cuántas maneras puede hacer esta elección?

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 20

13. En un restaurante, el menú está compuesto por un plato de fondo, un acompañamiento y un postre, se puede determinar la cantidad de postres distintos que existen sabiendo que:

(1) La cantidad de menús distintos que se pueden armar son 12.
(2) Entre el plato de fondo y el acompañamiento existen 6 posibilidades.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

14. A una conferencia, asisten 20 científicos, si se van a formar comisiones integradas por tres o cuatro miembros, ¿cuántas comisiones se pueden formar?

A) $\binom{20}{3} \cdot \binom{20}{4}$

B) $\binom{20}{3} + \binom{20}{4}$

C) $\binom{20}{3} \cdot 3! + \binom{20}{4} \cdot 4!$

D) $\binom{20}{3} \cdot \binom{20}{4} \cdot 3! \cdot 4!$

E) $\binom{20}{3} \cdot \binom{20}{4} \cdot 7!$

15. De los 50 asistentes a una presentación de un nuevo producto, se sortearán tres regalos iguales. Si una misma persona no puede ganar más de un premio, ¿de cuantas maneras posibles se pueden repartir los obsequios?

A) $50 \cdot 49 \cdot 48$

B) 50^3

C) $\binom{50}{3}$

D) $\binom{52}{3}$

E) $\frac{50!}{3!}$

16. En el ejercicio anterior, si una misma persona puede ganar más de un premio, ¿de cuantas maneras posibles se pueden repartir los obsequios?

A) $50 \cdot 49 \cdot 48$

B) 50^3

C) $\binom{50}{3}$

D) $\binom{52}{3}$

E) $\frac{50!}{3!}$

17. Con los dígitos del 1 al 5, se forman todos los números posibles de tres cifras, pudiéndose repetir las cifras, ¿cuántos números de estos son pares?

A) 12
B) 20
C) 25
D) 40
E) 50

18. En una carrera automovilística compiten 5 autos, de colores verde, rojo, amarillo, azul y blanco. Suponiendo que no puede haber empates entre ellos, ¿de cuántas maneras pueden llegar a la meta si se sabe que los vehículos de colores rojo y verde llegaron en los primeros lugares?

A) $3!$
B) $4!$
C) $2! \cdot 3!$
D) $2! \cdot 3$
E) $4! \cdot 2$

Prohibida su reproducción total o parcial.

19. En el ejercicio anterior, ¿de cuantas maneras pueden llegar a la meta si se sabe que el amarillo o el blanco ganó la competencia?

A) $3!$
B) $4!$
C) $2! \cdot 3!$
D) $2! \cdot 3$
E) $4! \cdot 2$

20. Las patentes en un cierto país están formadas por tres letras, las cuales son elegidas de un alfabeto de 25 letras, seguidas por tres dígitos. Si las letras no se pueden repetir y los dígitos si, ¿cuántas patentes distintas se pueden formar?

A) $\binom{25}{3} \cdot 10^3$
B) $\binom{25}{3} \cdot 3! \cdot 10^3$
C) $\binom{25}{3} \cdot 3! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$
D) $\binom{25}{3} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$
E) $\binom{25}{3} \cdot 9 \cdot 10^2$

21. En el ejercicio anterior, ¿cuántas patentes se pueden formar si no se pueden repetir ni las letras ni los dígitos?

A) $\binom{25}{3} \cdot 10^3$
B) $\binom{25}{3} \cdot 3! \cdot 10^3$
C) $\binom{25}{3} \cdot 3! \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$
D) $\binom{25}{3} \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$
E) $\binom{25}{3} \cdot 9 \cdot 10^2$

22. En un restaurante, se ofrece un menú de almuerzo que consiste en entrada, plato de fondo con ensalada y postre.
Si hay tres tipos de entrada, el plato de fondo puede ser carne o pollo, para la ensalada hay tres posibilidades y el postre puede ser fruta o helado. ¿Cuántos menús existen que contengan pollo?

A) 6
B) 8
C) 9
D) 12
E) 18

23. En el ejercicio anterior, ¿cuántos menús no tienen carne como plato de fondo y helado como postre?

A) 6
B) 8
C) 9
D) 12
E) 18

24. Se tienen una cierta cantidad de personas, se puede determinar cuántas son, sabiendo que:

(1) Existen 7! formas de ordenarlas en línea.
(2) Se pueden formar 21 parejas.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

25. ¿Cuántos números de 4 cifras, se pueden formar si terminan en una cifra mayor que 6?

A) 1512
B) 2700
C) 3600
D) 3000
E) 4000

26. Los códigos de los productos de una industria están formados por cuatro dígitos y cuatro letras, en cualquier orden. Si las letras son elegidas de un alfabeto de 25 letras y tanto los dígitos y las letras no se pueden repetir, ¿cuántos códigos distintos se pueden formar?

A) $\binom{25}{4} \cdot \binom{10}{4}$
B) $\binom{25}{4} \cdot \binom{10}{4} \cdot 4! \cdot 4!$
C) $\binom{25}{4} \cdot \binom{10}{4} \cdot 8!$
D) $\binom{25}{4} \cdot \binom{10}{4} \cdot 8$
E) $\binom{25}{4} \cdot 4! + \binom{10}{4} \cdot 4!$

27. Se forman todos los números mayores que 1.000 y menores que 10.000, si las cifras no se pueden repetir y no pueden ser ceros, ¿cuántos de estos números tienen tantas cifras pares como impares?

A) $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2}$
B) $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 2$
C) $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4$
D) $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4!$
E) $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4!$

28. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono de n lados?

A) n
B) $\binom{n}{2}$
C) $\binom{n}{2} \cdot 2!$
D) $\binom{n}{2} - n$
E) $\binom{n-2}{2}$

29. Un papá va a comprar un barquillo simple para él y para cada uno de sus tres hijos. Si hay 12 sabores de helados, ¿cuántas posibles elecciones existen?

A) $\binom{12}{3}$
B) $\binom{12}{4}$
C) $\binom{12}{4} \cdot 4!$
D) $\binom{15}{4}$
E) 12^4

30. Seis amigos se ordenan en una fila al azar, entre los cuales hay dos hermanos.
¿Cuál es la probabilidad de que los dos hermanos queden juntos?

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{2}{5}$
C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{3}$
E) $\frac{1}{4}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

31. En una final de 100 metros planos, se sabe que los atletas no pueden empatar entre ellos. Se puede determinar cuántos competidores son, sabiendo que:

(1) Existen 120 ordenaciones distintas de llegar a la meta.

(2) Todos los atletas tienen la misma probabilidad de ganar.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

32. Se ordenan aleatoriamente en una fila cuatro bolitas de colores verde, rojo, blanco y azul, ¿cuál es la probabilidad de que las fichas de colores rojo y blanco queden al centro?

A) $\frac{1}{4}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{6}$
E) $\frac{3}{4}$

33. En un librero hay cinco libros, uno de historia, uno de física, uno de biología, uno de matemática y uno de química. Si se ordenan al azar uno al lado del otro, ¿cuál es la probabilidad de que el de química quede al lado del de física?

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{10}$
E) $\frac{2}{5}$

34. En el ejercicio anterior, ¿cuál es la probabilidad de que el de matemática **no** esté al lado del de química?

A) $\frac{2}{3}$
B) $\frac{3}{4}$
C) $\frac{4}{5}$
D) $\frac{9}{10}$
E) $\frac{3}{5}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

35. Se forman todos los números de 4 cifras con los dígitos 1, 2, 3, y 6 pudiéndose repetir las cifras.¿Cuál es la probabilidad que al elegir uno de estos números, este **NO** tenga dígitos repetidos?

A) $\frac{3}{32}$

B) $\frac{1}{256}$

C) $\frac{1}{24}$

D) $\frac{1}{6}$

E) $\frac{1}{12}$

36. Se tienen seis bolitas marcadas con las letras A, A, A, C, C y S. Si estas bolitas se sacan una a una sin reposición para ir formando una palabra, ¿cuál es la probabilidad de que se forme la palabra “CASACA”?

A) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{12}$

C) $\frac{1}{60}$

D) $\frac{1}{240}$

E) $\frac{1}{120}$

37. En una heladería, los sabores de helados son chocolate, vainilla, frutilla, maracuyá, moka y menta. Si una persona solicita al mozo un cono doble y este al llegar a la vitrina no recuerda los sabores que debería servir. Si el mozo recuerda que los sabores no eran iguales y arma el cono aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que elija justamente los sabores pedidos por el cliente?

A) $\frac{1}{12}$

B) $\frac{1}{15}$

C) $\frac{2}{15}$

D) $\frac{1}{30}$

E) $\frac{1}{25}$

38. Antiguamente las patentes de vehículos de nuestro país están formada por dos letras seguidas de cuatro dígitos. Si las letras eran elegidas de un alfabeto de 25 letras y tanto las letras como los dígitos se podían repetir. Si entre todas las patentes construidas de esta forma, se elige una al azar, ¿cuál es la probabilidad que empiece con F y termine en un 3 o un 7?

A) $\frac{1}{25}$

B) $\frac{2}{25}$

C) $\frac{1}{125}$

D) $\frac{1}{250}$

E) $\frac{1}{500}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

39. En una caja hay cinco bolitas numeradas del 1 al 5, si se toman muestras de tamaño 2 sin orden y sin repetición. Si se elige al azar una de estas muestras, ¿cuál es la probabilidad de que **no** tenga el número 3?

A) $\frac{1}{5}$

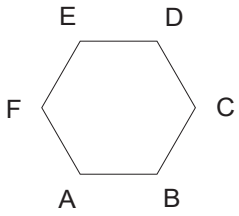
B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{3}{10}$

E) $\frac{2}{3}$

40. En el hexágono de la figura, se eligen 2 de sus vértices al azar.



¿Cuál es la probabilidad que al unir estos dos vértices por un segmento, este coincida con uno de los lados del hexágono?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{2}{5}$

C) $\frac{3}{10}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{6}$

41. En una caja hay 5 bolitas numeradas con los números 2, 3, 5, 7 y 8.
Si se sacan muestras de tamaño 2 sin orden ni repetición, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números de la muestra sea mayor a 10?

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{4}{5}$

C) $\frac{2}{5}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{3}{10}$

42. Entre los alumnos de un grupo están Paula y Federico, si el profesor elige al azar 2 alumnos para una interrogación oral, se puede determinar cuántos alumnos tiene el grupo, sabiendo que:

(1) La probabilidad de elegir a Paula y Federico es $\frac{1}{15}$.

(2) La probabilidad de no elegir a Paula es $\frac{2}{3}$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) o (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

43. Con las letras A, B, C, D y E se forman todas las palabras con o sin sentido de 2 o 3 letras. Si las letras no se pueden repetir y se elige una de estas palabras al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la letra A?

A) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{3}{5}$

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{9}{20}$

E) $\frac{3}{10}$

44. En una caja hay 5 tarjetas, con las letras A, B, C, D y E.
Se van extrayendo las tarjetas una a una con reposición, de modo de formar una palabra de largo "p", con p > 2. ¿Cuál es la probabilidad de que la palabra formada tenga la letra A solo una vez?

A) $\frac{p}{5}$

B) $\frac{1}{5^p}$

C) $\frac{4^{p-1}}{5^p}$

D) $\left(\frac{4}{5}\right)^{p-1} \cdot p$

E) $\left(\frac{4}{5}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{5} \cdot p$

RESPUESTAS CAPÍTULO 16									
1. D	**2.** C	**3.** D	**4.** D	**5.** D	**6.** C	**7.** E	**8.** B	**9.** C	**10.** E
11. C	**12.** A	**13.** C	**14.** B	**15.** C	**16.** D	**17.** E	**18.** C	**19.** E	**20.** B
21. C	**22.** E	**23.** C	**24.** D	**25.** B	**26.** C	**27.** D	**28.** D	**29.** D	**30.** C
31. A	**32.** D	**33.** E	**34.** E	**35.** A	**36.** C	**37.** B	**38. C**	**39.** B	**40. B**
41. C	**42. D**	**43.** D	**44.** E						

Prohibida su reproducción total o parcial.

MINIENSAYO N°4

EJE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Tiempo: 45 minutos

1. Si se lanza un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado salga un múltiplo de 3 o en la moneda salga cara?

A) $\frac{5}{6}$

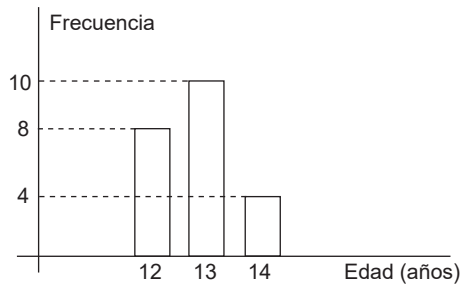
B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{6}$

D) $\frac{1}{3}$

E) 1

2. En el siguiente gráfico se muestra la distribución de las edades de los alumnos de 7° básico de un curso de cierto establecimiento:



¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La mediana es 13.

B) La media es menor que la mediana.

C) La moda es igual a la mediana.

D) El primer cuartil es 12.

E) El tercer cuartil es 14.

3. Una moneda cargada se cumple que la probabilidad de que salga cara es el doble de que salga sello. Si la moneda se lanza dos veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener una cara y un sello?

A) $\frac{2}{9}$

B) $\frac{4}{9}$

C) $\frac{3}{16}$

D) $\frac{3}{8}$

E) $\frac{1}{3}$

4. En una caja hay 7 bolitas numeradas del 1 al 7, si se sacan dos sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que sumen 7?

A) $\frac{1}{14}$

B) $\frac{3}{14}$

C) $\frac{1}{7}$

D) $\frac{1}{42}$

E) $\frac{6}{7}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

5. En una caja hay bolitas verdes, rojas y blancas, todas del mismo tipo. Se puede determinar la cantidad de bolitas blancas, sabiendo que:

(1) Si se extrae una bolita, la probabilidad de que sea verde o blanca es $\frac{5}{8}$.

(2) Si se extrae una bolita, la probabilidad de que sea verde es $\frac{1}{2}$.

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

6. A y B son dos eventos aleatorios, tales que $P(A \cup B) = 0{,}8$, $P(A) = 0{,}5$ y $P(A \cap B) = 0{,}1$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) $P(B) = 0{,}4$
II) $P(A/B) = 0{,}25$
III) $P(B/A) = 0{,}2$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

7. Las notas de Juan en la asignatura de Biología son 4, 5, 5, 7 y 6. Si posteriormente el 6 se cambia por un 7, ¿cuál(es) de los siguientes estadígrafos se modifican?

I) Media.
II) Mediana.
III) Rango.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

8. Para calcular la nota final en un trabajo de investigación se deben considerar los siguientes aspectos:

Presentación	30%
Desarrollo	50%
Exposición	20%

Si un cierto grupo de trabajo obtuvo en la presentación un 6,0 y en el desarrollo un 5,0, ¿qué nota deberían tener en la exposición para que su nota final fuese un 5,5?

A) 5,4
B) 5,5
C) 5,6
D) 5,7
E) 6,0

Prohibida su reproducción total o parcial.

9. En la siguiente tabla se muestra la frecuencia absoluta f y la frecuencia acumulada F de un conjunto de datos:

x	f	F
2		p
5	q	
7		$p + 3q$

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) **siempre** verdadera(s)?

I) El total de datos es $3p + 4q$.

II) Hay $p + q$ datos que son a lo sumo iguales a 5.

III) La frecuencia relativa del 5 es $\frac{p + q}{p + 3q}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) Solo II y III

10. Las notas de Claudio y Andrés obtenidas en la asignatura de Física durante el primer semestre, fueron las siguientes:

Claudio	4,0	7,0	5,0	5,0	6,0	6,0
Andrés	7,0	7,0	5,0	6,0	5,0	3,0

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) Ambos obtuvieron la misma media en sus notas.

II) Ambos obtuvieron la misma mediana en sus notas.

III) Las notas de Claudio están menos dispersas que las de Andrés.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo I y III
E) I, II y III

11. Un curso está formado por 18 hombres y 12 mujeres. Si se quiere elegir un grupo de 4 alumnos para que lo represente, ¿de cuántas maneras se puede elegir este grupo si tiene que estar integrado por 2 hombres y 2 mujeres?

A) $\binom{18}{2} \cdot \binom{12}{2}$

B) $\binom{18}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot 2$

C) $\binom{18}{2} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4$

D) $18 \cdot 17$

E) $\binom{18}{4}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

12. En una cierta liga de fútbol, la probabilidad de que suspendan un partido dado que está lloviendo es 0,8 y la probabilidad de que no llueva es 0,9, ¿cuál es la probabilidad de que esté lloviendo y se suspenda un partido?

A) 8%
B) 36%
C) 64%
D) 72%
E) 90%

13. En un curso de 21 alumnos, deben optar por obligatoriamente por un taller de idiomas que puede ser Inglés, Francés o ambos.

Se sabe que la probabilidad de que esté inscrito en Francés sabiendo que está en el taller de Inglés es $\frac{1}{5}$ y la probabilidad de que esté en el taller de Inglés dado que está en el de Francés es $\frac{1}{3}$. ¿Cuántos alumnos están inscritos en ambos talleres?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 5
E) Indeterminable con los datos.

14. En un hospital el 10% de los pacientes de sexo femenino han presentado un contagio viral, mientras que los de sexo masculino el 80% no ha presentado este contagio. Si el 60% de los pacientes son de sexo femenino, y se elige un paciente al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**?

A) La probabilidad de que esté contagiado es de un 14%.
B) La probabilidad de que sea un hombre no contagiado es de un 32%.
C) Es más probable elegir un hombre contagiado que una mujer contagiada.
D) Si se elige un contagiado, la probabilidad de que sea de sexo masculino es inferior al 35%.
E) La probabilidad de elegir una mujer contagiada o un hombre no contagiado es un 38%.

15. Sean A y B dos eventos, se puede determinar P(B), sabiendo que:

(1) $P(B/A) = 0,8$ y $P(A) = 0,7$
(2) $P(A \cup B) = 0,9$

A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

Prohibida su reproducción total o parcial.

16. Para un juego didáctico se construyen fichas rectangulares, cada una de ellas está dividida en dos sectores los cuales tienen dos colores distintos. Si no se considera el orden de los colores, ¿cuántas fichas se pueden construir si se dispone de 10 colores para formarlas?

A) $\binom{10}{2}$

B) $\binom{10}{2} \cdot 2!$

C) $\binom{11}{2}$

D) 10^2

E) 50

17. En un colegio hay dos cuartos medios, el 4° A tiene 28 alumnos y el 4°B tiene 30 alumnos. Si se forma una comisión formada por 4 estudiantes de cuarto medio, la cual debe tener a lo menos tres alumnos del cuarto A y quizás ninguno del cuarto B, ¿cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

A) $\binom{28}{4}$

B) $\binom{28}{3} \cdot 30$

C) $\binom{28}{3} + 30$

D) $\binom{28}{3} \cdot 30 + \binom{28}{4}$

E) $\binom{28}{3} + \binom{28}{4}$

18. Tres hombres y tres mujeres se ordenan en una fila al azar, ¿cuál es la probabilidad de que queden alternados según el sexo?

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{10}$

C) $\frac{1}{20}$

D) $\frac{2}{5}$

E) $\frac{1}{360}$

Prohibida su reproducción total o parcial.

19. Se realiza una encuesta a 80 alumnos universitarios de cuatro carreras, distribuidos tal como se ilustra en la siguiente tabla:

Carrera	Hombres	Mujeres	Total
Ingeniería	12		18
Medicina	16		24
Pedagogía	6		
Derecho	13		22

Si se elige dos de los encuestados al azar, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de que ambos sean de ingeniería es $\frac{\binom{18}{2}}{\binom{80}{2}}$.

II) La probabilidad de que ambos sean de sexo femenino es $\frac{\binom{33}{2}}{\binom{80}{2}}$.

III) La probabilidad de que uno sea de ingeniería y el otro de medicina es $\frac{\binom{42}{2}}{\binom{80}{2}}$.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo I y II
D) Solo II y III
E) I, II y III

20. Una pistola con capacidad para cinco tiros, tiene solo una bala en su cargador, ¿cuál es la probabilidad que si al disparar tres veces la bala salga en el último intento?

A) $\frac{1}{3}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{1}{5}$
E) $\frac{2}{3}$

21. En un colegio los alumnos deben optar obligatoriamente por el taller de física o de química o ambos. Si se elige un alumno al azar la probabilidad de que haya tomado solo el taller de física es un 50%, el que haya tomado química es un 50% y la probabilidad de que no haya tomado ambos talleres es un 87,5%. ¿Cuál es la probabilidad de que solo haya tomado solo química?

A) 12,5%
B) 25%
C) 37,5%
D) 50%
E) 87,5%

Prohibida su reproducción total o parcial.

22. En un supermercado, los productos tienen un código formado por tres letras y tres números, no necesariamente juntos y no se pueden repetir ni las letras y los números. Si las letras son elegidas del conjunto {a,b,c,d,e} y los números del conjunto {3,5,6,7,8}. ¿Cuántos códigos con las especificaciones anteriores se pueden formar?

A) 60^2

B) $\binom{5}{3}^2$

C) $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 3!$

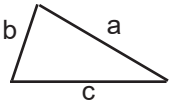
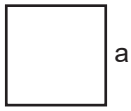
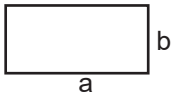
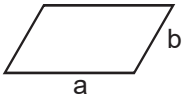
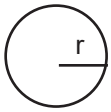
D) $\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot 6!$

E) $\binom{10}{6} \cdot 6!$

Prohibida su reproducción total o parcial.

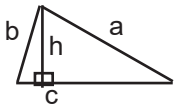
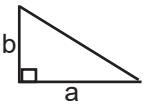
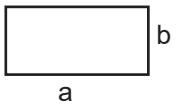
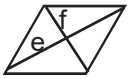
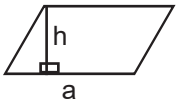
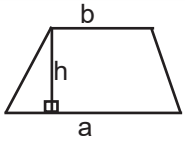
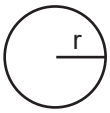
ANEXOS

Anexo 1: Perímetro de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	PERÍMETRO
TRIÁNGULO CUALQUIERA		a + b + c
CUADRADO		4a
RECTÁNGULO		2(a + b)
ROMBOIDE		2(a + b)
CIRCUNFERENCIA		2 π r

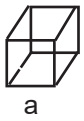
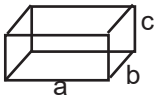
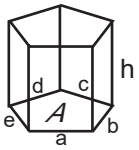
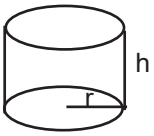
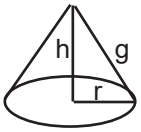
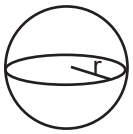
Prohibida su reproducción total o parcial.

Anexo 2: Área de figuras planas

NOMBRE	FIGURA	ÁREA
TRIÁNGULO CUALQUIERA		$\frac{ch}{2}$
TRIÁNGULO EQUILÁTERO		$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
TRIÁNGULO RECTÁNGULO		$\frac{ab}{2}$
CUADRADO		a^2
RECTÁNGULO		ab
ROMBO		$\frac{ef}{2}$
ROMBOIDE		ah
TRAPECIO		$\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot h$
CÍRCULO		πr^2

Prohibida su reproducción total o parcial.

Anexo 3: Área y volumen de cuerpos geométricos

NOMBRE	CUERPO	ÁREA	VOLUMEN
CUBO (hexaedro regular)		$6a^2$	a^3
ORTOEDRO (paralelepípedo recto rectangular)		$2ab+2bc+2ac$	abc
PRISMA RECTO (en la fig. un caso especial: prisma de base pentagonal)		$ah+bh+ch+dh+eh + 2A = Ph+2A$ (P= perímetro del polígono basal)	$A\,h$ (A = área del polígono basal)
CILINDRO		$2\pi rh+2\pi r^2$	$\pi r^2 h$
CONO		$\pi rg+\pi r^2$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
ESFERA		$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

Prohibida su reproducción total o parcial.

RESPUESTAS MINIENSAYOS

RESPUESTAS MINIENSAYO 1									
1. D	**2.** C	**3.** B	**4.** E	**5.** D	**6.** D	**7.** D	**8.** C	**9.** C	**10.** A
11. D	**12.** B	**13.** C	**14.** B	**15.** B	**16.** E	**17.** C	**18.** C	**19.** C	**20.** E
21. E	**22.** B	**23.** C	**24.** C	**25.** B	**26.** D	**27.** D	**28.** D	**29.** D	**30.** C
31. E	**32.** E	**33.** E	**34.** C	**35.** D	**36.** B	**37.** E	**38.** D		

RESPUESTAS MINIENSAYO 2									
1. D	**2.** D	**3.** E	**4.** E	**5.** B	**6.** A	**7.** B	**8.** A	**9.** D	**10.** D
11. A	**12.** C	**13.** E	**14.** E	**15.** A	**16.** D	**17.** E	**18.** D	**19.** C	**20.** D
21. D	**22.** C	**23.** A	**24.** A	**25.** E	**26.** C	**27.** B	**28.** B	**29.** D	**30.** B
31. E	**32.** C	**33.** C	**34.** C	**35.** B	**36.** B	**37.** C	**38.** C		

RESPUESTAS MINIENSAYO 3									
1. C	**2.** C	**3.** E	**4.** E	**5.** E	**6.** E	**7.** D	**8.** C	**9.** E	**10.** E
11. D	**12.** B	**13.** B	**14.** E	**15.** B	**16.** C	**17.** A	**18.** C	**19.** C	**20.** A
21. E	**22.** C	**23.** B							

RESPUESTAS MINIENSAYO 4									
1. B	**2.** E	**3.** B	**4.** C	**5.** E	**6.** E	**7.** A	**8.** E	**9.** B	**10.** E
11. A	**12.** A	**13.** C	**14.** D	**15.** C	**16.** A	**17.** D	**18.** B	**19.** C	**20.** D
21. C	**22.** D								

Prohibida su reproducción total o parcial.

CLASES CON CONTENIDOS Y EJEMPLOS

Si quieres aprender más, asiste a una clase virtual con el contenido de cada capítulo siguiendo los links o leyendo con tu celular los códigos QR que aquí te presentamos.

Estos códigos corresponden al texto original (Cid, 2019) por lo que los números de las páginas no coinciden con los presentados en este documento.

EJE NÚMEROS	
NÚMEROS REALES	POTENCIAS Y RAÍCES
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-4/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-1/
LOGARITMOS	
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-2/	
EJE ALGEBRA Y FUNCIONES	
OPERATORIA ALGEBRAICA	ECUACIÓN Y FUNCIÓN CUADRÁTICA
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-5/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-7/

Prohibida su reproducción total o parcial.

FUNCIONES	TIPOS DE FUNCIONES Y FUNCIÓN INVERSA
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-8/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-9/
DESIGUALDADES E INECUACIONES	PLANTEO DE PROBLEMAS
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-10/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-6/
EJE GEOMETRÍA	
TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS	GEOMETRÍA DE PROPORCIÓN
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-11/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-13/
VECTORES	GEOMETRÍA ANALÍTICA
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-15/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-14/

Prohibida su reproducción total o parcial.

EJE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA	
ESTADÍSTICA	PROBABILIDADES
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-17/	https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-18/
COMBINATORIA Y PROBABILIDADES	
https://www.editorialcid.com/21-temas-capitulo-19/	

Prohibida su reproducción total o parcial.

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

UCE

UNIDAD DE CURRÍCULUM Y EVALUACIÓN

Repaso contenidos

MATEMÁTICA

IV° medio