

Programa de Estudio
3° o 4° Medio
Formación Diferenciada
Matemática

Probabilidades y Estadísticas Descriptiva e Inferencial

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
GOBIERNO DE CHILE

V
e
r
s
i
ó
n
-
w
e
b



UNIDAD DE
CURRÍCULO Y
EVALUACIÓN

UCE



**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE Y
ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN.
ESTAS ACTIVIDADES ESTÁN
ORGANIZADAS EN 4 UNIDADES,
CADA UNIDAD TIENE CUATRO
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJES Y
UNA ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN.**

Querida comunidad educativa:

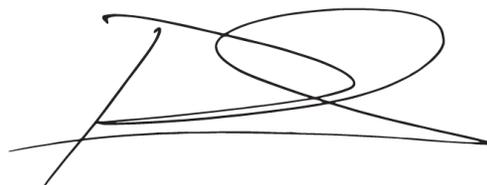
Me es grato saludarles y dirigirme a ustedes para poner en sus manos los Programas de Estudio de las 46 asignaturas del currículum ajustado a las nuevas Bases Curriculares de 3° y 4° año de enseñanza media (Decreto Supremo N°193 de 2019), que inició su vigencia el presente año para 3° medio y el año 2021 para 4° medio, o simultáneamente en ambos niveles si el colegio así lo decidió.

El presente año ha sido particularmente difícil por la situación mundial de pandemia por Coronavirus y el Ministerio de Educación no ha descansado en su afán de entregar herramientas de apoyo para que los estudiantes de Chile se conviertan en ciudadanos que desarrollen la empatía y el respeto, la autonomía y la proactividad, la capacidad para perseverar en torno a metas y, especialmente, la responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que estas tienen sobre uno mismo y los otros.

Estos Programas de Estudio han sido elaborados por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación y presentan una propuesta pedagógica y didáctica que apoya el proceso de gestión de los establecimientos educacionales, además de ser una invitación a las comunidades educativas para enfrentar el desafío de preparación, estudio y compromiso con la vocación formadora y con las expectativas de aprendizaje que pueden lograr nuestros estudiantes.

Nos sentimos orgullosos de poner a disposición de los jóvenes de Chile un currículum acorde a los tiempos actuales y que permitirá formar personas integrales y ciudadanos autónomos, críticos y responsables, que desarrollen las habilidades necesarias para seguir aprendiendo a lo largo de sus vidas y que estarán preparados para ser un aporte a la sociedad.

Les saluda cordialmente,



Raúl Figueroa S.
Ministro de Educación

Programa de Estudio Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial
3° y 4° medio – Formación Diferenciada

Aprobado por Decreto Exento N°496 del 15 de junio de 2020.

Equipo de Desarrollo Curricular
Unidad de Currículum y Evaluación
Ministerio de Educación 2021

IMPORTANTE

En el presente documento, se utilizan de manera inclusiva términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor”, “el niño”, “el compañero” y sus respectivos plurales (así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo) para referirse a hombres y mujeres.

Esta opción obedece a que no existe acuerdo universal respecto de cómo aludir conjuntamente a ambos sexos en el idioma español, salvo usando “o/a”, “los/las” y otras similares, y ese tipo de fórmulas supone una saturación gráfica que puede dificultar la comprensión de la lectura.

Índice

Presentación.....	5
Nociones básicas	6
Consideraciones generales.....	11
Orientaciones para planificar	16
Orientaciones para evaluar los aprendizajes	17
Estructura del programa	19
Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial	21
Propósitos Formativos.....	21
Enfoque de las asignaturas de Matemática	21
Orientaciones para el docente	24
Organización curricular.....	26
Unidad 1: ¿Qué dicen los gráficos? Análisis crítico de la información.....	31
Actividad 1: Analizar críticamente la información en el contexto de las estadísticas vitales	32
Actividad 2: ¿Cómo representar estadísticamente datos y fenómenos?	44
Actividad 3: Tomar decisiones a partir de diagramas de cajón.....	56
Actividad 4: ¿Datos dispersos o relacionados?	63
Actividad de Evaluación.....	69
Unidad 2: Comprender la media muestral, las medidas de dispersión y la correlación.....	77
Actividad 1: Analizar información gráfica en diferentes contextos.....	78
Actividad 2: La media muestral y la media de la población en diferentes contextos	89
Actividad 3: Utilizar la correlación muestral en contextos de ciencias sociales.....	98
Actividad 4: Aplicar el modelo de correlación lineal en censos de la población.....	106
Actividad de Evaluación.....	113
Unidad 3: Modelaje de fenómenos mediante las probabilidades las distribuciones binomial o normal	120
Actividad 1: Experimentos aleatorios con modelos de Bernoulli y Binomial.....	122
Actividad 2: Comprender el modelo normal de probabilidades	135
Actividad 3: Aplicar el modelo normal en el transporte de personas	141
Actividad 4: Aproximar la distribución binomial por la distribución normal	146
Actividad de Evaluación.....	152
Unidad 4: Hacer inferencia estadística	157

Actividad 1: Hacer inferencias sobre la media de una población usando intervalos de confianza ..	159
Actividad 2: Inferencias en diferentes contextos usando intervalos de confianza	165
Actividad 3: Elaborar una hipótesis y comprobar o rechazar en diferentes contextos	169
Actividad 4: Elaborar y comprobar o rechazar una hipótesis.....	176
Actividad de Evaluación.....	182
Proyecto Interdisciplinario	186
Bibliografía	194
Anexos.....	197

Presentación

Las Bases Curriculares establecen Objetivos de Aprendizaje (OA) que definen los desempeños que se espera que todos los estudiantes logren en cada asignatura, módulo y nivel de enseñanza. Estos objetivos integran habilidades, conocimientos y actitudes que se consideran relevantes para que los jóvenes alcancen un desarrollo armónico e integral que les permita enfrentar su futuro con las herramientas necesarias y participar de manera activa y responsable en la sociedad.

Las Bases Curriculares son flexibles para adaptarse a las diversas realidades educativas que se derivan de los distintos contextos sociales, económicos, territoriales y religiosos de nuestro país. Estas múltiples realidades dan origen a diferentes aproximaciones curriculares, didácticas, metodológicas y organizacionales, que se expresan en el desarrollo de distintos proyectos educativos, todos válidos mientras permitan el logro de los Objetivos de Aprendizaje. En este contexto, las Bases Curriculares constituyen el referente base para los establecimientos que deseen elaborar programas propios, y por lo tanto, no corresponde que estas prescriban didácticas específicas que limiten la diversidad de enfoques educacionales que pueden expresarse en los establecimientos de nuestro país.

Para aquellos establecimientos que no han optado por programas propios, el Ministerio de Educación suministra estos Programas de Estudio con el fin de facilitar una óptima implementación de las Bases Curriculares. Estos programas constituyen un complemento totalmente coherente y alineado con las Bases Curriculares y una herramienta para apoyar a los docentes en el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de Estudio proponen al profesor una organización de los Objetivos de Aprendizaje con relación al tiempo disponible dentro del año escolar, y constituyen una orientación acerca de cómo secuenciar los objetivos y cómo combinarlos para darles una comprensión profunda y transversal. Se trata de una estimación aproximada y de carácter indicativo que puede ser adaptada por los docentes, de acuerdo a la realidad de sus estudiantes y de su establecimiento.

Asimismo, para facilitar al profesor su quehacer en el aula, se sugiere un conjunto de indicadores de evaluación que dan cuenta de los diversos desempeños de comprensión que demuestran que un alumno ha aprendido en profundidad, transitando desde lo más elemental hasta lo más complejo, y que aluden a los procesos cognitivos de orden superior, las comprensiones profundas o las habilidades que se busca desarrollar transversalmente.

Junto con ello, se proporcionan orientaciones didácticas para cada disciplina y una gama amplia y flexible de actividades de aprendizaje y de evaluación que pueden utilizarse como base para nuevas actividades acordes con las diversas realidades de los establecimientos educacionales. Estas actividades se enmarcan en un modelo pedagógico cuyo enfoque es el de la comprensión profunda y significativa, lo que implica establecer posibles conexiones al interior de cada disciplina y también con otras áreas del conocimiento, con el propósito de facilitar el aprendizaje.

Estas actividades de aprendizaje y de evaluación se enriquecen con sugerencias al docente, recomendaciones de recursos didácticos complementarios y bibliografía para profesores y estudiantes.

En síntesis, se entregan estos Programas de Estudio a los establecimientos educacionales como un apoyo para llevar a cabo su labor de enseñanza.

Nociones básicas

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE COMO INTEGRACIÓN DE CONOCIMIENTOS, HABILIDADES Y ACTITUDES

Los Objetivos de Aprendizaje definen para cada asignatura o módulo los aprendizajes terminales esperables para cada semestre o año escolar. Se refieren a habilidades, actitudes y conocimientos que han sido seleccionados considerando que entreguen a los estudiantes las herramientas necesarias para su desarrollo integral, que les faciliten una comprensión profunda del mundo que habitan, y que despierten en ellos el interés por continuar estudios superiores y desarrollar sus planes de vida y proyectos personales.

En la formulación de los Objetivos de Aprendizaje se relacionan habilidades, conocimientos y actitudes y, por medio de ellos, se pretende plasmar de manera clara y precisa cuáles son los aprendizajes esenciales que el alumno debe lograr. Se conforma así un currículum centrado en el aprendizaje, que declara explícitamente cuál es el foco del quehacer educativo. Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto de la sala de clases como en la vida cotidiana.

CONOCIMIENTOS

Los conocimientos de las asignaturas y módulos corresponden a conceptos, redes de conceptos e información sobre hechos, procesos, procedimientos y operaciones que enriquecen la comprensión de los alumnos sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan el saber que han generado por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Se busca que sean esenciales, fundamentales para que los estudiantes construyan nuevos aprendizajes y de alto interés para ellos. Se deben desarrollar de manera integrada con las habilidades, porque son una condición para el progreso de estas y para lograr la comprensión profunda.

HABILIDADES Y ACTITUDES PARA EL SIGLO XXI

La existencia y el uso de la tecnología en el mundo global, multicultural y en constante cambio, ha determinado nuevos modos de acceso al conocimiento, de aplicación de los aprendizajes y de participación en la sociedad. Estas necesidades exigen competencias particulares, identificadas internacionalmente como Habilidades para el siglo XXI.¹

Las habilidades para el siglo XXI presentan como foco formativo central la formación integral de los estudiantes dando continuidad a los objetivos de aprendizaje transversales de 1° básico a 2° medio. Como estos, son transversales a todas las asignaturas, y al ser transferibles a otros contextos, se convierten en un aprendizaje para la vida. Se presentan organizadas en torno a cuatro ámbitos: maneras de pensar, maneras de trabajar, herramientas para trabajar y herramientas para vivir en el mundo.

¹ El conjunto de habilidades seleccionadas para integrar el currículum de 3° y 4° medio corresponden a una adaptación de distintos modelos (Binkley et al., 2012; Fadel et al., 2016).

MANERAS DE PENSAR

Desarrollo de la creatividad y la innovación

Las personas que aprenden a ser creativas poseen habilidades de pensamiento divergente, producción de ideas, fluidez, flexibilidad y originalidad. El pensamiento creativo implica abrirse a diferentes ideas, perspectivas y puntos de vista, ya sea en la exploración personal o en el trabajo en equipo. La enseñanza para la creatividad implica asumir que el pensamiento creativo puede desarrollarse en todas las instancias de aprendizaje y en varios niveles: imitación, variación, combinación, transformación y creación original. Por ello, es importante que los docentes consideren que, para lograr la creación original, es necesario haber desarrollado varias habilidades y que la creatividad también puede enseñarse mediante actividades más acotadas según los diferentes niveles (Fadel et al, 2016).

Desarrollo del pensamiento crítico

Cuando aprendemos a pensar críticamente, podemos discriminar entre informaciones, declaraciones o argumentos, evaluando su contenido, pertinencia, validez y verosimilitud. El pensamiento crítico permite cuestionar la información, tomar decisiones y emitir juicios, como asimismo reflexionar críticamente acerca de diferentes puntos de vista, tanto de los propios como de los demás, ya sea para defenderlos o contradecirlos sobre la base de evidencias. Contribuye así, además, a la autorreflexión y corrección de errores, y favorece la capacidad de estar abierto a los cambios y de tomar decisiones razonadas. El principal desafío en la enseñanza del pensamiento crítico es la aplicación exitosa de estas habilidades en contextos diferentes de aquellos en que fueron aprendidas (Fadel et al, 2016).

Desarrollo de la metacognición

El pensamiento metacognitivo se relaciona al concepto de “aprender a aprender”. Se refiere a ser consciente del propio aprendizaje y de los procesos para lograrlo, lo que permite autogestionarlo con autonomía, adaptabilidad y flexibilidad. El proceso de pensar acerca del pensar involucra la reflexión propia sobre la posición actual, fijar los objetivos a futuro, diseñar acciones y estrategias potenciales, monitorear el proceso de aprendizaje y evaluar los resultados. Incluye tanto el conocimiento que se tiene sobre uno mismo como estudiante o pensador, como los factores que influyen en el rendimiento. La reflexión acerca del propio aprendizaje favorece su comunicación, por una parte, y la toma de conciencia de las propias capacidades y debilidades, por otra. Desde esta perspectiva, desarrolla la autoestima, la disciplina, la capacidad de perseverar y la tolerancia a la frustración.

Desarrollo de Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.
- Pensar con apertura a distintas perspectivas y contextos, asumiendo riesgos y responsabilidades.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Pensar con flexibilidad para reelaborar las propias ideas, puntos de vista y creencias.
- Pensar con reflexión propia y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.
- Pensar con conciencia de que los aprendizajes se desarrollan a lo largo de la vida y enriquecen la experiencia.
- Pensar con apertura hacia otros para valorar la comunicación como una forma de relacionarse con diversas personas y culturas, compartiendo ideas que favorezcan el desarrollo de la vida en sociedad.

MANERAS DE TRABAJAR

Desarrollo de la comunicación

Aprender a comunicarse ya sea de manera escrita, oral o multimodal, requiere generar estrategias y herramientas que se adecuen a diversas situaciones, propósitos y contextos socioculturales, con el fin de transmitir lo que se desea de manera clara y efectiva. La comunicación permite desarrollar la empatía, la autoconfianza, la valoración de la interculturalidad, así como la adaptabilidad, la creatividad y el rechazo a la discriminación.

Desarrollo de la colaboración

La colaboración entre personas con diferentes habilidades y perspectivas faculta al grupo para tomar mejores decisiones que las que se tomarían individualmente, permite analizar la realidad desde más ángulos y producir obras más complejas y más completas. Además, el trabajo colaborativo entre pares determina nuevas formas de aprender y de evaluarse a sí mismo y a los demás, lo que permite visibilizar los modos en que se aprende; esto conlleva nuevas maneras de relacionarse en torno al aprendizaje.

La colaboración implica, a su vez, actitudes clave para el aprendizaje en el siglo XXI, como la responsabilidad, la perseverancia, la apertura de mente hacia lo distinto, la aceptación y valoración de las diferencias, la autoestima, la tolerancia a la frustración, el liderazgo y la empatía.

Desarrollo de Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Trabajar con empatía y respeto en el contexto de la diversidad, eliminando toda expresión de prejuicio y discriminación.
- Trabajar con autonomía y proactividad en trabajos colaborativos e individuales para llevar a cabo eficazmente proyectos de diversa índole.

HERRAMIENTAS PARA TRABAJAR

Desarrollo de la alfabetización digital

Aprender a utilizar la tecnología como herramienta de trabajo implica dominar las posibilidades que ofrece y darle un uso creativo e innovador. La alfabetización digital apunta a la resolución de problemas en el marco de la cultura digital que caracteriza al siglo XXI, aprovechando las herramientas que nos dan la programación, el pensamiento computacional, la robótica e internet, entre otros, para crear contenidos digitales, informarnos y vincularnos con los demás. Promueve la autonomía y el trabajo en equipo, la creatividad, la participación en redes de diversa índole, la motivación por ampliar los propios intereses y horizontes culturales, e implica el uso responsable de la tecnología considerando la ciberseguridad y el autocuidado.

Desarrollo del uso de la información

Usar bien la información se refiere a la eficacia y eficiencia en la búsqueda, el acceso, el procesamiento, la evaluación crítica, el uso creativo y ético, así como la comunicación de la información por medio de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC). Implica formular preguntas, indagar y generar estrategias para seleccionar, organizar y comunicar la información. Tiene siempre en cuenta, además, tanto los aspectos éticos y legales que la regulan como el respeto a los demás y a su privacidad.

Desarrollo de Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- Valorar las TIC como una oportunidad para informarse, investigar, socializar, comunicarse y participar como ciudadano.
- Actuar responsablemente al gestionar el tiempo para llevar a cabo eficazmente los proyectos personales, académicos y laborales.
- Actuar de acuerdo con los principios de la ética en el uso de la información y de la tecnología, respetando la propiedad intelectual y la privacidad de las personas.

MANERAS DE VIVIR EN EL MUNDO

Desarrollo de la ciudadanía local y global

La ciudadanía se refiere a la participación activa del individuo en su contexto, desde una perspectiva política, social, territorial, global, cultural, económica y medioambiental, entre otras dimensiones. La conciencia de ser ciudadano promueve el sentido de pertenencia y la valoración y el ejercicio de los principios democráticos, y también supone asumir sus responsabilidades como ciudadano local y global. En este sentido, ejercitar el respeto a los demás, a su privacidad y a las diferencias valóricas, religiosas y étnicas cobra gran relevancia; se relaciona directamente con una actitud empática, de mentalidad abierta y de adaptabilidad.

Desarrollo de proyecto de vida y carrera

La construcción y consolidación de un proyecto de vida y de una carrera, oficio u ocupación, requiere conocerse a sí mismo, establecer metas, crear estrategias para conseguirlas, desarrollar la autogestión, actuar con iniciativa y compromiso, ser autónomo para ampliar los aprendizajes, reflexionar críticamente y estar dispuesto a integrar las retroalimentaciones recibidas. Por otra parte, para alcanzar esas metas, se requiere interactuar con los demás de manera flexible, con capacidad para trabajar en equipo, negociar en busca de soluciones y adaptarse a los cambios para poder desenvolverse en distintos roles y contextos. Esto permite el desarrollo de liderazgo, responsabilidad, ejercicio ético del poder y respeto a las diferencias en ideas y valores.

Desarrollo de la responsabilidad personal y social

La responsabilidad personal consiste en ser conscientes de nuestras acciones y sus consecuencias, cuidar de nosotros mismos de modo integral y respetar los compromisos que adquirimos con los demás, generando confianza en los otros, comunicándonos de una manera asertiva y empática, que acepte los distintos puntos de vista. Asumir la responsabilidad por el bien común participando activamente en el cumplimiento de las necesidades sociales en distintos ámbitos: cultural, político, medioambiental, entre otros.

Desarrollo de Actitudes

- Perseverar en torno a metas con miras a la construcción de proyectos de vida y al aporte a la sociedad y al país con autodeterminación, autoconfianza y respeto por sí mismo y por los demás.
- Participar asumiendo posturas razonadas en distintos ámbitos: cultural, social, político y medioambiental, entre otros.
- Tomar decisiones democráticas, respetando los derechos humanos, la diversidad y la multiculturalidad.
- Asumir responsabilidad por las propias acciones y decisiones con conciencia de las implicancias que ellas tienen sobre sí mismo y los otros.

Consideraciones generales

Las consideraciones que se presentan a continuación son relevantes para una óptima implementación de los Programas de Estudio, se vinculan estrechamente con los enfoques curriculares, y permiten abordar de mejor manera los Objetivos de Aprendizaje de las Bases Curriculares.

EL ESTUDIANTE DE 3º y 4º MEDIO

La formación en los niveles de 3° y 4° Medio cumple un rol esencial en su carácter de etapa final del ciclo escolar. Habilita al alumno para conducir su propia vida en forma autónoma, plena, libre y responsable, de modo que pueda desarrollar planes de vida y proyectos personales, continuar su proceso educativo formal mediante la educación superior, o incorporarse a la vida laboral.

El perfil de egreso que establece la ley en sus objetivos generales apunta a formar ciudadanos críticos, creativos y reflexivos, activamente participativos, solidarios y responsables, con conciencia de sus deberes y derechos, y respeto por la diversidad de ideas, formas de vida e intereses. También propicia que estén conscientes de sus fortalezas y debilidades, que sean capaces de evaluar los méritos relativos de distintos puntos de vista al enfrentarse a nuevos escenarios, y de fundamentar adecuadamente sus decisiones y convicciones, basados en la ética y la integridad. Asimismo, aspira a que sean personas con gran capacidad para trabajar en equipo e interactuar en contextos socioculturalmente heterogéneos, relacionándose positivamente con otros, cooperando y resolviendo adecuadamente los conflictos.

De esta forma, tomarán buenas decisiones y establecerán compromisos en forma responsable y solidaria, tanto de modo individual como colaborativo, integrando nuevas ideas y reconociendo que las diferencias ayudan a concretar grandes proyectos.

Para lograr este desarrollo en los estudiantes, es necesario que los docentes conozcan los diversos talentos, necesidades, intereses y preferencias de sus estudiantes y promuevan intencionadamente la autonomía de los alumnos y la autorregulación necesaria para que las actividades de este Programa sean instancias significativas para sus desafíos, intereses y proyectos personales.

APRENDIZAJE PARA LA COMPRESIÓN

La propuesta metodológica de los Programas de Estudio tiene como propósito el aprendizaje para la comprensión. Entendemos la comprensión como la capacidad de usar el conocimiento de manera flexible, lo que permite a los estudiantes pensar y actuar a partir de lo que saben en distintas situaciones y contextos. La comprensión se puede desarrollar generando oportunidades que permitan al alumno ejercitar habilidades como analizar, explicar, resolver problemas, construir argumentos, justificar, extrapolar, entre otras. La aplicación de estas habilidades y del conocimiento a lo largo del proceso de aprendizaje faculta a los estudiantes a profundizar en el conocimiento, que se torna en evidencia de la comprensión.

La elaboración de los Programas de Estudio se ha realizado en el contexto del paradigma constructivista y bajo el fundamento de dos principios esenciales que regulan y miden la efectividad del aprendizaje: el aprendizaje significativo y el aprendizaje profundo.

¿Qué entendemos por aprendizaje significativo y profundo?

Un aprendizaje se dice significativo cuando los nuevos conocimientos se incorporan en forma sustantiva en la estructura cognitiva del estudiante. Esto se logra gracias a un esfuerzo deliberado del alumno por relacionar los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos y es producto de una implicación afectiva del estudiante; es decir, él quiere aprender aquello que se le presenta, porque lo considera valioso. Para la construcción de este tipo de aprendizaje, se requiere efectuar acciones de mediación en el aula que permitan activar los conocimientos previos y, a su vez, facilitar que dicho aprendizaje adquiera sentido precisamente en la medida en que se integra con otros previamente adquiridos o se relaciona con alguna cuestión o problema que interesa al estudiante.

Un aprendizaje se dice profundo solo si, por un lado, el aprendiz logra dominar, transformar y utilizar los conocimientos adquiridos en la solución de problemas reales y, por otro lado, permanece en el tiempo y se puede transferir a distintos contextos de uso. Para mediar el desarrollo de un aprendizaje de este tipo, es necesario generar escenarios flexibles y graduales que permitan al estudiante usar los conocimientos aplicándolos en situaciones diversas.

¿Cómo debe guiar el profesor a sus alumnos para que usen el conocimiento?

El docente debe diseñar actividades de clase desafiantes que induzcan a los estudiantes a aplicar habilidades cognitivas mediante las cuales profundicen en la comprensión de un nuevo conocimiento. Este diseño debe permitir mediar simultáneamente ambos aspectos del aprendizaje, el significativo y el profundo, y asignar al alumno un rol activo dentro del proceso de aprendizaje.

El principio pedagógico constructivista del estudiante activo permite que él desarrolle la capacidad de aprender a aprender. Los alumnos deben llegar a adquirir la autonomía que les permita dirigir sus propios procesos de aprendizaje y convertirse en sus propios mediadores. El concepto clave que surge como herramienta y, a la vez, como propósito de todo proceso de enseñanza-aprendizaje corresponde al pensamiento metacognitivo, entendido como un conjunto de disposiciones mentales de autorregulación que permiten al aprendiz monitorear, planificar y evaluar su propio proceso de aprendizaje.

En esta línea, la formulación de buenas preguntas es una de las herramientas esenciales de mediación para construir un pensamiento profundo.

Cada pregunta hace posible una búsqueda que permite integrar conocimiento y pensamiento; el pensamiento se despliega en sus distintos actos que posibilitan dominar, elaborar y transformar un conocimiento.

ENFOQUE INTERDISCIPLINARIO Y APRENDIZAJE BASADO EN PROYECTOS

La integración disciplinaria permite fortalecer conocimientos y habilidades de pensamiento complejo que faculten la comprensión profunda de ellos. Para lograr esto, es necesario que los docentes incorporen en su planificación instancias destinadas a trabajar en conjunto con otras disciplinas. Las Bases Curriculares plantean el Aprendizaje Basado en Proyectos como metodología para favorecer el trabajo colaborativo y el aprendizaje de resolución de problemas.

Un problema real es interdisciplinario. Por este motivo, en los Programas de Estudio de cada asignatura se integra orientaciones concretas y modelos de proyectos, que facilitarán esta tarea a los docentes y que fomentarán el trabajo y la planificación conjunta de algunas actividades entre profesores de diferentes asignaturas.

Se espera que, en las asignaturas electivas de profundización, el docente destine un tiempo para el trabajo en proyectos interdisciplinarios. Para ello, se incluye un modelo de proyecto interdisciplinario por asignatura de profundización.

Existe una serie de elementos esenciales que son requisitos para que el diseño de un proyecto² permita maximizar el aprendizaje y la participación de los estudiantes, de manera que aprendan cómo aplicar el conocimiento al mundo real, cómo utilizarlo para resolver problemas, responder preguntas complejas y crear productos de alta calidad. Dichos elementos son:

- **Conocimiento clave, comprensión y habilidades**

El proyecto se enfoca en profundizar en la comprensión del conocimiento interdisciplinario, ya que permite desarrollar a la vez los Objetivos de Aprendizaje y las habilidades del Siglo XXI que se requieren para realizar el proyecto.

- **Desafío, problema o pregunta**

El proyecto se basa en un problema significativo para resolver o una pregunta para responder, en el nivel adecuado de desafío para los alumnos, que se implementa mediante una pregunta de conducción abierta y atractiva.

- **Indagación sostenida**

El proyecto implica un proceso activo y profundo a lo largo del tiempo, en el que los estudiantes generan preguntas, encuentran y utilizan recursos, hacen preguntas adicionales y desarrollan sus propias respuestas.

- **Autenticidad**

El proyecto tiene un contexto del mundo real, utiliza procesos, herramientas y estándares de calidad del mundo real, tiene un impacto real, ya que creará algo que será utilizado o experimentado por otros, y/o está conectado a las propias preocupaciones, intereses e identidades de los alumnos.

- **Voz y elección del estudiante**

El proyecto permite a los estudiantes tomar algunas decisiones sobre los productos que crean, cómo funcionan y cómo usan su tiempo, guiados por el docente y dependiendo de su edad y experiencia de Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP).

- **Reflexión**

El proyecto brinda oportunidades para que los alumnos reflexionen sobre qué y cómo están aprendiendo, y sobre el diseño y la implementación del proyecto.

- **Crítica y revisión**

El proyecto incluye procesos de retroalimentación para que los estudiantes den y reciban comentarios sobre su trabajo, con el fin de revisar sus ideas y productos o realizar una investigación adicional.

² Adaptado de John Larmer, John Mergendoller, Suzie Boss. *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*, (ASCD 2015).

- **Producto público**

El proyecto requiere que los alumnos demuestren lo que aprenden, creando un producto que se presenta u ofrece a personas que se encuentran más allá del aula.

CIUDADANÍA DIGITAL

Los avances de la automatización, así como el uso extensivo de las herramientas digitales y de la inteligencia artificial, traerán como consecuencia grandes transformaciones y desafíos en el mundo del trabajo, por lo cual los estudiantes deben contar con herramientas necesarias para enfrentarlos. Los Programas de Estudio promueven que los alumnos empleen tecnologías de información para comunicarse y desarrollar un pensamiento computacional, dando cuenta de sus aprendizajes o de sus creaciones y proyectos, y brindan oportunidades para hacer un uso extensivo de ellas y desarrollar capacidades digitales para que aprendan a desenvolverse de manera responsable, informada, segura, ética, libre y participativa, comprendiendo el impacto de las TIC en la vida personal y el entorno.

CONTEXTUALIZACIÓN CURRICULAR

La contextualización curricular es el proceso de apropiación y desarrollo del currículum en una realidad educativa concreta. Este se lleva a cabo considerando las características particulares del contexto escolar (por ejemplo, el medio en que se sitúa el establecimiento educativo, la cultura, el proyecto educativo institucional de las escuelas y la comunidad escolar, el tipo de formación diferenciada que se imparte –Artística, Humanístico-Científica, Técnico Profesional–, entre otros), lo que posibilita que el proceso educativo adquiera significado para los estudiantes desde sus propias realidades y facilita, así, el logro de los Objetivos de Aprendizaje.

Los Programas de Estudio consideran una propuesta de diseño de clases, de actividades y de evaluaciones que pueden modificarse, ajustarse y transferirse a diferentes realidades y contextos.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y A LA INCLUSIÓN

En el trabajo pedagógico, es importante que los docentes tomen en cuenta la diversidad entre estudiantes en términos culturales, sociales, étnicos, religiosos, de género, de estilos de aprendizaje y de niveles de conocimiento. Esta diversidad enriquece los escenarios de aprendizaje y está asociada a los siguientes desafíos para los profesores:

- Procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación con el contexto y la realidad de los alumnos.
- Trabajar para que todos alcancen los Objetivos de Aprendizaje señalados en el currículum, acogiendo la diversidad y la inclusión como una oportunidad para desarrollar más y mejores aprendizajes.
- Favorecer y potenciar la diversidad y la inclusión, utilizando el aprendizaje basado en proyectos.
- En el caso de alumnos con necesidades educativas especiales, tanto el conocimiento de los profesores como el apoyo y las recomendaciones de los especialistas que evalúan a dichos estudiantes contribuirán a que todos desarrollen al máximo sus capacidades.

- Generar ambientes de aprendizaje inclusivos, lo que implica que cada estudiante debe sentir seguridad para participar, experimentar y contribuir de forma significativa a la clase. Se recomienda destacar positivamente las características particulares y rechazar toda forma de discriminación, agresividad o violencia.
- Proveer igualdad de oportunidades, asegurando que los alumnos puedan participar por igual en todas las actividades, evitando asociar el trabajo de aula con estereotipos asociados a género, características físicas o cualquier otro tipo de sesgo que provoque discriminación.
- Utilizar materiales, aplicar estrategias didácticas y desarrollar actividades que se adecuen a las singularidades culturales y étnicas de los estudiantes y a sus intereses.
- Promover un trabajo sistemático, con actividades variadas para diferentes estilos de aprendizaje y con ejercitación abundante, procurando que todos tengan acceso a oportunidades de aprendizaje enriquecidas.

Atender a la diversidad de estudiantes, con sus capacidades, contextos y conocimientos previos, no implica tener expectativas más bajas para algunos de ellos. Por el contrario, hay que reconocer los requerimientos personales de cada alumno para que todos alcancen los propósitos de aprendizaje pretendidos. En este sentido, conviene que, al diseñar el trabajo de cada unidad, el docente considere los tiempos, recursos y métodos necesarios para que cada estudiante logre un aprendizaje de calidad. Mientras más experiencia y conocimientos tengan los profesores sobre su asignatura y las estrategias que promueven un aprendizaje profundo, más herramientas tendrán para tomar decisiones pertinentes y oportunas respecto de las necesidades de sus alumnos. Por esta razón, los Programas de Estudio incluyen numerosos Indicadores de Evaluación, observaciones al docente, sugerencias de actividades y de evaluación, entre otros elementos, para apoyar la gestión curricular y pedagógica responsable de todos los estudiantes.

Orientaciones para planificar

Existen diversos métodos de planificación, caracterizados por énfasis específicos vinculados al enfoque del que provienen. Como una manera de apoyar el trabajo de los docentes, se propone considerar el diseño para la comprensión, relacionado con plantear cuestionamientos activos a los estudiantes, de manera de motivarlos a poner en práctica sus ideas y nuevos conocimientos. En este sentido, y con el propósito de promover el desarrollo de procesos educativos con foco claro y directo en los aprendizajes, se sugiere utilizar la planificación en reversa (Wiggins y McTigue, 1998). Esta mantiene siempre al centro lo que se espera que aprendan los alumnos durante el proceso educativo, en el marco de la comprensión profunda y significativa. De esta manera, la atención se concentra en lo que se espera que logren, tanto al final del proceso de enseñanza y aprendizaje, como durante su desarrollo.

Para la planificación de clases, se considera tres momentos:

1. Identificar el Objetivo de Aprendizaje que se quiere alcanzar

Dicho objetivo responde a la pregunta: ¿qué se espera que aprendan? Y se especifica a partir de los Objetivos de Aprendizaje propuestos en las Bases Curriculares y en relación con los intereses, necesidades y características particulares de los estudiantes.

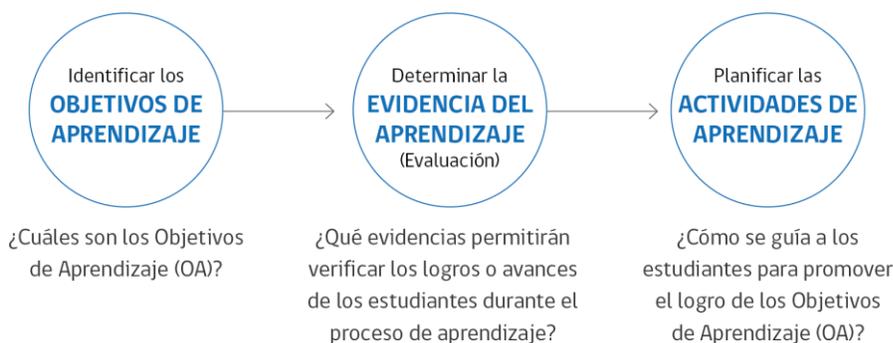
2. Determinar evidencias

Teniendo claridad respecto de los aprendizajes que se quiere lograr, hay que preguntarse: ¿qué evidencias permitirán verificar que el conjunto de Objetivos de Aprendizaje se logró? En este sentido, los Indicadores presentados en el Programa resultan de gran ayuda, dado que orientan la toma de decisiones con un sentido formativo.

3. Planificar experiencias de aprendizaje

Teniendo en mente los Objetivos de Aprendizajes y la evidencia que ayudará a verificar que se han alcanzado, llega el momento de pensar en las actividades de aprendizaje más apropiadas.

¿Qué experiencias brindarán oportunidades para adquirir los conocimientos, habilidades y actitudes que se necesita? Además de esta elección, es importante verificar que la secuencia de las actividades y estrategias elegidas sean las adecuadas para el logro de los objetivos (Saphier, Haley- Speca y Gower, 2008).



Orientaciones para evaluar los aprendizajes

La evaluación, como un aspecto intrínseco del proceso de enseñanza-aprendizaje, se plantea en estos programas con un foco pedagógico, al servicio del aprendizaje de los estudiantes. Para que esto ocurra, se plantea recoger evidencias que permitan describir con precisión la diversidad existente en el aula para tomar decisiones pedagógicas y retroalimentar a los alumnos. La evaluación desarrollada con foco pedagógico favorece la motivación de los estudiantes a seguir aprendiendo; asimismo, el desarrollo de la autonomía y la autorregulación potencia la reflexión de los docentes sobre su práctica y facilita la toma de decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que permitan apoyar de mejor manera los aprendizajes.

Para implementar una evaluación con un foco pedagógico, se requiere:

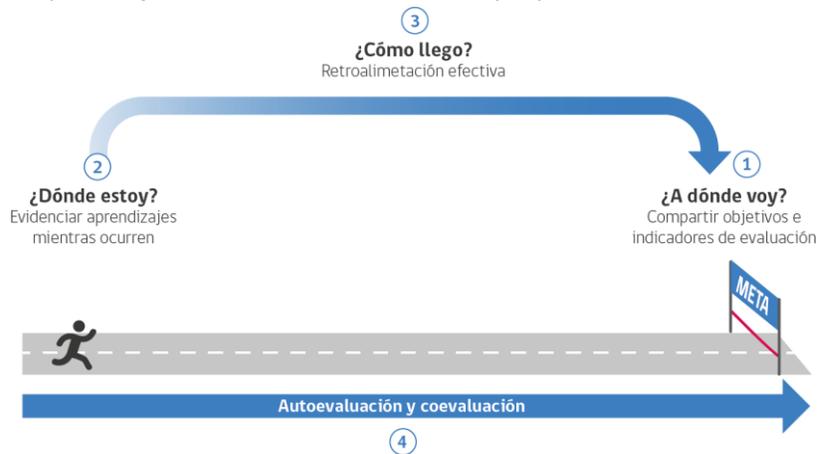
- Diseñar experiencias de evaluación que ayuden a los estudiantes a poner en práctica lo aprendido en situaciones que muestren la relevancia o utilidad de ese aprendizaje.
- Evaluar solamente aquello que los alumnos efectivamente han tenido la oportunidad de aprender mediante las experiencias de aprendizaje mediadas por el profesor.
- Procurar que se utilicen diversas formas de evaluar, que consideren las distintas características, ritmos y formas de aprender, necesidades e intereses de los estudiantes, evitando posibles sesgos y problemas de accesibilidad para ellos.
- Promover que los alumnos tengan una activa participación en los procesos de evaluación; por ejemplo: al elegir temas sobre los cuales les interese realizar una actividad de evaluación o sugerir la forma en que presentarán a otros un producto; participar en proponer los criterios de evaluación; generar experiencias de auto- y coevaluación que les permitan desarrollar su capacidad para reflexionar sobre sus procesos, progresos y logros de aprendizaje.
- Que las evaluaciones sean de la más alta calidad posible; es decir, deben representar de la forma más precisa posible los aprendizajes que se busca evaluar. Además, las evidencias que se levantan y fundamentan las interpretaciones respecto de los procesos, progresos o logros de aprendizajes de los estudiantes, deben ser suficientes como para sostener de forma consistente esas interpretaciones evaluativas.

EVALUACIÓN

Para certificar los aprendizajes logrados, el profesor puede utilizar diferentes métodos de evaluación sumativa que reflejen los OA. Para esto, se sugiere emplear una variedad de medios y evidencias, como portafolios, registros anecdóticos, proyectos de investigación grupales e individuales, informes, presentaciones y pruebas orales y escritas, entre otros. Los Programas de Estudio proponen un ejemplo de evaluación sumativa por unidad. La forma en que se diseñe este tipo de evaluaciones y el modo en que se registre y comunique la información que se obtiene de ellas (que puede ser con calificaciones) debe permitir que dichas evaluaciones también puedan usarse formativamente para retroalimentar tanto la enseñanza como el aprendizaje.

El uso formativo de la evaluación debiera preponderar en las salas de clases, utilizándose de manera sistemática para reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza, y para tomar decisiones pedagógicas pertinentes y oportunas que busquen promover el progreso del aprendizaje de todos los estudiantes, considerando la diversidad como un aspecto inherente a todas las aulas.

El proceso de evaluación formativa que se propone implica articular el proceso de enseñanza-aprendizaje en función de responder a las siguientes preguntas: ¿A dónde voy? (qué objetivo de aprendizaje espero lograr), ¿Dónde estoy ahora? (cuán cerca o lejos me encuentro de lograr ese aprendizaje) y ¿Qué estrategia o estrategias pueden ayudarme a llegar a donde tengo que ir? (qué pasos tengo que dar para acercarme a ese aprendizaje). Este proceso continuo de establecer un objetivo de aprendizaje, evaluar los niveles actuales y luego trabajar estratégicamente para reducir la distancia entre los dos, es la esencia de la evaluación formativa. Una vez que se alcanza una meta de aprendizaje, se establece una nueva meta y el proceso continúa.



Para promover la motivación para aprender, el nivel de desafío y el nivel de apoyo deben ser los adecuados –en términos de Vygotsky (1978), estar en la zona de desarrollo próximo de los estudiantes–, para lo cual se requiere que todas las decisiones que tomen los profesores y los propios alumnos se basen en la información o evidencia sobre el aprendizaje recogidas continuamente (Griffin, 2014; Moss & Brookhart, 2009).

Estructura del programa

Propósito de la unidad

Resume el objetivo formativo de la unidad, actúa como una guía para el conjunto de actividades y evaluaciones que se diseña en cada unidad. Se detalla qué se espera que el estudiante comprenda en la unidad, vinculando los contenidos, las habilidades y las actitudes de forma integrada.

Objetivos de Aprendizaje (OA)

Definen los aprendizajes terminales del año para cada asignatura. En cada unidad se explicita los Objetivos de Aprendizaje a trabajar.

Las actividades de aprendizaje

El diseño de estas actividades se caracteriza fundamentalmente por movilizar conocimientos, habilidades y actitudes de manera integrada, que permitan el desarrollo de una comprensión significativa y profunda de los Objetivos de Aprendizaje. Son una guía para que el profesor o la profesora diseñen sus propias actividades de evaluación.

Programa de Estudio

Unidad 1

UNIDAD 1

¿QUÉ DICEN LOS GRÁFICOS? ANÁLISIS CRÍTICO DE LA INFORMACIÓN

PROPÓSITO DE LA UNIDAD

En esta unidad se procura que los estudiantes resuelvan problemas que involucra elegir la representación gráfica más adecuada para describir tendencias de datos recopilados. Se espera que interpreten y elaboren diferentes maneras de representar información de forma manual y mediante el uso de herramientas digitales y que a partir del análisis crítico de la información que tomen decisiones y las argumenten. Algunas preguntas que pueden orientar el desarrollo de esta unidad son: ¿De qué manera la elección de un tipo de gráfico está determinado por el fenómeno o los datos que se necesita representar? y ¿Por qué la toma de decisiones depende del tipo de gráfico utilizado?

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

CONOCIMIENTO Y COMPRENSIÓN

- OA1** Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.
- OAc** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.
- OA_d** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
- OAI** Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Programa de Estudio

Unidad 1

ACTIVIDAD 1:

Modelar cambios con funciones en Chile

Duración: 6 horas pedagógicas

PROPÓSITO DE LA ACTIVIDAD

En esta actividad los estudiantes comprenden que para estudiar un cierto fenómeno es necesario recolectar, representar, interpretar y comunicar gráficamente la información. Los datos estadísticos que se calculan son formas de analizar la situación y desarrollar con esto una mejor capacidad de hacer inferencias y tomar decisiones pertinentes en el caso de situaciones problemáticas. Para esto, los estudiantes trabajan de forma colaborativa y se interesan por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual y para el desarrollo del individuo.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- OA1** Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.
- OAc** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.
- OA_d** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.
- OAI** Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

La esperanza de vida al nacer representa el número medio de años que les queda por vivir a los sobrevivientes de una cierta edad. Es una estimación del promedio de años que vivirá un grupo de personas nacidas el mismo año, si las condiciones de mortalidad de la región o el país evaluado se mantuvieran constantes. La siguiente tabla, elaborada por el Instituto Nacional de Estadísticas (INE), muestra las esperanzas de vida de Chile desde 1992 hasta la estimación para 2021.

Indicadores de evaluación

Detallan uno o más desempeños observables, medibles, específicos de los estudiantes que permiten evaluar el conjunto de Objetivos de Aprendizaje de la unidad. Son de carácter sugerido, por lo que el docente puede modificarlos o complementarlos.

Orientaciones para el docente

Son sugerencias respecto de cómo desarrollar mejor una actividad. Generalmente indican fuentes de recursos que se puede adquirir (vínculos web), material de consulta y lecturas para el docente, y estrategias para tratar conceptos, habilidades y actitudes.

Recursos

Se especifica todos los recursos necesarios para desarrollar la actividad. En especial, es relevante incorporar recursos virtuales y de uso de TIC, dado el enfoque de aprendizaje para la comprensión profunda y el de las Habilidades para el Siglo XXI.

Actividades de evaluación sumativa de la unidad

Son propuestas de evaluaciones de cierre de unidad, que contemplan los aprendizajes desarrollados a lo largo de ellas. Mantienen una estructura similar a las actividades de aprendizaje.

Programa de Estudio Unidad 1

ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN:

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE OA2 Reflexionar sobre el efecto estético de las obras leídas, evaluando: <ul style="list-style-type: none">• Cómo la obra dialoga con las experiencias personales del lector y sus puntos de vista sobre diversas problemáticas del ser humano (afectos, dilemas éticos, conflictos, etc.).• Cómo los recursos y técnicas literarias de la obra inciden en el efecto estético producido. OA6 Producir textos (orales, escritos o audiovisuales) coherentes y cohesionados, para comunicar sus análisis e interpretaciones de textos, desarrollar posturas sobre temas, explorar creativamente con el lenguaje, entre otros propósitos: <ul style="list-style-type: none">• Aplicando un proceso de escritura* según sus propósitos, el género discursivo seleccionado, el tema y la audiencia.• Adecuando el texto a las convenciones del género y a las características de la audiencia (conocimientos, intereses, convenciones culturales). <small>*El proceso de escritura incluye las etapas de planificación, elaboración, edición y revisión.</small>	INDICADORES DE EVALUACIÓN <ul style="list-style-type: none">• Relacionan las obras leídas y su experiencia personal.• Describen el efecto estético producido por el uso de determinados recursos en la obra literaria.• Explican su experiencia de lectura a partir del efecto estético que les produjo la obra y la conexión de esta con su mundo personal como lector.• Desarrollan una postura, interpretación o análisis fundamentado a partir de conexiones con otras lecturas, discusiones en clases, experiencias personales, etc.• Construyen texto que ajustan en distintos momentos del proceso, a partir de su propósito comunicativo y de la comunicabilidad del texto.• Aplican estrategias al desarrollar el proceso de escritura en función de su propósito comunicativo y del mensaje por comunicar.• Organizan sus ideas e información por medio de distintos recursos, según los propósitos de escritura y el género discursivo.
--	---

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN

ESCRITURA DE UN COMENTARIO LITERARIO
Los estudiantes leen un fragmento de un texto literario, puede ser un cuento, un poema o un fragmento de novela. Realizan el análisis, identificando uso y efecto estético de los recursos empleados por el autor, para luego elaborar una interpretación. La interpretación se fundamenta en el análisis realizado.

Es importante, para realizar el comentario, tener presente una estructura semejante a la que se ha utilizado durante la unidad en las diversas actividades, así como la presentada para trabajar la lectura complementaria en clases. Primero localizar el texto, luego, analizar los recursos lingüísticos y literarios empleados por el autor, y proponer para ello una interpretación.

SECUENCIA

Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial

Propósitos Formativos

Esta asignatura trata del razonamiento y la toma de decisiones en condiciones de incerteza. Ofrece oportunidades de aprendizaje para integrar las probabilidades y la estadística como una herramienta para: analizar diversas situaciones o fenómenos sociales y científicos; extraer conclusiones; tomar decisiones con base en datos cuantitativos; comunicar y argumentar resultados, y validar conclusiones o hallazgos acerca de muestras y poblaciones. En este escenario, las tecnologías digitales permiten visualizar conceptos y situaciones, plantear conjeturas y validarlas, y experimentar o proponer soluciones.

En la asignatura, los estudiantes podrán desarrollar habilidades tecnológicas, como el uso pertinente de herramientas digitales (software, aplicaciones, graficadores y simuladores, entre otras), y aquellas que permiten buscar, seleccionar, contrastar o validar información confiable en un ambiente digital; asimismo, podrán trabajar colaborativamente en línea a través de entornos virtuales y redes sociales, y evaluar el impacto de la información digital en contextos sociales, económicos y culturales. También se espera que aborden problemas propios de la disciplina, generen propuestas relacionadas con el entorno y se familiaricen con las herramientas digitales especialmente diseñadas para la estadística y las probabilidades.

La asignatura se inicia con procedimientos de la estadística descriptiva, y se enfatiza en la interpretación de diversas representaciones de conjuntos de datos y el uso de estadígrafos para comparar las características de muestras y poblaciones. Transita luego desde situaciones modeladas mediante variables aleatorias discretas, hacia las que requieren variables aleatorias continuas. Se amplía y profundiza el tratamiento de las distribuciones binomial y normal, al usar distribuciones como modelos de situaciones o fenómenos del contexto cotidiano, científico y social. Como cierre, se incorpora los métodos de la estadística inferencial, el uso de intervalos de confianza y la prueba de hipótesis.

Enfoque de las asignaturas de Matemática

La asignatura pone énfasis en la relación entre el conocimiento matemático, el aprendizaje de la matemática y sus aportes a la formación de las personas. Resolver problemas, aplicar razonamiento matemático y estadístico, modelar, representar, argumentar y comunicar siguen siendo aspectos centrales para la formación y el hacer de Matemática en la escuela.

A continuación, se presenta las principales definiciones conceptuales y didácticas en que se sustentan tanto la asignatura del Plan Común de Formación General, Matemática, como las asignaturas de profundización del Plan Diferenciado Humanístico-Científico.

Proceso de aprendizaje

El conocimiento matemático y el aumento de la capacidad para usarlo tienen profundas e importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. Debido a ello, el entorno social valora ese conocimiento y lo asocia a logros, beneficios y capacidades de orden superior. Al aprender matemática, las personas pueden percibirse como seres autónomos y valiosos en la sociedad; la calidad, pertinencia y amplitud de dicho conocimiento incide en sus posibilidades y su calidad de vida y en el potencial desarrollo del país.

Aprender matemática es, primordialmente, participar en la actividad matemática; es decir: que los estudiantes puedan plantearse ante problemas y traten de resolverlos por sí mismos. Dicho aprendizaje es progresivo, relacionado y enfrenta un aumento creciente de complejidad conceptual y procedimental; por ende, no consiste solo en memorizar definiciones y algoritmos. En 3° y 4° medio, esto exige aplicar simultáneamente conocimientos y procedimientos propios de aritmética, álgebra, geometría, estadística o probabilidades, para resolver un problema o modelar un fenómeno de la disciplina, de otra área del conocimiento o de la vida cotidiana.

Desarrollo del pensamiento racional

Entendida como construcción cultural, la matemática tiene importantes consecuencias en el aprendizaje y la educación en general, que se originan en sus aportes indiscutibles al desarrollo del pensamiento, y en las estrategias y razonamientos que ofrece para actuar en el entorno científico, social y natural. La racionalidad de esta disciplina es inseparable de toda actividad que se relaciona con ella, trátase de la formulación de conjeturas, procedimientos, argumentos, de alguna de las diversas formas de verificación de la validez de estos, o bien del modelamiento matemático de situaciones y de la construcción del lenguaje disciplinar. Por su parte, la estadística provee maneras de pensar y de trabajar para tomar decisiones apropiadas en condiciones de incerteza, lo que la hace necesaria para enfrentar múltiples situaciones del ámbito laboral, disciplinario y del diario vivir.

Modelamiento matemático

El modelamiento matemático es el proceso que busca integrar la resolución de problemas, la argumentación, el razonamiento matemático y estadístico, la representación y el estudio de fenómenos cotidianos, y problemas propios de la disciplina o de otras áreas del conocimiento y la cultura. El escenario natural para desarrollar el modelamiento matemático es uno de colaboración entre los estudiantes, pues juntos tienen mayores posibilidades de asir la complejidad de algunas situaciones que interesa considerar. De esta manera, la discusión y de la reflexión colectiva ayudan a construir conocimiento; cada cual puede enriquecerse con las opiniones de sus pares, aprender a argumentar, a convencer con argumentos fundados y a validar los avances. Todo ello incide en el aprendizaje de diversas disciplinas, y también en el desarrollo de virtudes ciudadanas.

Problemas rutinarios y no rutinarios

Aprender matemática implica aplicar conocimientos y procedimientos, y elaborar estrategias para abordar los problemas propios de la disciplina o de la vida cotidiana. En ese sentido, se busca profundizar en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios como una oportunidad de aprendizaje clave en esta disciplina. Se propone avanzar en el tipo de situaciones en las cuales los estudiantes resuelven problemas, formulan posibles explicaciones o conjeturas, y en la habilidad de argumentar. Un aprendizaje central de la matemática consiste en justificar en términos disciplinares; por ende, se espera que –en esta etapa de su vida escolar– los alumnos experimenten cómo formular conjeturas y justificarlas o refutarlas.

Metacognición

La metacognición juega un rol importante dentro de la matemática. La disciplina se aprende “haciendo matemática”, reflexionando acerca de lo hecho y confrontando la actuación propia con el conocimiento construido y sistematizado anteriormente. Por ello, están imbricadas en toda tarea matemática las habilidades de razonar, representar, modelar matemáticamente, argumentar y comunicar, y resolver problemas. Además, su desarrollo permite alcanzar niveles de abstracción y demostración cada vez más complejos y que suelen requerir de una aplicación rigurosa del lenguaje matemático. El caso de la estadística es muy similar, pero agrega una componente relativa a los datos con los cuales se trabaja, los que son siempre contextualizados.

Aprendizaje Basado en Proyectos y Resolución de Problemas

Toda asignatura ofrece oportunidades para que los estudiantes aborden problemas vinculados a su vida cotidiana. El Aprendizaje Basado en Proyectos promueve que se organicen durante un periodo extendido de tiempo en torno a un objetivo basado en una pregunta compleja, problema, desafío o necesidad –normalmente surgida desde sus propias inquietudes– que pueden abordar desde diferentes perspectivas y áreas del conocimiento, fomentando la interdisciplinariedad. El proyecto culmina con la elaboración de un producto o con la presentación pública de los resultados. En el Aprendizaje Basado en Problemas, en cambio, se parte de la base de preguntas, problemas y necesidades cotidianas sobre los cuales los estudiantes investigan y proponen soluciones.

En el caso de Matemática, estas metodologías permiten promover situaciones de aprendizaje desafiantes, pues para desarrollarlos es necesario que se resuelva –de manera colaborativa e incorporando las tecnologías digitales– problemas reales que exigen habilidades, conocimientos y actitudes en sus distintas etapas de diseño, ejecución y comunicación.

Ciudadanía digital

Las habilidades de alfabetización digital y uso de tecnologías que promueven las Bases Curriculares de 3° y 4° medio –como parte de las Habilidades para el siglo XXI– son fundamentales para que los alumnos trabajen en instancias de colaboración, comunicación, creación e innovación, mediante el uso de las

TIC. También contribuyen a desarrollar la capacidad de utilizarlas con criterio, prudencia y responsabilidad.

Esta asignatura fomenta que los estudiantes usen las tecnologías digitales –por medio de software y aplicaciones digitales– para alcanzar diferentes niveles de comprensión y aplicación de los conocimientos y procedimientos, al modelar y resolver problemas propios de la disciplina o relacionados con otras asignaturas, o bien de la vida cotidiana. Los software y las aplicaciones digitales especialmente diseñados para aprender Matemática –como procesadores simbólicos o de geometría dinámica, simuladores, *apps*, o aquellos especialmente diseñados para el análisis estadístico, algebraico o geométrico (de los cuales hay versiones de uso libre y gratuito)– facilitan el análisis y la visualización de los conceptos o procedimientos en estudio, agilizan el testeado de conjeturas por la vía de comprobar una gran cantidad de casos particulares, y permiten desplazar la atención desde las rutinas de cálculo hacia la comprensión y resolución de un problema que se quiere modelar y resolver.

Orientaciones para el docente

Orientaciones didácticas

El currículum ha confiado la enseñanza de la Estadística a los profesores de las asignaturas de Matemática. Ahora bien, las relaciones entre la Estadística y la Matemática en cuanto disciplinas científicas es materia de debate; además, la relación entre Estadística y la Teoría de Probabilidades es un rico campo de estudio.

A raíz de su formación general, al docente de Matemática le es fácil acceder a los cálculos estadísticos. Sin embargo, no basta favorecer sin más el aprendizaje de esos cálculos y la destreza para aplicarlos; también hay que focalizarse debidamente en la parte conceptual y en los propósitos que se tiene al hacerlos. La Estadística se ocupa de obtener información a partir de datos y de tomar decisiones en situaciones de incerteza; por ende, cabe destacar que sus cálculos son instrumentales para alcanzar esos fines.

Toda asignatura de Matemática tiene como un propósito general el desarrollo del pensamiento matemático, concebido con suficiente amplitud en el currículum como para contener al pensamiento estadístico. Este último involucra comprender por qué y cómo se hace el trabajo estadístico, a partir de ideas fundamentales como el contexto de los datos, la variabilidad, la incertidumbre y la inferencia informal. Ello permite comprender, analizar y actuar en forma crítica, en un escenario de incertezas que depende cada vez más del acceso a los datos y las tecnologías digitales.

Por consiguiente, se espera que el profesor abra espacios para que los estudiantes desarrollen el sentido del dato, describan cuantitativamente la respuesta a un fenómeno real, controlando y reduciendo su variación, y utilicen y expliquen diversas representaciones de datos y modelos para entender cómo se comportan los datos: de ese modo, podrán fortalecer el uso de estrategias para investigar, inferir y controlar razonablemente la variación, y tomar decisiones mejores y fundadas. Se pretende que los jóvenes aborden un problema en contexto, planifiquen cómo hacerlo, recolecten y “limpien” los datos, analicen e interpreten su comportamiento, y concluyan con una respuesta al problema inicial, basada en la evidencia provista por los datos y en reconocer ciertos niveles de certeza. En la actualidad, cuando se debe manejar grandes volúmenes de datos, el ciclo no comienza con un

problema, sino con los datos mismos, y las preguntas se plantean a partir del comportamiento observado de tales datos. Lo anterior exige plataformas guiadas por inteligencia artificial que, a su vez, involucran aprendizaje de máquinas (*machine learning*). Hay que tener presente este escenario, pues cambiará el empleo de manera substantiva.

Orientaciones para la evaluación

En las actividades de evaluación que se sugiere, se ha procurado reconocer las instancias individuales y las colaborativas.

Las evaluaciones forman parte del proceso de aprendizaje, lo orientan y lo apoyan; no son medidas para determinar capacidades, pero permiten obtener información sobre los progresos, la comprensión y el aprendizaje de los contenidos y las habilidades. Es importante que la evaluación se realice como un continuo dentro de las actividades en la sala de clases. Hay varias alternativas disponibles:

- *Proyectos* (de grupos o individuales): De duración variable, sirven para resolver problemas complejos, efectuar una investigación guiada o modelar un problema real. Requieren de objetivos claros, acordados previamente, y de resultados abiertos. Es la forma ideal para conectar diferentes áreas del conocimiento.
- *Diario de vida matemático*: Cuaderno o carpeta en que el estudiante desarrolla estrategias personales, exploraciones, definiciones propias o descubrimientos. El profesor puede orientar su elaboración y verificar si comprenden los conceptos que usan.
- *Portafolio*: Selección periódica de evidencias (problemas resueltos, trabajos, apuntes, en un dossier o una carpeta) recogidas en un período determinado, y que responde a uno o más Objetivos de Aprendizaje. Permiten demostrar aprendizaje y deben incluir justificación y reflexión. El estudiante tiene un rol activo en su evaluación.
- *Presentación matemática* de la resolución de un problema: Indica el proceso y los procedimientos usados. Para evaluar, se aplica criterios o indicadores como dominio del tema, uso de materiales de apoyo, uso del lenguaje. Los estudiantes deben conocer tales criterios y, eventualmente, el docente puede acordarlos con ellos.
- *Entrevista individual*: Mientras el curso trabaja en una tarea, el profesor dialoga con uno o más estudiantes de un mismo nivel de desempeño acerca de un concepto, un desafío o una pregunta relacionada con el tema abordado en la clase.
- *Actividad autoevaluable*: Al finalizar un tema o unidad, el profesor da a sus estudiantes la oportunidad de trabajar con un material que les permita autocorregirse (por ejemplo: hoja de actividades con las respuestas al reverso). A partir de los resultados, pueden verificar su avance o aquello que deben reforzar, corregir su tarea con ayuda de compañeros, completar su trabajo con recursos que estén a su alcance –como cuaderno, libros, diccionarios–, anotar sus dudas y, en última instancia, pedir ayuda al docente.

Orientaciones para contextualización

La asignatura de Probabilidades y Estadística Descriptiva e Inferencial busca ofrecer a los alumnos oportunidades de aprendizaje contextualizadas tanto en la matemática misma como en diferentes ámbitos significativos, interdisciplinarios o de profundización matemática. De este modo, podrán sistematizar y aplicar los conocimientos y procedimientos aprendidos, y también idear y poner en práctica sus propias maneras de abordar aquellos fenómenos y problemas.

Organización curricular

Las Bases Curriculares de las asignaturas de profundización de Matemática presentan Objetivos de Aprendizaje de dos naturalezas: unos de habilidades³, comunes a todas las asignaturas científicas del nivel, y otros enfocados en el conocimiento y la comprensión. Ambos tipos de objetivo se entrelazan en el proceso de enseñanza-aprendizaje, junto con las actitudes propuestas desde el marco de Habilidades para el siglo XXI.

Objetivos de Habilidades para 3° y 4° medio

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

Habilidades

Resolver problemas

- Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.
- Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

Argumentar y Comunicar

- Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.
- Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

Modelar

- Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.
- Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

³ No es necesario seguir un orden lineal al enseñar el proceso de investigación; se puede trabajar cada uno de los Objetivos de Aprendizaje en forma independiente.

Representar

- g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.
- h. Evaluar diferentes representaciones, de acuerdo a su pertinencia con el problema a solucionar.

Habilidades digitales

- i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.
- j. Desarrollar un trabajo colaborativo en línea para discusión y resolución de tareas matemáticas, usando herramientas electrónicas de productividad, entornos virtuales y redes sociales.
- k. Analizar y evaluar el impacto de las tecnologías digitales en contextos sociales, económicos y culturales.
- l. Conocer tanto los derechos propios como los de los otros, y aplicar estrategias de protección de la información en ambientes digitales.

Objetivos de Aprendizaje para 3° y 4° medio

Se espera que los estudiantes sean capaces de:

Conocimiento y comprensión

1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.
2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.
3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.
4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

Visión global del año

Unidad 1	Unidad 2	Unidad 3	Unidad 4
¿Qué dicen los gráficos? Análisis crítico de la información	Media muestral, dispersión y correlación	Situaciones o fenómenos que se modelan por medio de las distribuciones binomial y normal	Inferencia estadística
Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje	Objetivos de Aprendizaje
<p>OA 1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.</p> <p>OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.</p> <p>OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información</p>	<p>OA 2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.</p> <p>OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.</p> <p>OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa</p>	<p>OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.</p> <p>OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.</p> <p>OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.</p>	<p>OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.</p> <p>OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.</p> <p>OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.</p> <p>OA d. Argumentar, utilizando lenguaje</p>

<p>matemática/cuantitativa confiable a través de la web.</p>	<p>va confiable a través de la web.</p>		<p>simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.</p> <p>OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.</p>
<p style="text-align: center;">Actitudes</p> <p>Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.</p> <p style="text-align: center;">Tiempo estimado: 10 semanas</p>	<p style="text-align: center;">Actitudes</p> <p>Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.</p> <p>Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.</p> <p style="text-align: center;">Tiempo estimado: 9 semanas</p>	<p style="text-align: center;">Actitudes</p> <p>Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.</p> <p>Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.</p> <p style="text-align: center;">Tiempo estimado: 10 semanas</p>	<p style="text-align: center;">Actitudes</p> <p>Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.</p> <p>Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.</p> <p style="text-align: center;">Tiempo estimado: 9 semanas</p>

Unidad 1

Unidad 1: ¿Qué dicen los gráficos? Análisis crítico de la información

Propósito de la unidad

Se procura que los estudiantes resuelvan problemas que involucran elegir la representación gráfica más adecuada para describir tendencias de datos recopilados. Se espera que interpreten y elaboren diferentes maneras de representar información, de forma manual y usando herramientas digitales, que analicen críticamente la información y, sobre esa base, tomen decisiones y las argumenten. Algunas preguntas que pueden orientar el desarrollo de esta unidad son: ¿De qué manera el fenómeno o los datos que se necesita representar, determinan qué tipo de gráfico elegir? ¿Por qué la toma de decisiones depende del tipo de gráfico utilizado?

Objetivos de Aprendizaje

OA 1.

Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actividad 1: Analizar críticamente la información en el contexto de las estadísticas vitales

PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden que, para estudiar un cierto fenómeno, hay que recolectar, representar, interpretar y comunicar gráficamente la información. Los datos estadísticos que se calcula son formas de analizar la situación y permiten hacer inferencias y tomar decisiones pertinentes en situaciones problemáticas. Para esto, trabajan de forma colaborativa y se interesan por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual y para el desarrollo del individuo.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 12 horas pedagógicas.

DESARROLLO

COMPRIENDIENDO LA ESPERANZA DE VIDA

La esperanza de vida al nacer es una estimación del promedio de años que vivirá un grupo de personas nacidas el mismo año, si las condiciones de mortalidad de la región o el país evaluado se mantuvieran constantes. La siguiente tabla, elaborada por el Instituto Nacional de Estadísticas (INE), muestra las esperanzas de vida de Chile desde 1992 hasta la estimación para 2021⁴.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA d, e, 3° y 4° medio.
Educación Ciudadana
OA a, f, 3° y 4° medio.

Esperanza de vida al nacer	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Ambos sexos	74,1	74,4	74,7	75,0	75,3	75,6	75,8	76,1	76,4	76,6	76,9	77,1	77,4	77,6	77,8
Hombres	71,1	71,4	71,7	72,0	72,3	72,5	72,8	73,1	73,4	73,6	73,9	74,2	74,4	74,7	74,9
Mujeres	77,2	77,5	77,8	78,1	78,4	78,7	78,9	79,2	79,5	79,8	80,0	80,2	80,5	80,7	80,9

Esperanza de vida al nacer	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Ambos sexos	78,1	78,3	78,5	78,7	79,0	79,2	79,4	79,6	79,8	80,0	80,2	80,4	80,6	80,8	81,0
Hombres	75,1	75,4	75,6	75,9	76,1	76,3	76,6	76,8	77,0	77,2	77,4	77,7	77,9	78,1	78,3
Mujeres	81,1	81,3	81,5	81,7	81,9	82,1	82,3	82,5	82,7	82,9	83,0	83,2	83,4	83,6	83,8

- Organícense en grupos y abran una planilla de cálculo (como Excel), ingresen los datos de la tabla y luego sombreen la fila de los hombres (sólo números). Debiese quedar como la siguiente:

Año	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Hombres	71,1	71,4	71,7	72,0	72,3	72,5	72,8	73,1	73,4	73,6	73,9	74,2	74,4	74,7	74,9	75,1	75,4	75,6	75,9	76,1	76,3	76,6	76,8	77,0	77,2	77,4	77,7	77,9	78,1	78,3
Mujeres	77,2	77,5	77,8	78,1	78,4	78,7	78,9	79,2	79,5	79,8	80,0	80,2	80,5	80,7	80,9	81,1	81,3	81,5	81,7	81,9	82,1	82,3	82,5	82,7	82,9	83,0	83,2	83,4	83,6	83,8

- Luego, en el Menú Insertar, seleccionen la herramienta Gráficos recomendados, escojan el de barras verticales y se creará un gráfico de barras que representa los datos seleccionados. Hagan clic con el botón derecho en el área blanca del gráfico (al costado del título), escojan la opción “Seleccionar datos...” y escriban el título “Esperanza de vida (hombres)”. Además, agreguen la fila “Años” en la casilla “Etiquetas del eje horizontal (categoría)”.
- Siguiendo los mismos pasos, construyan ahora un gráfico para mujeres, análogo al anterior.
- Investiguen, indicando las fuentes utilizadas, cómo se ha podido “extrapolar” la esperanza de vida hasta el año 2021, a partir de esta información y gráficos. ¿Se relaciona con la tendencia que ha seguido a través de los años precedentes, desde 1992?

⁴ Datos extraídos desde <https://www.censo2017.cl/descargas/proyecciones/metodologia-estimaciones-y-proyecciones-de-poblacion-chile-1992-2050.pdf>

2. Observen el gráfico que representa la esperanza de vida para hombres y respondan:
 - a. ¿Cuál es la menor y mayor esperanza de vida y en qué años se dan?
 - b. ¿A partir de qué año la esperanza de vida es de más de 75 años?
 - c. ¿En qué año alcanzó los 77 años?
 - d. ¿Entre qué años varía de 72 a 77 años?
 - e. A partir de 1992, ¿en cuántos años aumenta la esperanza de vida en hombres hasta 2021?
 - f. Respecto de 1992, ¿qué porcentaje ha aumentado la esperanza de vida en hombres hasta 2021? Expliquen su procedimiento.
 - g. Redacten tres preguntas, diferentes a las anteriores, que se pueda realizar a partir del gráfico, y pidan a otro grupo que las responda. Verifiquen las respuestas.

3. Observen el gráfico que representa la esperanza de vida para mujeres y respondan:
 - a. ¿Cuál es la menor y mayor esperanza de vida y en qué años se dan?
 - b. ¿Cuál es la tendencia en la esperanza de vida a medida que transcurren los años?
 - c. ¿A partir de qué año la esperanza de vida es de más de 75 años?
 - d. ¿En qué año alcanzó los 80 años?
 - e. A partir de 1992, ¿en cuántos años aumenta la esperanza de vida hasta 2021?
 - f. Respecto de 1992, ¿qué porcentaje ha aumentado la esperanza de vida en mujeres hasta 2021? Expliquen su procedimiento.
 - g. Redacten tres preguntas, diferentes a las anteriores, que se pueda realizar a partir del gráfico, y pidan a otro grupo que las responda. Verifiquen las respuestas.

COMPARACIÓN DE LA ESPERANZA DE VIDA ENTRE HOMBRES Y MUJERES

1. En grupos, construyan un solo gráfico en la planilla de cálculo, con la esperanza de vida de hombres y mujeres.
 - a. Para esto, deben seleccionar simultáneamente los datos de hombres y mujeres en la tabla que tienen en la planilla de cálculo, como se muestra en la siguiente imagen:

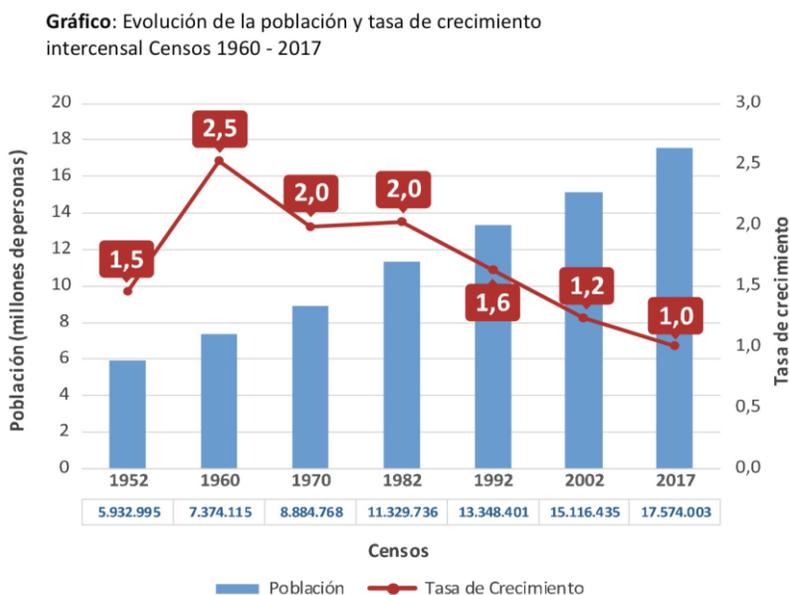
Año	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Hombres	71,1	71,4	71,7	72,0	72,3	72,5	72,8	73,1	73,4	73,6	73,9	74,2	74,4	74,7	74,9	75,1	75,4	75,6	75,9	76,1	76,3	76,6	76,8	77,0	77,2	77,4	77,7	77,9	78,1	78,3
Mujeres	77,2	77,5	77,8	78,1	78,4	78,7	78,9	79,2	79,5	79,8	80,0	80,2	80,5	80,7	80,9	81,1	81,3	81,5	81,7	81,9	82,1	82,3	82,5	82,7	82,9	83,0	83,2	83,4	83,6	83,8

- b. Luego, en el menú Insertar, escojan la opción “Columnas” y el gráfico de barras agrupadas (tiene este aspecto en Excel: ).
2. Observen el gráfico obtenido en 1b. y respondan:
 - a. ¿Es similar la tendencia (aumentar o disminuir) de la esperanza de vida a través de los años para hombres y mujeres? Dialoguen en el grupo y respondan.
 - b. En 1992, las mujeres tenían una esperanza de vida de 77,2 años. ¿En qué año los hombres llegaron a esta misma cifra?
 - c. ¿Cuántos años más que los hombres vivían las mujeres en 1992? ¿De cuántos años será esta diferencia en 2021?
 - d. ¿En qué año se dio la mayor diferencia entre la esperanza de vida de hombres y de mujeres? ¿En qué año se dio la menor diferencia? Discutan en el grupo y respondan.
 - e. ¿Cuál es la tendencia en la diferencia de años de la esperanza de vida entre hombres y mujeres? Compartan ideas en el grupo y respondan.
3. Investiguen acerca de las razones de la diferencia en la esperanza de vida entre hombres y mujeres, e indiquen las fuentes utilizadas.
 - a. ¿Es un hecho científico que las mujeres viven más que los hombres?
 - b. ¿Qué otras causas colaboran en este fenómeno?
 - c. ¿Es posible que la esperanza de vida entre hombres y mujeres se iguale en algún momento? Discutan en el grupo y respondan.
4. Investiguen, indicando las fuentes utilizadas, qué implica la evolución en la esperanza de vida de hombres y mujeres con relación a:
 - a. La edad de jubilación.
 - b. Las pensiones obtenidas y los mecanismos involucrados a partir de la administración de los fondos mediante las AFP u otras instituciones.
 - c. El segmento de adultos mayores, ¿es cada vez mayor? ¿Envejece la población? Discutan en el grupo y respondan.
 - d. ¿Qué medidas deben adoptar los países con relación a este fenómeno? Aporten ideas en el grupo y respondan.

EVOLUCIÓN DE LA POBLACIÓN Y TASA DE CRECIMIENTO

En el último censo de población, realizado en 2017, se determinó que hemos llegado a 17.574.003 habitantes en Chile. El siguiente gráfico de barras y de líneas⁵ muestra cómo ha ido creciendo la población desde 1952.

Conexión interdisciplinaria:
Educación Ciudadana
OA a, c, 3° y 4° medio.



- Estimación de la cantidad de personas desde un gráfico. Respondan lo siguiente:
 - ¿Alrededor de cuántas personas había en 1970? Hagan una estimación a partir de las cifras entregadas.
 - Si nacieron el mismo año en que se realizó un censo, estimen alrededor de cuántas personas había en Chile en ese momento. Aporten ideas en el grupo y respondan.
 - Si no nacieron en un año en el que se haya efectuado un censo, estimen el rango de personas que había entre el censo anterior y el posterior al año en que nacieron (por ejemplo: “había más de... y menos de...”). Discutan en el grupo y respondan.
 - Respecto de 2002, ¿en qué porcentaje aumentó la cantidad de personas en 2017? Expliquen su procedimiento.
- Estimación de porcentajes, duplicación o triplicación de la población y tendencias. Respondan lo siguiente:
 - ¿Qué porcentaje era la cantidad de personas en 2002 respecto de 2017? Expliquen su procedimiento.
 - Determinen aproximadamente cuándo se duplicó la cantidad de personas que había en 1952. Expliquen su procedimiento.

⁵ Presentado en la segunda entrega de resultados del censo en 2017. Extraído desde http://www.censo2017.cl/wp-content/uploads/2018/05/presentacion_de_la_segunda_entrega_de_resultados_censo2017.pdf

- c. ¿Ha habido otras duplicaciones del número de personas desde 1952? Dialoguen en el grupo y respondan.
 - d. Según los datos del gráfico, ¿ha ocurrido que la cantidad de personas se haya triplicado? Discutan en el grupo y respondan.
 - e. ¿Cuál es la tendencia en el número de personas desde 1952 hasta 2017? Comenten en el grupo y respondan.
 - f. Si se mantuviera la tendencia que muestra el gráfico y se realizara un nuevo censo en 2022, ¿cuál sería la cantidad estimada de personas en Chile ese año? ¿Y en 2032? Compartan ideas en el grupo y argumenten.
3. La “tasa de crecimiento medio anual de la población” (o simplemente “tasa de crecimiento”) corresponde al incremento promedio anual de personas⁶; en este caso, se calculará por cada cien habitantes. Entre los censos de 1952 y de 1960, la población en Chile creció a un ritmo promedio de 2,5 personas (línea roja en el gráfico). Respondan lo siguiente.
- a. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento de 1982?
 - b. Según los datos del gráfico, ¿cuáles han sido la mayor y la menor tasa de crecimiento medio anual de la población registrada en los censos?
 - c. ¿Qué tendencia muestra la tasa de crecimiento registrada en los censos desde 1952 hasta 2017? Aporten ideas en el grupo y argumenten.
4. Estimación de las variaciones en la tasa de crecimiento entre periodos. Respondan lo siguiente:
- a. ¿Cuál fue la variación en la tasa de crecimiento registrada entre los censos de 1960 y de 1982? Discutan en el grupo y argumenten.
 - b. ¿Cuál fue la variación en la tasa de crecimiento registrada entre los censos de 1982 y de 2002? Compartan ideas en el grupo y argumenten.
 - c. Observen que las variaciones de tasas de crecimiento pedidas en las dos preguntas anteriores se dan en intervalos de aproximadamente 20 años y comparen ambas variaciones. ¿Qué pueden decir de esta comparación? Dialoguen en el grupo y argumenten.
5. Tendencias en la tasa de crecimiento a través de los años. Respondan lo siguiente:
- a. Observen que la tasa de crecimiento en el censo de 1952 es similar a la del censo de 1992. Pero ¿cómo caracterizar o describir ambas tasas, acorde a la tendencia en cada caso? ¿Cuál sería la diferencia? (no se refiere a la diferencia numérica).
 - b. Si se mantiene la tendencia en la tasa de crecimiento que viene desde 1982, estimen la tasa de crecimiento que se registraría en un eventual censo en 2022.
 - c. Hagan la misma estimación anterior para un posible censo el 2032. Dialoguen en el grupo y argumenten.

⁶ Se corrige según el número de defunciones, de inmigrantes y de emigrantes.

6. Investiguen acerca de la tendencia en la tasa de crecimiento, e indiquen las fuentes utilizadas. Compartan ideas en el grupo y argumenten.
 - a. Si se mantiene la tendencia en la tasa de crecimiento que viene desde 1982, ¿podría ocurrir que la tasa de crecimiento fuese negativa?
 - b. ¿Cuándo podría suceder aproximadamente?
 - c. ¿Cómo afectaría a la cantidad de personas si la tasa de crecimiento fuese negativa?

ANALIZAR GRÁFICAMENTE LAS CAUSAS DE UNA INTOXICACIÓN CON ALIMENTOS

Al día siguiente de una cena a la que asistieron 19 personas, varias sufrieron síntomas de intoxicación por consumir algún alimento en mal estado. Para detectar cuál o cuáles de los alimentos consumidos provocaron la intoxicación, en los días siguientes encuestó a los comensales sobre lo que cada uno ingirió.

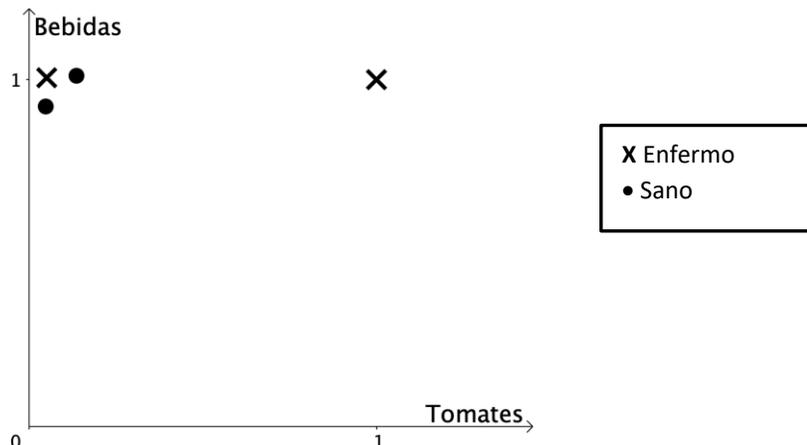
Después de un análisis, se redujo a dos los alimentos que pudieron causar la intoxicación: tomates o bebidas. La tabla adjunta muestra los resultados de la encuesta para estos alimentos.

	Tomate	Bebidas	Salud
1	1	1	Enfermo
2	1	1	Enfermo
3	0	1	Enfermo
4	0	1	Sano
5	0	1	Enfermo
6	1	1	Enfermo
7	0	1	Sano
8	0	1	Enfermo
9	1	1	Enfermo
10	0	1	Enfermo
11	0	0	Enfermo
12	1	1	Sano
13	1	1	Sano
14	0	1	Enfermo
15	1	1	Enfermo
16	0	1	Enfermo
17	1	0	Enfermo
18	1	1	Enfermo
19	1	0	Sano

1. En el siguiente gráfico, registren los datos de la tabla como se indica a continuación:
 - a. Cada persona sana se representa con un círculo y cada persona enferma con una cruz.
 - b. Completen el gráfico con todos los datos de la tabla y vayan agrupando a las personas en el gráfico, según hayan consumido sólo tomates, sólo bebidas, ambos o ninguno.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA d, e, 3° y 4° medio.

- c. A modo de ejemplo, se ha graficado a las personas 4, 5, 6 y 7 de la tabla.



2. Análisis de las causas. Compartan ideas en el grupo y argumenten según lo que muestra el gráfico.
 - a. ¿En qué partes del gráfico se concentra la mayor cantidad de personas?
 - b. ¿Se puede decir que hay alguna tendencia entre las personas que no consumieron bebidas?
 - c. ¿Se puede afirmar que hay alguna tendencia entre las personas que no consumieron tomates?
 - d. ¿Se puede afirmar que hay alguna tendencia entre las personas que sí consumieron tomates?
 - e. ¿Se puede afirmar que hay alguna tendencia entre las personas que sí consumieron bebidas?
3. Conclusiones. De los análisis anteriores, aporten ideas en el grupo y concluyan.
 - a. ¿Es el tomate el causante de la intoxicación?
 - b. ¿Son las bebidas?
 - c. ¿Son ambos?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos previos de 2° medio. Algunas de las preguntas o instrucciones pueden ser:
 - ¿Qué información te entrega un gráfico a diferencia de la que te entrega una tabla?
 - ¿Cuáles son las características de un gráfico de barra y de un histograma?
 - Haz una lista con todos los gráficos y sus características, según lo trabajado en años anteriores.
 - ¿Qué entiendes por manipulación de gráficos?
 - ¿Qué es el crecimiento porcentual? ¿Cómo se calcula? ¿Por qué podría servir para entregar información estadística?

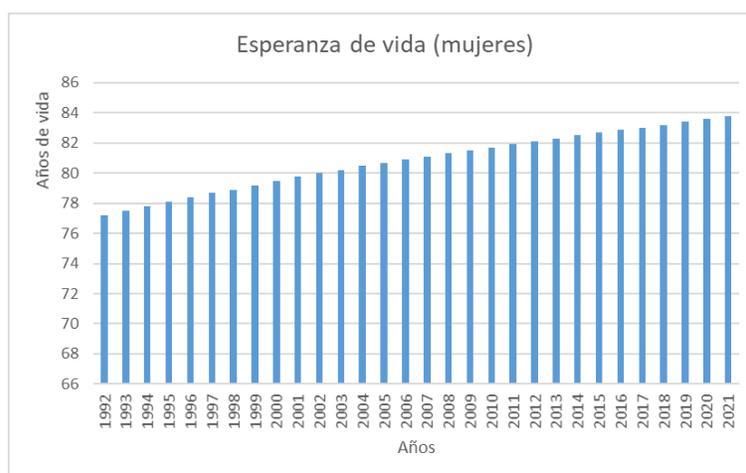
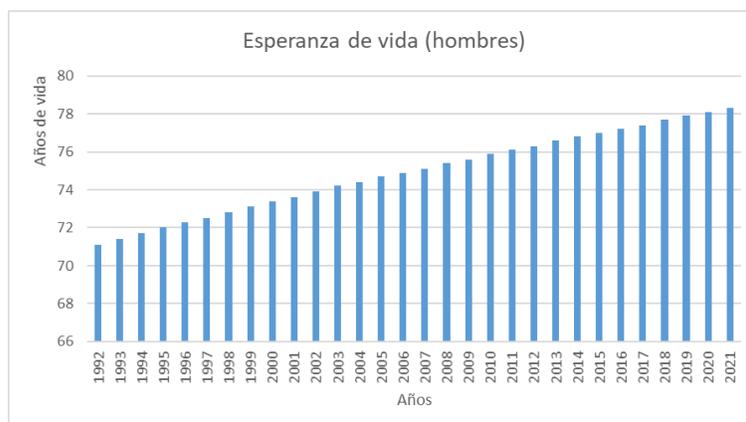
2. Se recomienda realizar algunos gráficos con una planilla de cálculo, reforzar la estructura de los gráficos y revisar sus elementos básicos:
 - Título del gráfico: texto descriptivo que se coloca en la parte superior.
 - Series de datos: los puntos de datos relacionados entre sí trazados en un gráfico. Cada serie de datos tiene un color exclusivo. Un gráfico puede tener una o más series de datos, a excepción de los gráficos circulares, que solamente pueden tener una serie de datos.
 - Ejes: líneas que sirven como referencia de medida. El eje vertical generalmente contiene datos. El eje horizontal suele contener las categorías del gráfico. Comienzan en el cero y se debe mantener la proporcionalidad en las marcaciones y medidas.
 - Título de eje: texto descriptivo para cada eje.
 - Leyenda: recuadro que ayuda a identificar los colores asignados a las series de datos.

3. Dado que uno de los objetivos de la unidad 1 es OA 1 (Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales), se sugiere compartir la siguiente propuesta de rúbrica con los jóvenes para que evalúen si el gráfico elaborado comunica la información de la situación de forma adecuada:

	Totalmente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Criterios			
Identifican las variables del problema.	Nombran los ejes o etiquetas según las variables de la situación, identificando entre la característica y los datos de esta en las etiquetas.	Nombran los ejes o etiquetas, que coinciden parcialmente con la situación.	Se nombra los ejes según una situación diferente.
Organizan las unidades de medida dentro del gráfico.	Las unidades utilizadas son etiquetadas, distribuidas de modo uniforme en los ejes, y están relacionadas con los datos del problema.	Las unidades utilizadas están distribuidas de modo uniforme y solo uno de los ejes está relacionado con los datos del problema.	Las unidades utilizadas se distribuyen de forma aleatoria y están relacionadas con un problema diferente al propuesto.
Elaboran el título del gráfico.	Se incluye las variables de la situación, la relación de dependencia y las unidades en que se va a presentar la información.	Se incluye las variables de la situación.	Se incluye palabras que corresponden a una situación diferente.
Seleccionan gráficos pertinentes a la situación.	El gráfico utilizado presenta la información y permite hacer interpretaciones de la situación.	El gráfico utilizado presenta la información.	El gráfico utilizado presenta la información de otra situación.

4. Una vez construidos los gráficos en la planilla de cálculo, se sugiere que primero interpreten separadamente los gráficos sobre la esperanza de vida de hombres y mujeres, y respondan las preguntas correspondientes. En cada caso, el grupo debe compartir ideas y argumentar. También

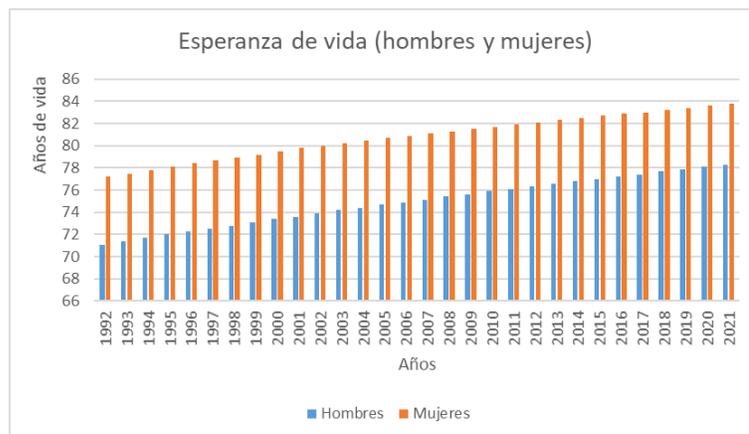
conviene que los propios estudiantes elaboren preguntas que se pueda responder a partir del gráfico y las intercambien con otros grupos. Los gráficos deberían ser similares a los siguientes:



- Se sugiere que los alumnos trabajen colaborativamente con una planilla de cálculo (como Excel) para desarrollar habilidades asociadas al análisis crítico de información. También se recomienda que determinen la tasa de crecimiento de una población a partir de los siguientes pasos:
 - Identifica el valor inicial: la población al inicio del año 2017 era de 2,36 millones.
 - Determina el valor final: la población al final del año 2017 era de 3 millones.
 - Determina el periodo de crecimiento: un año (s)
 - Calcula la tasa de crecimiento anual: $\frac{3-2,36}{2,36} \cdot 100$

Para más años, se debe utilizar una fórmula con exponentes; conviene relacionar con el crecimiento porcentual.
- Dado que los gráficos entregan información hasta el año 2021, se sugiere también que investiguen –indicando las fuentes de información– cómo se puede “extrapolar” comportamientos a periodos que aún no ocurren y de qué manera esto se vincula con la tendencia que sigue la esperanza de vida en hombres y mujeres hasta los periodos precedentes.

7. Para comparar las tendencias, se plantea mostrar las esperanzas de vida de hombres y mujeres en un solo gráfico. Conviene que usen el gráfico de barras agrupadas en la planilla de cálculo, y que revisen los elementos gráficos básicos mencionados. En cada pregunta, el grupo debe compartir ideas y argumentar. El gráfico que se pide en la planilla de cálculo debería ser similar al siguiente:



8. Se recomienda ampliar el tipo de preguntas relacionadas con la esperanza de vida a otros aspectos, por ejemplo: las causas científicas para las diferencias entre hombres y mujeres, o conexiones con el sistema de pensiones y la jubilación y considerar que la población de adultos mayores está creciendo y las medidas que van adoptando los países al respecto.
9. En la actividad de la evolución de la población a través de los años y la tasa de crecimiento, se sugiere que los alumnos estimen –a partir de un gráfico dado– la cantidad de personas en cada periodo, más allá de las cifras exactas que puedan aparecer. Lo importante es que se manejen con órdenes de magnitud y establezcan comparaciones entre diferentes años. También tienen que poder llevar la información y comparaciones a porcentajes, y establecer aquellos momentos en que la población se ha duplicado o incluso triplicado.
10. Con relación a la tasa de crecimiento, se recomienda que observen su tendencia a través de los diferentes periodos. Deberían argumentar acerca de las variaciones en dicho índice y ser capaces de caracterizarlo en periodos diferentes, aun cuando haya valores similares; por ejemplo, en 1952 y 1992.
11. La actividad relacionada con la “intoxicación” propone un contexto donde se utiliza de manera básica un gráfico de dispersión para tomar una decisión o discriminar información. La idea es que comprendan y valoren que una representación de este tipo permite observar tendencias y buscar posibles causas que, si no fuera por el aspecto “gráfico”, sería más difícil determinar.

12. Para que analicen la situación planteada, se recomienda usar un gráfico de dispersión simple, donde deben registrar los datos de la tabla en cuatro zonas, agrupando en ellas a las personas que sólo comieron tomate, las que sólo ingirieron bebidas, las que consumieron ambos y las que no los consumieron.
13. Finalmente, como se les pide que tomen una decisión, las respuestas correctas a las preguntas debiesen permitirles decidir qué causó la intoxicación. Es especialmente importante que justifiquen su decisión, según qué entendieron al leer su propio gráfico.
14. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Representan información en histogramas, nube de puntos, diagrama de cajón, polígonos de frecuencia y de frecuencia acumulada, para interpretar dicha información.
 - Resuelven problemas que involucran comparar conjuntos de datos, a partir de diagramas de cajón, nube de puntos, histogramas, polígonos de frecuencia y frecuencia acumulada.
 - Elaboran histogramas, nube de puntos, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada y diagramas de cajón, en forma manual y con herramientas digitales.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Publicación “Metodología estimaciones y proyecciones de población Chile 1992-2050”
<https://curriculumnacional.cl/link/https://www.censo2017.cl/descargas/proyecciones/metodologia-estimaciones-y-proyecciones-de-poblacion-chile-1992-2050.pdf>
- Segunda entrega de resultados del censo en 2017
https://curriculumnacional.cl/link/http://www.censo2017.cl/wp-content/uploads/2018/05/presentacion_de_la_segunda_entrega_de_resultados_censo2017.pdf
- Sitio web que describe 61 tipos diferentes de gráficos de datos
<https://curriculumnacional.cl/link/https://www.ingeniovirtual.com/tipos-de-graficos-y-diagramas-para-la-visualizacion-de-datos/>
- Sitio web generador de gráficos estadísticos (se pueden guardar como imagen)
<https://curriculumnacional.cl/link/https://www.generadordegraficos.com>
- Sitio web que explica cómo construir un gráfico en Excel
<https://curriculumnacional.cl/link/https://support.office.com/es-es/article/crear-un-gráfico-de-principio-a-fin-0baf399e-dd61-4e18-8a73-b3fd5d5680c2#OfficeVersion=Windows>

Actividad 2: ¿Cómo representar estadísticamente datos y fenómenos?

PROPÓSITO

Los estudiantes desarrollan una mayor comprensión acerca de cómo construir y usar diferentes representaciones gráficas al resolver problemas, y el tipo de preguntas que puede responderse a partir de tales representaciones, considerando sus posibilidades y restricciones. Además, ahondan en la manera en que dos o más representaciones se pueden complementar para ampliar la información y responder con mayor profundidad a las preguntas. Deben valorar y usar las herramientas tecnológicas para informarse, investigar y comunicarse con representaciones adecuadas.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Valorar las TIC como una oportunidad para informarse, investigar, socializar, comunicarse y participar como ciudadano.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

CONSTRUCCIÓN DE HISTOGRAMA E INTERPRETACIÓN DE INFORMACIÓN

1. Como parte de las estadísticas vitales que el INE genera a través de los años, una de las informaciones que se encuentra disponible es el número de defunciones por tramo etario. Por ejemplo, en la siguiente tabla⁷ se muestra las defunciones por tramo de edad en 2017:

Tramo etario (años)	Número de fallecimientos
Menores de 1 año	1559
1 a 4	223
5 a 9	143
10 a 14	175
15 a 19	541
20 a 24	875
25 a 29	1050
30 a 34	1154
35 a 39	1346
40 a 44	1933
45 a 49	2753
50 a 54	4231
55 a 59	5829
60 a 64	7250
65 a 69	8858
70 a 74	11214
75 a 79	12842
80 a 84	14096
85 a 89	15456
90 a 94	9874
95 a 99	3970
100 o más años	972
TOTAL	106 344

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA d, e, 3° y 4° medio.

⁷ Extraído del Instituto Nacional de Estadísticas de Chile, que estuvieron disponibles entre 2018 y 2019.

a. Completa la siguiente tabla con las frecuencias relativas porcentuales:

Tramo etario (años)	Número de fallecimientos	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual (%)
Menores de 1 año	1559		
1 a 4	223		
5 a 9	143		
10 a 14	175		
15 a 19	541		
20 a 24	875		
25 a 29	1050		
30 a 34	1154		
35 a 39	1346		
40 a 44	1933		
45 a 49	2753		
50 a 54	4231		
55 a 59	5829		
60 a 64	7250		
65 a 69	8858		
70 a 74	11214		
75 a 79	12842		
80 a 84	14096		
85 a 89	15456		
90 a 94	9874		
95 a 99	3970		
100 o más años	972		
TOTAL	106 344	1	100

b. Utilizando la planilla de cálculo, construye el histograma del número de fallecimientos por tramo etario, según las frecuencias relativas porcentuales.

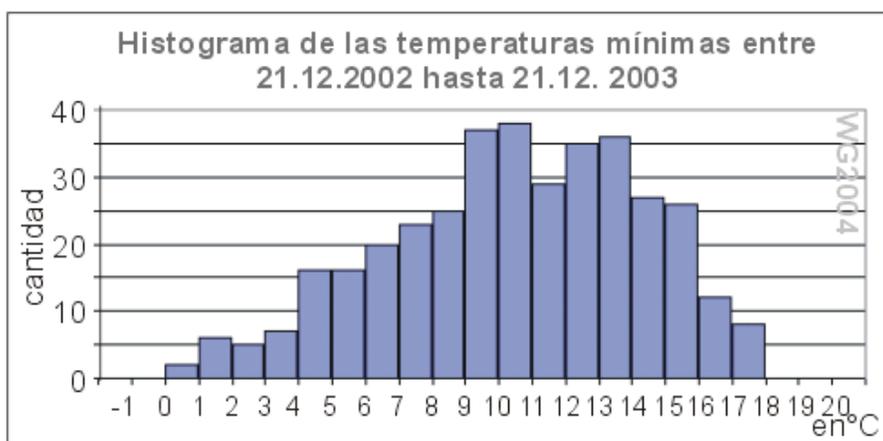
2. Interpreta la información y, en cada caso, argumenta tu respuesta.

- ¿Es la forma del gráfico concordante con la noción común que se tiene acerca de los fallecimientos de la población chilena según tramo etario?
- ¿En cuáles tramos etarios se acumulan la mayor y la menor cantidad de fallecidos? ¿Cómo puedes explicarlo?
- ¿Cuál es el tramo con mayor porcentaje de fallecimientos? ¿Cuál es el que tiene menor porcentaje? ¿Cómo puedes explicarlo?
- ¿Por qué tiende a disminuir la cantidad de fallecidos a partir de los 90 años? Aplica el concepto de “esperanza de vida” para argumentar.
- ¿Por qué el tramo “menores de 1 año” tiene un porcentaje mayor de fallecidos que los tramos de “1 a 4” o “5 a 9”? Intenta explicarlo desde la realidad de muchos bebés, incluso antes de salir del vientre materno.

3. Otras interpretaciones. En cada caso, argumenta tu respuesta.
 - a. Si la densidad se entiende como la razón entre la cantidad de fallecimientos del tramo y su longitud en años, ¿en qué tramo etario hay mayor “densidad” de fallecimientos?
 - b. ¿Corresponde la densidad al porcentaje de cada tramo?
 - c. ¿Tiene que ver lo anterior con el hecho de que los tramos tengan la misma longitud o ancho en años? ¿Qué pasaría si tuvieran diferente longitud o ancho?
 - d. ¿Cuál es la tendencia de fallecimientos, según la condición?
 - e. ¿Cuál es el porcentaje de fallecidos a partir de la edad en que se jubilan los hombres y las mujeres?
 - f. Si juntas tramos etarios consecutivos, ¿en qué rango de edad se podría acumular el 50% de los fallecimientos? ¿Existe una única forma de responder esta pregunta?

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DESDE HISTOGRAMAS

El siguiente histograma presenta las temperaturas mínimas en una localidad de la Región de Atacama⁸, cerca de Copiapó, considerando una muestra de 365 días.

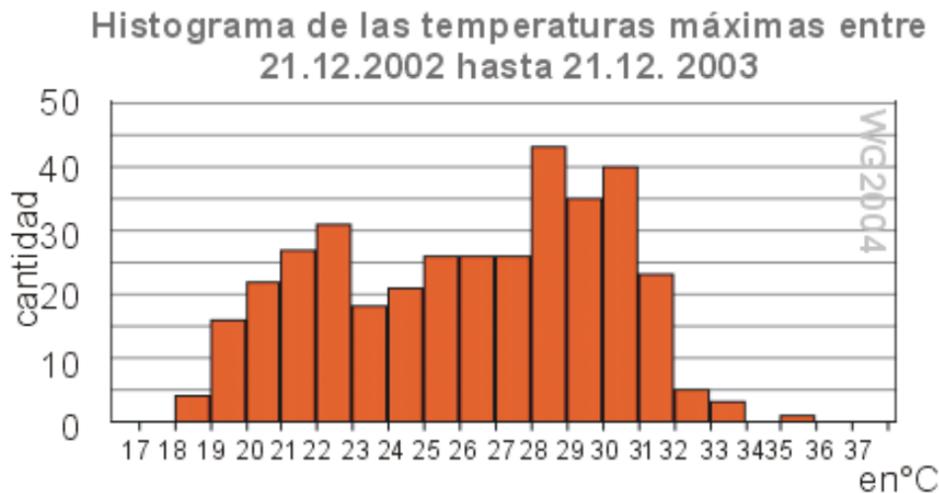


Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA d, e, 3° y 4° medio.

1. Interpreta la información y argumenta tu respuesta en cada caso.
 - a. ¿En qué intervalos se acumula la mayor cantidad de observaciones y en cuáles se concentra la menor cantidad? ¿Cómo podrías describir las temperaturas mínimas en la región?
 - b. ¿Cuál es el rango de temperaturas mínimas según el histograma?
 - c. ¿Qué porcentaje de días registraron una temperatura mínima de entre 9° C y 12° C?
2. Información que entrega un histograma. En cada caso, argumenta tu respuesta.
 - a. A partir del gráfico, ¿es posible determinar en qué meses ocurren las diferentes temperaturas mínimas? ¿Por qué?
 - b. ¿Podrías obtener una “temperatura mínima promedio”? ¿Cómo lo harías?
 - c. ¿Qué información se puede obtener desde el gráfico y cuál no? ¿Por qué?

⁸ <https://curriculumnacional.cl/link/https://www.geovirtual2.cl/Clima/2003-clima-01esp.htm>

Observa ahora el siguiente histograma con las temperaturas máximas en la misma localidad.

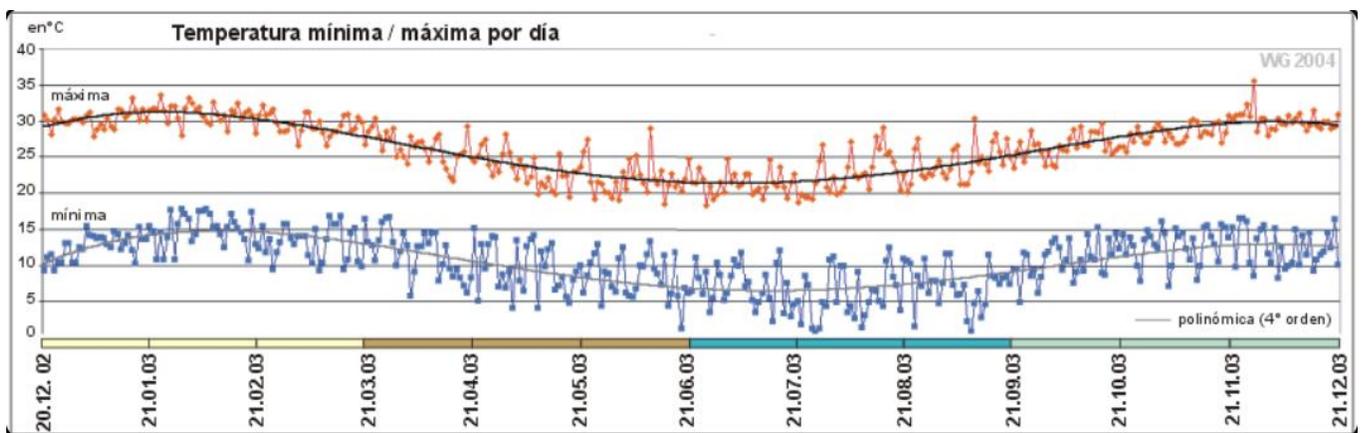


3. A partir del histograma anterior, construye un segundo histograma con la planilla de cálculo, pero esta vez según la frecuencia relativa porcentual. Utiliza la siguiente tabla como referencia:

Temperaturas máximas	Frecuencia	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
[17 - 18[0		
[18 - 19[4		
[19 - 20[16		
[20 - 21[22		
[21 - 22[27		
[22 - 23[31		
[23 - 24[17		
[24 - 25[21		
[25 - 26[26		
[26 - 27[26		
[27 - 28[26		
[28 - 29[42		
[29 - 30[35		
[30 - 31[40		
[31 - 32[23		
[32 - 33[5		
[33 - 34[3		
[34 - 35[0		
[35 - 36[1		
[36 - 37[0		
TOTAL	365		

4. Considerando ambos gráficos, responde las siguientes preguntas y argumenta en cada caso.
 - a. ¿Entre qué temperaturas se encuentra el máximo registro de observaciones?
 - b. ¿Entre qué temperaturas se encuentran el 25% y el 75% de los datos, respectivamente?
 - c. Aproximadamente, ¿cuál sería la mediana y la media aritmética de las temperaturas máximas o en qué intervalo se encontrarían?
 - d. ¿Son valores similares la mediana y la media? ¿Qué significa cada medida respecto de la información del histograma?
 - e. Analiza para qué preguntas te sirvió más un gráfico que otro. ¿Qué puedes concluir de esto?

5. Finalmente, observa el siguiente gráfico acerca de las temperaturas registradas en la localidad cercana a Copiapó.



- a. ¿Qué nueva información aporta este gráfico?
- b. ¿Corresponde al histograma anterior la información acerca de las temperaturas mínimas y máximas registradas? ¿Cómo lo explicarías?
- c. ¿Qué preguntas se podría responder a partir de esta información? Elabora, al menos, tres que se pueda responder con esta representación gráfica.
- d. Investiga y comparte las fuentes de información. Considerando la fecha en que se hicieron estos registros, ¿es la información entregada por los gráficos de temperatura semejante a lo que ocurre actualmente en Copiapó respecto de temperaturas mínimas y máximas dentro de un año? Considera el fenómeno de “cambio climático”.

COMPARACIÓN ENTRE PRUEBAS PAA Y PSU

- La siguiente tabla muestra el puntaje de las pruebas obligatorias correspondiente al percentil 50 o mediana, tanto de la Prueba de Selección Universitaria (PSU) hasta 2019, como de la Prueba de Aptitud Académica desde el Proceso de Admisión 1988.

PRUEBA	AÑO	PERCENTIL 50
PAA	1988	569,5
PAA	1989	484,5
PAA	1990	493
PAA	1991	490,5
PAA	1992	510
PAA	1993	497
PAA	1994	495,5
PAA	1995	488
PAA	1996	488
PAA	1997	485
PAA	1998	485
PAA	1999	487
PAA	2000	487
PAA	2001	483,5
PAA	2002	484
PAA	2003	485
PSU	2004	494
PSU	2005	497
PSU	2006	496
PSU	2007	495
PSU	2008	496,5
PSU	2009	496
PSU	2010	495,5
PSU	2011	494,5
PSU	2012	495,5
PSU	2013	495,5
PSU	2014	495,5
PSU	2015	495,5
PSU	2016	493,5
PSU	2017	494
PSU	2018	498
PSU	2019	492

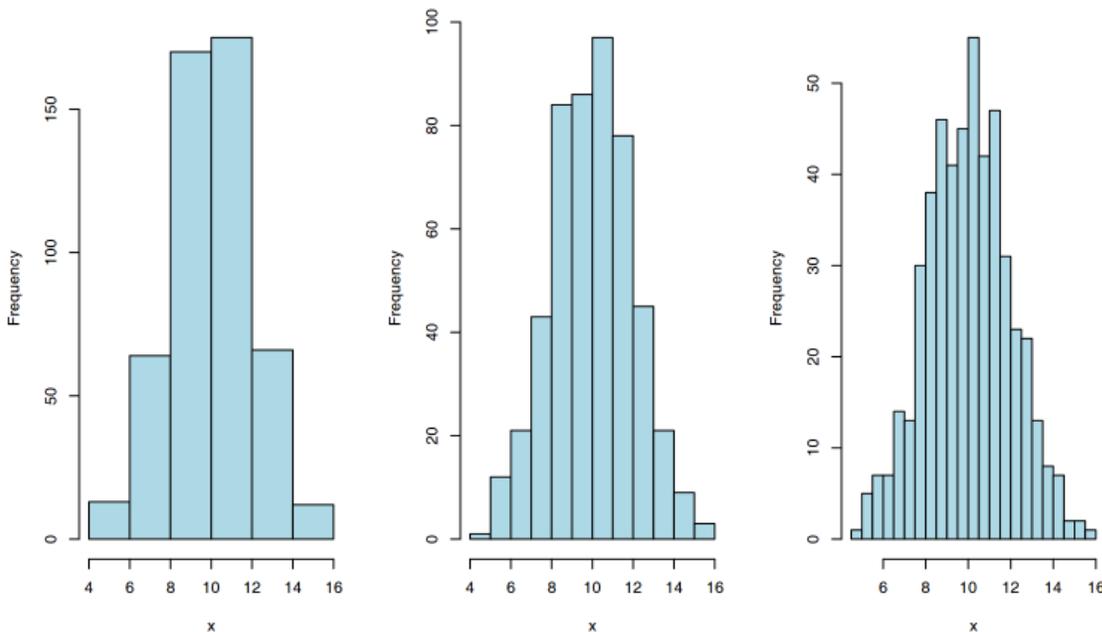
- Haz un gráfico de polígono de frecuencia de los años y los puntajes obtenidos.
- ¿Cómo podrías caracterizar la variación del percentil 50 o mediana de los puntajes obtenidos en la PAA y PSU a través de los años?

- c. ¿Cuál de las dos pruebas presenta una mayor variabilidad en sus puntajes? ¿Cómo se observa eso en el gráfico?
- d. ¿Cuál es el significado de comparar ambas pruebas a partir de la mediana o percentil 50? ¿Por qué la mediana y no la media aritmética? Argumenta y ejemplifica según lo que sucede con los valores extremos.

NÚMERO DE INTERVALOS EN UN HISTOGRAMAS

Se encuestó a una muestra de 2 154 camioneros del puerto de San Antonio, de la V Región de Chile, acerca de cuántas horas trabajó el día anterior a la encuesta. Los siguientes gráficos representan los datos obtenidos.

1. Para agrupar la variable estadística “horas de trabajo” o cualquier muestra, se puede usar el modelo que descubrió Herbert Sturges en 1926: si k es el número de intervalos y N el total de observaciones, entonces un adecuado número de intervalos es: $k = 1 + 3,3 \cdot \log N$.
2. En los gráficos, de izquierda a derecha, la cantidad de intervalos corresponde a 6, 12 y 23.



3. A partir de los gráficos, responde lo siguiente:
 - a. ¿Cuál de los gráficos aplica la regla de Sturges para generar los intervalos?
 - b. De las siguientes preguntas, ¿cuáles se pueden responder en uno o más gráficos? ¿Por qué?
 - i. ¿Cuántos trabajadores hicieron entre 11 y 12 horas de jornada?
 - ii. ¿Cuántos trabajadores hicieron entre 10 y 11,5 horas de jornada?
 - iii. ¿Cómo permite una mayor o menor cantidad de intervalos obtener más o menos información? Imagina, por ejemplo, que solo tuvieras 3 intervalos.
 - iv. ¿Cuántas horas trabaja la mayoría de los camioneros? ¿Cómo se responde esto desde los 3 gráficos?

4. Según el Código del Trabajo, se debe trabajar hasta 45 horas semanales, considerando jornada de lunes a viernes.
 - a. De la muestra obtenida, ¿qué sucede con aquellos trabajadores que el día anterior a la encuesta trabajaron entre 10 y 12 horas? ¿Cómo podrían organizar esa semana para cumplir con la ley?
 - b. Realiza el mismo análisis para aquellos trabajadores que laboraron entre 4 y 6 horas el día previo a la encuesta.
 - c. A partir de los gráficos, estima la media aritmética, mediana y moda. ¿Se parecen o son diferentes? Explica tu procedimiento y argumenta sobre qué significan estas medidas en el contexto de las horas de trabajo de los camioneros.

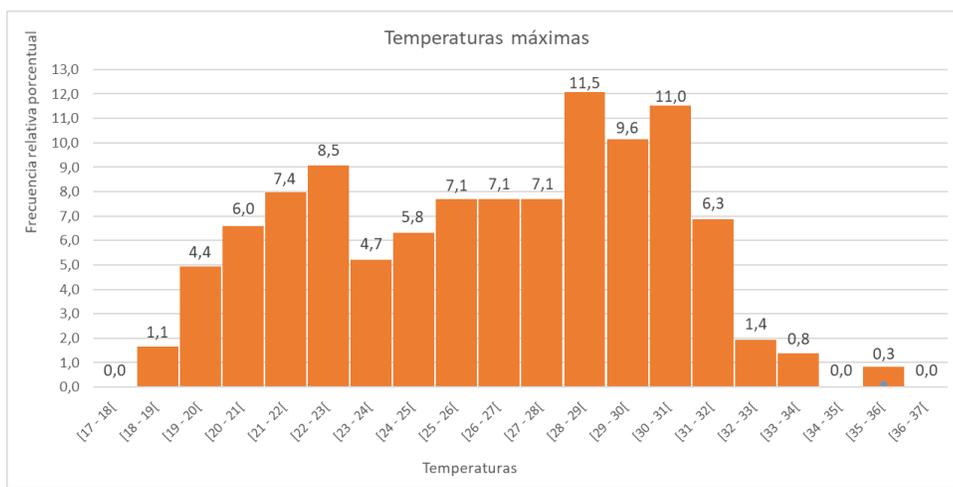
ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere que los estudiantes elaboren los gráficos con la planilla de cálculo para facilitar la construcción y, además, para que comprendan el potencial de esta herramienta digital en el análisis estadístico. Por ejemplo, en la actividad de las defunciones por tramo etario, el gráfico en la planilla de cálculo debería ser similar al siguiente:

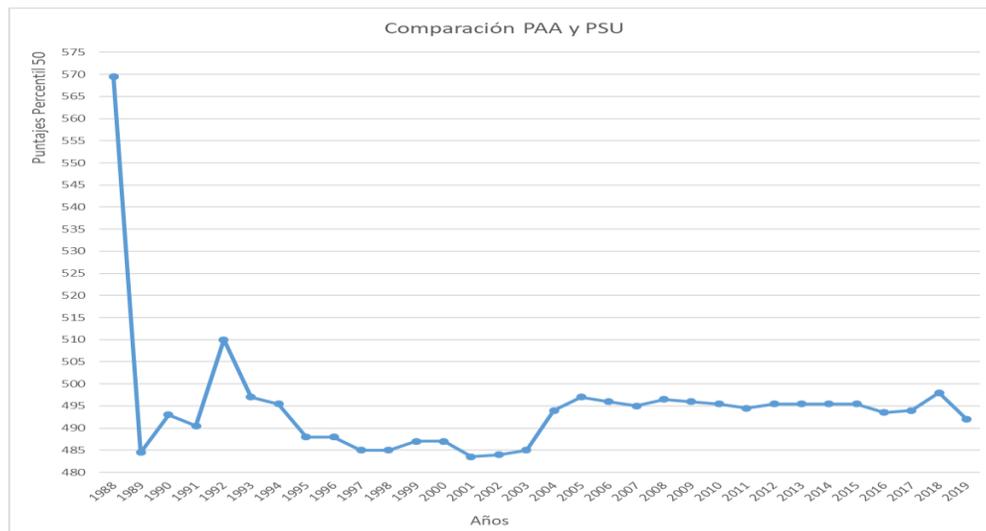


2. En los histogramas, se recomienda que identifiquen elementos básicos –como el valor máximo y mínimo– para determinar el rango o la amplitud de los intervalos utilizados.
3. En cuanto a la frecuencia relativa porcentual, conviene que construyan la tabla a partir de la frecuencia absoluta, luego obtengan la frecuencia relativa y finalmente el porcentaje. Estas operaciones se hacen rápido con la planilla de cálculo, pero deben estar conscientes de lo que entienden al hacerlo.

4. En cada situación, se sugiere que comiencen respondiendo preguntas sencillas y directas desde el gráfico, que después lo analicen más y finalmente amplíen las preguntas a otros contextos. Por ejemplo, en la primera actividad del “N° de fallecidos por tramo etario”, se parte por preguntas directas relacionadas con las mayores y menores frecuencias, luego con la percepción y expectativas para los diferentes tramos etarios y finalmente, conexiones con la “esperanza de vida”. Lo importante en cada caso es su respectiva argumentación.
5. Asimismo, los jóvenes podrían plantear preguntas que puedan responderse a partir de los gráficos representados, y discutir qué preguntas son pertinentes y cuáles no.
6. En la actividad de “temperaturas mínimas y máximas”, se recomienda que evalúen el significado y potencial de un histograma según las preguntas que se puede o no responder a partir de dicha representación gráfica. En la misma línea, se propone establecer diferencias entre usar un histograma con frecuencias absolutas o con frecuencias relativas porcentuales, acorde al tipo de preguntas que se quiere responder; por ejemplo, cuando se involucra a los cuartiles. El gráfico de frecuencias relativas porcentuales que se pide en la planilla de cálculo debería ser similar al siguiente:



7. También se recomienda que hagan comparaciones entre diferentes tipos de gráfico, según la información que entrega cada uno, pero también la manera en que se complementan; por ejemplo: entre histogramas y polígonos de frecuencia o gráficos de línea. Vale aquí discutir cuándo las representaciones permiten observar una “tendencia” de los datos. Por ejemplo, en la actividad de los puntajes de la PAA y PSU, la tendencia se muestra en el siguiente gráfico:



8. Conviene que comparen la información que entregan medidas como la media aritmética, la mediana y la moda y, sobre esa base, descubran, por ejemplo: por qué usar la mediana en lugar de la media aritmética, considerando la sensibilidad de esta última a los valores extremos; o cuándo se parecen entre sí las medidas de tendencia central en cuanto a su valor y qué significa eso.
9. Finalmente, puedan dialogar sobre qué implica usar más o menos intervalos en un histograma respecto del tipo de preguntas que se quiere responder, y cuándo se pierde o gana información en la representación. Aunque la regla y el modelo de Sturges permiten una “adecuada” cantidad de intervalos, el histograma finalmente debe construirse a partir de la información que se quiere entregar.
10. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Representan información en histogramas, nube de puntos, diagrama de cajón, polígonos de frecuencia y de frecuencia acumulada, para interpretar información.
 - Elaboran histogramas, nube de puntos, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada y diagramas de cajón, en forma manual y con herramientas digitales.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Detalla la regla de Sturges
<https://curriculumnacional.cl/link/https://www.lifeder.com/regla-sturges/>
- Datos médicos en Chile en diferentes gráficos
<https://curriculumnacional.cl/link/https://www.medwave.cl/link.cgi/Medwave/Series/MBEyEpi/5826>
- Gráficos para análisis de la Región de Atacama
<https://curriculumnacional.cl/link/https://www.geovirtual2.cl/Clima/2003-clima-01esp.htm>
- Estadísticas de la PSU y la PAA
<https://curriculumnacional.cl/link/https://psu.demre.cl/proceso-admision/factores-seleccion/percentil-50-procesos-admision-historicos>
- Estadísticas mundiales con histogramas y polígonos de frecuencia
<https://curriculumnacional.cl/link/https://www.ck12.org/book/CK-12-Conceptos-de-Matem%C3%A1ticas-de-la-Escuela-Secundaria-Grado-8-en-Espa%C3%B1ol/section/1.3/>

Actividad 3: Tomar decisiones a partir de diagramas de cajón

PROPÓSITO

Los estudiantes construyen diagramas de caja, los relacionan con los histogramas e interpretan información a partir de tales representaciones, considerando sus posibilidades y restricciones para tomar decisiones. Además, profundizan sobre los conceptos de medidas de posición de datos para interpretar correctamente la información y tomar decisiones adecuadas. Para esto, deben valorar las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo personal y en la búsqueda de soluciones.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

ELABORACIÓN DE DIAGRAMAS DE CAJA

1. Organícense en grupos y averigüen sobre el mundial femenino de 2019 en Francia. Fue un evento destacado y se desarrolló del 7 de junio al 7 de julio. Participaron 24 equipos, incluida nuestra selección nacional al mando de la capitana y destacada jugadora Christiane Endler. En la página del evento de la FIFA se pueden encontrar algunos datos y características de las jugadoras de todos los equipos, como edad y estatura; este último índice tiene importantes variaciones, dependiendo de la región de origen de las mujeres.

2. Considera los siguientes datos y compáralos con los encontrados por tu grupo.

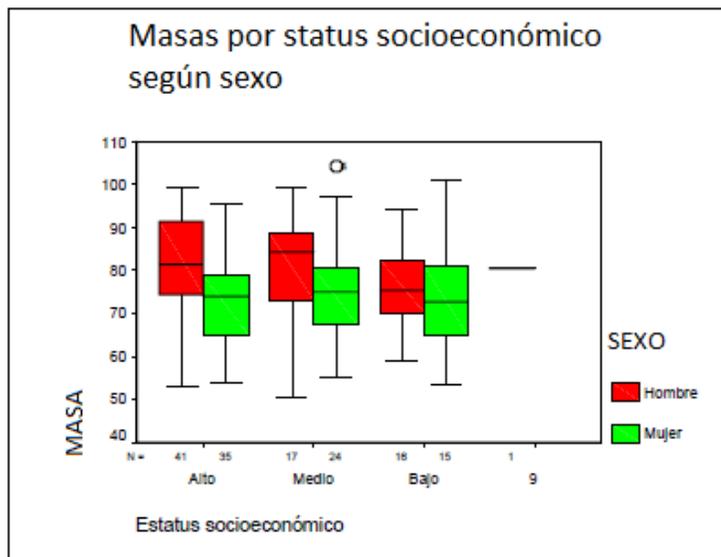
Tabla 1: Estaturas de nuestra selección nacional:		
N°	Nombre jugadora	Estatura (cm)
1	Christiane ENDLER	182
2	Rocío SOTO	161
3	Carla GUERRERO	172
4	Francisca LARA	165
5	Valentina DÍAZ	157
6	Claudia SOTO	165
7	María José ROJAS	153
8	Karen ARAYA	162
9	María José URRUTIA	168
10	Yanara AEDO	154
11	Yessenia LÓPEZ	160
12	Natalia CAMPOS	170
13	Javiera GREZ	148
14	Daniela PARDO	161
15	Sue Helen GALAZ	159
16	Fernanda PINILLA	168
17	Javiera TORO	160
18	Camila SÁEZ	167
19	Yessenia HUENTEO	156
20	Daniela ZAMORA	166
21	Rosario BALMACEDA	163
22	Elisa DURÁN	168
23	Ryann TORRERO	175

3. A partir de la tabla anterior, construyan un diagrama de caja.
- Elaboren una nueva tabla en la que las estaturas aparezcan ordenadas de menor a mayor.
 - Determinen los siguientes valores: mínimo, máximo, primer cuartil (Q_1), mediana o segundo cuartil (Q_2) y tercer cuartil (Q_3). Expliquen su procedimiento para seleccionar cada valor. ¿Existe alguna diferencia en la forma de determinar los cuartiles cuando hay un número par o impar de datos? Dialoguen y obtengan una respuesta.
 - Establezcan un eje horizontal con una escala adecuada. ¿Cómo se dibuja manualmente el diagrama de caja? Discutan en el grupo y elaboren una estrategia.
4. Uso de un recurso digital.
- Construyan el diagrama de caja con alguna aplicación digital, por ejemplo, *Advanced Data Grapher* u otra similar.

- b. Comparen el gráfico que hicieron manualmente con el digital y establezcan diferencias y similitudes. De los 5 valores obtenidos (mínimo, máximo, Q_1 , Q_2 y Q_3), ¿cuáles coinciden en ambos gráficos?, ¿cuáles no? Si hubiese diferencias, expliquen por qué.
5. Escojan a otros dos o tres equipos del mundial según sus preferencias y hagan una tabla similar a la de la selección chilena para cada uno.
 - a. En cada caso, determinen los valores mínimo, máximo, Q_1 , Q_2 y Q_3 .
 - b. Construyan un diagrama de caja para cada equipo con una misma escala, para poder comparar a los equipos extranjeros con la selección nacional.
 - c. Describan las semejanzas y diferencias de los diagramas. Caractericen a cada equipo por sus estaturas.
 - d. Elaboren otras preguntas que se puedan responder a partir de la información gráfica.

INTERPRETAR INFORMACIÓN MEDIANTE DIAGRAMAS DE CAJA

Imaginen que se hizo un estudio sobre masa corporal⁹ por estatus socioeconómico, para implementar un programa de alimentación sana en diferentes comunas de la región. El siguiente cuadro con diagramas de caja contiene los resultados de dicho estudio.



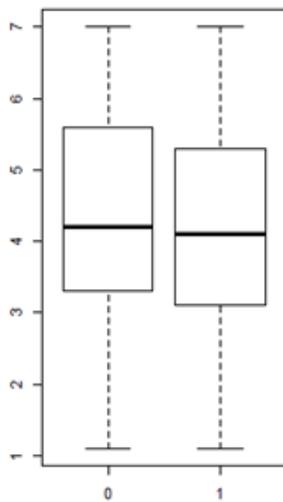
Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA d, e, 3° y 4° medio.

⁹ <https://studylib.es/doc/5679007/anexo-5-diagrama-de-cajas---u>

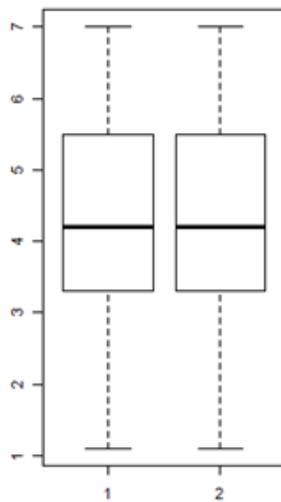
1. Respondan las siguientes preguntas y argumenten en cada caso.
 - a. ¿En cuál o cuáles estatus socioeconómicos se observa una mayor variabilidad de masas? Compartan ideas en el grupo.
 - b. ¿Para qué estatus la tendencia es a tener mayor masa? ¿Hay diferencias por sexo?
 - c. ¿Para qué estatus la tendencia es a tener menor masa? ¿Hay diferencias por sexo?
 - d. Intenten caracterizar o describir la relación masa-estatus.
 - e. Elaboren otras preguntas que puedan responderse a partir de la información gráfica.
 - f. Averigüen si en la región, ciudad o comuna donde residen, hay estudios similares que sirvan como diagnóstico para proponer planes de alimentación saludable. ¿Refleja este estudio la situación de su ciudad o comuna? ¿Por qué?

2. Un estadístico desea inferir información desde diagramas de caja donde están representadas las notas (1 a 7) de un examen de Matemática en un Instituto Profesional en 2016, en el cual se estudia diferentes carreras. La información se muestra en los siguientes gráficos, codificados según: jornada (0: diurna; 1: vespertina), periodo (1: primer semestre; 2: segundo semestre) y género (0: masculino; 1: femenino).

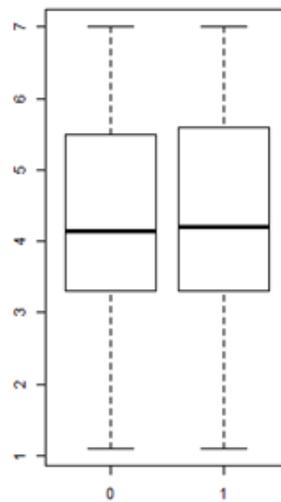
Examen según jornada - 2016



Examen según periodo - 2016



Examen según género - 2016

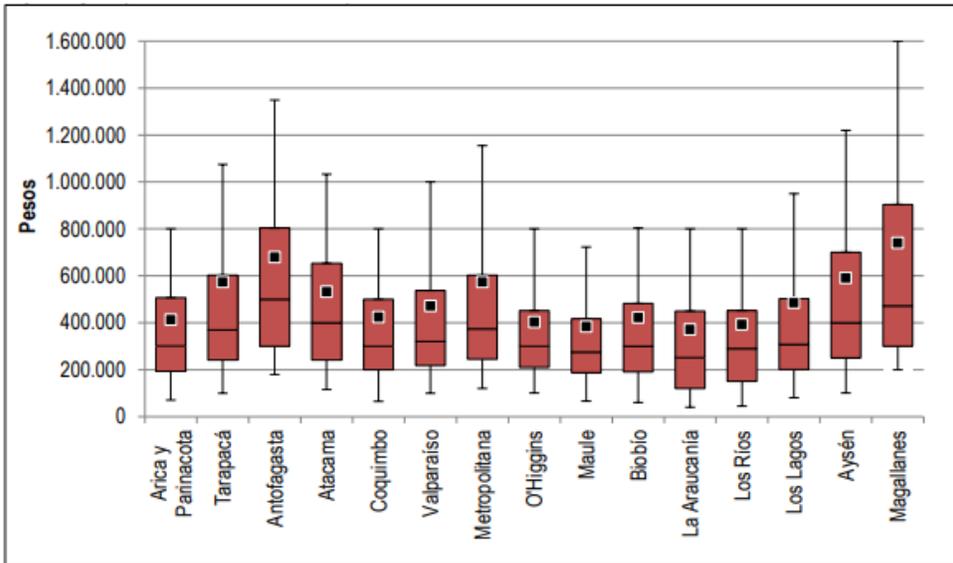


- a. ¿En qué jornada se registra mayor cantidad de exámenes aprobados? ¿Cómo se observa este hecho? Discutan en el grupo.
- b. ¿Hay diferencias según el semestre en que se rinde el examen? ¿Cómo se observa este hecho? Discutan en el grupo.
- c. ¿Existen diferencias según el género? ¿Cómo se observa este hecho? Compartan ideas en el grupo.
- d. Según los resultados del examen, intenten dar una caracterización o descripción, considerando la jornada, el periodo y el género. ¿Qué variable o variables tienen mayor incidencia? Dialoguen en el grupo y elaboren una respuesta.
- e. Planteen otras preguntas que puedan responderse a partir de la información gráfica.

INTERPRETAR INFORMACIÓN MEDIANTE DIAGRAMAS DE CAJA EN DIFERENTES CONTEXTOS

1. El siguiente gráfico con diagramas de caja representa los ingresos mensuales de personas en Chile en 2015, por regiones, datos extraídos del Instituto Nacional de Estadísticas de Chile, entre los años 2018 y 2019.

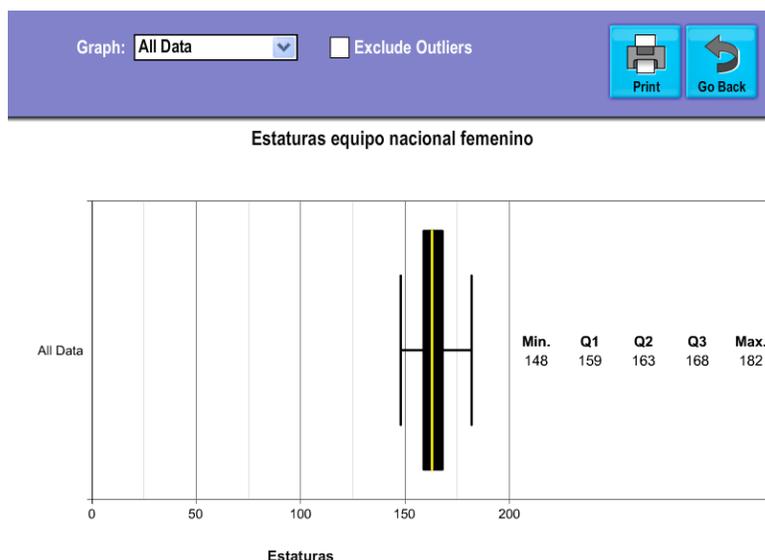
Conexión disciplinar:
H, G y CS FD
OA g, 3° y 4° medio
Ciencias FD
OA e, 3° y 4° medio



2. En estos diagramas de caja se representa los siguientes valores: media (cuadrado pequeño negro), mediana (trazo negro en el área de la figura) y percentiles 10 (extremo inferior), 25, 75 y 90 (extremo superior) del ingreso mensual en 2015, según región (pesos a octubre de 2015).
3. En términos simples, mientras mayor sea la longitud del diagrama, mayor será la dispersión de la variable de análisis y mientras más se concentren los ingresos en uno de los extremos, menos equitativos serán los ingresos de la muestra.
4. Analicen en grupos cada diagrama de caja y respondan las siguientes preguntas:
 - a. ¿En qué regiones se concentran los menores ingresos? Dialoguen y argumenten.
 - b. ¿En qué regiones se concentran los mayores ingresos? Sugieran ideas y argumenten.
 - c. Comparen la región de Arica y Parinacota con la región de O'Higgins. ¿Cuáles son las diferencias y las semejanzas? Compartan ideas y argumenten.
 - d. Seleccionen dos regiones que tengan un comportamiento similar y expliquen detalladamente.
 - e. Seleccionen la región que, a su juicio, muestra ingresos más equitativos y la región con ingresos menos equitativos. En ambos casos, expliquen detalladamente por qué.
 - f. Elaboren otras preguntas que puedan responderse a partir de la información gráfica.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere que los estudiantes primero construyan de manera manual los gráficos de caja, para que los entiendan mejor. Luego puedan usar herramientas digitales, que ayudan a elaborar esos gráficos y les permiten centrarse más en la interpretación, en particular, cuando se compara diagramas de caja. Por ejemplo, en la actividad del mundial femenino de fútbol 2019, se sugiere usar la aplicación digital *Advanced Data Grapher*. El gráfico de caja solicitado debería ser similar al siguiente:



- Si usan herramientas digitales, cabe considerar que los valores de los cuartiles podrían variar en comparación con los que determinaron manualmente, dependiendo del método que apliquen.
- En los diagramas de caja habituales, se sugiere que identifique los elementos básicos: los valores máximos, mínimos, primer cuartil, segundo cuartil, mediana y tercer cuartil.
- En algunas situaciones, como la actividad de los ingresos por región, se utiliza diagramas de caja modificados que integran otros percentiles; ahí se involucran media, mediana y percentiles 10, 25, 75 y 90, en este caso se sugiere explicar la relación que hay entre ellos, por ejemplo, comparando el ingreso indicado en el cuartil 1, su significado y el promedio.
- En cada actividad, se sugiere que comiencen respondiendo preguntas sencillas y directas desde el gráfico, luego amplíen el análisis y finalmente extiendan las preguntas a otros contextos. Por ejemplo: en la actividad de “masa corporal según estatus socioeconómico”, comienzan respondiendo preguntas directas relacionadas con la tendencia a mayor y menor masa, luego establecen conexiones con estudios similares en la ciudad o comuna y, finalmente, expresan si la situación presentada ocurre o no en la localidad donde viven. Lo importante en cada caso es su argumentación.
- Se propone también que ellos mismos elaboren preguntas que puedan responderse a partir de los diagramas representados; así pueden discutir qué preguntas son pertinentes y cuáles no.

7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Elaboran histogramas, nube de puntos, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada y diagramas de cajón, en forma manual y mediante herramientas digitales.
 - Resuelven problemas que involucran comparar conjuntos de datos a partir de diagramas de cajón, nube de puntos, histogramas, polígonos de frecuencia y frecuencia acumulada.
 - Resuelven problemas que involucran el análisis gráfico de datos estadísticos con medidas de posición.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Artículo sobre la construcción e interpretación del diagrama de caja
<https://curriculumnacional.cl/link/https://digital.cic.gba.gob.ar/handle/11746/4907>
- Representaciones estadísticas con herramientas tecnológicas
<https://curriculumnacional.cl/link/http://www.estadisticaparatodos.es/taller/graficas/cajas.html>

Actividad 4: ¿Datos dispersos o relacionados?

PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden los gráficos de dispersión o nubes de puntos y su relación con otras representaciones gráficas estudiadas, y también entienden qué tipo de preguntas puede responderse a partir de ellas, valorando sus posibilidades y restricciones. Asimismo, se espera profundizar en los conceptos de tendencia, correlación y dependencia entre variables.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

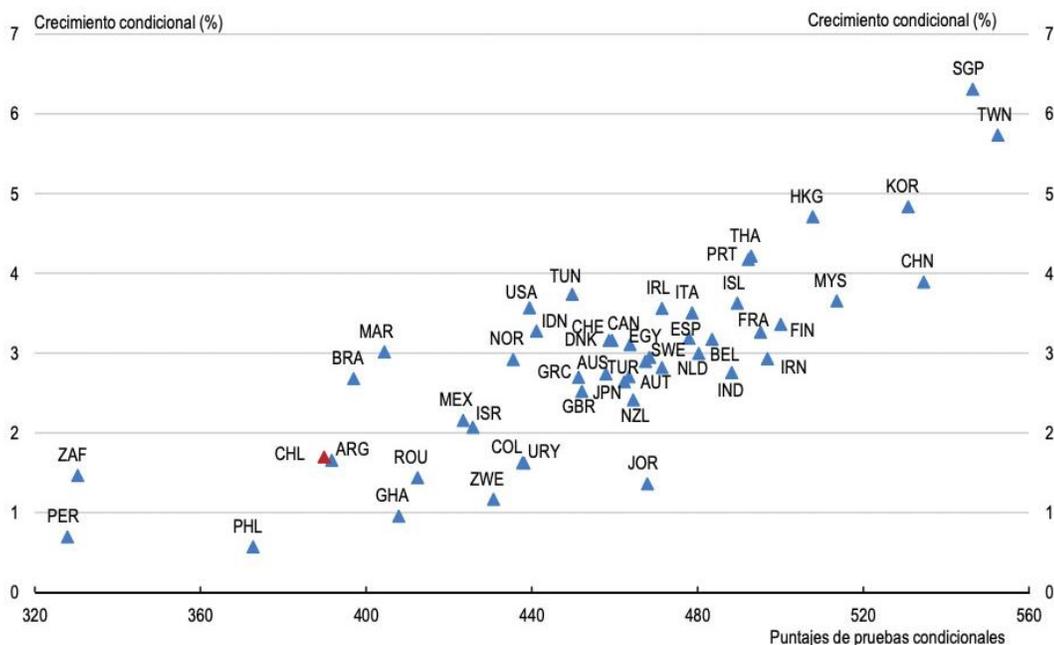
RELACIONANDO DATOS DESDE GRÁFICO DE NUBE DE PUNTOS

1. Lee junto con tu grupo la siguiente información sobre PISA: “PISA es un estudio realizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), que busca evaluar cómo los sistemas educativos preparan a sus estudiantes para que apliquen su conocimiento y habilidades en tareas que son relevantes para su vida actual y futura.

“Este estudio se aplica cada tres años a alumnos de 15 años, que asisten desde 7° básico hasta cursos superiores. La evaluación se desarrolla mediante pruebas en computador que evalúan tres áreas principales, Lectura, Ciencias Naturales y Matemática; en cada ciclo se enfatiza la medición de una de ellas.

“Al igual que otros estudios internacionales, PISA recoge información sobre el contexto en que los alumnos aprenden y adquieren las competencias evaluadas en cada ciclo de aplicación.

“En general, las investigaciones internacionales no proveen resultados en el ámbito individual ni de establecimientos, pues las características estadísticas de las muestras y los resultados obtenidos se focalizan en evaluar al sistema educativo nacional en conjunto; por ende, no permiten tal nivel de desagregación. El siguiente gráfico describe la asociación fundamental que hay entre el crecimiento anual en PIB per cápita real entre 1960 y 2000 de varios países, y los puntajes promedio que obtienen en las pruebas PISA”.



Estudios Económicos de la OCDE Chile. (2015). Recuperado de <https://www.oecd.org/eco/surveys/Chile-2015-vision-general.pdf>

Tabla de código por país

<i>País</i>	<i>Código</i>	Ghana	GHA	Noruega	NOR
Argentina	ARG	Grecia	GRC	Nueva Zelanda	NZL
Australia	AUS	Hong Kong	HKG	Perú	PER
Austria	AUT	Indonesia	IDN	Filipinas	PHL
Bélgica	BEL	India	IND	Portugal	PRT
Brasil	BRA	Irlanda	IRL	Rumania	ROU
Canadá	CAN	Irán	IRN	Singapur	SGP
Suiza	CHE	Islandia	ISL	Suecia	SWE
Chile	CHL	Israel	ISR	Tailandia	THA
China	CHN	Italia	ITA	Túnez	TUN
Colombia	COL	Jordania	JOR	Turquía	TUR
Dinamarca	DNK	Japón	JPN	Taiwán	TWN
Egipto	EGY	Corea	KOR	Uruguay	URY
España	ESP	Marruecos	MAR	Estados Unidos	USA
Finlandia	FIN	México	MEX	Sudáfrica	ZAF
Francia	FRA	Malasia	MYS	Zimbabue	ZWE
Reino Unido	GBR	Holanda	NLD		

2. ¿Qué es el PIB? Usando apoyo tecnológico, investiguen en grupos y expliquen su significado, indicando las fuentes de la información.
- a. ¿Existe alguna relación entre el puntaje promedio PISA y el porcentaje de crecimiento del PIB de los países? ¿Cómo describirían dicha relación?
- b. ¿Cuáles son los países que más se alejan de la relación descrita? Nombren al menos dos de ellos y argumenten su respuesta.
- c. Comparando Chile, Marruecos y Uruguay con la información del gráfico, ¿cómo describirían los resultados PISA promedio versus el crecimiento porcentual del PIB per cápita?
3. ¿Qué otras comparaciones se pueden hacer?
- a. ¿Cuál es el país con mejores resultados promedio en la prueba PISA y cuál sería aquel con mayor crecimiento porcentual del PIB?
- b. ¿Cuál sería el país con mejor resultado promedio en la prueba PISA, teniendo en cuenta el crecimiento porcentual del PIB per cápita más bajo?
4. Nombren dos países que tengan, respectivamente:
- a. Similar puntaje promedio PISA y distinto crecimiento porcentual del PIB per cápita.
- b. Similar crecimiento porcentual del PIB per cápita y distinto puntaje promedio PISA.
- c. El mismo crecimiento porcentual del PIB per cápita y el mismo puntaje promedio PISA.
- d. ¿Cómo justificarían las diferencias de los dos primeros casos?
5. Considerando el gráfico, comparen los resultados de Chile:
- a. Con los países que tienen el mejor y el peor resultado promedio PISA, respectivamente.
- b. Argumenta con tus palabras cuál sería la causa de esos resultados, sólo teniendo en cuenta la información entregada en el gráfico.

Conexión interdisciplinaria:
Educación Ciudadana
OA a, b 3° y 4° medio

RECONSTRUYENDO Y REAGRUPANDO DATOS

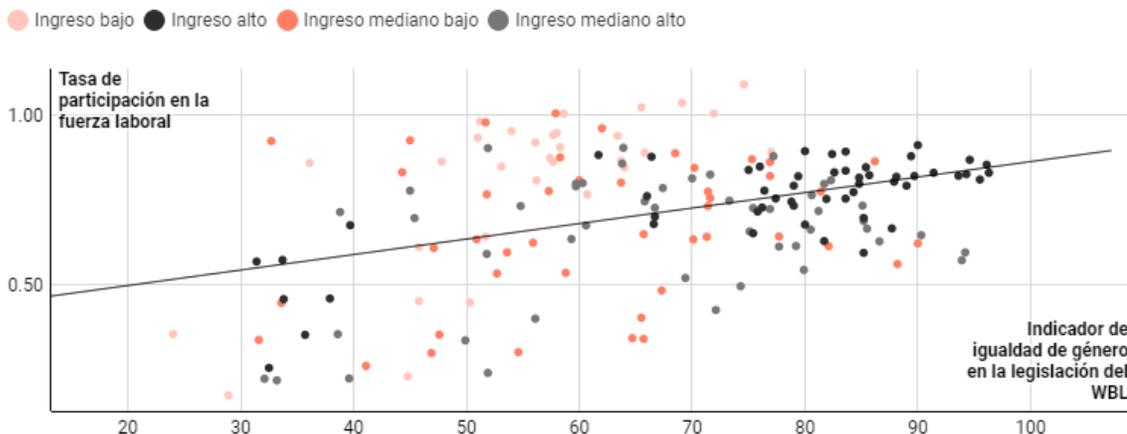
1. Con base en el contexto y el gráfico inicial, construyan la tabla y reconstruyan el gráfico de nube de puntos en la planilla de cálculo (con valores aproximados cercanos a los originales), y luego respondan las siguientes preguntas:
- a. Si consideran solo los países de América, ¿se mantiene la relación de la actividad anterior?
- b. Si consideran solo los países de Europa y África, ¿se mantiene la relación de la actividad anterior?
- c. Si consideran solo los países de Asia y Oceanía, ¿se mantiene la relación de la actividad anterior?
2. Analizando la información.
- a. Considerando la separación geográfica, analicen y argumenten la relación entre el crecimiento porcentual del PIB per cápita y el puntaje promedio PISA.
- b. Según la información del gráfico, ¿es correcto decir que a mayor puntaje promedio PISA es mayor el ingreso per cápita de los países? Argumenten su respuesta.

- c. ¿Cuál es la diferencia entre PIB y PIB per cápita? ¿Qué diferencia la medición porcentual de la medición monetaria?
3. Investiguen el PIB promedio entre los años 1960 y 2000 y el PIB per cápita promedio entre los mismos años de Chile, Marruecos y Uruguay. Para esos tres países, consideren 1,7; 3 y 1,6 – respectivamente– como valores de porcentaje aproximado de crecimiento del PIB, y puntajes promedio PISA de 390, 405 y 439, respectivamente.
- Analicen y grafiquen en una nube de puntos, los resultados en torno al puntaje promedio PISA obtenido por los países con las nuevas variables encontradas.
 - Indiquen la fuente de información: ¿cómo los ayuda para su investigación?
 - Discutan, concluyan y escriban cuáles son la variable independiente y la variable dependiente del gráfico, y cuál sería el título más adecuado para el gráfico.

INTERPRETACIÓN DE INFORMACIÓN DESDE UN GRÁFICO DE NUBE PUNTOS

1. Observa los puntos de la variable igualdad de género de la legislación del WBL (*Women Business and the Law*; en español, Mujer, empresa y el derecho) y la variable proporción mujeres/hombres que participan la fuerza laboral en 2016. Responde las preguntas y argumenta en cada caso.

En las economías con menos igualdad legal de género, menos mujeres trabajan



Nota: La tasa de participación en la fuerza laboral se mide como la proporción entre mujeres y hombres.

Fuente: Bases de datos del informe *Mujer, Empresa y el Derecho*, de las encuestas de empresas y de los Indicadores del desarrollo mundial.

- a. Si tomas el punto (90; 0,8) en el gráfico, ¿cómo se interpreta la participación en la fuerza laboral e igualdad de género en esa zona del gráfico con respecto al tipo de ingreso? Explica tu interpretación.
- b. Si el indicador inicial señala 0,45 de tasa de participación de la fuerza laboral, que se mide como la proporción entre mujeres y hombres, se observa en el eje Y del gráfico y se sabe que en este país, China, trabajan 101,835 millones de personas, que es el grupo de trabajo más grande del mundo, ¿cuántas mujeres en China se adhieren a esta proporción de trabajo?

Conexión interdisciplinaria
Educación Ciudadana
OA a, c, 3° y 4° medio

- c. El modelo que mejor relaciona la cantidad de puntos de la gráfica es: $y = 0,0039 \cdot x + 0,45$, donde y : tasa de participación en la fuerza laboral y x : indicador de igualdad de género en la legislación del WBL. Si el indicador es 60, ¿cuál es la tasa?
- d. Respecto de los puntos donde la tasa es mayor que 1, interpreta la información de acuerdo con el grupo de ingresos y de acuerdo con la cantidad de mujeres y hombres.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere aclarar a los estudiantes el significado de la variable “porcentaje de crecimiento del PIB” en relación con los gráficos presentados sobre la PIB y la proporción de trabajo entre mujeres y hombres. Esta variable compara el crecimiento de un mismo país de un año a otro y en ningún caso representa que un país sea más rico que otro.
2. También cabe recordar que la variable “crecimiento porcentual del PIB per cápita” es sólo una comparación de crecimiento de cada país consigo mismo y no da información referente al PIB de cada país ni el PIB per cápita en unidad monetaria.
3. Respecto de las preguntas “relación entre variables”, se recomienda indicarles a los alumnos que puedan diseñar una recta lo más representativa posible sobre el comportamiento de la nube de puntos, para visualizar la tendencia de crecimiento lineal de las variables.
4. Es posible que confundan los ejes coordenados definidos y contesten que, por ejemplo, Singapur tiene mejor puntaje promedio PISA y que Taiwán es el que tiene mayor crecimiento porcentual del PIB; por ello, es importante constatar las respuestas y corregir el error.
5. Se recomienda enfatizar que tienen que contestar basados en los datos del gráfico, sin incorporar otro tipo de información anexa.
6. En la actividad “Reconstruyendo y reagrupando”, conviene que trabajen con computadores, *tablets* o celulares, ya que deberán explorar y reconstruir la información para poder confeccionar los gráficos pedidos y analizarlos.
7. Se recomienda buscar en www.google.cl los “PIB Chile”, “PIB Marruecos”, “PIB Uruguay”, “PIB Per cápita Chile”, “PIB Per cápita Marruecos” y “PIB Per cápita Uruguay”; ahí, el primer resultado es un gráfico tal que, si se posicionan sobre él, pueden ver año a año cuáles son los valores. Así tendrán que calcular el promedio que se pide.
8. Al final de la actividad, hay que explicarles que –según el contexto del documento– la variable independiente son los resultados promedios de la prueba PISA y la variable dependiente es el porcentaje de crecimiento del PIB.

9. En la actividad sobre la fuerza laboral y el índice de equidad, se sugiere que exploren completamente el gráfico a partir de la relación lineal establecida en la nube de puntos, donde pueden conocer la ecuación del modelo. La idea es que analicen qué significa que los puntos estén bajo la recta o sobre la recta, o bien muy cercanos a ella; y qué significan aquellos puntos más a la derecha (índice de igualdad creciente) o más a la izquierda (índice de igualdad decreciente).
10. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Elaboran histogramas, nube de puntos, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada y diagramas de cajón, en forma manual y mediante herramientas digitales.
 - Resuelven problemas que involucran comparación de conjuntos de datos, a partir de diagramas de cajón, nube de puntos, histogramas, polígonos de frecuencia y frecuencia acumulada.
 - Argumentan y toman decisiones al interpretar información que involucra dependencia entre dos variables.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Diagrama de dispersión
<https://curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=KwtuSe1JAVQ>
- Diagrama de dispersión en Excel (estadística bivariada)
<https://curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=BAXU5yJeSUI>

Actividad de Evaluación

Objetivos de Aprendizaje

OA1. Argumentar y comunicar decisiones a partir del análisis crítico de información presente en histogramas, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada, diagramas de cajón y nube de puntos, incluyendo el uso de herramientas digitales.

OAc. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OAd. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OAI. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática / cuantitativa confiable a través de la web.

Indicadores de evaluación

- Elaboran histogramas, nube de puntos, polígonos de frecuencia, frecuencia acumulada y diagramas de cajón, en forma manual y mediante herramientas digitales.
- Representan información en histogramas, nube de puntos, diagrama de cajón, polígonos de frecuencia y de frecuencia acumulada, para interpretar información.
- Resuelven problemas que involucran comparar conjuntos de datos, a partir de diagramas de cajón, nube de puntos, histogramas, polígonos de frecuencia y frecuencia acumulada.
- Resuelven problemas que involucran el análisis gráfico de datos estadísticos con medidas de posición.
- Argumentan y toman decisiones al interpretar información que involucra dependencia entre dos variables.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1, cada una por sí misma o en conjunto. Algunas pueden desarrollarse como trabajo colaborativo para discutir y proponer estrategias que permitan llegar a la o las soluciones posibles.

1. Elaborar histogramas, polígonos de frecuencia y diagramas de caja

La siguiente tabla muestra la cantidad de matrimonios¹⁰ en 2017 según las edades del contrayente y la contrayente.

GRUPO DE EDAD DEL CONTRAYENTE	Total	Grupo de edad de la contrayente													
		Menores de 15 años	15 a 19 años	20 a 24 años	25 a 29 años	30 a 34 años	35 a 39 años	40 a 44 años	45 a 49 años	50 a 54 años	55 a 59 años	60 a 64 años	65 a 69 años	70 a 74 años	75 años y más
Total	61.320	0	1.121	8.189	16.368	12.664	7.296	4.767	3.619	2.910	1.952	1.247	644	318	225
Menores de 15 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15 a 19 años	344	0	167	140	28	5	2	2	0	0	0	0	0	0	0
20 a 24 años	5.209	0	589	3.050	1.202	242	85	28	11	1	1	0	0	0	0
25 a 29 años	14.123	0	254	3.523	7.818	1.961	417	110	34	5	1	0	0	0	0
30 a 34 años	13.447	0	79	1.014	5.078	5.467	1.319	352	102	25	10	1	0	0	0
35 a 39 años	8.820	0	21	303	1.554	3.258	2.568	775	246	69	21	5	0	0	0
40 a 44 años	5.506	0	4	100	447	1.076	1.683	1.347	555	211	64	11	6	1	1
45 a 49 años	3.937	0	2	32	152	410	682	1.095	939	446	133	27	10	6	3
50 a 54 años	3.141	0	4	16	62	148	316	589	856	735	271	110	20	8	6
55 a 59 años	2.392	0	0	6	16	60	138	261	448	666	490	195	76	25	11
60 a 64 años	1.802	0	0	3	8	27	50	123	263	389	455	302	135	36	11
65 a 69 años	1.191	0	1	1	2	4	23	51	100	205	273	284	158	55	34
70 a 74 años	701	0	0	1	0	3	9	24	43	97	137	168	117	68	34
75 años y más	707	0	0	0	1	3	4	10	22	61	96	144	122	119	125

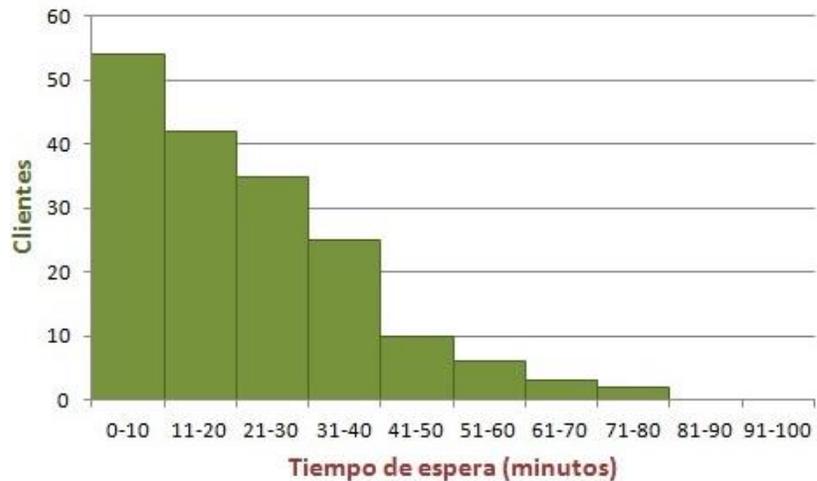
Utilizando una planilla de cálculo como apoyo u otro recurso digital, construye:

- Un histograma de frecuencias relativas porcentuales, considerando todas las edades del varón, pero que la mujer esté en el intervalo de 30 a 34 años.
- Un polígono de frecuencias relativas porcentuales acorde con el histograma anterior.
- Un diagrama de caja que represente esa misma información.

¹⁰ Instituto Nacional de Estadísticas (INE), Estadísticas Vitales, cifras provisionales 2017.

2. Obtener información desde histogramas

El siguiente histograma representa los tiempos de espera de los clientes de una empresa automotora de vehículos usados. Responde las siguientes preguntas, argumentando tu razonamiento.



- ¿Cómo se interpreta que el histograma muestre una asimetría a la izquierda?
- ¿Cuál sería una buena estimación del tiempo de espera promedio de los clientes?
- ¿Dónde se encuentra la mediana de los tiempos de espera y cuál es su significado?

3. Interpretar la tasa mundial de pobreza

Utiliza la Figura 1 –que refleja la población mundial según las Naciones Unidas– para responder las preguntas.

Conexión interdisciplinaria:
Educación Ciudadana
OA b, e, 3° y 4° medio

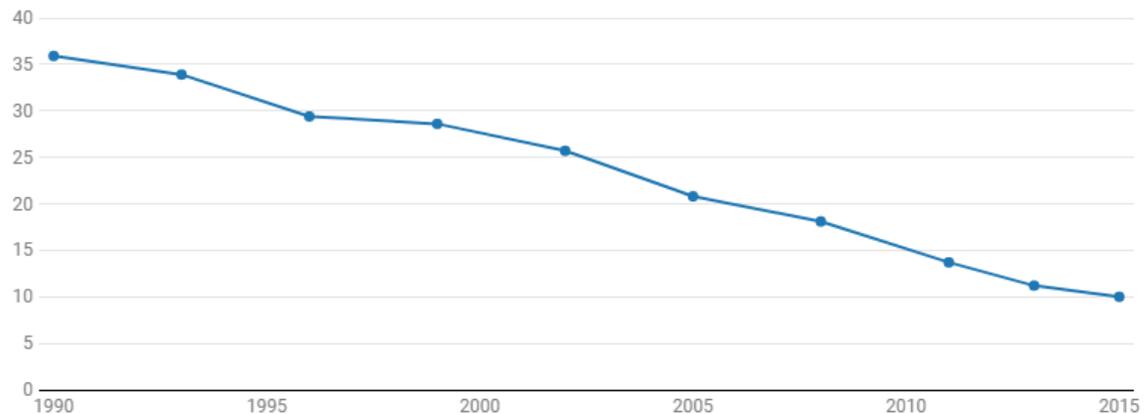


Fig. 1: Población mundial proyectada por Naciones Unidas

Observa el siguiente gráfico, extraído del resumen del Banco Mundial respecto de la proporción de personas que viven en extrema pobreza entre 1990 y 2015.

Tasa mundial de pobreza, 1990-2015

Proporción de personas que viven con menos de USD 1,90 al día (%), PPA de 2011

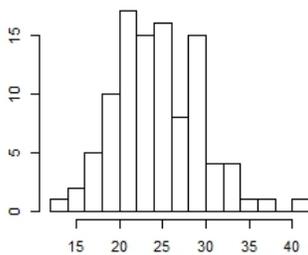
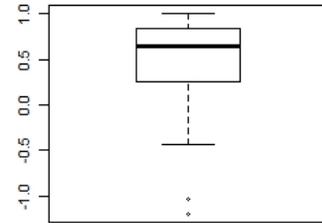
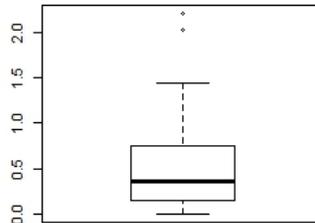
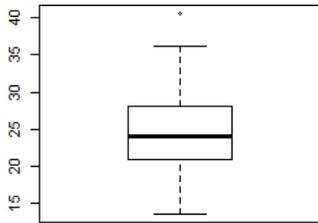


Nota: PPA = paridad del poder adquisitivo

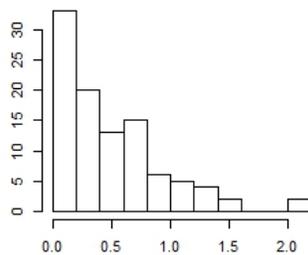
- ¿Qué proporción de personas vivió en extrema pobreza en 1990? ¿Aproximadamente a cuántas personas equivaldría eso, según la Figura 1?
- ¿Qué proporción de personas vivió en extrema pobreza en 2015? ¿Aproximadamente a cuántas personas equivaldría eso, según la Figura 1?
- ¿Cómo evolucionó la proporción de personas en extrema pobreza entre 2005 y 2015? Expresa en términos de porcentaje y numéricos, acorde a la Figura 1.
- ¿Qué ocurrió con la proporción de personas en extrema pobreza en años como 2008 y 2011? ¿Cómo puedes argumentar esto según la información del gráfico?
- Acorde a la tendencia que sigue el gráfico, ¿qué sucedería hacia años como 2025, 2030 o incluso 2100? ¿Cómo puedes argumentar según la información del gráfico?
- Acorde a la tendencia que sigue el gráfico, ¿hacia qué años la extrema pobreza tendría una proporción cercana a cero? ¿Cómo puedes argumentar esto según la información del gráfico?

4. Interpretar información desde diagramas de caja

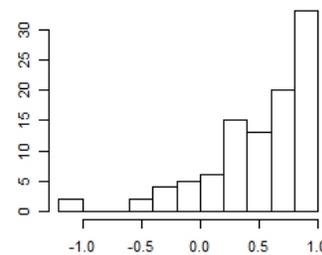
Observa los siguientes gráficos con las temperaturas mínimas en invierno de las ciudades de Copiapó, Puerto Williams y Santiago, responde las preguntas y argumenta en cada caso.



Copiapó



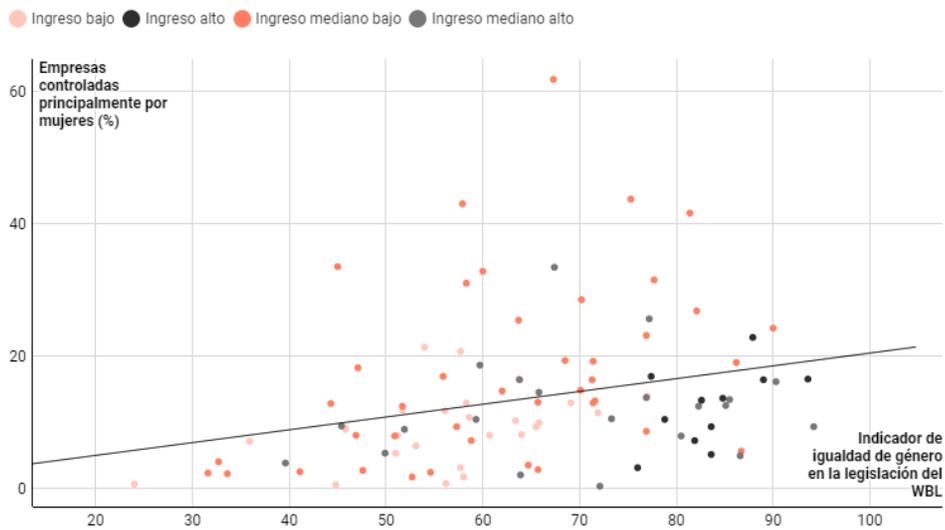
Puerto Williams



Santiago

- ¿En qué ciudad la mediana es un valor central con respecto a las demás temperaturas? ¿Por qué?
 - ¿En qué ciudad el rango intercuartílico corresponde a la brecha de temperatura más grande? Explica tu procedimiento.
 - ¿En qué ciudad el rango intercuartílico es central o simétrico respecto del diagrama de caja? ¿Cómo se interpreta esta simetría respecto de la información que se entrega?
 - ¿En qué ciudad el primer quintil representa una temperatura baja con respecto a las temperaturas mínimas de la ciudad? ¿Por qué?
 - ¿Cuál es la temperatura mínima promedio en cada ciudad? Haz una estimación y explica tu procedimiento.
 - Hay poca variabilidad cuando la moda, la mediana y la media son valores similares. ¿En qué ciudad se da esa condición? ¿Por qué?
5. Resolver problemas describiendo representaciones de dos variables relacionadas
- Observa la dispersión de los puntos de la variable “igualdad de género de la legislación del WBL” (y) y la variable “porcentaje de empresas controladas principalmente por mujeres” (x). Responde las preguntas y argumenta en cada caso.

En las economías con menos igualdad legal de género, menos mujeres son dueñas de sus propias empresas



- ¿De qué grupo de ingreso hay más valores atípicos en el gráfico? ¿Cómo se interpreta esto?
- Si el modelo es $y = 0,111 \cdot x + 5$, ¿cuál es el grupo de ingreso que tiene más puntos relacionados? ¿Cómo se interpreta esto?
- Dado el modelo anterior –el que más se acerca a la relación entre el indicador y el porcentaje de empresas–, si el porcentaje es 15, ¿cuál es el indicador de igualdad?
- Interpreten el punto (45; 10) de acuerdo con grupo de ingreso descrito por el Banco Mundial.

PAUTA DE EVALUACIÓN

Criterios de evaluación	Niveles de logros		
	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Elaboran histogramas de frecuencias relativas y después marcan el polígono de frecuencia.			
Elaboran diagramas de cajas para comparar una misma información con diferentes representaciones.			
Identifican asimetrías en histogramas.			
Interpretan la información de histogramas asimétricos.			
Determinan la mediana para darle significado según el contexto.			
Determinan la cantidad de personas que tienen una cierta característica, utilizando los datos de un gráfico.			
Determinan la tendencia de los datos, proyectando y conjeturando hacia el futuro.			
Comparan información presentada en gráficos de caja e histogramas.			
Determinan medidas de dispersión para interpretar brechas entre las características de los datos.			
Determinan datos mínimos o máximos a partir de diferentes representaciones.			
Comparan la variabilidad de datos representados en diferentes gráficos.			
Identifican datos atípicos dentro de un gráfico de nube de puntos.			
Comparan la información entregada en un gráfico de nube de puntos con un modelo lineal.			
Interpretan un dato según el contexto y el modelo entregado.			

Unidad 2

Unidad 2: Comprender la media muestral, las medidas de dispersión y la correlación

Propósito de la unidad

Los estudiantes desarrollan actividades que les permiten comprender cómo las medidas de dispersión entregan información acerca de la distribución de datos recopilados. Resuelven problemas que involucran muestras, desviaciones, varianzas y también la correlación entre variables, de modo manual y con herramientas digitales. Analizan críticamente, argumentan y toman decisiones. Algunas preguntas que pueden orientar esta unidad son: ¿A partir de qué condiciones tienden las medias muestrales a la media poblacional? ¿Por qué la correlación entre variables permite justificar la toma de decisiones?

Objetivos de Aprendizaje

OA 2.

Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianzas, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actividad 1: Analizar información gráfica en diferentes contextos

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes entiendan mejor la media aritmética muestral y la desviación estándar muestral. Se propone explorar la invariancia de la media al modificar la frecuencia en distribuciones simétricas, o sobre la toma de decisiones basadas en la representatividad de la media muestral, y el rol de la desviación estándar y sus propiedades.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

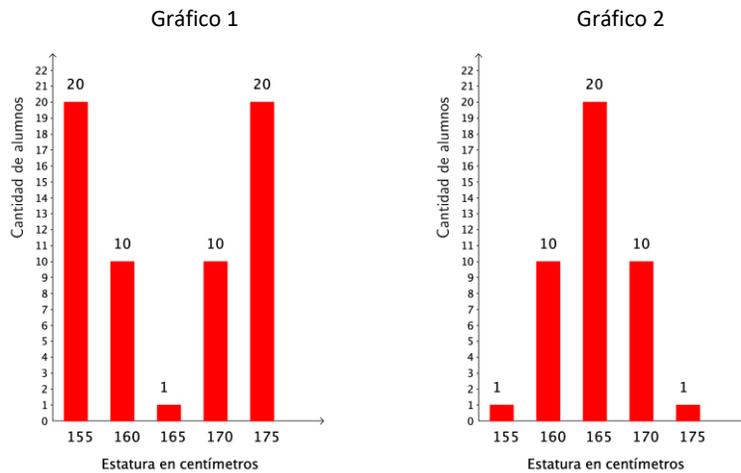
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.
- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

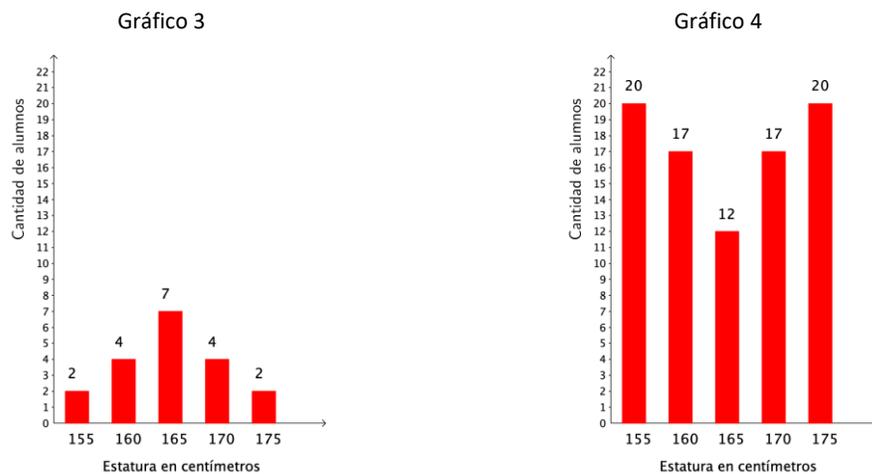
DESARROLLO

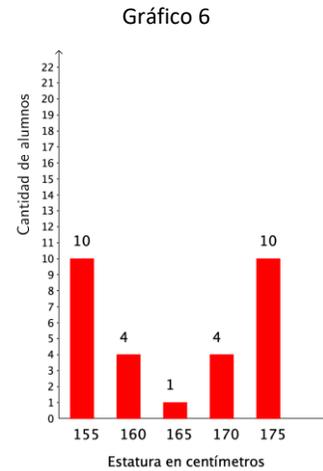
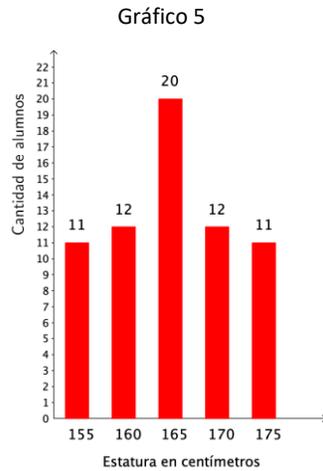
DETERMINANDO LA MEDIA ARITMÉTICA Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR

1. La media aritmética es altamente sensible a varias características de los datos cuantitativos. Para estudiar esto, desarrolla las siguientes actividades:
 - a. Observa el par de gráficos adjuntos, que resumen las estaturas observadas de dos grupos de 61 y 42 estudiantes, respectivamente, en dos colegios diferentes.



- b. Determina la media aritmética de cada grupo (observa que estos gráficos son similares a tablas de frecuencias de datos).
 - c. ¿Es posible decidir si un grupo es más alto que el otro? Explica tu razonamiento.
2. Repite el cálculo de la media aritmética para los datos de otros grupos, que se muestran en los cuatro gráficos siguientes:





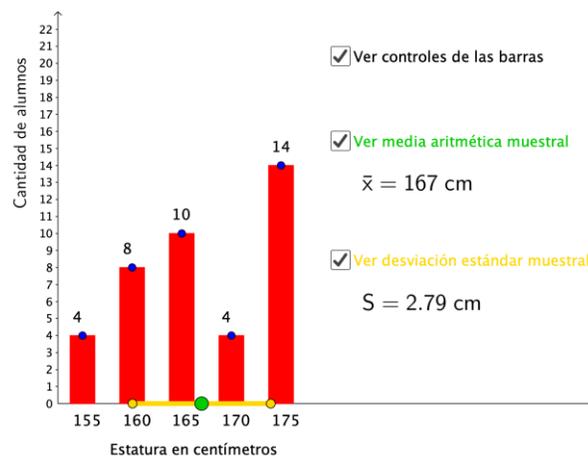
- a. ¿Qué observas en el valor de la media aritmética en cada gráfico?
 - b. ¿Existe alguna característica en la forma de cada gráfico o en la disposición de las barras que cause lo que ocurre con el valor de la media aritmética? Explica tu razonamiento.
3. Determina ahora la desviación estándar en cada uno de los seis gráficos anteriores.
- a. Organiza tus cálculos en la siguiente tabla:

	Gráfico 1	Gráfico 2	Gráfico 3	Gráfico 4	Gráfico 5	Gráfico 6
Media aritmética						
Desviación estándar						

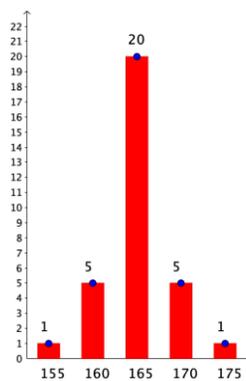
- b. ¿Existe alguna característica en la forma de cada gráfico o en la disposición de las barras que cause lo que ocurre con el valor de la desviación estándar? Explica tu razonamiento.

VISUALIZACIÓN DE LA DESVIACIÓN MEDIA Y ESTÁNDAR DESDE GRÁFICOS

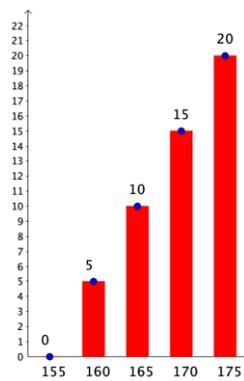
1. La media aritmética es altamente sensible a varias características de los datos cuantitativos.
 - a. Para estudiar esto, abre el *applet* “Visualización media aritmética y desviación estándar” en el siguiente enlace:
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/m/bdyckssg>.
 - b. Al marcar la casilla “Ver controles de las barras”, aparecerán puntos azules con los que podrás cambiar las frecuencias de los datos. El punto verde representa la media aritmética ubicada entre los datos, y los puntos amarillos (con sus segmentos) representan la desviación estándar de los datos, como el intervalo $[\bar{x} - S, \bar{x} + S]$.



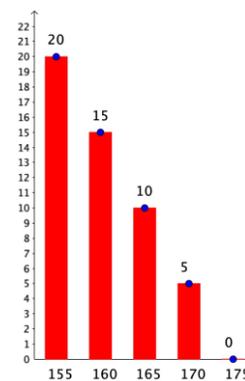
c. Explora cómo se afecta a la media con diferentes distribuciones de datos; para ello, cambia en el *applet* la distribución de algunas parecidas a las que se muestra en los siguientes gráficos, y observa cómo se comporta el valor de la media muestral:



$\bar{x} =$



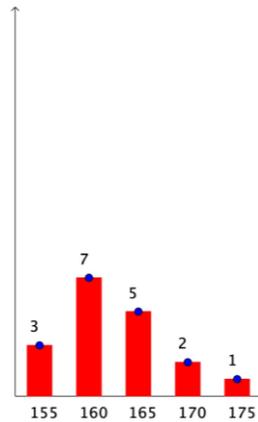
$\bar{x} =$



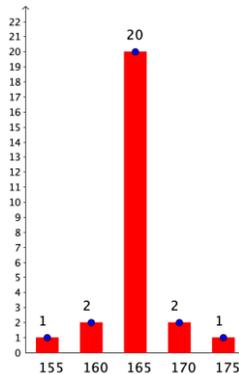
$\bar{x} =$

d. ¿Qué puedes concluir del valor de la media respecto de la forma de la distribución de los datos?

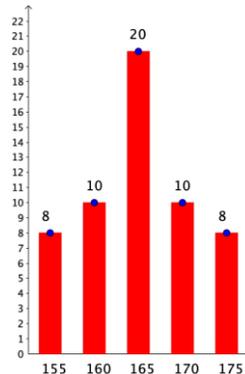
2. Explora cómo varía la media de una muestra cuando uno de los datos tiene una frecuencia demasiado alejada del resto. Para ello, construye en el *applet* un gráfico idéntico al adjunto.



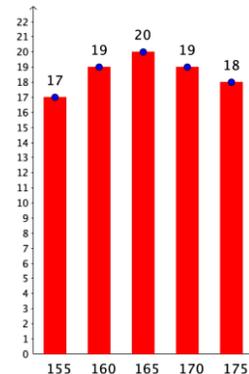
- Modifica la altura de la barra de frecuencia 1 (la última de la derecha) para que la frecuencia cambie a 10. Observa cómo se mueve el punto verde que indica la media de los datos, e identifica el valor que toma.
 - Cambia la altura de la barra que moviste (la de frecuencia 10). Observa cómo se mueve la media de los datos y vuelve a mirar el valor que toma.
 - ¿Cuánto era la media cuando la frecuencia era 1? ¿Cuánto es la media cuando la frecuencia es 20?
 - ¿Cómo cambió la media cuando se modificó la frecuencia de 1 a 20?
 - Compara la media cuando la frecuencia es 1 y cuando la frecuencia es 20. ¿En qué caso es más “razonable” el valor de la media?
3. En el *applet*, cambia la distribución de los datos por las que se muestran en los siguientes gráficos.
- Observa cómo se comporta el valor de la desviación estándar.



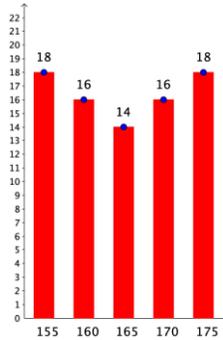
$S =$



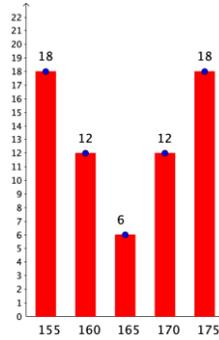
$S =$



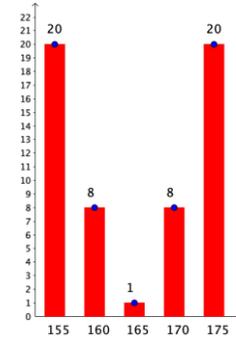
$S =$



$S =$

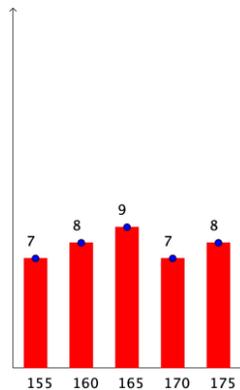


$S =$



$S =$

- b. ¿Qué puedes concluir del valor de la desviación estándar muestral respecto de la forma de la distribución de los datos? Explica tu razonamiento.
4. Explora cómo varía la desviación estándar de una muestra cuando uno de los datos tiene una frecuencia demasiado alejada del resto. Para ello, construye en el *applet* un gráfico idéntico al que se ve adjunto.



- Cambia las alturas (frecuencias) de las barras y observa cómo se mueve la barra amarilla, que indica la desviación estándar de los datos. Identifica el valor que toma.
 - Cambia a cero la frecuencia de los datos 155, 170 y 175. Observa cómo se mueve la desviación estándar de los datos y luego identifica el valor que toma.
 - ¿Cuánto era la desviación estándar antes de cambiar las frecuencias?
 - ¿Cuánto es la desviación estándar después de cambiar las frecuencias?
 - Interpreta la desviación estándar cuando la frecuencia tenía el primer valor y cuando tomó el segundo valor.
5. Determina cuál es el valor máximo y el valor mínimo que puede alcanzar la media muestral para los datos que se usa en los gráficos. ¿Cuáles serían estos mismos valores para un conjunto cuantitativo cualquiera de datos respecto del valor mínimo y del valor máximo de ellos? Justifica tus respuestas.

ANALIZAR GRÁFICOS

A partir de los datos y de lo estudiado en la primera actividad, realicen las siguientes actividades:

1. Construye dos gráficos de barras que tengan formas diferentes, pero que, con los datos que representan, se obtenga $\bar{x} = 166$ (no importa el valor de la desviación estándar). Puedes utilizar el *applet* para explorar, verificar y justificar las soluciones.
 - a. Explica la estrategia que seguiste para hallar los dos gráficos pedidos en la pregunta anterior y justifica las decisiones que tomaste en el proceso.
 - b. Utiliza el *applet* para construir dos gráficos diferentes: el primero con una desviación estándar menor a 3, es decir, $S < 3$, y el segundo con $S > 8$. Justifica por qué los gráficos cumplen estas condiciones.
 - c. Si en un gráfico se considera simultáneamente la media muestral y la desviación estándar muestral, ¿cómo debiese ser la distribución de sus datos para que la media sea muy representativa de los datos de la muestra? Justifica tu respuesta.
 - d. Busca en la prensa o en algún sitio web que reporte estadísticas con gráficas, una situación que te interese y, con base en ella, indaga si la media es muy representativa o poco representativa en ese caso.

ANALIZANDO PROPIEDADES

1. La media aritmética y la desviación estándar poseen algunas propiedades interesantes. Analiza cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas.
 - a. Si la media aritmética de los datos de una muestra es $\bar{x} = 5,6$ y se suma a todos los datos un valor constante, como 1,2, la media aritmética resultante es $\bar{x} = 5,6 + 1,2 = 6,8$. En general, $\overline{x + a} = \bar{x} + a$, si $a \in \mathbb{R}$.
 - b. Si la media aritmética de los datos de una muestra es $\bar{x} = 4,3$ y se multiplica todos esos datos por un valor constante, como 2, la media aritmética resultante es $\bar{x} = 4,3 \cdot 2 = 8,6$. En general, $\overline{x \cdot a} = \bar{x} \cdot a$, si $a \in \mathbb{R}$. Asumiendo que esa fórmula es verdadera, ¿se podría deducir que $\overline{\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{\bar{x}}{a}$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$?
 - c. ¿Es cierto que $\overline{x^2} = (\bar{x})^2$? Utiliza ejemplos numéricos para argumentar su veracidad.
2. Si S es la desviación estándar de una muestra y $a \in \mathbb{R}$ es un valor cualquiera, ¿cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
 - a. Si se suma a a todos los datos de una muestra, entonces su desviación estándar es $S + a$.
 - b. Si se multiplica todos los datos de una muestra por a , entonces su desviación estándar es $S \cdot a$.
 - c. Si se divide todos los datos de una muestra por a (con $a \neq 0$), entonces su desviación estándar es $\frac{S}{a}$.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 2 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos previos sobre la media aritmética. Algunas de las preguntas e instrucciones pueden ser:
 - Describe las medidas de tendencia central más utilizadas.
 - ¿Qué entiendes por promedio y media aritmética?
 - ¿En qué casos se utiliza el promedio?
 - Hace un listado de notas de todo un año de la asignatura que más te guste. Determina la media aritmética de estas notas y compara con tu compañero. ¿en qué casos sirve la comparación?
 - Basándote en tu promedio de Matemática del año pasado, busca a un compañero que tenga la misma media aritmética que tú al aproximar al entero. Busquen juntos algunas alternativas y criterios para ver quién de los dos podría ser seleccionado cómo el mejor de la asignatura.
 - Si hubiera que elegir a un deportista por su esfuerzo y hay dos mejores con igual promedio en su rendimiento, ¿qué harías?
2. Se recomienda tratar la desviación de una variable con respecto a otro dato, y la desviación de una variable con respecto a su media junto con la desviación media, y destacar en un gráfico lo que se hace e interpreta según el contexto.
3. En el análisis de gráficos, se propone estudiar la media que se produce cuando los datos tienen una distribución simétrica. Conviene enfatizar que ni la cantidad de datos ni el valor de ellos altera el valor de la media aritmética cuando la forma del gráfico es simétrica.
4. Cabe dejar que los estudiantes exploren que, mientras más alejados estén de la media, tendrán mayor desviación estándar y mientras más agrupados estén alrededor de la media, menor será su desviación estándar.
5. Se recomienda que indaguen la propiedad que tiene la media aritmética respecto de los límites; a saber: la media aritmética es siempre mayor o igual al valor más pequeño de los datos y menor o igual al valor más grande de los datos.
6. Otra propiedad a indagar se refiere a la representatividad de la media aritmética muestral, lo cual ocurre cuando la desviación estándar es pequeña (mientras más pequeña, más representativa es la media muestral).

7. Tienen que calcular la media muestral según la expresión $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \dots + f_k \cdot x_k}{n}$ si los n datos x_i están agrupados en tabla, con k frecuencias absolutas f_i . Se sugiere que hagan estos cálculos paso a paso desde la tabla, de manera manual o usando la planilla de cálculo:

x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$
<i>SUMA</i>		

8. La desviación estándar muestral (S) se debe calcular con la expresión $S = \sqrt{\frac{f_1 \cdot (\bar{x} - x_1)^2 + f_2 \cdot (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + f_k \cdot (\bar{x} - x_k)^2}{n-1}}$, si los n datos x_i están agrupados en k frecuencias absolutas f_i . En este caso, se utiliza el denominador $n - 1$ por ser muestral, y no el denominador n que se usa para la desviación estándar poblacional. Se sugiere que hagan estos cálculos paso a paso desde la tabla, de manera manual o usando la planilla de cálculo:

x_i	f_i	$(\bar{x} - x_i)^2$	$f_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$
<i>SUMA</i>			

9. Aunque los cálculos son importantes, conviene orientar el trabajo a los aspectos más cualitativos que pueden obtener de la muestra que analicen. Por ejemplo: se espera que identifiquen qué tan representativa es la media aritmética de una muestra si se conoce su desviación estándar, o lo poco informativo que es tener a la vista sólo la media aritmética.
10. Se recomienda que indaguen lo siguiente:
- La media siempre estará acotada entre el menor y el mayor valor de los datos; es decir, si m es el valor mínimo de los datos y M el mayor de los datos, entonces $m \leq \bar{x} \leq M$.
 - La desviación estándar siempre será mayor que cero, es decir, $S > 0$, pero no tiene un valor máximo que la acote.
11. El objetivo final es trabajar más analíticamente con la media muestral y la desviación estándar muestral, atendiendo a sus propiedades y su verificación. Se sugiere que los alumnos comprendan lo que estos estadísticos informan, en cuanto a los rangos en que se mueven y cómo los afectan las distribuciones de datos.

12. Dado que uno de los objetivos de la unidad 2 es OA2 (Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales), se sugiere compartir la siguiente propuesta de rúbrica con los jóvenes para evaluar el proceso de resolver problemas en esta unidad:

Criterios	Totalmente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Identifican las variables del problema.	Identifican las características y los datos dependientes.	Identifican información numérica correspondiente al problema.	Anotan información.
Identifican los estadísticos que se debe usar para resolver el problema.	Identifican el problema central, mencionando el estadístico que se debe calcular (media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación, correlación muestral), y declaran los problemas y cálculos subyacentes.	Identifican el problema central, mencionando el estadístico a utilizar (media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación, correlación muestral).	Identifican un problema que corresponde a otros datos.
Resuelven problemas relacionados con media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral.	Calculan la media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación o correlación muestral, según el problema presentado.	Calculan la media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación o correlación muestral.	Realizan cálculos con los datos presentados en el problema.
	Interpretan los resultados según la situación presentada y dan respuesta al problema.	Escriben los resultados de sus cálculos o interpretan parcialmente el problema.	Escriben números asociados a otros cálculos.

13. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:

- Resuelven problemas que involucran analizar datos estadísticos con medidas de dispersión.
- Interpretan información que involucra los conceptos de media, desviación estándar, varianza y coeficiente de variación.
- Interpretan información que involucra la correlación muestral entre dos variables.
- Resuelven problemas que involucran la correlación muestral entre dos variables.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Applet “Visualización media aritmética y desviación estándar”
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/m/bdyckssg>.
- Media aritmética
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sangakoo.com/es/temas/media-aritmetica>
- Varianza y desviación típica
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sangakoo.com/es/temas/varianza-y-desviacion-tipica>
- Media, moda y mediana
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/probability/data-distributions-a1/summarizing-center-distributions/e/mean_median_and_mode
- Calcular la desviación estándar paso a paso
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/probability/data-distributions-a1/summarizing-spread-distributions/a/calculating-standard-deviation-step-by-step>

Actividad 2: La media muestral y la media de la población en diferentes contextos

PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden la distribución de las medias muestrales en contextos de resolución de problemas que involucran casos con reemplazo y sin reemplazo. Además, observan la tendencia de las medias muestrales al modificar el tamaño de las muestras involucradas, para inferir sobre la media poblacional.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

EVALUANDO MUESTRAS

Una fábrica de bolas de billar realiza periódicamente controles de calidad a la masa de las bolas, que debe estar comprendida entre ciertas medidas. Cada juego consta de 15 bolas identificadas con un número y un color, más la bola blanca que sirve de tiro.

1. Para comenzar, se requiere resolver el problema de escoger “aleatoriamente” 5 bolas de billar de un total de 16. Evalúen las siguientes formas de escoger la muestra de 5 bolas de billar. En este caso, no se opera directamente con las bolas concretas, sino con sus datos en papel sobre el color y masa.
 - a. Seleccionen el color de 5 bolas de billar, posicionando la punta de un lápiz sobre el recuadro de manera aleatoria.

blanco (157 g); amarillo (160 g); azul (164 g); rojo (158 g); morado (160 g); anaranjado (158 g); verde (161 g); café (162 g); negro (163 g); amarillo con blanco (160 g); azul con blanco (158 g); rojo con blanco (160 g); morado con blanco (163 g); anaranjado con blanco (164 g); verde con blanco (160 g); café con blanco (165 g).

- b. Elijan ahora el color de 5 bolas de billar, posicionando la punta de un lápiz sobre el siguiente recuadro de manera aleatoria.



- c. A partir de cómo se muestran los datos de las bolas de billar, ¿consideran que los dos métodos anteriores son efectivamente aleatorios? ¿Hay diferencias? ¿Hay sesgo en alguno? Argumenten su respuesta a partir de que “cada bola tenga la misma probabilidad de ser escogida”.
 - d. Argumenten si se puede proponer otro método más efectivo para asegurar la “aleatoriedad”. Compartan ideas con el grupo y expliquen el método utilizado.
2. Tomen finalmente una muestra aleatoria de 5 bolas de billar.
 - a. Escriban el color y la masa de las bolas seleccionadas en la siguiente tabla:

N°	Color de la bola	Masa (g)	Masa (Kg)
1			
2			
3			
4			
5			

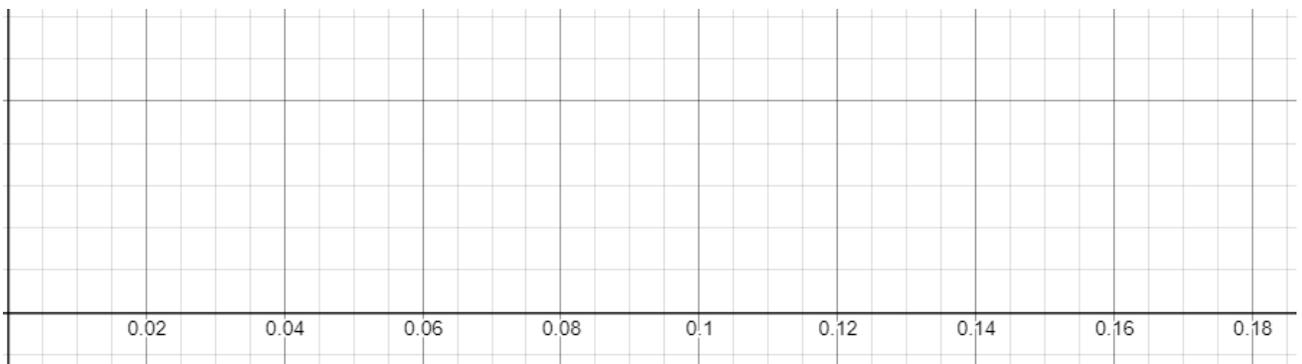
- b. Completen un diagrama de puntos con las masas (en kilogramos) de las bolas seleccionadas en el ejercicio anterior. Recuerden que, si dos o más bolas de billar tienen la misma masa, deben dibujar verticalmente tantos puntos objetos haya, manteniendo la misma distancia entre ellos.
3. ¿Cuál es el promedio de las masas de las bolas de billar en la muestra de 5 bolas?
- a. Completen la tabla y expliquen su procedimiento.

N°	Color de la bola	Masa (g)	Masa (Kg)
1			
2			
3			
4			
5			
SUMA			
PROMEDIO			

- b. Con ayuda del profesor, registren el promedio obtenido en su muestra con los promedios obtenidos por otros 9 grupos. Completen los datos en la tabla siguiente, donde la primera posición es su promedio obtenido y las otras son para los otros grupos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Promedio obtenido										

- c. Representen ahora los datos en un diagrama de puntos de promedios muestrales.



4. Calculen el promedio de la masa de las 16 bolas de billar. Ordenen los datos en la siguiente tabla:

N°	Color de la bola	Masa (g)	Masa (Kg)
1	Blanco		
2	Amarillo		
3	Azul		
4	Rojo		
5	Morado		
6	Anaranjado		
7	Verde		
8	Café		
9	Negro		
10	Amarillo con blanco		
11	Azul con blanco		
12	Rojo con blanco		
13	Morado con blanco		
14	Anaranjado con blanco		
15	Verde con blanco		
16	Café con Blanco		
	SUMA		
	PROMEDIO		

- a. Registren el valor del promedio obtenido de las 16 bolas de billar en el gráfico de puntos, mediante una línea vertical.
 - b. ¿Qué podrían afirmar al comparar el promedio recién determinado de la masa de las 16 bolas de billar y la media muestral que calcularon anteriormente?
5. ¿Qué sucedería con el promedio muestral si en lugar de 5 bolas de billar se escogen aleatoriamente 10 bolas? Dialoguen en el grupo y argumenten.
 6. Si utilizaran el mismo método de muestreo, pero en vez de seleccionar 5 bolas de billar seleccionarían 10, ¿cómo afectaría la distribución de las medias muestrales? Compartan ideas en el grupo y elaboren una respuesta.
 - a. Seleccionen el color de 10 bolas de billar de manera aleatoria y escriban el color y la masa de las bolas seleccionadas en la siguiente tabla:

N°	Color de la bola	Masa (g)	Masa (Kg)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

8			
9			
10			
	SUMA		
	PROMEDIO		

- b. ¿Cuál es el promedio de las masas de las bolas de billar en su muestra?
- c. Con ayuda del profesor, registren el promedio obtenido en su muestra con los promedios obtenidos por otros 9 grupos. Completen los datos en la tabla siguiente, donde la primera posición es su promedio obtenido y las otras son para los otros grupos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Promedio obtenido										

- d. Representen ahora los datos en un diagrama de puntos de promedios muestrales.
- e. Registren el promedio de las 16 bolas de billar, ya calculado en la actividad 4, mediante una línea vertical en el diagrama de puntos construido.
- f. ¿Qué podrían afirmar al comparar el promedio recién determinado de la masa de las 16 bolas de billar y la media muestral que calcularon en la actividad 4?

ENTREGA DE BONOS EN FORMA ALEATORIA

Un día, se informó a cuatro trabajadores de una empresa –Amanda, Bárbara, Carlos y Daniel– que fueron ganadores de un bono por su desempeño, correspondiente a mejor venta, disposición, atención a público y puntualidad, respectivamente. La persona que debe entregar los bonos está confundida y no sabe a quién le corresponde cada uno, por lo que decide repartirlos de manera aleatoria: cada bono tiene la misma probabilidad de ser distribuido a los trabajadores.

1. El jefe de personal, preocupado de que ocurran situaciones como ésta, se pregunta: si cada vez que deban entregar este bono se produjera esta situación con 4 bonos y 4 trabajadores, ¿cuál sería, en promedio, la cantidad de bonos entregados correctamente?
 - a. En grupos de 6 estudiantes, representen la situación, asignando la identidad de los 4 trabajadores Amanda, Bárbara, Carlos y Daniel.



- b. Luego, de manera aleatoria, entreguen en un sobre cerrado un bono a cada uno de ellos, indicando el reconocimiento.



- c. Registren en la siguiente tabla el comportamiento del promedio de la cantidad de veces que se entrega correctamente el bono, en la medida en que se repite más veces el experimento (la entrega de los 4 bonos) hasta llegar a 10 experimentos. Es decir, en la última columna, en cada fila registren el promedio acumulado, considerando la fila actual y las anteriores.

Experimento	Cantidad de bonos entregados correctamente	Frecuencia acumulada	Promedio de la cantidad de bonos entregados correctamente
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

2. ¿Qué sucede luego de los 10 experimentos?
- Determinen la media de las medias muestrales.
 - Representen la secuencia de los promedios obtenidos en un solo gráfico. ¿Qué observan?
 - Con base en los datos del gráfico, expliquen qué ocurre con la distribución de las medias muestrales cuando el número de experimentos aumenta. Argumenten a partir de lo que sucedería si se realizara 20 o 30 lanzamientos.
3. ¿Cuáles son las probabilidades, según la cantidad de aciertos de las cartas con los destinatarios?
- Establezcan una representación (diagrama de árbol) a partir de la cantidad de aciertos de las cartas con los destinatarios.
 - Determinen las probabilidades para cada caso, según la cantidad de aciertos. ¿De qué otras maneras podrían determinar estas probabilidades?
 - Completen la siguiente tabla:

Aciertos	0	1	2	3	4	Suma
Probabilidad						

- El promedio de trabajadores que recibieron el bono correctamente, ¿se acerca a algún valor en particular? ¿Qué valor creen que es? Argumenten a partir del concepto de esperanza de una variable aleatoria X , donde X = cantidad de aciertos en la entrega de bonos.

RELACIONANDO MEDIAS MUESTRALES Y LA MEDIA DE LA POBLACIÓN

1. Consideren como población las siguientes tarjetas con puntos:



- Calculen la media del puntaje de la población. Expliquen el procedimiento utilizado.
 - Determinen todas las muestras de tamaño 2, sin reposición. Expliquen el procedimiento utilizado.
 - Calculen la media de cada una de las muestras.
 - Calculen el promedio de todas las medias muestrales.
 - ¿Qué relación observan entre el promedio de las medias muestrales y el promedio de la población? Argumenten a partir de la semejanza entre los resultados.
 - ¿Cómo calcularían la cantidad de muestras de tamaño k sin reposición que se puede extraer de una población de tamaño n ? Expliquen su procedimiento, a partir de ejemplos concretos.
2. Un grupo de 5 trabajadores tiene los siguientes ingresos por trabajar horas extra a la semana: \$1 700, \$1 600, \$1 000, \$1 800 y \$2 200.
- Determinen la cantidad de muestras posibles de tamaño 3 y 4 sin reemplazo.
 - Determinen las dos distribuciones muestrales para cada tamaño de muestra.
 - Calculen la media de medias muestrales para ambos casos y represéntalas en un gráfico.
 - ¿Qué información pueden inferir, considerando el contexto? Redacten sus conclusiones.
3. En una producción artesanal de jabones, se revisa la masa en gramos de 4 jabones. Las masas netas obtenidas son 180, 175, 182 y 185.
- Determinen la cantidad de muestras posibles de tamaño 3 sin reemplazo.
 - Determinen la distribución muestral de la masa media de los jabones.
 - Calculen la media de medias muestrales y compárenla con el promedio de la población.
 - Repitan las actividades a, b, y c, pero considerando las muestras con reemplazo.
 - Comparen los datos y saquen sus conclusiones.
4. En los problemas anteriores se propone situaciones en que la elección de las muestras de cierto tamaño es “sin reemplazo o reposición” y en otras, “con reemplazo o reposición”. ¿Qué ocurre en cada caso? Argumenten su respuesta, recurriendo a casos concretos.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Durante la actividad de las bolas de billar, se sugiere enfatizar lo importante que es prever que el método de muestreo sea razonable. Por ejemplo, en el primer caso, al escribir en palabras las características de cada bola de billar, es necesario que todas las palabras tengan la misma probabilidad de ser seleccionadas. Sin embargo, esto no ocurre, pues la característica del color dada en palabras tiene distinta longitud. En el segundo caso, al presentar las imágenes de las bolas de billar de manera simétrica y ordenada, se mejora el hecho de que cada bola tenga igual

- probabilidad de ser escogida. Se recomienda que discutan otras formas de asegurar que el muestreo sea efectivamente aleatorio.
2. Para la actividad de las bolas de billar, se sugiere que hagan la experiencia con diferentes tamaños de muestras. Por ejemplo, primero se solicita un muestreo de 5 bolas para realizar la experiencia. Luego se propone un muestreo de 10 bolas de billar, para que puedan inferir si se acercan más a la media muestral al aumentar el tamaño de la muestra los promedios.
 3. Conviene reforzar con los estudiantes los conceptos clave de *variable*, *parámetro* (característica de la población), *estadístico* (característica de la muestra), *pregunta de investigación*, *población* (grupo completo de personas u objetos de interés o unidades observacionales), *muestra* (parte de la población formada por las personas u objetos a quienes corresponden los datos) y *tipos de muestreo* (muestreo aleatorio simple), para que infieran características sobre la población a partir de una muestra, si se la ha recolectado de manera adecuada.
 4. En la actividad de los bonos en sobres que se entregan “aleatoriamente”, es importante que comprendan que el promedio de los valores observados de una variable aleatoria por medio de repeticiones secuenciales de un mismo experimento se acerca cada vez más a ciertos valores; es decir, la media, la esperanza o valor esperado de dicha variable aleatoria.
 5. Para que determinen las probabilidades según el número de aciertos, se recomienda establecer una representación de “diagrama de árbol” para revisar todas las posibilidades, según si hay 0, 1, 2, 3 o 4 aciertos. Luego, pueden usar la regla de Laplace o la suma o producto de probabilidades.
 6. Otro punto importante es que, a partir de los datos registrados en los gráficos, al aumentar la cantidad de experimentos, la distribución de las medias muestrales varía más al inicio con pocas repeticiones, y comienza a estabilizarse a medida que aumenta la cantidad de repeticiones.
 7. En la última parte de la actividad, se recomienda poner énfasis en el muestreo aleatorio, la cantidad de experimentos a realizar y la media muestral obtenida. Además, será importante que identifiquen diferencias cuando las extracciones son “sin reemplazo o reposición”, o bien “con reemplazo o reposición”.
 8. Cabe destacar algunos aspectos de la estadística inferencial; por ejemplo: que, a partir de una población, se puede seleccionar muestras de un tamaño dado para deducir características de dicha población, e inferir sobre el valor de un parámetro, utilizando estadísticos adecuados.
 9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Determinan la cantidad de muestras según condiciones dadas.
 - Resuelven problemas que implican la media muestral \bar{X} , considerando los casos con reemplazo y sin reemplazo.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Muestreo aleatorio
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.rossmanchance.com/applets/randomBabies/RandomBabies.html?language=1>
- Estadística: media de la muestra vs. media de la población
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=Xs0Bzyru3DU>
- Media muestral vs media poblacional
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=1mSEgwaRB1k>

Actividad 3: Utilizar la correlación muestral en contextos de ciencias sociales

PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden cómo dos variables pueden estar relacionadas en contextos reales, y se introduce conceptos y herramientas como correlación y el modelo de regresión lineal. Usan herramientas tecnológicas para obtener la representación gráfica de nubes de puntos y la recta de regresión lineal.

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo
- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas.

DESARROLLO

¿QUÉ ENTENDEMOS POR ÍNDICE DE CAPITAL HUMANO?

El Proyecto de Capital Humano es un esfuerzo mundial para acelerar el aumento y la mejora de las inversiones en las personas, a fin de lograr más equidad y un crecimiento económico mayor.

De ese proyecto nace el Índice de Capital Humano, que permite cuantificar cuánto contribuyen la salud y la educación a la productividad y los niveles de ingresos de la próxima generación. El índice está diseñado para resaltar cómo las mejoras en los resultados actuales de salud y educación dan forma a la productividad de la próxima generación de trabajadores, asumiendo las oportunidades educativas y los riesgos para la salud que experimentarían los niños que nacen hoy hasta los próximos 18 años. Se cuantifica con un valor entre 0 y 1, donde 0 refleja que los niños mueren antes de comenzar el colegio y 1, que todos los niños están recibiendo un comienzo perfecto en los aspectos de educación y salud

en su vida. Los países pueden usar el índice para determinar el monto del ingreso cesante por causa de las brechas de capital humano, y con cuánta rapidez pueden convertir estas pérdidas en ganancias si actúan ahora.

El recurso “Tabla_PIB_ICH.xlsx” muestra los resultados del PIB per cápita, PPA (dólares \$ a precios internacionales constantes de 2011) y el Índice de Capital Humano de 93 países, como se muestra en la imagen. Esta hoja de cálculo se puede descargar desde:

Conexión interdisciplinaria:
Educación Ciudadana
OA a, b, 3° y 4° medio

https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.dropbox.com/s/n7qvb60jw1raims/Tabla_PIB_ICH.xlsx?dl=0

Nombre País	Código Nombre País	PIB per cápita, PPA (\$ a precios internacionales constantes de 2011)	Índice de Capital Humano	Continente
Albania	ALB	11802,0626	0,6213	EUROPA
Emiratos Árabes Unidos	ARE	67293,4828	0,6588	ASIA
Argentina	ARG	18932,1665	0,6105	AMÉRICA
Armenia	ARM	8787,5799	0,5717	EUROPA
Australia	AUS	44643,3978	0,8027	OCEANÍA
Austria	AUT	45493,0453	0,7928	EUROPA
Azerbaiyán	AZE	15860,9214	0,5968	EUROPA
Bélgica	BEL	42742,0176	0,7569	EUROPA
Bulgaria	BGR	18606,2200	0,6759	EUROPA
Bahrein	BHR	43363,6858	0,6682	ASIA
Bosnia y Herzegovina	BIH	11731,4806	0,6183	EUROPA
Brasil	BRA	14137,0847	0,5596	AMÉRICA
Canadá	CAN	44017,5909	0,7988	AMÉRICA
Suiza	CHE	58004,4309	0,7675	EUROPA
Chile	CHL	22767,0372	0,6744	AMÉRICA
China	CHN	15308,7121	0,6732	ASIA
Colombia	COL	13182,6308	0,5935	AMÉRICA
Costa Rica	CRI	15551,7105	0,6190	AMÉRICA
Chipre	CYP	33047,5458	0,7513	ASIA
República Checa	CZE	32570,7812	0,7816	EUROPA
Alemania	DEU	45446,1799	0,7949	EUROPA
Dinamarca	DNK	47269,6913	0,7743	EUROPA
Argelia	DZA	13900,1581	0,5231	ÁFRICA
Ecuador	ECU	10554,6342	0,6024	AMÉRICA
España	ESP	34269,1640	0,7429	EUROPA
Estonia	EST	29916,3569	0,7474	EUROPA

Nombre País	Código Nombre País	PIB per cápita, PPA (\$ a precios internacionales constantes de 2011)	Índice de Capital Humano	Continente
Finlandia	FIN	41018,0502	0,8144	EUROPA
Francia	FRA	38807,6937	0,7645	EUROPA
Reino Unido	GBR	39883,8207	0,7808	EUROPA
Georgia	GEO	9702,4279	0,6136	EUROPA
Grecia	GRC	24604,2996	0,6805	EUROPA
Hong Kong, Región Administrativa Especial	HKG	56054,9198	0,8224	ASIA
Croacia	HRV	22834,9417	0,7228	EUROPA
Hungría	HUN	26860,5733	0,7034	EUROPA
Indonesia	IDN	11188,6924	0,5350	ASIA
Irlanda	IRL	66549,9829	0,8063	EUROPA
Irán, República Islámica del	IRN	18982,9413	0,5905	ASIA
Islandia	ISL	47574,7599	0,7402	EUROPA
Israel	ISR	33220,4496	0,7629	ASIA
Italia	ITA	35343,3590	0,7688	EUROPA
Jamaica	JAM	8240,0833	0,5441	AMÉRICA
Jordania	JOR	8337,4897	0,5617	ASIA
Japón	JPN	39010,6490	0,8442	ASIA
Kazajstán	KAZ	24078,5452	0,7461	ASIA
Kenia	KEN	2992,5922	0,5177	ÁFRICA
Kirguistán	KGZ	3395,2803	0,5798	ASIA
República de Corea	KOR	35938,3742	0,8449	ASIA
Kuwait	KWT	65530,5366	0,5761	ASIA
Líbano	LBN	13191,1409	0,5379	ASIA
Sri Lanka	LKA	11691,2852	0,5839	ASIA
Lituania	LTU	29603,8770	0,7119	EUROPA
Letonia	LVA	25029,7926	0,7239	EUROPA
República de Moldavia	MDA	5190,7818	0,5801	EUROPA
México	MEX	17330,7320	0,6072	AMÉRICA
Macedonia del Norte	MKD	13132,1936	0,5338	EUROPA
Malta	MLT	36294,3776	0,7014	EUROPA
Montenegro	MNE	16467,2937	0,6152	EUROPA
Mongolia	MNG	11766,9543	0,6260	ASIA
Mauricio	MUS	20320,3703	0,6258	ÁFRICA
Malasia	MYS	26824,0850	0,6223	ASIA

Nombre País	Código Nombre País	PIB per cápita, PPA (\$ a precios internacionales constantes de 2011)	Índice de Capital Humano	Continente
Nicaragua	NIC	5321,4435	0,5308	AMÉRICA
Países Bajos	NLD	48789,1357	0,7997	EUROPA
Noruega	NOR	64965,3860	0,7710	EUROPA
Nueva Zelandia	NZL	36012,5670	0,7673	OCEANÍA
Omán	OMN	37567,4988	0,6224	ASIA
Panamá	PAN	22287,9591	0,5320	AMÉRICA
Perú	PER	12236,8013	0,5856	AMÉRICA
Filipinas	PHL	7599,1881	0,5481	ASIA
Polonia	POL	27344,0947	0,7471	EUROPA
Portugal	PRT	28034,6262	0,7763	EUROPA
Paraguay	PRY	11915,5864	0,5327	AMÉRICA
Ribera Occidental y Gaza	PSE	4449,8983	0,5542	ASIA
Rumania	ROU	23504,6551	0,6012	EUROPA
Federación de Rusia	RUS	24790,3661	0,7286	ASIA
Arabia Saudita	SAU	48985,5538	0,5849	ASIA
El Salvador	SLV	7292,4578	0,5012	AMÉRICA
Serbia	SRB	14051,6732	0,7554	EUROPA
República Eslovaca	SVK	30132,9205	0,6936	EUROPA
Eslovenia	SVN	31406,3101	0,7876	EUROPA
Suecia	SWE	46681,1715	0,8003	EUROPA
Seychelles	SYC	26656,9525	0,6776	ÁFRICA
Tailandia	THA	16279,2229	0,6039	ASIA
Tayikistán	TJK	2910,2127	0,5327	ASIA
Tonga	TON	5425,6206	0,5123	OCEANÍA
Trinidad y Tobago	TTO	28763,0708	0,6129	AMÉRICA
Túnez	TUN	10849,2974	0,5077	ÁFRICA
Turquía	TUR	25134,6144	0,6255	ASIA
Tuvalu	TUV	3575,1038	0,5538	OCEANÍA
Ucrania	UKR	7906,5403	0,6468	EUROPA
Uruguay	URY	20551,4094	0,6003	AMÉRICA
Estados Unidos	USA	54470,7998	0,7623	AMÉRICA
Vietnam	VNM	6171,8842	0,6659	ASIA
Kosovo	XKX	9779,8581	0,5598	EUROPA

¿QUÉ RELACIÓN EXISTE ENTRE EL PIB Y EL ÍNDICE DE CAPITAL HUMANO?

1. Elabora un informe en un procesador de texto (por ejemplo, Microsoft Word). Considera y enriquece el contexto con la información que se pide, incluye la tabla, agrega gráficos y responde a las siguientes preguntas o solicitudes.
 - a. Con apoyo tecnológico, investiga y explica qué es el PIB per cápita. Indica la fuente de información.
 - b. Por medio de la herramienta “Hoja de Cálculo” de GeoGebra, construye el gráfico de nube de puntos (herramienta “Análisis de Regresión de dos variables”), considerando como variable independiente el PIB per cápita, PPA (dólares \$ a precios internacionales constantes de 2011) y como variable dependiente el Índice de Capital Humano, considerando a los 93 países. Exporta el gráfico como imagen y agrega al informe.
 - c. Agrega la recta de regresión (“Modelo de regresión lineal”) al gráfico anterior y luego exporta como imagen para agregar al informe. La recta de regresión, en este caso, necesita considerar, como mínimo, 10 cifras decimales para las cifras de la pendiente, por lo cual deben seleccionar “10 cifras decimales” en el menú superior de GeoGebra en “Opciones -> Redondeo”.
2. Interpretando la información gráfica obtenida.
 - a. Según la información gráfica anterior, describe el tipo de relación lineal que hay entre las variables.
 - b. Considerando la ecuación de la recta de regresión obtenida, si el valor del PIB per cápita, PPA (\$ a precios internacionales constantes de 2011) de un país “X” fuera de 72573,4231, ¿cuál sería la estimación del Índice de Capital Humano?
 - c. Considerando la ecuación de la recta de regresión obtenida, si el valor del Índice de Capital Humano de un país “Y” fuera de 0,4992, ¿cuál sería la estimación del Índice de PIB per cápita, PPA (\$ a precios internacionales constantes de 2011)?
 - d. Considerando los datos originales y los gráficos iniciales, obtén la distancia mínima entre la recta y el o los puntos que más se alejan de ella. Explica tu procedimiento.
 - e. Según la información obtenida y entregada, ¿qué decisión debería tomar cada país para mejorar sus índices de capital humano? Explica tu razonamiento.

EXPLORANDO OTRAS RELACIONES

Realiza las siguientes actividades para enriquecer el informe de la actividad anterior:

1. El propósito es enriquecer el informe que estás elaborando mediante nuevas tablas y gráficos, a partir de las preguntas que se formulan a continuación.
 - a. Considerando los datos en Excel, calcula las distancias entre cada punto y la recta, y luego las diferencias entre los valores de la variable dependiente y la variable independiente evaluada en la recta (valor estimado).
 - b. ¿Qué puedes decir al comparar estos dos valores? Considera los 93 países para los cálculos de distancias y valores estimados.

2. ¿Qué sucede si se considera solo los países de Europa?
 - a. Construye, mediante la “Hoja de Cálculo” de GeoGebra, el gráfico de nube de puntos (herramienta “Análisis de Regresión de dos variables”), considerando como variable independiente el PIB per cápita, PPA (\$ a precios internacionales constantes de 2011) y como variable dependiente el Índice de Capital Humano, incluyendo solo los países de Europa. Exporta el gráfico como imagen y agrégalo al informe. Añade la recta de regresión (“Modelo de regresión Lineal”) a dicho gráfico, exporta como imagen y adjunta al informe.
 - b. Describe el tipo de relación lineal existente entre las variables, a partir de la información gráfica anterior.
3. ¿Qué sucede si se considera solo los países de América?
 - a. Construye, mediante la “Hoja de Cálculo” de GeoGebra, el gráfico de nube de puntos (herramienta “Análisis de Regresión de dos variables”), considerando como variable independiente el PIB per cápita, PPA (\$ a precios internacionales constantes de 2011) y como variable dependiente el Índice de Capital Humano, incluyendo solo los países de América.
 - b. Exporta el gráfico como imagen y agrégalo al informe. Añade la recta de regresión (“Modelo de regresión Lineal”) a dicho gráfico, exporta como imagen y agrega al informe.
 - c. Describe el tipo de relación lineal existente entre las variables, a partir de la información gráfica anterior.
4. En GeoGebra se puede exportar los resultados de regresión a la vista gráfica; por ende, considerando columnas distintas para América, Europa y general, es posible juntar dichos gráficos. En un mismo gráfico, compara las rectas de regresión de los países de Europa, América y la general (considerando a los 93 países). Responde las siguientes preguntas:
 - a. ¿Cuál sería el valor per cápita estimado de Europa, América y el general para un Índice de Capital Humano igual a uno? Explica tu razonamiento.
 - b. ¿Cuál de las tres rectas de regresión tendría un Índice de Capital Humano igual a uno, que registre un PIB per cápita más bajo entre los tres grupos? Explica tu razonamiento.
 - c. ¿Cuáles son los países de América que tienen el mínimo y máximo PIB per cápita respectivamente? ¿Qué sucede en el caso de Europa?
 - d. ¿Cuáles son los países de América que tienen el mínimo y máximo Índice de Capital Humano respectivamente? ¿Qué sucede en el caso de Europa?
5. Considera los modelos de regresión entre Europa y América:
 - a. ¿Qué conclusiones puedes obtener respecto de la distribución de los países de los distintos continentes?
 - b. ¿En qué valores de PIB per cápita e Índice de Capital Humano se igualarían las oportunidades entre los continentes? Explica tu razonamiento.
 - c. ¿En qué rango de valores tendría América una situación más favorable que Europa? Explica tu razonamiento.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Conviene que los estudiantes interactúen entre GeoGebra y la planilla de cálculo. Para traspasar los datos de Excel a GeoGebra, sólo deben copiar los datos desde Excel y pegarlos en la hoja de cálculo de GeoGebra.
2. Se recomienda realizar con los alumnos el modo en que se trabaja en GeoGebra, paso a paso. Por ejemplo, para crear el gráfico, se selecciona las columnas de la variable independiente y dependiente a graficar (PIB per cápita e Índice de Capital Humano), y a continuación se debe hacer clic en la herramienta de GeoGebra ubicada en el menú de cuadrados de la hoja de cálculo “Análisis de Regresión de dos variables”; aquí se despliega un recuadro donde aparecerán los datos a graficar.
3. Si copiaron el encabezado dentro de la columna, se recomienda marcar el ícono de “tuerca” para seleccionar la opción “Encabezado(s) como título(s)”, luego hacer clic en “Analiza” y aparecerá un recuadro con el gráfico de puntos. Para agregar la recta de regresión, sólo hay que hacer clic debajo del título “Modelo de regresión” y seleccionar la opción “Lineal”.
4. Para exportar a la vista gráfica de GeoGebra, se sugiere hacer clic con botón derecho del mouse en la vista de la nube de puntos y seleccionar “copiar en Vista Gráfica”. Si lo que se desea es exportar como imagen el resultado de la regresión, se recomienda seleccionar “Copiar al portapapeles” (esto guardará la imagen directamente y se podrá pegar luego en el procesador de texto) o “Exportar como imagen” (esto creará un archivo de imagen).
5. Cuando solicite describir el tipo de relación lineal existente entre las variables, conviene que lo hagan primero desde el punto de vista gráfico y no por medio del cálculo.
6. Si fuese necesario, se sugiere reforzar que se puede encontrar la distancia mínima entre un punto y una recta mediante la expresión $d = \frac{|Ax+Bx+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$; este valor indica la mayor diferencia entre la estimación de la recta de regresión (valor estimado) y el valor real del punto.
7. Conviene que usen Excel directamente y sus fórmulas incorporadas.
8. Cuando se requiera comparar, por ejemplo, entre Europa, América o en general, se recomienda que alternen entre GeoGebra y Excel según sus potencialidades. Por ejemplo, en GeoGebra se puede exportar los resultados de regresión a la vista gráfica, por lo cual es posible juntar dichos gráficos, considerando columnas distintas para América, Europa y general.
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Interpretan información que involucra la correlación muestral entre dos variables.
 - Resuelven problemas que involucran la correlación muestral entre dos variables.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Recurso “Tabla_PIB_ICH.xlsx” para el desarrollo de la actividad
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.dropbox.com/s/n7qvb60jw1raims/Tabla_PIB_ICH.xlsx?dl=0
- Proyecto de Capital Humano
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.bancomundial.org/es/publication/human-capital>
- Video: Qué es el PIB Per Cápita y cómo se establece
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=FoIS0F11_jE
- Video: Cómo interpretar el modelo de regresión lineal
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=TL3up8LIItE>
- Video: ¿Qué es el Índice de Capital Humano del Banco Mundial?
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?time_continue=188&v=nnEidte72ho
- Video: Cómo interpretar el modelo de regresión lineal
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=TL3up8LIItE>

Actividad 4: Aplicar el modelo de correlación lineal en censos de la población

PROPÓSITO

Los estudiantes profundizan en la correlación de dos variables y el modelo de regresión lineal. Se propone que primero usen herramientas tecnológicas para abordar una cantidad acotada de datos (regiones de Chile), para extender el trabajo posteriormente a una base de datos más amplia (comunas del país).

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

EL VALOR DE LA RELACIÓN ENTRE DENSIDAD Y CANTIDAD DE HOGARES EN LAS REGIONES DE CHILE

El censo es el conteo y la caracterización de todas las viviendas y habitantes del territorio nacional en un momento determinado. Hay censos de población y censos de vivienda. Los primeros permiten contabilizar y caracterizar a la población en un momento del tiempo: magnitud, distribución y composición de la población (sexo, edad, fertilidad, educación, migración); con los segundos se puede contabilizar e indagar en las características de las viviendas y hogares donde residen los habitantes.

Conexión interdisciplinaria:
Educación Ciudadana
OA a, c, 3° y 4° medio

1. Descarga la hoja de cálculo “Censo2017_Densidad_Hogares.xlsx” con los resultados de la “densidad de la población” y la “cantidad de hogares” de las 16 regiones y 346 comunas de Chile, desde:

https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.dropbox.com/s/7334chx8pxmkej/Censo2017_Densidad_Hogares.xlsx?dl=0

Región	Densidad de la población (km ²)	Cantidad de hogares
Región de Tarapacá	7,82	97693
Región de Antofagasta	4,82	174314
Región de Atacama	3,78	88706
Región de Coquimbo	18,67	240317
Región de Valparaíso	111,27	608949
Región del Libertador Gral. Bernardo O’Higgins	55,93	301717
Región del Maule	34,47	351509
Región de Biobío	64,95	507241
Región de la Araucanía	30,08	317525
Región de Los Lagos	17,11	277482
Región de Aysén del Gral. Carlos Ibáñez del Campo	0,96	34609
Región de Magallanes y de la Antártica Chilena	0,12	53832
Región Metropolitana de Santiago	462	2238179
Región de Los Ríos	21,07	128984
Región de Arica y Parinacota	13,4	66842
Región del Ñuble	36,67	163738
País	8,77	5651637

2. Considera las siguientes definiciones:

Densidad de población es la relación entre el número de personas que viven en un territorio y su extensión, lo que normalmente se expresa en habitantes por km^2 .

Habitantes, para efectos del censo, se considera como a las personas efectivamente censadas en el territorio.

Hogar como una o más personas que, unidas o no por un vínculo de parentesco, alojaron la noche del 18 al 19 de abril de 2017 en una misma vivienda o parte de ella y se benefician de un mismo presupuesto para alimentación.

- a. Con la “Hoja de cálculo” de GeoGebra, construyan el gráfico de nube de puntos (herramienta “Análisis de Regresión de dos variables”), considerando como variable independiente la densidad de población, como variable dependiente la cantidad de hogares, y a las 16 regiones de la pestaña de Excel llamada “Región” (recuerden excluir los valores totales para el país al final).

- b. Basados en el gráfico anterior, agreguen la recta de regresión a dicho gráfico (“Modelo de regresión Lineal”) y describan el tipo de relación lineal existente entre las variables.
3. Completen la siguiente tabla, usando los valores de la planilla (pestaña Región).

Región	Densidad de P. (X)	C. de Hogares (Y)	$X \cdot Y$	X^2	Y^2
I	7,82	97693	763959,26	61,1524	9543922249
II	4,82	174314			
III	3,78	88706			
IV	18,67	240317			
V	111,27	608949			
VI	55,93	301717			
VII	34,47	351509			
VIII	64,95	507241			
IX	30,08	317525			
X	17,11	277482			
XI	0,96	34609			
XII	0,12	53832			
XIII	462	2238179			
XIV	21,07	128984			
XV	13,4	66842			
XVI	36,67	163738			

- a. Según la relación entre las variables, ¿cómo debería ser el valor del coeficiente de correlación? Compartan ideas en el grupo y elaboren una hipótesis o conjetura.
- b. Calculen la suma de todos los valores de las columnas ($X, Y, X \cdot Y, X^2, Y^2$) y obtengan el coeficiente de correlación lineal de Pearson.
- c. Utilizando la calculadora científica o la función de Excel “COEF.DE.CORREL()”, comprueben el coeficiente de correlación obtenido. Si usan la calculadora científica, recuerden escoger modo REG LIN, ingresar los valores separados por comas y guardar los datos con la tecla M+.
4. Comparen el tipo de relación lineal mostrado en el gráfico y el valor del coeficiente de correlación obtenido.
- a. ¿Se confirma su conjetura? Argumenten.
- b. ¿Qué pueden decir del valor de correlación obtenido? Compartan ideas en el grupo.
5. Analicen en el grupo las siguientes situaciones.
- a. Supongan que se crea una nueva región para el país, cuya densidad es de $9,53 \frac{\text{hab}}{\text{km}^2}$. ¿Cuál sería la cantidad de hogares estimada para dicha región, bajo el modelo encontrado?
- b. Si en la XIII Región aumentara la densidad de la población en $35,4 \frac{\text{hab}}{\text{km}^2}$, ¿en cuánto debería aumentar la cantidad de hogares según el modelo de regresión lineal?
- c. ¿En qué regiones del país sería factible hacer una subdivisión de la población, de acuerdo con la densidad de $9,53 \frac{\text{hab}}{\text{km}^2}$? Fundamenta en grupo esta respuesta.

EL VALOR DE LA RELACIÓN ENTRE DENSIDAD Y CANTIDAD DE HOGARES EN LAS COMUNAS DE CHILE

- Con base en el contexto y las definiciones de variables entregadas en la actividad anterior, y usando una planilla Excel, respondan lo siguiente:
 - Construyan –con la “Hoja de Cálculo” de GeoGebra– el gráfico de nube de puntos (herramienta “Análisis de Regresión de dos variables”), considerando como variable independiente la densidad de población y como variable dependiente, la cantidad de hogares de las 346 comunas de la pestaña de Excel “Comunas”.
 - Agreguen la recta de regresión (“Modelo de regresión Lineal”) al gráfico y describan el tipo de relación lineal existente entre las variables.
 - Según la relación entre las variables, ¿cómo debería ser el valor del coeficiente de correlación? Compartan ideas en el grupo y elaboren una hipótesis o conjetura.
 - Utilizando la calculadora científica o la función de Excel “COEF.DE.CORREL()”, calculen el coeficiente de correlación.
- Comparen el tipo de relación lineal mostrado en el gráfico y el valor del coeficiente de correlación obtenido.
 - ¿Se confirma su conjetura? Argumenten.
 - ¿Qué pueden decir del valor de correlación obtenido? Compartan ideas y argumenten.
- Se necesita saber la correlación entre las comunas de cada una de las regiones del país.
 - Completen las siguientes tablas con la información que se solicita:

	Densidad de población (X)	Cantidad de hogares (Y)
Comuna a la que pertenece tu establecimiento educacional		

Usa el Modelo de:	Modelo de regresión lineal ($\hat{Y} = \beta_0 X + \beta_1$)	Valor de coeficiente de correlación (r)	Cantidad de hogares estimada de la comuna a que pertenece el establecimiento (\hat{Y})	Diferencia entre valor real y valor estimado de cantidad de hogares ($Y - \hat{Y}$)
16 regiones				
346 comunas				
Comunas pertenecientes a la región de tu establecimiento educacional				

- b. ¿Qué región tiene correlación más cercana a 1 entre sus comunas? Compartan ideas y argumenten.
 - c. ¿Qué región tiene correlación más cercana a 0 entre sus comunas? Compartan ideas y argumenten.
1. Analicen en el grupo las siguientes situaciones y justifiquen en cada caso.
 - a. Que el coeficiente de correlación sea más cercano a 1, ¿implica necesariamente que la predicción sea mejor?
 - b. ¿A qué se debe que la estimación sea mejor en unos casos que en otros?
 - c. ¿Qué modelo de regresión lineal se ajusta más a la realidad de la comuna de tu establecimiento?
 - d. Si la densidad de población de la comuna en que se encuentra su colegio aumentara al doble, ¿en cuánto variaría la cantidad de hogares con cada modelo calculado en la tabla realizada en 3.a?
 - e. ¿Qué modelo aplicarían para predecir el aumento de la cantidad de hogares de la pregunta anterior?

EXPLORANDO MÁS LA RELACIÓN ENTRE DENSIDAD Y CANTIDAD DE HOGARES

1. Según el contexto y las definiciones de variables entregadas en la actividad anterior, y usando planilla Excel, respondan lo siguiente:
 - a. Si calculamos el coeficiente de correlación entre la región a la que pertenece su colegio y las regiones que colindan por el sur y el norte, ¿mejora el valor del coeficiente respecto del coeficiente de correlación de solo la región del establecimiento? Si está situado en las regiones extremas, usen los valores de las dos regiones siguientes hacia el norte o hacia el sur.
 - b. Grafiquen la nube de puntos de los datos del ejercicio anterior.
 - c. ¿Qué otro tipo de regresión que no sea lineal se podría utilizar? Apoyen su decisión, usando GeoGebra.
2. Analicen las siguientes situaciones y justifiquen en cada caso.
 - a. Si la densidad poblacional disminuyera a la mitad, ¿cuál sería la cantidad de hogares estimada con el modelo de regresión lineal de los datos anteriores?
 - b. Si la densidad poblacional disminuyera a la mitad, ¿cuál sería la cantidad de hogares estimada con el nuevo modelo de regresión lineal? Comparen lo obtenido con los datos anteriores y con el modelo de regresión lineal.
3. Según sus observaciones, ¿cuál sería el mejor modelo de regresión?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Si se cuenta con los recursos tecnológicos, se sugiere que los estudiantes interactúen entre GeoGebra y la planilla de cálculo. Para traspasar los datos, sólo se necesita copiar los datos desde Excel y pegarlos en la hoja de cálculo de GeoGebra.
2. Conviene trabajar con los alumnos paso a paso en GeoGebra. Por ejemplo, para crear el gráfico, se selecciona las columnas de la variable independiente y dependiente a graficar, luego se pincha (clic) en la herramienta de GeoGebra “Análisis de Regresión de dos variables” (ubicada en el menú de cuadrados de la hoja de cálculo). Se despliega un recuadro donde aparecerán los datos a graficar.
3. Si se copió el encabezado dentro de la columna, se recomienda marcar el ícono de tuerca para seleccionar la opción “Encabezado(s) como título(s)” y pinchar “Analiza”: aparecerá un recuadro con el gráfico de puntos. Para agregar la recta de regresión, sólo hay que hacer clic debajo del título “Modelo de regresión” y seleccionar la opción “Lineal”.
4. Para exportar a la vista gráfica de GeoGebra, hay que pinchar en la vista de la nube de puntos con el botón derecho del mouse, y seleccionar “copiar en Vista Gráfica”. Si se desea exportar el resultado de la regresión como imagen, seleccionar “Copiar al portapapeles” (guardará la imagen directamente y se podrá pegar en el procesador de texto) o “Exportar como imagen” (creará un archivo de imagen).

5. Dada la naturaleza de las actividades, conviene que los jóvenes también obtengan los valores con calculadora. Habría que trabajar paso a paso, ya que es la oportunidad para mostrar de cómo se obtiene el valor del coeficiente de correlación.
6. Cuando se necesite calcular cada uno de los coeficientes de correlación de las comunas por regiones, se sugiere utilizar la fórmula de Excel “COEF.DE.CORREL()” y luego comparar cada uno de sus resultados para responder a las preguntas.
7. Para decidir cuál modelo es mejor, pueden comparar los valores que se obtiene al reemplazar el valor de la densidad de la población en cada modelo de regresión, y luego compararlos con el valor real de su contexto. Dado que se calculó en la tabla, el que esté más cercano al valor real será el más aproximado, considerando un posible error que oscila entre las diferencias obtenidas en las comparaciones.
8. Cabe enfatizar que lo que mide el valor del coeficiente de correlación es que haya una correlación fuerte o débil entre las variables, pero no indica que el modelo empleado sea necesariamente el mejor. Además, es importante el contexto en que se aplique el modelo.
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Toman decisiones fundamentadas respecto de la correlación entre variables, dependiendo del coeficiente o factor de correlación.
 - Resuelven problemas que involucran la correlación muestral entre dos variables.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- “Censo2017_Densidad_Hogares.xlsx”
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.dropbox.com/s/7334chx8pxmkej/Censo2017_Densidad_Hogares.xlsx?dl=0
- Resultados Censo 2017
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://resultados.censo2017.cl/>
- ¿Qué es y cómo se interpreta el coeficiente de correlación de Pearson?
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.webyempresas.com/coeficiente-de-correlacion-de-pearson/>
- Regresión lineal
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/ppCJqUuf>
- Video: Cálculo del coeficiente de correlación lineal
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=7ifeqKgZyHA>

Actividad de Evaluación

Objetivos de Aprendizaje

OA 2. Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Indicadores de evaluación

- Resuelven problemas que involucran análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión.
- Interpretan información que involucra los conceptos de media, desviación estándar, varianza y coeficiente de variación.
- Resuelven problemas que implican la media muestral \bar{X} , considerando los casos con y sin reemplazo.
- Interpretan información que involucra la correlación muestral entre dos variables.
- Resuelven problemas que involucran la correlación muestral entre dos variables.
- Toman decisiones fundamentadas respecto de la correlación entre variables, dependiendo del coeficiente o factor de correlación.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1, cada una por sí misma o en conjunto. Se sugiere que los jóvenes trabajen algunas colaborativamente para que discutan y propongan estrategias que permitan llegar a la o las soluciones posibles.

1. Estimación del sueldo promedio tras estudiar una carrera.

Uno de los aspectos que considera Fernanda para elegir qué carrera estudiar después de salir del colegio, es el sueldo que recibirá durante los primeros años.

- a. Averigua con amigos y amigas los sueldos mensuales de 5 personas que trabajan en lo que ella quiere y obtiene lo siguiente:

\$800 000	\$800 000	\$700 000	\$800 000	\$1 000 000
-----------	-----------	-----------	-----------	-------------

- b. Considerando el promedio de los 4 primeros datos y luego el promedio con los 5 datos, ¿qué promedio crees que representa mejor las observaciones en este caso? Fundamenta.

2. Estimación de la altura promedio de basquetbolistas.

La altura de los basquetbolistas es mayor que la de los deportistas de otras disciplinas, pues el aro en que deben encestar la pelota está a 3,08 metros del piso. Como es un deporte colectivo que requiere de la colaboración de muchas personas, es esencial crear estrategias y tácticas grupales para obtener buenos rendimientos; uno de los aspectos clave es la función o posición de cada jugador en la cancha.

En un equipo profesional se puede distinguir: un jugador base, normalmente el de menor estatura del equipo, que mide entre 1,80 m y 1,90 m; el escolta, que suele medir entre 1,90 m y 2,00 m; un alero, cuya estatura está entre 2,00 y 2,05 m; un ala-pívot, que suele medir entre 2,00 m y 2,10 m, y un pívot, que normalmente mide más de 2,10 m.

- a. Considerando los datos del texto, determina el promedio de estatura de un equipo de básquetbol profesional.
- b. Según datos de la FIBA (Federación Internacional de Básquetbol), la selección chilena que disputó el último sudamericano en Ambato, Ecuador, en el baloncesto de alta competencia, alcanzó un promedio de 1,93 metros de estatura, unos cinco centímetros por debajo de selecciones como la de Venezuela, cuyo promedio es de 1,97 metros.
 - ¿Cuáles podrían ser las estaturas de los jugadores del equipo chileno?
 - ¿Y del equipo de Venezuela?
 - Si se incorpora al equipo chileno un jugador de 2,06 metros, ¿en cuánto aumentó la media?
- c. El promedio de estatura de los 12 equipos que participarán en la Liga Nacional es de 1,87 metros. ¿Cuál podría ser el promedio de estatura de cada equipo?

3. Estimación de la media de la cantidad de sellos obtenidos.

Considera la variable aleatoria X : cantidad de sellos obtenidos en tres lanzamientos consecutivos de una moneda honesta.

- a. Construye un diagrama de árbol para la cantidad de sellos obtenidos y determina la probabilidad para el número de sellos obtenidos.
- b. Completa la siguiente tabla.

X	$P(X = x)$
0	
1	
2	
3	

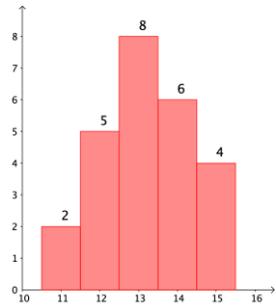
- c. ¿Cuál es la media de la cantidad de sellos en los tres lanzamientos?
- d. ¿Cómo se interpreta dicho valor?

4. Determinar la desviación estándar.

- a. Calcula la desviación estándar de los siguientes datos: 5, 3, 6, 7, 6, 12, 10.
- b. Supón que los siguientes datos provienen de una muestra. Determina la media muestral y la desviación estándar muestral correspondientes.

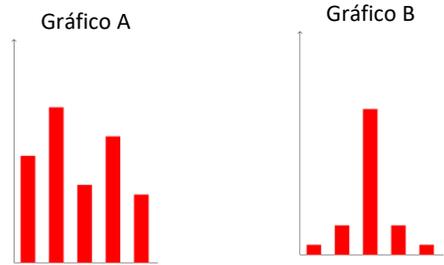
Frecuencia	1	3	5	6	9	4	2	1
Datos	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8

- c. Determina la media aritmética muestral y la desviación estándar muestral de los datos representados en el gráfico adjunto.

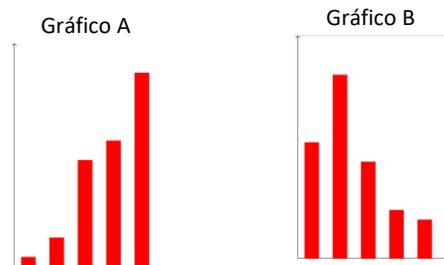


5. Inferir a partir de los gráficos.

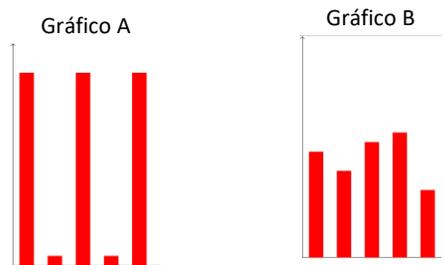
- a. En ambos gráficos adjuntos, se tiene $\bar{x} = 164$. ¿En cuál de ellos la media aritmética es más representativa? Justifica tu respuesta.



- b. ¿En cuál de los gráficos adjuntos es mayor la media aritmética? Justifica tu respuesta.



- c. ¿En cuál de los gráficos adjuntos es mayor la desviación estándar? Justifica tu respuesta.



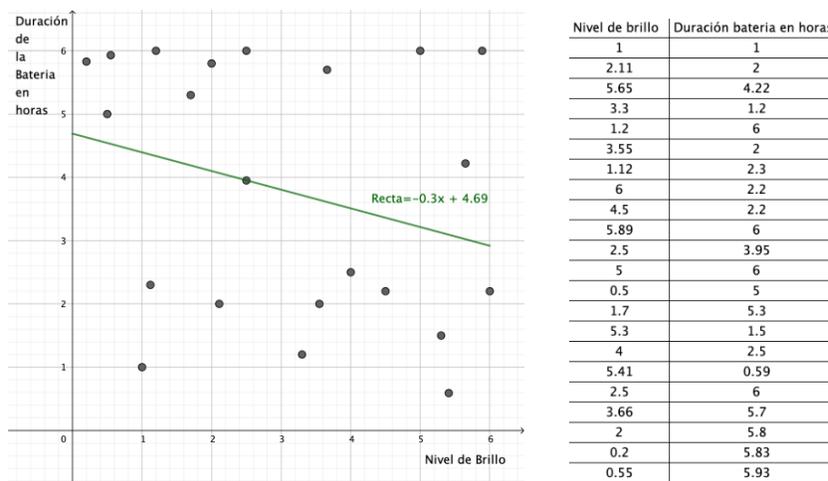
- c. Completa la siguiente tabla con las medias muestrales solicitadas, sin reposición y equiprobables:

Tipos de muestra	Media de las medias muestrales	Promedio de la población
10 muestras de tamaño 5		
10 muestras de tamaño 10		
10 muestras de tamaño 15		
20 muestras de tamaño 5		
20 muestras de tamaño 10		
20 muestras de tamaño 15		

- d. Según los datos obtenidos, responde:
- ¿Qué relación existe entre las medias muestrales y el promedio de la población?
 - A medida que aumenta el tamaño de la muestra, ¿qué sucede con las medias muestrales y el promedio de la población?
 - A medida que aumenta el tamaño de la muestra y la cantidad de muestras, ¿qué sucede con las medias muestrales y el promedio de la población?

10. Batería del celular versus brillo de pantalla.

Tienes información acerca de la relación entre la duración de la batería del celular y el brillo de la pantalla. Observa el gráfico y la tabla, y responde las preguntas.



- Argumenta sobre el tipo de relación lineal existente entre las variables.
- Calcula la distancia mínima entre la recta y el punto que más se aleja de la recta de regresión.
- Considerando la ecuación de la recta de regresión, si el nivel de brillo de un aparato "JS" fuera de 4,93, ¿cuál sería la estimación de la duración de la batería?
- Elabora, al menos, tres preguntas que puedan responderse a partir de esa información.

11. ¿Cambia la recta de regresión al agregar más datos?

- Realiza una encuesta a 25 estudiantes del curso referente a su masa y altura.
- Construye gráficos de nubes de puntos con las rectas de regresión de 10, 20 y 25 estudiantes respectivamente, según el orden en que contestaron la encuesta.
- Describe el tipo de relación lineal existente entre las variables de 10, 20 y 25 personas.
- ¿En qué se diferencian las rectas de regresión de los grupos de 10, 20 y 25 personas?
- Si preguntaras a otros 5 estudiantes su masa y estatura, ¿se podría estimar cómo cambiaría la recta de regresión? ¿Por qué?
- Pregunta a otras 5 personas su masa y altura, registra los resultados y comprueba si coincide con tu respuesta anterior.

12. Batería del celular versus horas de juego.

- Completa la siguiente tabla y responde.

Modelo de computador	Horas de juego (X)	Hora de batería restante (Y)	$X \cdot Y$	X^2	Y^2
A	2,2	1			
B	3	0,8			
C	1	1,1			
D	2,1	0,9			
E	2,9	0,6			
F	1,5	1,1			
G	1,3	1,2			
H	2,5	0,9			

- Calcula la suma de todos los valores de las columnas ($X, Y, X \cdot Y, X^2, Y^2$) y obtén el coeficiente de correlación lineal de Pearson.
- Grafica la nube de puntos y la recta de regresión.
- Compara el tipo de relación lineal deducido en el gráfico con el valor del coeficiente de correlación obtenido. ¿Qué puedes decir de la correlación?

PAUTA DE EVALUACIÓN

Criterios de evaluación	Niveles de logros		
	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Determinan el promedio de datos para elegir la mejor alternativa.			
Varían la cantidad de datos para determinar un promedio.			
Elaboran diagramas de árboles para determinar la probabilidad.			
Interpretan el valor del promedio según el contexto.			
Calculan la desviación estándar para caracterizar la distribución de los datos.			
Extraen información de un histograma para calcular el promedio y la desviación estándar muestral.			
Analizan gráficos según la media aritmética de los datos.			
Justifican respuestas relacionadas con la distribución de los datos.			
Evalúan diferentes gráficos según su desviación estándar.			
Comparan histogramas según su desviación estándar para tomar decisiones.			
Comparan medias muestrales y promedio de los datos de una situación aleatoria.			
Relacionan medias muestrales y el promedio de la población con datos tomados de su entorno.			
Comparan datos de un gráfico de nube de puntos, según la regresión lineal de los datos.			
Analizan y varían datos, determinando la regresión lineal.			
Elaboran un gráfico de nube de puntos y calculan el coeficiente de regresión lineal.			

Unidad 3

Unidad 3: Modelaje de fenómenos mediante las probabilidades las distribuciones binomial o normal

Propósito de la unidad

Los estudiantes comprenden los beneficios de trabajar con una distribución normal para encontrar rápidamente la probabilidad de algún suceso. Comienzan con experimentos aleatorios binomiales, encuentran la probabilidad de un suceso discreto y continúan con sucesos continuos y la probabilidad normal. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿Cómo se modela las situaciones de incerteza? ¿Cómo permiten tomar decisiones las distribuciones de probabilidades de sucesos?

Objetivos de Aprendizaje

OA 3.

Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actividad 1: Experimentos aleatorios con modelos de Bernoulli y Binomial

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes usen la distribución de probabilidad binomial en experimentos sencillos. Lo complementan comparando con otros modelos de probabilidad –por ejemplo, el de Laplace– y diferencian claramente cuándo aplicar uno u otro. Progresan desde comprender experimentos aleatorios del tipo Bernoulli, con probabilidad de éxito y fracaso, hasta llegar al modelo de probabilidades binomial, donde interesa determinar la probabilidad de obtener exactamente un resultado.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

DESARROLLAR EL MODELO DE PROBABILIDADES BINOMIAL A PARTIR DE EXPERIMENTOS DEL TIPO “BERNOULLI”

Paso 1. Determinar probabilidades de repeticiones de experimentos aleatorios del tipo “Bernoulli”.

La siguiente imagen muestra el esquema de un experimento aleatorio, en el cual se lanza una ficha de lados blanco y gris. Se supone que la ficha es “justa”; es decir, la probabilidad del evento “blanco **b**” es igual al evento “gris **g**”.

Se realiza $n = 7$ repeticiones del lanzamiento y sus eventos se registran en tablas de una fila con 7 columnas, cuyas celdas se marcan en blanco o en gris.

Los eventos también se representan en una fila con 7 columnas ingresando las letras “b” y “g” o coloreando en blanco y gris según corresponda

Experimento Bernoulli

7 repeticiones → cadena Bernoulli del largo $n = 7$

solo 2 resultados posibles blanco y gris

E: [] [] [] [] [] [] []
 F: [] [] [] [] [] [] []
 G: [] [] [] [] [] [] []
 ? : [] [] [] [] [] [] []
 H: [] [] [] [] [] [] []

a. Completa las siguientes 7 –tuplas ordenadas que representan los eventos “E”, “F”, “G” y “H”.

$$E = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$$

$$F = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$$

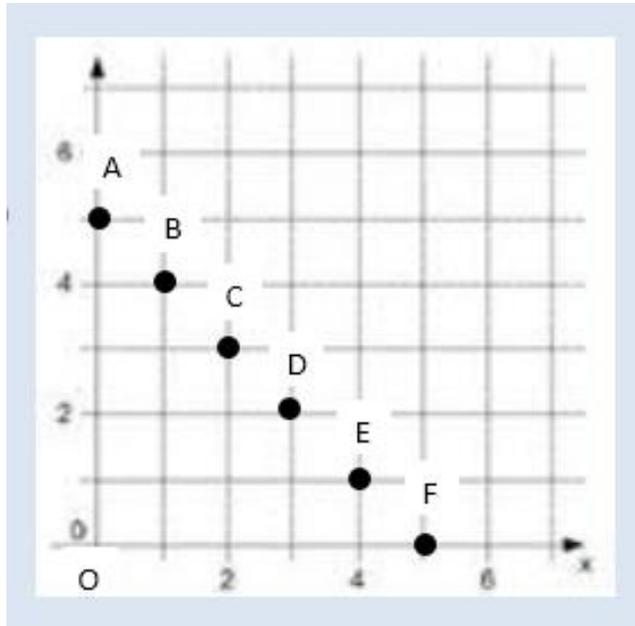
$$G = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$$

$$H = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad)$$

b. Determina las probabilidades $P(E)$, $P(F)$, $P(G)$ y $P(H)$ de los eventos “E”, “F”, “G” y “H”.

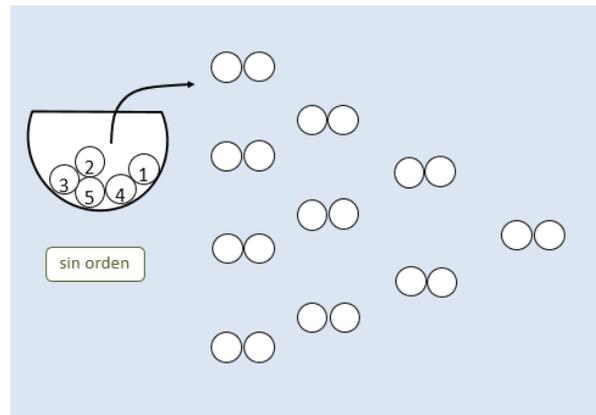
c. ¿Cuál es la probabilidad de cualquier evento compuesto de 7 lanzamientos? Argumenta la respuesta.

Paso 2. La siguiente imagen muestra un sistema de coordenadas con los puntos A, B, C, D, E, F . Partiendo del origen O , es posible moverse en las líneas de la “reja” en 5 pasos de una unidad para llegar a uno de los puntos mencionados. Se define una variable aleatoria X que representa el número de los pasos hacia la derecha.



- Determina los valores $X = k$ para llegar a los puntos A, B, C, D, E, F .
- Marca con diferentes colores todos los “caminos” posibles para llegar desde O a los puntos A, B, C, D, E, F .
- Si la probabilidad de dar un paso hacia la derecha es igual que dar un paso hacia arriba, ¿cuál es la probabilidad de llegar a los puntos mencionados?
- ¿Qué coincidencia existe con el experimento anterior? Argumenta tu respuesta.

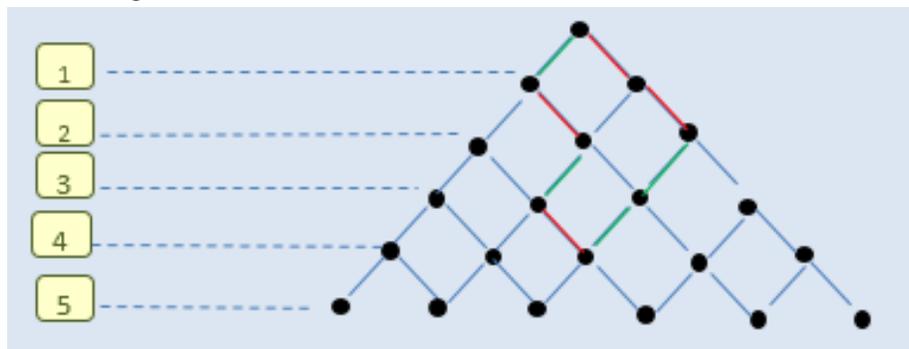
Paso 4. La siguiente imagen muestra el esquema de un experimento aleatorio de un “Mini-Loto”, en el cual se extrae al azar dos bolitas de la siguiente manera: se saca una bolita, se registra el número y la bolita no se devuelve a la urna (sin reposición). Después se saca la segunda bolita y se registra el número. Se forman pares ganadores, sin importar el orden; esto significa, por ejemplo, que el evento (3, 4) es el mismo evento que (4, 3).



- Organiza sistemáticamente los pares de bolitas y completa el esquema anterior, de modo que en todos los pares esté el número “1” en la primera columna.
- ¿Cuántos pares son?
- ¿Cuántos pares resultarían, si se respetara el orden?

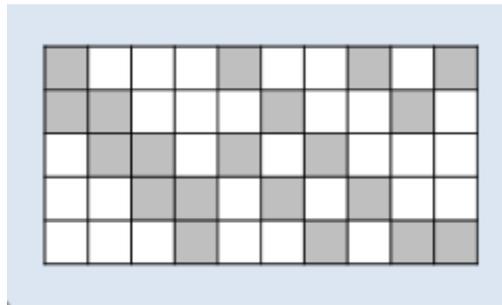
Paso 5. Imagina que, en un árbol de posibilidades de 5 niveles, se decide ir 2 veces a la derecha.

- Marca el punto en el quinto nivel al cual se llega y determina la cantidad de caminos posibles siguiendo la regla de dos veces a la derecha.

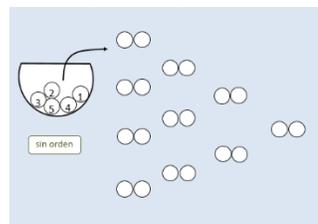


- Seguendo el recuadro anterior, completa el árbol de posibilidades. ¿Cuántos caminos hay para llegar al quinto nivel?

- c. En la siguiente imagen, se muestra una representación en blanco y gris que indica la elección de dos cuadrados de una columna con 5. Numera los casilleros de 1 a 5 en cada columna y selecciona los números marcados en gris.

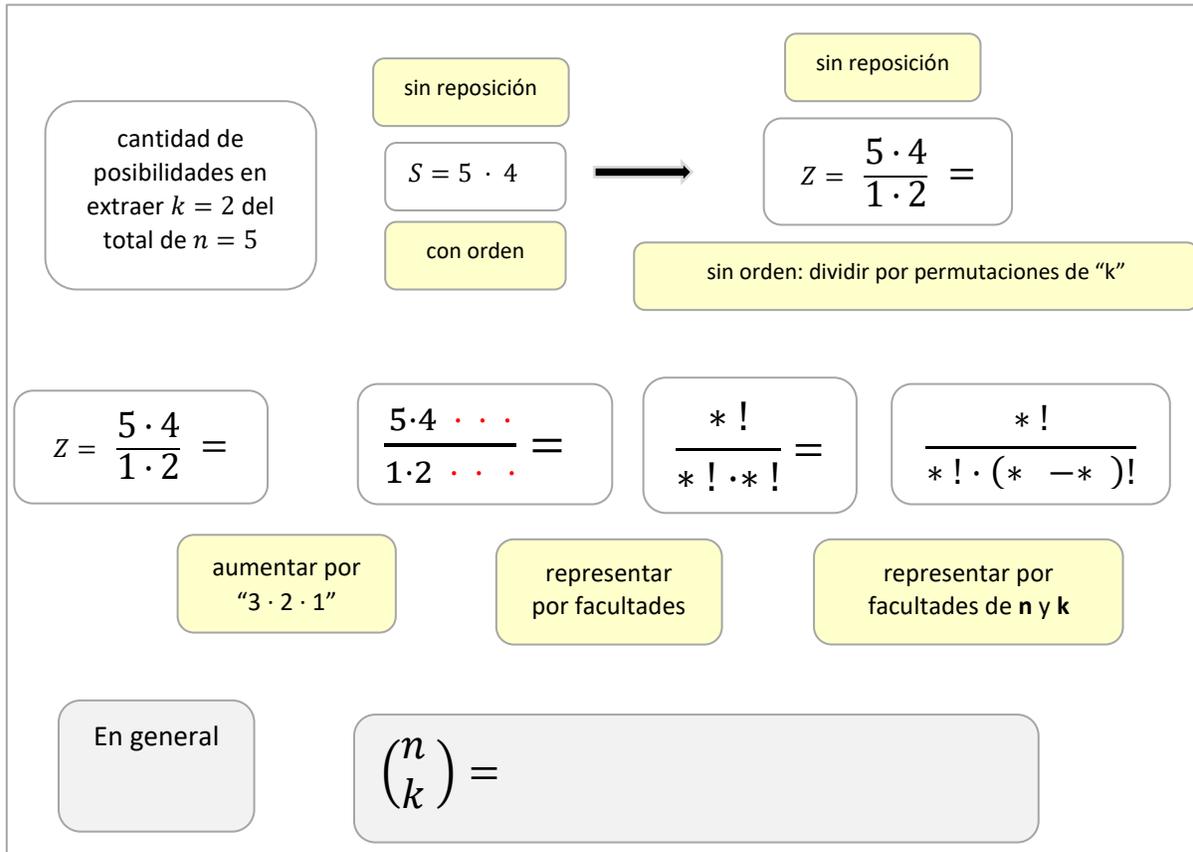


- d. Compara la representación cuadrangular con el ejercicio de la extracción de bolitas sin reposición. desde una urna de 5 bolitas y sin importar el orden, ¿es lo mismo? ¿por qué?



- e. Si comparas la representación rectangular y el experimento de extraer dos bolitas sin reposición con el número de posibles caminos en el diagrama de árbol y la regla de ir 2 veces a la derecha ¿qué observas? ¿con que tipo de asociación entre las imágenes lo podrías explicar? (Ayuda: para llegar al punto C en el plano cartesiano se cumple la misma regla que en el ejercicio del diagrama de árbol, dos veces a la derecha).

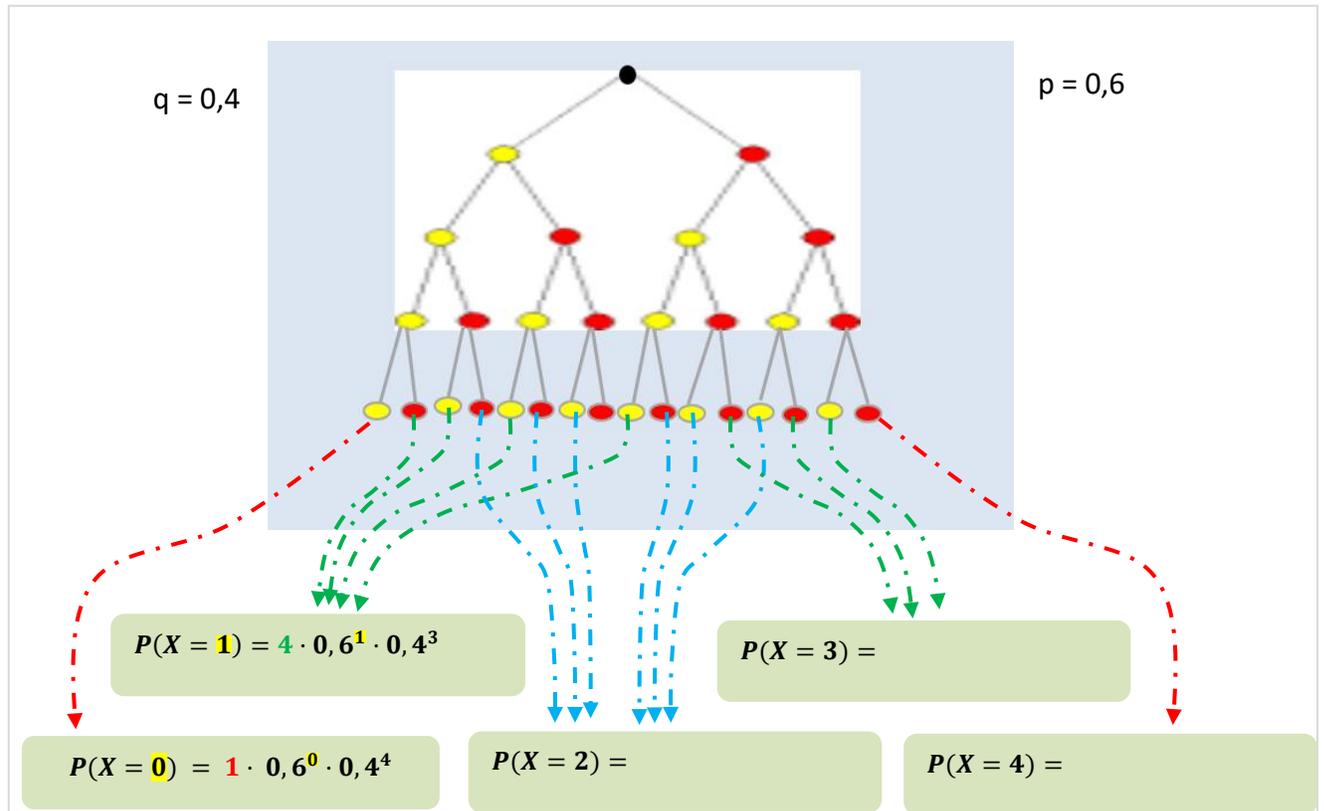
Paso 6. Desarrollar algebraicamente los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ en el ejemplo, incluyendo todas las posibilidades de elegir 2 de 5, $k = 2$ y $n = 5$ elementos sin reposición y sin considerar el orden. Esto implica ir 2 pasos, de un total de 5, en una de las direcciones posibles. Completa el procedimiento simbólico que se presenta en el siguiente recuadro.



Paso 7. Desarrollar la expresión para la probabilidad P de tener k éxitos en n repeticiones de un experimento aleatorio del tipo Bernoulli. Esto se conoce como el Modelo de Probabilidades Binomial:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \text{ con } q = (1 - p)$$

La siguiente imagen muestra un árbol que representa una situación con $n = 4$ decisiones de tomar el camino hacia la derecha (amarillo) o hacia la izquierda (rojo). La probabilidad de tomar el camino hacia la derecha es de 0,4. Una variable aleatoria X representa las decisiones de tomar el camino hacia izquierda.



- Mirando el esquema y el sistema de los caminos, completa los recuadros de la misma manera que para $P(X = 0)$ y $P(X = 1)$, pero ahora para calcular las probabilidades de $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ y $P(X = 4)$.
- Comprueba los cálculos con el modelo de probabilidades binomial o distribución binomial para $n = 4$ y $p = 0,6$.

- c. La siguiente imagen muestra el modelo de probabilidades binomial. Los recuadros en distintos colores representan el significado de cada parte del modelo. Une los recuadros vacíos en color con el enunciado que está en los recuadros punteados.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Cantidad de caminos en el árbol de probabilidades

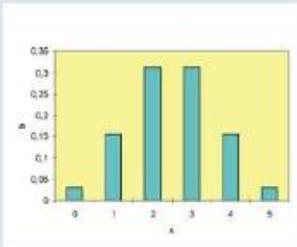
Probabilidad que corresponde a un camino de k éxitos

Probabilidad de k éxitos entre n total

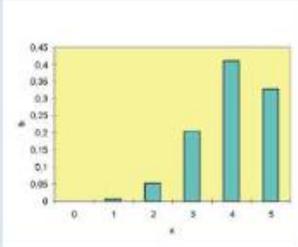
Número de los éxitos

RESOLVER PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN DISTRIBUCIONES BINOMIALES

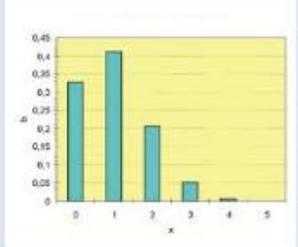
1. La siguiente imagen muestra los histogramas de tres distribuciones binomiales. La variable aleatoria X representa el número k de éxitos en un total de $n = 5$ ensayos. La probabilidad p de éxito puede tener el valor de $p = 0,8$, $p = 0,2$ y $p = 0,5$. Completa con la probabilidad de p correspondiente bajo los histogramas y argumenta tu decisión.



$p =$

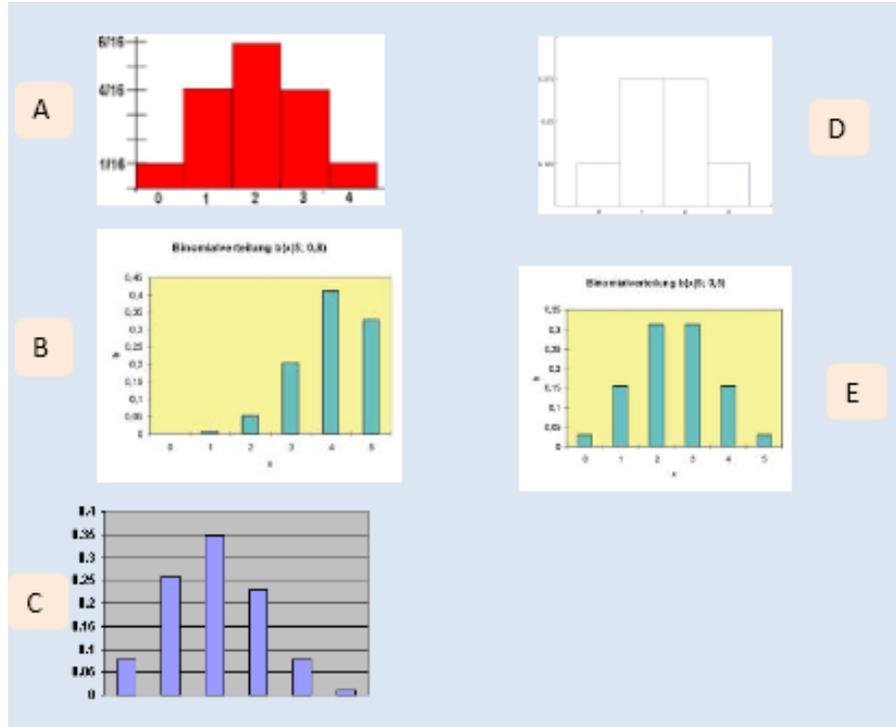


$p =$



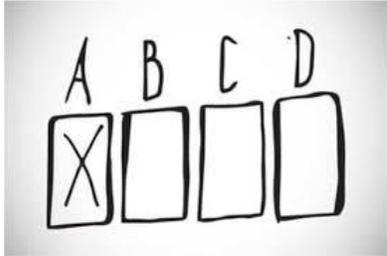
$p =$

- a. Si se hubiera obtenido los histogramas de las mismas características mediante una “tabla de Galton”, ¿cuál no mostraría inclinación alguna en sus resultados?, ¿cuál estaría más inclinada a la izquierda y cuál más a la derecha? Argumenta tu respuesta.
- b. ¿Cuál de los cinco histogramas siguientes corresponde a una distribución binomial con $n = 5$ y $p = 0,5$? Argumenta tu decisión.



2. ¿Cuáles de las siguientes situaciones se puede modelar con una distribución binomial? Argumenta tus respuestas.

- a. Un tirador al arco acierta en el blanco con una probabilidad de 75%. En un certamen, tiene que realizar 6 lanzamientos. Si no alcanza el blanco, la probabilidad de acertar el próximo tiro desciende a 10%.
- b. En los primeros meses después de entrar en vigencia la ley que obliga a llevar un chaleco de seguridad, se estima que el 60% de los autos tienen un chaleco a bordo. En la carretera se realiza un control de tránsito y se controla al azar a 50 autos.
- c. Se conoce el porcentaje de daltonismo de hombres (8%) y de mujeres (1%) de cierto país. Se quiere saber qué probabilidad hay de encontrar a un portador de daltonismo en una familia compuesta de 7 personas, mujeres y hombres.

- d. Se conoce el porcentaje de daltonismo de hombres (8%) y de mujeres (1%) de cierto país. 10 hombres acuden a la consulta de un oftalmólogo y se quiere saber la probabilidad de encontrar a un portador de daltonismo entre ellos.
- e. En la final de lanzamiento de bala, cada deportista tiene 6 lanzamientos. La probabilidad de que un deportista tenga un lanzamiento válido es de 75%. Se quiere determinar la probabilidad de tener, por lo menos, 4 lanzamientos válidos.
3. Una prueba del tipo selección múltiple tiene 10 preguntas de 4 opciones, de las cuales solo una es la correcta. En las preguntas, las opciones correctas y falsas están distribuidas al azar. Se define una variable aleatoria X que corresponde al número de preguntas correctamente respondidas.
- 
- a. ¿Por qué la situación es modelable por una distribución binomial? Argumenta.
- b. Identifica los parámetros de n , k y p . Elabora el modelo binomial que determina la probabilidad $P(X = k)$.
- c. Si se contesta todas las preguntas “al azar”, ¿cuál es la probabilidad de responder correctamente la mitad de ellas? Argumenta.
- d. Se aprueba si se responde correctamente un mínimo de 6 preguntas. ¿Qué probabilidad hay de que ocurra eso?
- e. No se puede repetir la prueba si se responde correctamente a menos de cuatro preguntas. ¿Qué probabilidad hay de que ocurra eso?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere comenzar la unidad 3 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos previos sobre la probabilidad. Algunas de las preguntas o instrucciones pueden ser:
- ¿Qué entiendes por probabilidad?
 - Describe los procedimientos o pasos para determinar la probabilidad teórica y compara con la denominada (en muchos casos) “probabilidad experimental”.
 - ¿Qué significado tiene para ti la palabra “aleatorio”? ¿Hay diferencias entre aleatorio y azaroso?
 - Piensa en toda la ropa que tienes, clasifícala en poleras, pantalones, calcetines y zapatos. Determina cuántos días podrías venir al colegio vistiendo, al menos, una prenda diferente. ¿Qué pasos tendrías que seguir para averiguar la posibilidad de encontrar, en un periodo de tiempo determinado, a dos compañeros que vengan el mismo día con una polera azul?

- En este nivel, los alumnos ya deben haber estudiado la distribución de probabilidad binomial. Sin embargo, en estas actividades se propone un nuevo enfoque, más centrado en la elección del mejor modelo de acuerdo con el tipo de experimento indicado; por ejemplo: por qué el modelo de Laplace no sirve en este caso y qué características de este tipo de problemas se puede modelar con la distribución binomial.
- Las actividades propuestas permiten desarrollar paso a paso el procedimiento para obtener el modelo de probabilidades binomial. Se sugiere enfatizar cada concepto y diferenciar adecuadamente el significado de un experimento de tipo “Bernoulli” hasta llegar a la distribución de probabilidades propiamente binomial. En el experimento tipo Bernoulli se tiene que:

$$P(X = x) = p^x \cdot q^{1-x} \text{ con } x = 0, 1$$

En cambio, para el modelo de probabilidades binomial se tiene:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \text{ con } q = (1 - p)$$

e interesa saber la probabilidad de obtener exactamente k éxitos en n lanzamientos o intentos.

- Se propone también que usen convenientemente algunas propiedades básicas de las probabilidades, como la propiedad del complemento. No la usarán solo como ejercitación, sino como una herramienta para realizar cálculos convenientes.
- Como se presenta una situación que debe ser validada o refutada, se potencia la habilidad de argumentar. La idea es que valoren el uso de un modelo confiable –en este caso el binomial– para fundamentar una afirmación que hicieron sin contar con el modelo.
- Dado que uno de los objetivos de la unidad 3 es OA 3 (Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal), se sugiere compartir la siguiente propuesta de rúbrica con los estudiantes para que evalúen el proceso de modelar en general:

	Totalmente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Criterios			
Interpretan la situación con términos algebraicos, números o letras.	Identifican todos los datos de la situación.	Identifican algunos datos de la situación.	Escriben números o letras.
	Describen las variables y la estructura de la situación, calculan la cantidad de posibilidades para sacar k de n elementos, sacar con o sin repetición, elegir según una característica dentro de una muestra.	Calculan la cantidad de posibilidades para sacar k de n elementos, sacar con o sin repetición, elegir según una característica dentro de una muestra.	Escriben palabras que están en otro contexto.

Relacionan las variables, basándose en un modelo normal o binomial y en cálculos de probabilidades.	Determinan la o las ecuaciones que se debe resolver para responder al problema.	Determinan parcialmente la o las ecuaciones que se debe resolver para responder al problema.	Escriben alguna ecuación que responde a otro problema.
Calculan probabilidades, basándose en las condiciones del problema.	Calculan las probabilidades, utilizando correctamente las propiedades y atendiendo a las condiciones del problema.	Calculan probabilidades, utilizando las propiedades.	Realizan cálculos aritméticos o algebraicos.
Interpretan los resultados, volviendo a la situación inicial.	Interpretan los resultados relacionando con la situación inicial.	Escriben los resultados.	Escriben números asociados a un problema diferente.

7. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Identifican las principales características de los modelos Bernoulli y binomial de probabilidades.
 - Resuelven problemas que involucran los modelos binomial y normal.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Distribución Bernoulli con ejemplos
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=WBSOTPM4BeY>
<https://www.youtube.com/watch?v=TX2ga6fZxxM>
- Expresión matemática de la distribución binomial y aplicaciones sencillas
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Distribucion_binomial.html

Actividad 2: Comprender el modelo normal de probabilidades

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes profundicen en los conceptos clave de la distribución normal y la manera de llegar a ellos, y que argumenten sobre cómo histogramas que reflejan distribuciones binomiales se “parecen” cada vez más a “distribuciones normales” al aumentar el número de repeticiones. Se pretende también que dialoguen acerca de la necesidad de incorporar la distribución normal estándar para calcular determinadas probabilidades en contexto. Del mismo modo, pueden reforzar la aproximación de una distribución binomial por una distribución normal en contextos determinados.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 18 horas pedagógicas

DESARROLLO

Se sugiere que trabajen colaborativamente en las siguientes actividades.

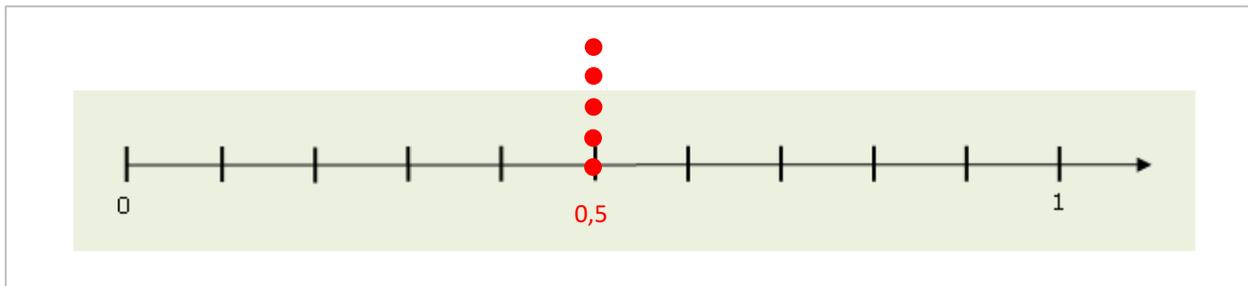
DESARROLLO Y SIGNIFICADO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Paso 1. El concepto de una variable aleatoria continua.

El recuadro siguiente muestra una recta numérica con subdivisión en décimas. Se marcó el número racional de 0,5. Se sugiere realizar el siguiente experimento aleatorio, utilizando un generador digital de números al azar disponible en internet.

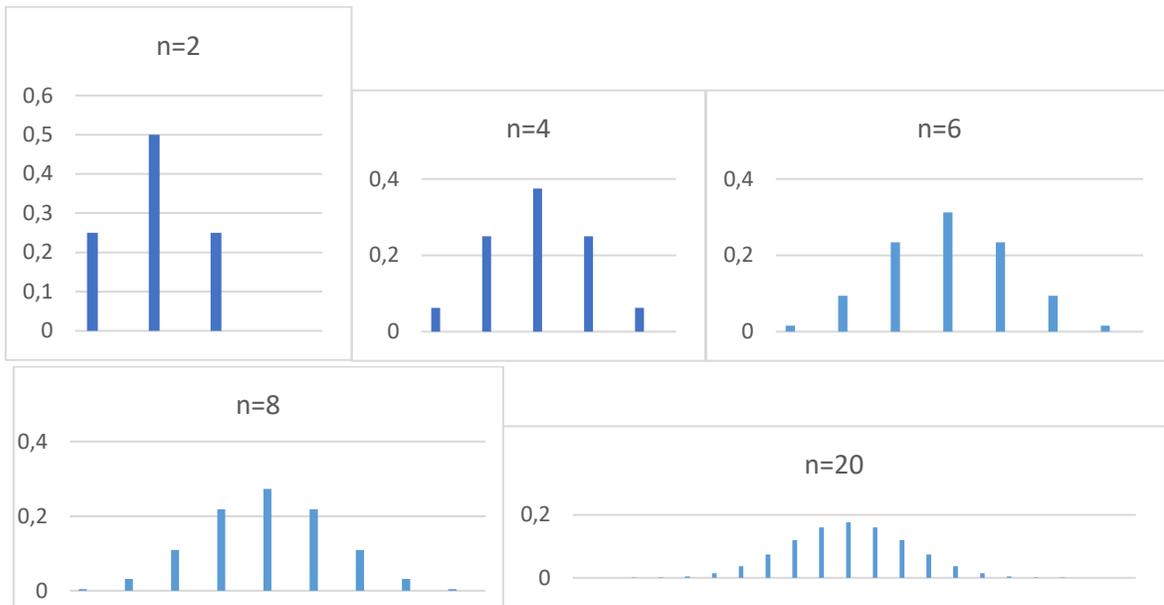
- a. Primer experimento: Se elige números naturales de 1 a 10. Entre los números generados, se registra los números “5” –que se interpretan como “0,5”– y se pone un punto rojo en la recta numérica sobre la posición del número “0,5”. Después de $n = 100$ o 200 números generados,

se determina la frecuencia relativa de los “5”. Contrasten la frecuencia relativa obtenida en el experimento con la probabilidad teórica correspondiente.



- b. Segundo experimento: Se elige números naturales de 1 a 100. Entre los números generados, se registra los números “50” –que se interpretan como “0,50”– y se pone un punto rojo en la recta numérica sobre la posición del número “0,50”, que es la misma que la de “0,5”. La subdivisión de la recta numérica entre 0 y 1 se cambió en centésimas. Después de $n = 100$ o 200 números generados, se determina la frecuencia relativa de los “50”. Contrasten la frecuencia relativa obtenida en el experimento con la probabilidad teórica correspondiente.
- c. Se piensa en cambiar la graduación en $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10\,000}$, $\frac{1}{100\,000}$, $\frac{1}{1\,000\,000}$, $\frac{1}{10\,000\,000}$, $\frac{1}{100\,000\,000}$, $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$... siguiendo con cambiar la subdivisión según el mismo patrón. El generador de números al azar generaría números de 1 a 1 000 000 000, continuando con aumentar los números generados con el factor 10. ¿Cuál sería la tendencia de la probabilidad de obtener “0,500”, “0,5 000”, “0,50 000”, “0,500 000”, “0,5 000 000”, “0,50 000 000”, “0,500 000 000”etc.? Argumenten su respuesta.
- d. Si se considera el conjunto de los números racionales \mathcal{Q} , ¿cuál será la probabilidad teórica de encontrar un granito de arroz de, por ejemplo, $28, \overline{3}mg$? Argumenten su respuesta.
- e. Si se considera que el conjunto de los números racionales \mathcal{Q} es subconjunto de los números reales \mathcal{R} , ¿cuál será la probabilidad de encontrar un granito de arroz con una masa de $27,01001000100001 \dots mg$? Argumenten su respuesta.
- f. Considerando que las variables aleatorias continuas toman valores reales, ¿cuál es la probabilidad $P(r)$, si r es un número real? Argumenten su respuesta.

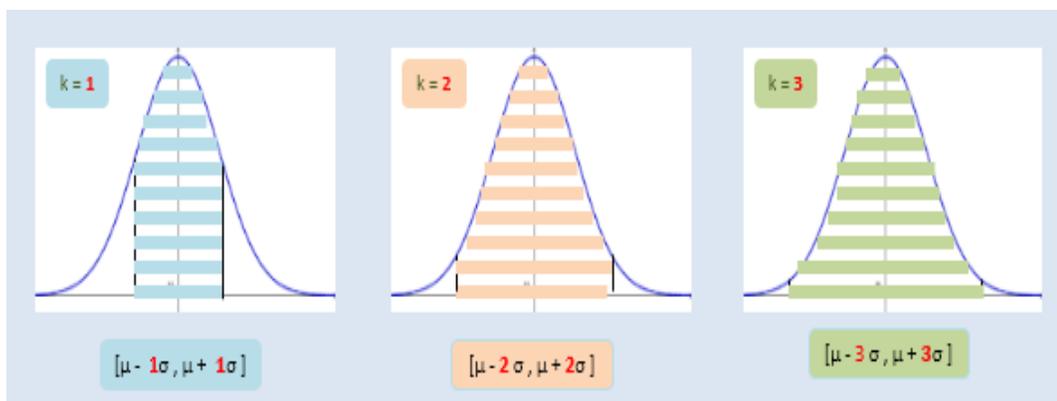
Paso 2. Se muestra los siguientes histogramas de distribuciones binomiales de la probabilidad de éxito de $p = 0,5$, incrementando cada vez el valor de “ n ”.



- Al aumentar el valor del número n , ¿qué cambio experimentan los histogramas en cuanto a la forma, la ubicación del valor esperado y la probabilidad que corresponde al valor esperado μ ? Argumenten su respuesta.
- Con herramientas tecnológicas digitales como Excel, GeoGebra u otros, elaboren los histogramas para $n = 40$ y $n = 60$. ¿A qué forma se acercan los histogramas?
- ¿Qué transformación geométrica de los histogramas se debe realizar para que el valor esperado μ se cambie a la posición $X = 0$? Argumenten su respuesta.

Paso 3. Significado de la distribución normal.

La imagen siguiente muestra los gráficos de una distribución normal de $N(\mu, \sigma)$ con los intervalos $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ para $k = 1, 2, 3$



- La probabilidad de un intervalo simétrico al valor esperado μ de $P(|X - \mu| \leq c)$ se estandariza mediante la función Φ en $\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1$.
Con $c = k\sigma$ se obtiene $2 \cdot \Phi(k) - 1$. Determinen las probabilidades que corresponden a los intervalos $[\mu - 1\sigma, \mu + 1\sigma]$, $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ y $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$
- ¿Por qué estas probabilidades son válidas para todas las distribuciones normales estandarizadas? Argumenten su respuesta.
- ¿Qué ventaja tienen las distribuciones normales estandarizadas? Argumenten su respuesta.

Paso 4. Aproximación de una distribución binomial por la distribución normal estandarizada.

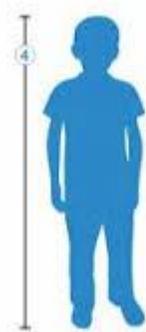
Según el registro electoral de una región, la participación en las últimas elecciones era de aproximadamente 80%.

Para una encuesta telefónica, se eligió al azar una muestra de 400 personas.

Conexión interdisciplinaria:
Educación Ciudadana
OA a, 3° y 4° medio.

- Determinen los parámetros de μ y σ de la distribución binomial y transfórmenla en la distribución normal estandarizada correspondiente.
- ¿Cuál es la probabilidad de tener en la muestra más de 88 personas que suelen no participar en las elecciones? Argumenten su respuesta.
- ¿Cuál es la probabilidad de tener en la muestra, como máximo 70 personas que suelen no participar en las elecciones? Argumenten su respuesta.
- ¿Es posible de determinar la probabilidad de tener exactamente 88 personas en la muestra que suelen no participar en las elecciones? Argumenten su respuesta.

Paso 5. Aplicación de la distribución normal



- Según el estudio antropométrico en párvulos atendidos por el Sistema Educativo Público Chileno para el diseño de mobiliario, publicado en la revista científica Scielo¹¹, la estatura media de niños en el grupo de 25 a 36 meses es de $\mu = 91,30\text{cm}$, con una desviación estándar de $\sigma = 4,27\text{cm}$.
 - ¿Cuál es el porcentaje de párvulos que tienen una estatura de 87cm como máximo? Argumenten su respuesta.
 - ¿Cuál es el porcentaje de párvulos que tienen una estatura de 87cm como mínimo y 96cm como máximo? Argumenten su respuesta.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA c, 3° y 4° medio.

¹¹ https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0717-95022013000100032

- B. La vida útil de los motores de un automóvil de cierta marca se distribuye según una distribución normal con el valor esperado de $\mu = 105\,000$ km y una desviación estándar de $\sigma = 10\,000$ km.
- ¿Qué porcentaje de los motores tiene una vida útil entre 90 000 km y 110 000 km? Argumenten su respuesta.
 - ¿Qué porcentaje de los motores supera la vida útil de 120 000 km? Argumenten su respuesta.
 - ¿Qué porcentaje de los motores se desvía del valor esperado en más de 12 000 km? Argumenten su respuesta.



ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Es posible que los estudiantes ya conozcan la distribución normal de probabilidades. En estas actividades se propone profundizar en los conceptos y cómo llegar a ellos. Por ejemplo, se parte de experimentos que utilizan variables aleatorias continuas, y se sigue con histogramas que representan experimentos binomiales, en los cuales, al aumentar el número de repeticiones “n”, la forma del histograma se parece cada vez más a una campana de Gauss.
- Las actividades propuestas permiten que los jóvenes entiendan, paso a paso, el modelo normal de probabilidades. Además, discuten si es necesario incorporar la distribución normal estándar y cómo determinar las probabilidades que corresponden a los intervalos $[\mu - 1\sigma, \mu + 1\sigma]$, $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ y $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ e interpretar su significado.
- Se sugiere proponer ejercicios en contexto en los que tengan que aproximar una distribución binomial a una distribución normal, para que vean la utilidad de esta transformación cuando el número “n” de observaciones es grande.
- Para finalizar, se recomienda que resuelvan problemas en contexto en que deban aplicar la distribución normal con parámetros μ y σ dados. La idea es que resuelvan cálculos de probabilidad, utilizando la distribución normal estandarizada.
- Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Identifican las principales características de una distribución normal de probabilidades.
 - Resuelven problemas que involucran los modelos binomial y normal.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Generadores de números aleatorios:
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.generarnumerosaleatorios.com/>
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.augeweb.com/azar/>
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://numero-aleatorio.com/generadores/>
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://pinetools.com/es/generador-numeros-aleatorios>
- Cómo usar la fórmula de la distribución binomial en Excel
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=xVwetXD9cis>

Actividad 3: Aplicar el modelo normal en el transporte de personas

PROPÓSITO

Los estudiantes usan la distribución normal para determinar probabilidades de interés, convirtiendo los valores de la variable aleatoria en su puntuación correspondiente. Se espera que sean empáticos con la situación planteada y que no respondan basándose en prejuicios sobre el peso de las personas y el transporte. La tarea se potencia con la interpretación de los resultados en el contexto y el uso de la planilla de cálculo como apoyo, aprovechando así las herramientas disponibles. También avanzan en el análisis de lo que ocurre con las medias de muestras tomadas al azar.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar con empatía y respeto en el contexto de la diversidad, eliminando toda expresión de prejuicio y discriminación.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

TRANSPORTE EN TELEFÉRICO

El Parque Metropolitano de Santiago es el cuarto parque urbano más grande del mundo, con más de 1785 hectáreas de extensión. Esto lo convierte en el pulmón verde más grande de Latinoamérica, que resalta gracias a los atractivos que posee. Es uno de los principales espacios de recreación, naturaleza, cultura y deporte de la capital.

Muchos visitantes usan el teleférico, pues permite ver Santiago desde las alturas y apreciar la belleza de la capital de nuestro país.



Imagen extraída de <http://telefericosantiago.cl>

Cada cabina tiene una capacidad de 480 kg o 6 personas. Por otro lado, varios estudios estadísticos (como la Encuesta Nacional de Salud) indican que la masa promedio de los hombres es de 77,3 kg y la de las mujeres, 67 kg. ¡Imagina qué ocurriría si las normas de seguridad del Parque Metropolitano no tuvieran en cuenta esta información!

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA a, c, 3° y 4° medio.

1. En grupos, respondan a las siguientes preguntas: ¿Qué información aporta saber que la masa de los hombres se distribuye normalmente? ¿Qué les permite saber y/o inferir? Argumenten su respuesta.
2. ¿Qué sucedería en la cabina si se suben 7 hombres cuya masa total aproximadamente es la media? Argumenten su respuesta.
3. ¿Qué sucedería en la cabina si se sube un hombre que tiene una masa mayor que la media; por ejemplo: 80 kg? Argumenten su respuesta.
4. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar aleatoriamente a un hombre, su masa sea menor a 77,3 kg? Argumenten su respuesta.
 - a. ¿Por qué es necesario convertir la masa en su puntuación z correspondiente para determinar la probabilidad buscada? Señalen los valores:

$$x = \text{_____}; \mu = \text{_____}; \sigma = \text{_____}$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} =$$

- b. ¿Cómo aporta y se usa la tabla de distribución normal estándar en este caso? Argumenten su respuesta.
 - c. Usando el resultado anterior, determinen la probabilidad de que se elija al azar a un hombre con una masa mayor a la media. Expliquen los cálculos realizados.
5. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar aleatoriamente a un hombre, su masa sea mayor a 80 kg? Expliquen los cálculos realizados.
 6. ¿Cómo podrían usar el resultado anterior para evaluar la seguridad del teleférico, según el criterio de capacidad y cantidad de personas? Argumenten su respuesta.

DETERMINAR PROBABILIDADES QUE IMPLIQUEN EL USO DEL TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

1. ¿Qué sucedería si se suben 6 hombres a una cabina y todos ellos tienen una masa mayor que la media; por ejemplo: 80 kg? Expliquen la situación.
2. En Excel, generen muchas muestras aleatorias como la situación de estudio: masas de 6 hombres, distribuidos normalmente, con media 77,6 kg y desviación estándar 12,9.
 - a. Usen la herramienta Análisis de datos en la pestaña Datos. En la ventana emergente, seleccionen Generación de números aleatorios, como en la figura 1.A.
 - b. En la nueva ventana, ajusten los valores como en la figura 1.B. El número de variables corresponde a la cantidad de elementos de la muestra: seis masas.

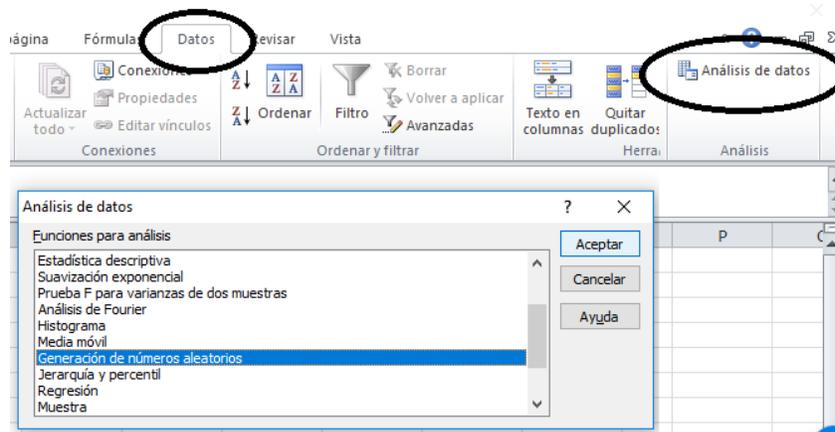


Figura 1.A.: Generación de datos aleatorios en Excel

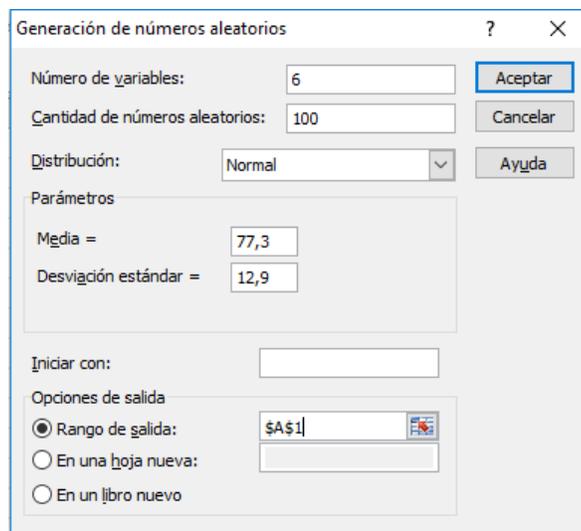


Figura 1.B: Distribución normal de datos aleatorios, con media y desviación conocida

3. ¿Qué necesitan saber para determinar la distribución de las medias de las masas de las muestras de 6 hombres?
 - a. Determinen la media de cada muestra, usando la función Promedio en Excel.
 - b. Con la herramienta Análisis de datos, seleccionen Histograma y grafiquen los valores de las medias obtenidas en 3.a.
 - c. Describan la distribución de las medias de las muestras.
4. ¿En qué les aporta saber que las medias de las muestras se distribuyen normalmente para entender la situación de estudio? Argumenten su respuesta.
5. Determinen la media de las medias de las muestras, usando la herramienta Promedio.
 - a. Comparen las medias de todas las masas y la media obtenida de las medias de las muestras.
 - b. Determinen la desviación estándar de las medias de las muestras, usando la función Desvest en Excel.
 - c. Comparen la desviación estándar de todos las masas y la desviación estándar obtenida de las medias de las muestras.

6. Prueben generando otras muestras que cumplan con lo enunciado en el punto 2 (media y desviación estándar dadas).
 - a. Verifiquen si obtienen los mismos resultados que en los puntos 3 y 5.
 - b. Generalicen a partir de sus resultados y los de sus compañeros.
7. ¿Cuál es la probabilidad de que, al seleccionar 6 hombres al azar, estos tengan una masa total de más de 180 kg en promedio? Argumenten su respuesta.
 - a. ¿Cómo pueden usar las conclusiones del teorema del límite central para determinar probabilidades? Argumenten su respuesta.
 - b. ¿Qué parámetros se debe considerar para obtener la puntuación z de la media de las masas de una muestra? Argumenten su respuesta.
 - c. Según la probabilidad encontrada, ¿qué les parece la seguridad del teleférico? Argumenten su respuesta.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se espera que los estudiantes determinen la probabilidad de solo un dato para que apliquen la estandarización y encuentren la puntuación z , usando la tabla de distribución normal estándar, que se puede obtener en el Anexo 3.
2. Se sugiere orientar la forma de determinar probabilidades en el caso de la distribución normal mediante la estandarización, pero si los alumnos no están listos para esta tarea, se recomienda remitirse a las actividades propuestas en el programa de asignatura de Matemática de plan común de 4° medio. En ellas se trabaja de forma exhaustiva en estos cálculos y su interpretación.
3. Se recomienda poner el foco en determinar medias de muestras y luego, en la media de dichas medias. Esto puede ser confuso si no se tiene claridad absoluta de lo que se está intentando hacer. El esquema muestra el orden en que se analiza los datos y qué media se menciona en cada oportunidad.



4. Se argumenta de forma muy simple el teorema del límite central, comprobando que se cumple para casos puntuales. Se eligió en esta oportunidad el caso en que los datos se encuentran distribuidos normalmente; el otro caso queda como un desafío para trabajar en las clases posteriores o se lo menciona, sin profundizar en él. Lo importante es que noten el aporte de contar con este teorema para entender cómo se comportan las medias de muestras, provengan o no de datos distribuidos normalmente.
5. Se propone que usen Excel, porque genera datos aleatorios rápidamente y sus funciones permiten determinar medias y desviaciones estándar.

6. La indicación de observar la gráfica de los valores determinados –sea con las masas o con la media de las muestras de las masas– es que visualicen la distribución de los datos. Ambos casos tienen distribución normal, pero en las medias de las muestras se nota menos exactitud; por ende, es aún más valioso haber usado valores “reales”, pues así es como ocurre en realidad en las investigaciones ajenas al contexto escolar. Se requiere muchos más datos para obtener la campana de Gauss de forma exacta.
7. Para cerrar las actividades, tanto la individual como la colaborativa, se pregunta por la seguridad de las cabinas. Es importante que los argumentos se basen en las probabilidades determinadas, para que vean cómo el hecho de conocer las distribuciones de los datos y el cálculo de probabilidades, ayuda para tomar decisiones fundadas y no basadas solamente en la intuición.
8. Si bien en los casos “probabilidad de que un hombre tenga una masa de más de 80 kg” y “probabilidad de que 6 hombres tengan una masa total de más de 80 kg”, las probabilidades no son suficientemente pequeñas como para desestimar un posible exceso de carga en las cabinas, no se debe olvidar que se ha analizado el caso más extremo, en el que solo suben hombres con masas superiores a la media, lo cual no debe ser la regla habitual. Muchas mujeres y niños son usuarios de este atractivo turístico. Por otro lado, las cabinas tienen una estructura muy segura y soportan más de lo expuesto al público.
9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Interpretan información estadística que involucra distribuciones de probabilidad binomial y el normal.
 - Modelan fenómenos o situaciones cotidianas, científicas y sociales mediante distribuciones binomiales y normales.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Generación de datos normales aleatorios en Excel, alternativa sin Análisis de datos
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=d5KaLnAEJlg>
- Tabla de probabilidades de distribución normal estándar.
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/comp_col_leg/ing_tec_inf_gestion/estadistica/Documentacion/Tablas/tablas2caras.pdf

Actividad 4: Aproximar la distribución binomial por la distribución normal

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes profundicen aún más en el uso y el aporte de las distribuciones de probabilidad para modelar fenómenos cotidianos. También se pretende que usar la distribución normal como aproximación de la distribución binomial, parece un mejor camino según las condiciones del problema. En esta oportunidad, se propone que descubran por qué la técnica que ya han usado es válida y cómo, en términos generales, se debe ajustar un modelo matemático para adecuarse a los requerimientos de lo que pretende modelar.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

APROXIMANDO UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL MEDIANTE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

¿Eres feliz? No siempre es fácil responder esta simple pregunta, pues cada persona tiene su propia idea de lo que es la felicidad; además, nuestras concepciones al respecto van cambiando constantemente, sobre todo a medida que pasan los años. En 2019, *Activa Research* y *WIN* publicó los resultados de una investigación que buscaba averiguar sobre la “Felicidad en Chile y el mundo”. Los resultados mostraron que, de los 30 890 entrevistados en el mundo, el 52% se considera feliz.

En Chile, los resultados indican que, de 1 032 encuestados, el 58% se considera feliz. ¿Te parece que estos datos se acercan a lo que ocurre en tu entorno? ¿Qué tan probable será que todos los que conoces estén en ese 58%, o que no estén en ese porcentaje? ¿Qué tan probable será que, si encuestas a algunas personas, ellas sean felices?

1. ¿Qué información te aporta saber que el 58% de los entrevistados es feliz?
 - a. ¿Cómo puedes usar esta información para referirte a la población? ¿Qué restricciones debes tener en cuenta?
 - b. ¿Cómo puedes usar esta información para determinar la probabilidad de que, al elegir a una persona al azar y preguntarle si es feliz, su respuesta sea afirmativa?
2. Se entrevista a 5 personas y se les pregunta si son felices o no. Se sabe de antemano que el 58% de las personas es feliz y asumimos que el 42% no lo es.
 - a. ¿Cuál es la variable aleatoria en este caso? ¿Qué valores podría tomar?
 - b. ¿Se puede modelar esta situación con una distribución binomial? ¿En qué aportaría conocer la distribución de los datos para entender el problema? Argumenta.
3. Determina las probabilidades de los valores de la variable aleatoria si se entrevista a 5 personas.
 - a. Grafica los resultados en la Figura 1.

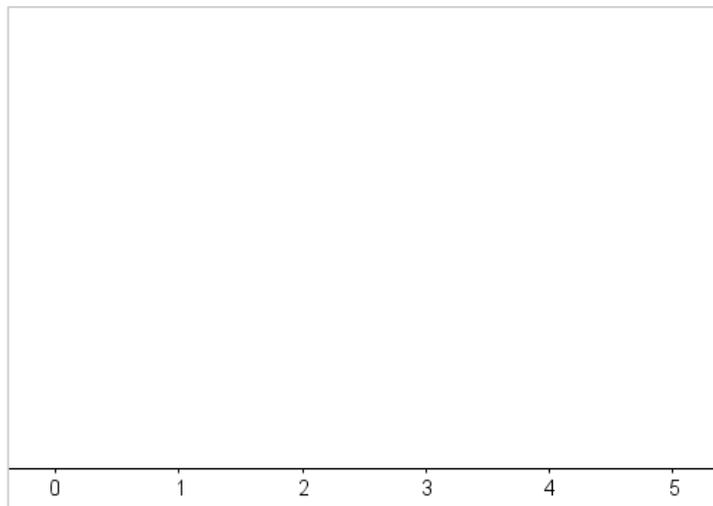


Fig. 1: Distribución de probabilidad de X cuando $n = 5$

- b. Describe la distribución de probabilidad de los datos.
- c. Describe tu apreciación sobre lo laborioso que es determinar probabilidades usando la forma algebraica de la distribución binomial. Proyéctalo al trabajo que implica determinar probabilidades cuando la variable aleatoria sea muy grande.

4. Usando GeoGebra, determina las distribuciones de probabilidad de la variable aleatoria cuando $n = 5, n = 10, n = 50, n = 250, n = 500, n = 1000$.
- a. Puedes configurar las opciones en GeoGebra como muestra la figura 2.

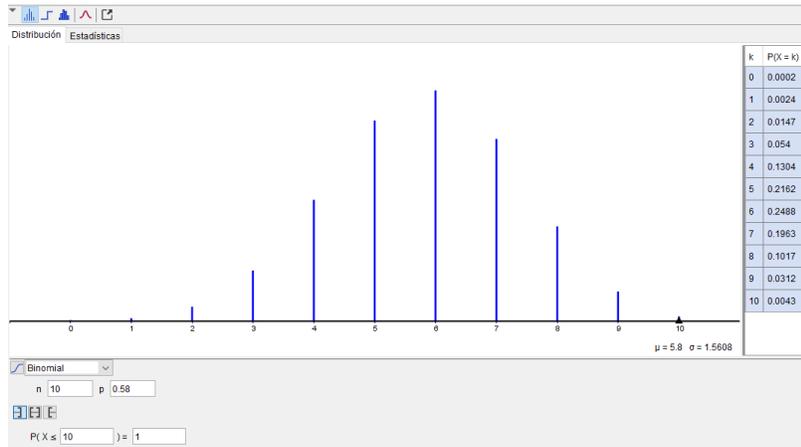


Fig. 2: Configuración en GeoGebra para determinar la distribución de probabilidad binomial

- b. Selecciona en GeoGebra la opción “Superposición de curva normal”.
- c. Bosqueja las gráficas en la figura 3 con diferentes n , según corresponda.

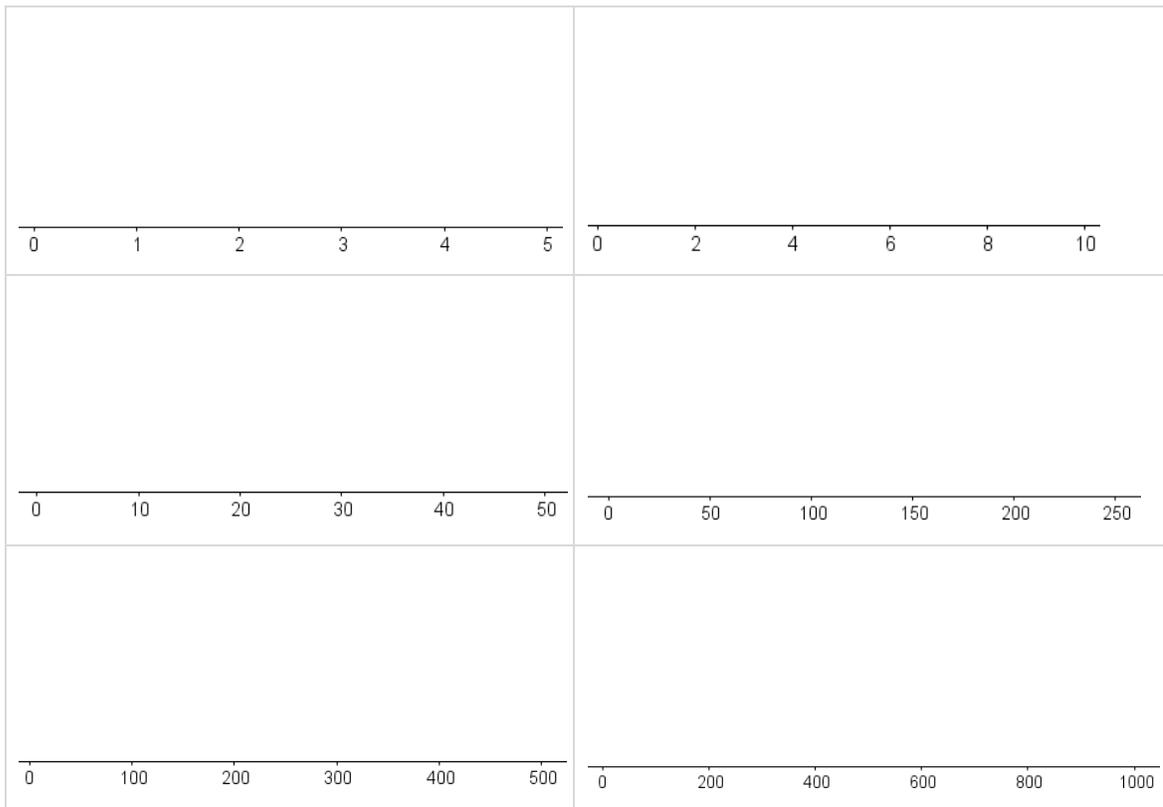


Fig. 3: Distribución de probabilidad de X a medida que n crece.

5. ¿Cómo varían las formas gráficas de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria a medida que n crece?
 - a. ¿A qué forma se acercan las gráficas a medida que n crece?
 - b. Indica a qué otra distribución de probabilidades se asemeja la distribución binomial cuando n es muy grande.
 - c. Conjetura cómo podrías usar este hallazgo para determinar probabilidades y el aporte que puede dar esta aproximación.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES MEDIANTE LA APROXIMACIÓN NORMAL DE UNA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1. ¿Cuáles son los parámetros que se necesita para determinar probabilidades según cada distribución?
 - a. Indica los parámetros usados en la distribución binomial.
 - b. Indica los parámetros usados en la distribución normal.
 - c. ¿Cómo se puede determinar los parámetros requeridos en la distribución normal, usando los parámetros de la distribución binomial?
2. Usa la aproximación normal de la binomial para determinar la probabilidad de que, al elegir al azar 50 personas, 25 respondan como máximo que son felices. Registra los cálculos.
 - a. Si hubieras determinado esta probabilidad mediante la distribución binomial, ¿qué dificultades habrías tenido?
 - b. ¿En qué te aporta determinar la probabilidad de $P(x \leq k)$ mediante la distribución normal y no mediante la distribución binomial? Argumenta.
3. Determina la probabilidad de que, al elegir al azar a 100 personas, exactamente 75 de ellas respondan que son felices. Argumenta.
 - a. Sin hacer los cálculos, describe cómo los harías usando la distribución binomial.
 - b. Conjetura una forma de calcular la probabilidad buscada, usando la distribución normal.
 - c. ¿Cómo puedes hacer que la variable aleatoria discreta que estás considerando sea “ajustada” para ser continua? ¿Cómo podrías crear intervalos adecuados para ello?
 - d. Elabora una regla para hacer una corrección de continuidad y compárala con las ideas de tus compañeros. Luego, en consenso, lleguen a la mejor corrección posible.
 - e. Vuelve a determinar la probabilidad pedida en el punto 2, ahora aplicando la corrección por continuidad, y compara ambos resultados.

4. ¿En qué te basarías para decidir desde qué valor de n vale la pena utilizar la aproximación normal de la distribución binomial? Argumenta.
- a. Completa la tabla 1 con la probabilidad de distintos valores de la variable aleatoria y para un n dado.

Tabla 1: Comparación de probabilidades según cada distribución de probabilidad, variando n

Distribución de probabilidad	$P(x = 3)$ $n = 5$	$P(x = 5)$ $n = 10$	$P(x = 25)$ $n = 50$	$P(x = 50)$ $n = 100$	$P(x = 125)$ $n = 250$	$P(x = 250)$ $n = 500$	$P(x = 500)$ $n = 1000$
$B(n, p)$							
$N(\mu, \sigma)$							

- b. ¿Desde qué valor de n la diferencia entre la probabilidad determinada por $B(n, p)$ y $N(\mu, \sigma)$ es más pequeña que una centésima? Argumenta.
- c. Para ese valor de n determina:
- $$n \cdot p = \underline{\hspace{2cm}}$$
- $$n \cdot (1 - p) = \underline{\hspace{2cm}}$$
- d. Prueba con algunos valores distintos de n entre 10 y 50 y analiza desde qué n las probabilidades determinadas por ambas distribuciones son muy cercanas.
- e. Conjetura una regla práctica para determinar desde qué valor de n conviene usar la aproximación normal de la binomial.
5. Vuelve a responder la pregunta: ¿En qué te aporta determinar la probabilidad de $P(x \leq k)$ mediante la distribución normal y no mediante la distribución binomial?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere vincular datos estadísticos con el cálculo de probabilidades, usando un contexto sencillo pero cercano a los estudiantes. Aunque ya deberían haber hecho esta tarea en niveles anteriores, sirve para reforzar nuevamente cómo, desde la estadística y eligiendo de forma adecuada la muestra (usando métodos probabilísticos), se puede obtener conclusiones acerca de la población, por ahora informalmente.
- Se comienza preguntando si la situación se puede modelar con la distribución binomial y qué aportaría hacerlo, a fin de que revisen los conceptos previos que esta actividad requiere y también para que se acostumbren a hacer metacognición.
- Usando algún programa, se puede comparar distintas gráficas de la distribución binomial a medida que n crece considerablemente (de 5 a 1 000) y observar cómo los datos van tendiendo a distribuirse normalmente; la herramienta de curva normal de GeoGebra ayuda a hacerlo. Deberán concluir que los datos se distribuyen normalmente cuando n es lo suficientemente grande. Si la probabilidad de éxito se aleja de 0,5, se necesita que n sea más grande para que la aproximación sea razonable. Conviene que, usando también GeoGebra, prueben con probabilidades distintas de 0,5 para notarlo.

4. En la primera actividad, se espera que usen la aproximación normal de la binomial; por eso, se les pide determinar una probabilidad que, si se hiciera con la distribución binomial, comportaría una tarea tan laboriosa que sería muy complejo cumplirla sin un recurso digital. Acá importa discutir con los alumnos sobre los aportes de las tecnologías actuales, pues hoy se puede determinar probabilidades con la distribución binomial para un n cualquiera, por grande que sea. La idea es mostrar cómo se usaría la aproximación normal si no se cuenta con dichos recursos digitales y, al mismo tiempo, que los estudiantes sepan cómo se ha ido construyendo la historia de las probabilidades, por qué antes era tan importante poder aproximar distribuciones binomiales a normales para determinar probabilidades, y por qué esto ha hecho que la distribución normal sea tan importante y estudiada con tanto detalle.
5. Las actividades siguientes buscan establecer las reglas necesarias para determinar probabilidades de datos discretos a datos continuos; por ende, se analiza la corrección por continuidad. Se recomienda hacer esta tarea más de una vez, hasta verificar que todos la comprenden. El profesor puede complementar esta parte con gráficos, ver las barras (binomial) y el histograma (normal), y discutir sobre los ajustes que se debe hacer.
6. La regla práctica –que se vincula con lo mencionado en el punto 3 sobre el valor de n y la probabilidad cercana o lejana a 0,5– se debe notar desde una tabla con distintas probabilidades determinadas, usando la distribución binomial y la normal. Si usan GeoGebra, no necesitan hacer la corrección de continuidad, pues permite determinar los valores buscados en forma inmediata. Una alternativa es usar GeoGebra solo para los cálculos con la binomial y calcular la normal a mano; así aprovechan de estandarizar y aplicar la corrección de continuidad.
7. Finalmente, más allá de todos los cálculos, se espera que los alumnos demuestren el aporte de aproximar la distribución binomial mediante una distribución normal, por lo que el docente debe propiciar una discusión al respecto.
8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Modelan situaciones que involucran aproximar una distribución binomial mediante el modelo normal.
 - Argumentan cuándo se puede modelar una situación o fenómeno con una distribución binomial o normal.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- GeoGebra online
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/graphing?lang=es>
- Tabla de probabilidades de distribución normal estándar (solo las 2 primeras hojas)
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.est.uc3m.es/esp/nueva_docencia/comp_c ol_leg/ing_tec_inf_gestion/estadistica/Documentacion/Tablas/tablas2caras.pdf

Actividad de Evaluación

Objetivos de Aprendizaje

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Indicadores de evaluación

- Identifican las principales características de los modelos Bernoulli y binomial de probabilidades.
- Identifican las principales características de una distribución normal de probabilidades.
- Interpretan información estadística que involucra distribuciones de probabilidad binomial y el normal.
- Resuelven problemas que involucran los modelos binomial y normal.
- Argumentan cuándo se puede modelar una situación o fenómeno con una distribución binomial o normal.
- Modelan fenómenos o situaciones cotidianas, científicas y sociales mediante distribuciones binomiales y normales.
- Modelan situaciones que involucran aproximar una distribución binomial mediante el modelo normal.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1, cada una por sí misma o en conjunto. Conviene que trabajen colaborativamente algunas para que discutan y propongan estrategias que permitan llegar a la o las soluciones posibles.

I. Identificar el sentido de contar con datos distribuidos mediante una distribución binomial o una normal.

1. Explica por qué es posible (incluso recomendable) que en una empresa se considere un artículo defectuoso como éxito en un experimento binomial, al estudiar la probabilidad de obtener cierta cantidad de artículos defectuosos.
2. Un dado se lanza 20 veces y el número de veces que sale 2 se considera la variable aleatoria. Explica por qué la variable aleatoria es binomial en esta situación.
3. Cada vez se selecciona 10 cartas al azar de un naípe español, la variable aleatoria corresponde a sacar (o no sacar) la carta con símbolo 5, $X = \{0, 1\}$.

- a. Explica por qué, si el experimento es con reemplazo (se saca una carta y se devuelve al mazo antes de sacar la siguiente), la variable aleatoria es binomial.
- b. Explica por qué, si el experimento es sin reemplazo, la variable aleatoria no es binomial.
4. Se sabe que una variable aleatoria se distribuye normalmente:
 - a. ¿Qué se puede decir de la variable aleatoria en términos generales?
 - b. ¿En qué aporta saber que los datos son normales en su distribución para entender cómo se distribuyen?
 - c. ¿Qué parámetros necesitas para determinar probabilidades?
 - d. ¿Cuáles son las principales diferencias entre variables aleatorias que corresponden a modelos binomiales de distribución, respecto de las que corresponden a modelos normales?
5. La duración de los embarazos se distribuye normalmente con media de 268 días y desviación estándar 15 días.
 - a. ¿Cómo se interpreta que los días de duración de los embarazos se distribuyan normalmente? ¿Cuál es el beneficio de saberlo?
 - b. ¿Cuál es la probabilidad de que un embarazo dure exactamente 9 meses (de 30 días cada uno)?
 - c. En Chile, una mujer que tenga sistema de salud Fonasa puede optar a financiar su parto mediante el bono PAD (Pago asociado al diagnóstico). Sin embargo, este no es válido si el parto se produce antes de las 37 semanas. ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer elegida al azar no pueda usar el bono PAD (considerando que la media y desviación estándar son las mismas para este grupo de mujeres)?

II. Modelar situaciones con una distribución binomial y una distribución normal

1. Explica por qué “lanzar al aire una moneda honesta 50 veces y registrar las veces que sale cara” es un experimento binomial.
2. En un curso se aplica un control de 4 preguntas con 3 alternativas cada una, y un alumno que olvidó estudiar, decide responder las 4 preguntas al azar.
 - a. ¿Hay alguna de las 4 preguntas que tenga más probabilidades de haber sido contestada correctamente que las otras?
 - b. ¿Qué distribución de probabilidad modela adecuadamente esta situación? ¿Cómo usarás esta información para entender mejor el problema? Argumenta.
 - c. ¿Cuál es la probabilidad de que haya contestado una pregunta correctamente?
 - d. ¿Cuál es la probabilidad de que haya contestado la mitad de las preguntas correctamente?
 - e. Si el profesor dice que cada pregunta contestada correctamente vale un punto, y que con el 60% de logro se aprueba el control, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante lo apruebe?
 - f. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 7? (Tener todas las respuestas correctas)
 - g. Si todos los alumnos del curso contestan las 4 preguntas al azar, ¿cuál sería el número promedio de respuestas correctas del curso?

3. En 2019, una empresa debe reducir personal por problemas económicos. Toma la decisión según los sueldos, por lo que despedirá a todos los que ganen más de \$ 6 000 000, y considera que los sueldos se distribuyen normalmente con desviación estándar \$1 800 000 en la empresa. Esa reducción de personal corresponderá al 10% de los trabajadores.
 - a. ¿Qué porcentaje de trabajadores gana entre la media de sueldos y los \$6 000 000?
 - b. ¿Cuál es la puntuación z en \$6 000 000? (Busca el porcentaje de la curva normal que se considera hasta ese sueldo).
 - c. ¿Cuál es el promedio actual de sueldos en esta empresa?
 - d. ¿Cómo crees que las grandes empresas toman decisiones fundamentadas matemáticamente para mejorar sus ganancias? ¿Qué decisión tomarías tú en su lugar, basándote en datos estadísticos?

III. Modelar situaciones, usando la distribución normal y el teorema del límite central, y aproximar una distribución binomial mediante una normal

1. En promedio, la temperatura corporal de los niños es de 37 °C, con una desviación estándar de 0,34 °C. Si se selecciona al azar una muestra de 80 niños, ¿cuál es la probabilidad de obtener una media menor a 36 °C?
 - a. Para determinar esa probabilidad, ¿hay que saber la distribución de las temperaturas de la población?
 - b. Argumenten por qué pueden aplicar el teorema del límite central en este caso.
 - c. ¿Qué parámetros usarán para la distribución normal de las medias de las muestras?
 - d. ¿Por qué es necesario estandarizar para conocer $P(x < 36)$?
 - e. ¿Cómo se interpreta la probabilidad obtenida?
 - f. ¿En qué ayudó conocer la distribución de las medias de las muestras?
2. Una empresa de agua mineral sabe que las botellas pequeñas se llenan con 350cc de agua, con una desviación estándar de 3cc.
 - a. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 50 botellas pequeñas tenga una cantidad media de, al menos, 354cc?
 - b. A partir del resultado anterior, ¿será razonable pensar que las botellas pequeñas en realidad tienen una media de 350cc?
 - c. Si la media no es 350cc, ¿se engaña a los consumidores?
 - d. ¿En qué podría afectar a la empresa considerar una media diferente a la “media real”?
 - e. ¿Cómo se puede usar este modelo de probabilidad en problemas de contextos similares? ¿Cuál es su aporte?
3. Una máquina industrial de deshidratado de manzanas presenta una falla que no se detectó a tiempo. Esto causó que 1/8 de la producción de 4 000 kilogramos presentara problemas de secado.
 - a. Antes de calcular las probabilidades, ¿cómo se podría ajustar la distribución de los datos para modelarlos mediante una distribución normal?
 - b. ¿Cuál sería el aporte de hacerlo?
 - c. ¿Cuáles son las restricciones para hacerlo? ¿Se cumplen esas restricciones?

- d. ¿Cuál es la probabilidad de que, al tomar una muestra de 25 kilogramos, se encuentre un máximo de 3 kilogramos con problemas de secado?
 - e. ¿Cuál es la probabilidad de que, al tomar una muestra de 100 kilogramos, se encuentre máximo 50 kilogramos con problemas de secado?
4. El cáncer a la piel aumenta considerablemente cada año y causa la muerte en pacientes que no lo detectan a tiempo. Si se descubre a tiempo, el porcentaje de supervivencia es del 90% ¿Cuál es la probabilidad de que 200 o más personas sobrevivan al cáncer, de una muestra de 300 personas diagnosticadas a tiempo?
- a. Esta situación, ¿se puede aproximar mediante una distribución normal? Argumenta e indica los beneficios de hacerlo.
 - b. ¿Qué otras preguntas de interés podrías responder en esta situación? ¿Tienes suficientes datos para ello? Argumenta.

PAUTA DE EVALUACIÓN

Criterios de evaluación	Niveles de logros		
	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Identifican situaciones binomiales para caracterizar el contexto.			
Determinan la probabilidad de variables aleatorias binomiales.			
Explican situaciones aleatorias, utilizando el concepto de variable binomial.			
Interpretan situaciones según su distribución normal y la desviación estándar.			
Explican situaciones, utilizando el concepto de distribución normal.			
Identifican parámetros para determinar probabilidades en distribuciones normales.			
Determinan la probabilidad de intervalos en distribuciones normales, utilizando la tabla Z.			
Modelan situaciones, utilizando la distribución normal para determinar probabilidades de intervalos en situaciones sociales.			
Estandarizan variables para determinar la probabilidad según una distribución normal.			
Toman decisiones, basándose en la distribución normal y en el cálculo de probabilidades.			
Aproximan situaciones binomiales a distribuciones normales.			

Unidad 4

Unidad 4: Hacer inferencia estadística

Propósito de la unidad

Los estudiantes comprenden cómo se puede inferir información desde una muestra cuando la población está “distribuida normalmente”. Por ejemplo: cómo construir un intervalo de confianza para que la media poblacional se encuentre dentro de dicho intervalo con un cierto nivel de precisión previamente dado. O bien, plantear pruebas de hipótesis para aprobar o rechazar una predicción en torno a parámetros específicos de la población. Las preguntas que orientan la unidad son: ¿En qué condiciones estadísticas es confiable la información? ¿Cuáles son las condiciones de significatividad que afectan la toma de decisiones?

Objetivos de Aprendizaje

OA 4.

Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actividad 1: Hacer inferencias sobre la media de una población usando intervalos de confianza

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan en términos generales el uso de la estadística inferencial y cómo estimar parámetros de una población a partir de estadísticos de muestras de esa población. Con ello, pueden estimar, por ejemplo, la media de una población, con intervalos de confianza de mayor o menor precisión entregando un nivel de confianza según lo requerido o lo deseado.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

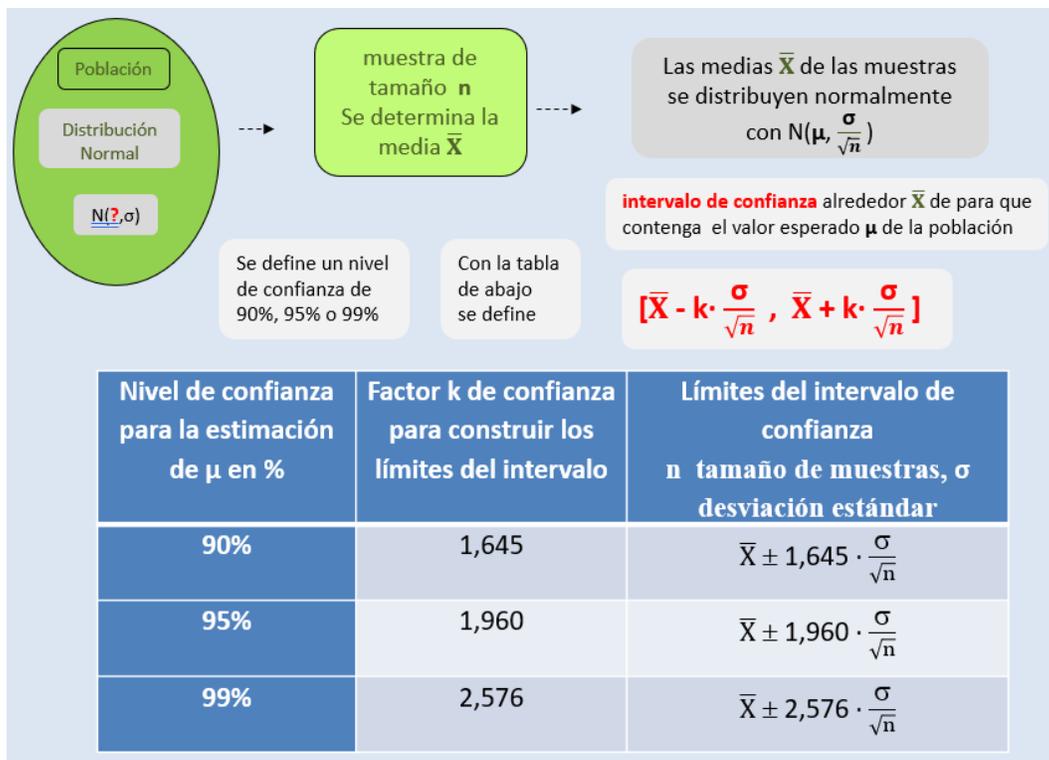
Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

Se sugiere un trabajo colaborativo para las siguientes actividades.

INTRODUCIR EL CONCEPTO DE UN INTERVALO DE CONFIANZA

1. Observen el siguiente esquema, que presenta en forma sintética cómo trabaja la estadística inferencial a partir de muestras de una población determinada.



2. El nivel de confianza se puede expresar también como $1 - \alpha$, donde $\alpha = 0,1$ o bien $\alpha = 0,05$ o bien $\alpha = 0,01$. Además, el factor k corresponde al puntaje según una normal estándar $Z_{\alpha/2}$. Por ejemplo: si $\alpha = 0,05$, se tiene que $\alpha/2 = 0,025$ y el puntaje $Z_{\alpha/2}$ [según una tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo)] es $-1,96$, que corresponde al valor más cercano de $0,025$.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475

3. Del mismo modo que para el nivel de confianza de $0,95$, comprueben en la tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo), los puntajes $Z_{\alpha/2}$ para los niveles de confianza de $0,90$ y $0,99$.
- a. A partir de lo anterior, completen la tabla:

$1 - \alpha$	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$	Intervalo de confianza
0,90	0,05		
0,95	0,025	1,960	$\left[\bar{X} - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
0,99	0,005		

- b. Compartan ideas acerca de los parámetros de la población y los estadísticos de las muestras. ¿Sobre qué se quiere inferir o estimar algún valor y cómo? Argumenten.
- c. Si una población se distribuye normalmente $N(\mu, \sigma)$, ¿cómo se distribuyen las medias de las muestras de tamaño “ n ” extraídas de dicha población?
- d. En sus propias palabras, ¿qué es un intervalo de confianza para la media “desconocida” de una población de la cual sí se conoce su desviación estándar? Expliquen.
- e. ¿En qué influye el nivel de confianza a la hora de fijar un intervalo para la media de la población? Argumenten.

- f. ¿Cómo se puede interpretar la expresión $Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y cómo influye en ella el tamaño “n” de la muestra? Argumenten.

UN EJEMPLO

Después de una década sin recopilar datos, se quiere determinar aproximadamente el valor esperado μ de la estatura entre las mujeres de una población. Se saca una muestra de 100 mujeres, con una estatura media de $\bar{X} = 154 \text{ cm}$. Se conoce la desviación estándar de esa medición: $\sigma = 6 \text{ cm}$ y se estima que no ha cambiado.

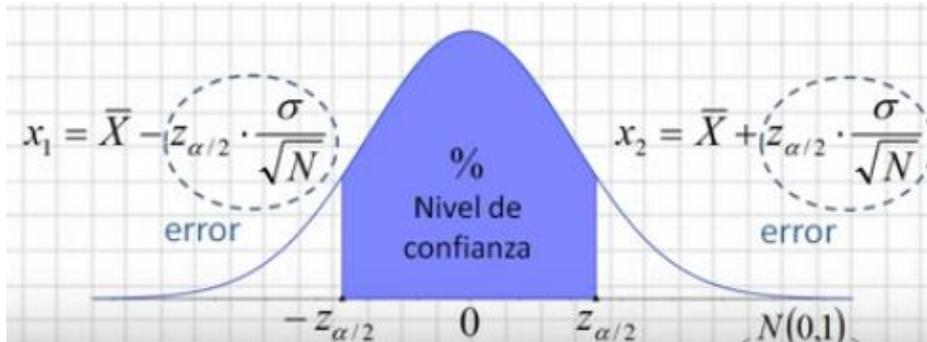
- A partir de la muestra poblacional, describan el procedimiento que determina un intervalo de confianza para estimar el valor esperado poblacional μ .
- Determinen el intervalo de confianza alrededor de la media muestral \bar{X} con un nivel de 95% de confianza, que contenga el valor esperado μ de la población.
- Si la media muestral $\bar{X} = 154 \text{ cm}$ hubiera resultado de una muestra de 400 mujeres, ¿qué influencia tendría en el intervalo de confianza? Argumenten.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere comenzar esta unidad con un diagnóstico y repaso de los temas vistos antes y, además, incentivar la noción de confianza. Para ello, los jóvenes los estudiantes elaboran esquemas sobre la ubicación que le darían a las personas que les merecen mayor y menor confianza. Como el tema es muy personal, conviene que los trabajos sean anónimos. Lo ideal es poner al sujeto en el medio, a su alrededor a las personas con mayor grado de confianza y más lejos a medida que va disminuyendo esa confianza. Aunque no es una analogía para el intervalo de confianza, les permitirá acercarse al concepto y comparar con las características específicas para calcular intervalos de confianza.
- Cabe explicarles que, en la estadística descriptiva, se puede describir poblaciones con variables aleatorias; según el contexto, se elige mayoritariamente una variable aleatoria binomial o una variable aleatoria normal. Al conocer los parámetros poblacionales como “n” y “p” en el caso de la binomial, y “ μ ” y “ σ ” en el caso de la normal, se puede determinar probabilidades referidas a muestras de dichas poblaciones.
- Por su parte, la estadística inferencial aplica la siguiente propiedad de cada variable aleatoria normal: Se considera todas las medias \bar{X} de muestras del mismo tamaño “n” de una población normalmente distribuida con media “ μ ” y desviación estándar “ σ ”. Se puede constatar que la distribución de las medias muestrales \bar{X} sigue una variable aleatoria normal con el valor esperado “ μ ” de la población, pero con una desviación reducida “ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ” que depende del tamaño “n” de las muestras.
- En la práctica se toma una muestra del tamaño “n” de la población, se determina la media \bar{X} de la muestra y se construye un “intervalo de confianza” alrededor de la media muestral \bar{X} ; así se tiene “confianza” en que el valor esperado “ μ ” de la población se encuentre dentro de este

intervalo. Finalmente, con un nivel de confianza deseado, se determina el largo del intervalo utilizando la tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo).

5. Se recomienda discutir con ellos acerca del error (E) asociado a la estimación de la media mediante intervalos de confianza. Si se considera un nivel de confianza $1 - \alpha$, en términos de probabilidad se tiene que $P(\bar{X} - E \leq \mu \leq \bar{X} + E) = 1 - \alpha$, donde el error queda expresado por $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Esto se puede apreciar en el siguiente esquema:



6. Por ende, una expresión para determinar el tamaño “n” de las muestras acorde al error que se quiere cometer es $E = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$.
7. Dado que uno de los objetivos de la unidad 4 es OA 4 –Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis–, se sugiere compartir con los jóvenes la siguiente propuesta de rúbrica para que evalúen el proceso argumentativo de forma general:

	Totalmente logrado	Medianamente logrado	No logrado
Criterios			
Caracterizan los datos entregados según la variable del problema.	Identifican la cantidad de datos de la muestra y el problema con una distribución normal.	Identifican la cantidad de datos de la muestra.	Mencionan una cantidad que se relaciona con otro problema.
	Identifican el promedio y la desviación estándar en el problema.	Identifican el promedio o la desviación estándar en el problema.	Escriben información numérica.
Establecen la hipótesis o conjetura que defenderán con argumentos, buscando datos en la información entregada u otras fuentes.	Elaboran una hipótesis, basándose en los datos del problema o de otras fuentes relacionadas.	Elaboran una hipótesis, basándose parcialmente en los datos del problema.	Escriben una frase.

Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis para apoyar la argumentación.	Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis apoyando la argumentación asociada al problema.	Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis.	Realizan cálculos.
Relacionan los resultados para defender las posturas o hipótesis iniciales.	Relacionan los resultados mediante un hilo conductor, para concluir la postura o hipótesis.	Utilizan los resultados para concluir la postura o hipótesis.	Presentan los resultados.
Comparan resultados para cambiar de posición si es necesario.	Comparan los resultados obtenidos con la hipótesis y la cambian o reafirman, según corresponda.	Comparan los resultados obtenidos con la hipótesis.	Presentan una hipótesis asociada a otros resultados.

8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Identifican los elementos principales en una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.
 - Resuelven problemas en los que deben hacer una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Sitio de Economía y Finanzas que relaciona estas ciencias con la estadística. Universidad Complutense de Madrid.
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://economipedia.com/definiciones/intervalo-de-confianza.html>
- Documento con la teoría de probabilidades y estadística. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.dm.uba.ar/materias/probabilidades_estadistica_C/2011/1/PyEC142011.pdf
- Curso de Inferencia de una población más bibliografía. Documento del Departamento de Estadística de la Universidad Carlos III, Madrid.
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/aarribas/eng/docs/estII/tema1esp.pdf>
- Intervalos de confianza y otros temas de la inferencia estadística en la página de Minitab, software estadístico con una prueba gratis para su uso.
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/basics/what-is-a-confidence-interval/>

Actividad 2: Inferencias en diferentes contextos usando intervalos de confianza

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes puedan obtener intervalos de confianza para realizar inferencias sobre la media de una población en diferentes contextos. Para ello, deben identificar –a partir de la información entregada– los elementos que permiten establecer un intervalo para la media de la población, según el nivel de confianza requerido.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

ALIMENTACIÓN SALUDABLE

- Para una campaña de alimentación saludable, diferentes casinos distribuyen su plato de hamburguesa de garbanzos, lenteja y quinoa: si su masa es menor que 500 gr, será gratis para los clientes; estos están informados de la promoción. Pero los casinos se quieren asegurar de que ese plato no pese menos de 500 gr para no entregar comida gratis; para ello, quieren tener una confianza alta. Con el dato histórico de las muestras, se requiere predecir qué pasará con un alto grado de confianza. Asumiendo una distribución normal de las masas, la información histórica es la siguiente:
 - Media muestral de las masas (\bar{X}): 610 kg
 - Desviación estándar poblacional (σ): 12
 - Cantidad de datos de la muestra (n): 36
 - Nivel de confianza: 95%
 - Encuentra el intervalo para la masa poblacional, según el nivel de confianza solicitado.
 - Interpreta este intervalo. ¿Se cumple el objetivo estadístico del casino? Argumenta.
 - Determina el error para el intervalo de confianza en este caso. ¿Cómo se interpreta dicho error? Argumenta.
- Para apoyar la alimentación saludable en jardines infantiles fiscalizados por el Estado, se invitó a empresas a una licitación y ganó la que hace compotas de frutas en un máquina. Esta empresa ajusta de tal manera la cantidad despachada, que tiene desviación estándar de 16 ml. Periódicamente se revisa la máquina, tomando una muestra de 45 compotas y calculando el contenido promedio.
 - Si la media en la muestra es de 240 ml, ¿cuál es un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 95%? Argumenta.
 - El intervalo de confianza encontrado, ¿qué nos dice respecto del contenido de las compotas en la máquina? Argumenta.

Conexión Interdisciplinaria
Ciencias para la Ciudadanía
OA e, 3° y 4° medio.

ENDEUDAMIENTO DE LAS PERSONAS

- Según el Informe de endeudamiento del año 2016 de la Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras de Chile (SBIF)¹², el 40% del total de personas endeudadas tiene un ingreso menor a \$500 mil. La carga financiera que las personas destinan a la deuda sobre el total de sus ingresos corresponde al 16,72%. Antofagasta es la región que sobresale, con una deuda representativa de 3,2 millones de pesos y un monto en promedio de 4,2 veces el sueldo. Considera que, en esa región, el ingreso mensual promedio de 100 trabajadores es de \$420 000, con una desviación estándar poblacional conocida de \$75 000, y que los datos se ajustan a una distribución normal.
 - Determina un intervalo para la media poblacional del ingreso de trabajadores con un nivel de confianza del 90%.

¹² https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.sbif.cl/sbifweb3/internet/archivos/DISCURSOS_11422.pdf

- b. Determina el error para el intervalo de confianza en este caso. ¿Cómo se interpreta dicho error? Argumenta.
- c. Estimando la media poblacional del sueldo de los trabajadores en la región, la carga financiera mensual destinada a la deuda y el nivel de endeudamiento discute con tu compañero sobre por qué Antofagasta destaca por su endeudamiento.

PROTECCIÓN DE ESPECIES

Un biólogo está preocupado por la extinción del elefante sumatra –protegido en países como Indonesia– debido a la deforestación y la caza incontrolada. Efectuó el siguiente estudio para determinar en qué condiciones podría vivir de acuerdo a su alimentación:

Tomó una muestra aleatoria de 30 días, en los cuales observó cuánta comida diaria ingiere el elefante, y obtuvo en promedio 350 kg, con

desviación estándar de 25 kg de lo que comen las especies vivas; los datos están distribuidos normalmente.



El intervalo de confianza resultante fue del 90% en los 30 días de prueba; para la media, fue de entre 342 kg y 358 kg de comida para el elefante.

1. Verifica si el intervalo de confianza obtenido es correcto, según los datos entregados.
2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F), según la información entregada? Argumenta tus respuestas.
 - a. En un muestreo repetido, esto produce una media de la muestra entre 342 kg y 358 kg en el 90% de las muestras.
 - b. Los elefantes comieron entre 342 kg y 358 kg el 90% de los días.
 - c. Existe un 0,90 de probabilidad de que, en promedio, coman entre 342 kg y 358 kg.
 - d. Se estima los intervalos de confianza de la media poblacional con varianza desconocida en esta situación.
 - e. La muestra corresponde a 30 elefantes.
 - f. En los 30 días, la media de la cantidad de comida que come el elefante es 350 kg.
 - g. La varianza poblacional de la comida de este tipo de elefante es 625 kg.
 - h. El error que separa al estimado de 350 kg es de aproximadamente 8 unidades, con un 90% de confianza.
 - i. El margen de error es de un 20% para estimar la media poblacional.
 - j. Mientras mayor sea el margen de error, más ancho será el intervalo y menos seguros podremos estar del valor estimado.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Se sugiere que los estudiantes realicen cada uno de los problemas propuestos, paso a paso, para profundizar los conceptos clave de la estimación de la media mediante intervalos de confianza. En todos los ejercicios, se asume que la población se distribuye normalmente.
2. Deben reforzar que el estimador de la media poblacional μ es la media muestral \bar{X} . La desviación estándar poblacional σ se asume conocida. Para ello se construye un intervalo, según el nivel de confianza $(1 - \alpha)$, identificando el factor de confianza a partir de la puntuación z correspondiente ($z_{\alpha/2}$). El error asociado corresponderá a la expresión $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
3. En las secciones de “Alimentación saludable” y “Endeudamiento de personas”, se recomienda que interpreten el significado de los intervalos de confianza construidos según el contexto, considerando e interpretando también el error asociado según el nivel de confianza requerido. Esta es una instancia para comprender qué significa construir un “intervalo” para la media poblacional, y que puede ser de largo variable según el nivel de confianza, pero también sensible con el tamaño “ n ” de las muestras. Finalmente, todo depende del error (E) con que se quiera trabajar.
4. En la sección de “Protección de especies”, tienen que argumentar adecuadamente las sentencias falsas en la actividad de verdadero y falso. Esto permitirá validar si entienden los conceptos.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Determinan intervalos de confianza, utilizando información contextualizada.
 - Resuelven problemas en los que deben realizar una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.

Actividad 3: Elaborar una hipótesis y comprobar o rechazar en diferentes contextos

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan cómo hacer inferencias; para ello, elaboran pruebas de hipótesis que permitan “aceptar o rechazar” cierta información, considerando cierto nivel de confianza y un error de probabilidad. A diferencia de la estimación de la media poblacional por medio de intervalos de confianza en torno a la media muestral, aquí se establece intervalos de confianza en torno a la media poblacional, para probar si la media muestral está o no contenida en los intervalos de confianza y aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.
- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

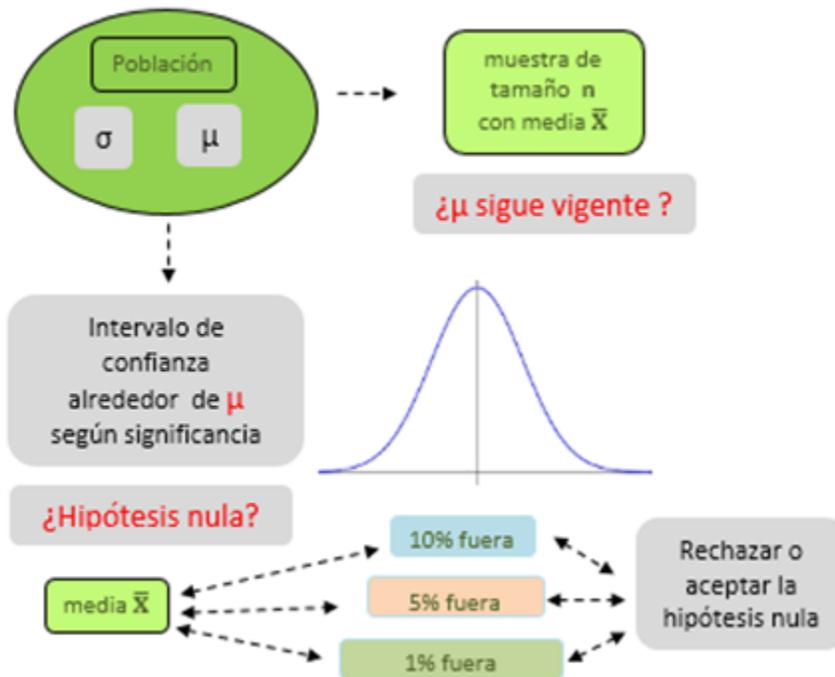
Duración: 12 horas pedagógicas

DESARROLLO

Se sugiere que trabajen colaborativamente en las siguientes actividades.

¿QUÉ ENTENDEMOS POR PRUEBAS DE HIPÓTESIS?

1. Observen el siguiente esquema, que muestra en forma sintética cómo trabaja la estadística inferencial, a partir de muestras que se toma de una población determinada y de hacer pruebas de hipótesis.



A diferencia de la estimación por medio de intervalos de confianza para la media poblacional, aquí se utiliza intervalos de confianza en torno a la media muestral, para probar si la media muestral está o no en el intervalo, según cierto nivel de confianza y error de probabilidad.

- a. Acorde con lo anterior, completen la siguiente tabla:

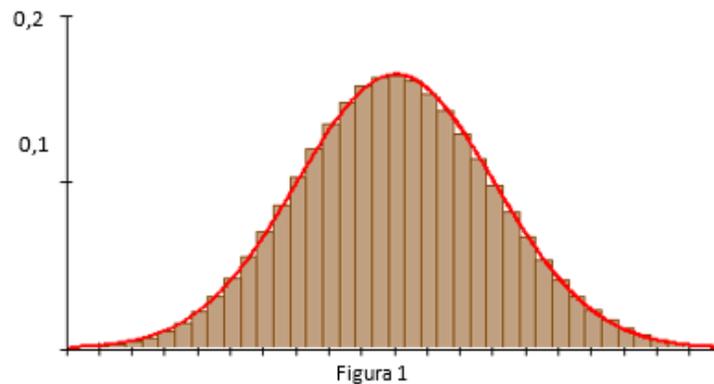
$1 - \alpha$	α	Error de probabilidad	$z_{\alpha/2}$	Intervalo de confianza para \bar{X}
0,90	0,1			
0,95	0,05	5%	1,960	$\left[\mu - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
0,99	0,01			

- b. En sus propias palabras, ¿qué es un intervalo de confianza para la “media muestral” a partir de la media y desviación poblacional, según un nivel de confianza y error de probabilidad? Expliquen.
- c. ¿En qué influye el nivel de confianza y error de probabilidad a la hora de fijar un intervalo para media muestral? Argumenten.

- d. ¿En qué consiste la “hipótesis nula” y cómo se acepta o rechaza? Argumenten.
2. Consideren la siguiente situación: La lluvia caída en una región tenía una media poblacional anual de las últimas décadas de $\mu = 120 \frac{ml}{m^2}$, con una desviación estándar de $\sigma = 15 \frac{ml}{m^2}$. En mediciones anuales recientes de 9 años seguidos, se registra un nuevo promedio de $109 \frac{ml}{m^2}$. Para ver si se podría hablar de un cambio significativo de la lluvia caída a partir de esas mediciones, se hace una prueba de hipótesis.
- Elaboren una prueba de hipótesis con un error de probabilidad de 5%, acerca de un cambio “significativo” de la lluvia caída. Construyan un intervalo de confianza adecuado y establezcan si aceptan o rechazan la hipótesis nula.
 - Contrasten ahora con una prueba de hipótesis con un error de probabilidad de 1% acerca de un cambio “altamente significativo”. Construyan un intervalo de confianza adecuado y establezcan si aceptan o rechazan la hipótesis nula.

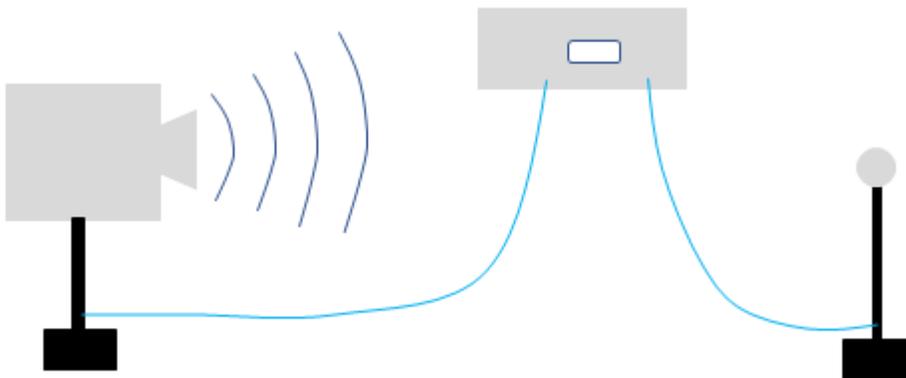
PRUEBAS DE HIPÓTESIS EN CONTEXTOS DE LA VIDA DIARIA Y CIENCIAS NATURALES

1. El gráfico muestra el histograma de una distribución binomial aproximada por una campana de Gauss.



- ¿Por qué se puede aproximar una “situación binomial” por el supuesto de normalidad, en muestras grandes?
- Una prueba de hipótesis bilateral considera una probabilidad de error de $\alpha = 0,05$ para el rechazo de la hipótesis nula H_0 . En el eje horizontal de imagen, marquen aproximadamente el margen del rechazo de la hipótesis nula.
- Una prueba de hipótesis unilateral izquierda considera una probabilidad de error de $\alpha = 0,08$ para rechazar la hipótesis nula H_0 . Marquen aproximadamente, en el eje horizontal de la imagen, el margen del rechazo de la hipótesis nula.
- Una prueba de hipótesis unilateral derecha considera una probabilidad de error de $\alpha = 0,06$ para el rechazo de la hipótesis nula H_0 . Marquen aproximadamente, en el eje horizontal de la imagen, el margen del rechazo de la hipótesis nula.

2. ¿En cuáles de las siguientes situaciones se debe aplicar una prueba de hipótesis bilateral, unilateral izquierda o derecha, respectivamente? Argumenten su respuesta.
 - a. Cada pote de margarina contiene por lo menos 252 g.
 - b. El servicio técnico de computadoras cobra en promedio 2 horas de trabajo.
 - c. En las reservas de vuelos, hay una sobredemanda de 10%.
 - d. El lanzamiento de un dado muestra que es un dado honesto.
 - e. El pronóstico del tiempo ha mejorado.
3. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) y cuáles falsas (F)? Argumenten sus respuestas.
 - a. Si se asume la hipótesis nula, debería ser verdadera. Si no fuera así, no se podría determinar su intervalo de aceptación.
 - b. La probabilidad de rechazar una hipótesis nula, aunque sea verdadera, se llama probabilidad de error.
 - c. Si aumenta el nivel de significancia (máxima probabilidad de error), aumenta también el intervalo de aceptación de la hipótesis nula.
 - d. La probabilidad del error indica el valor de la probabilidad con la cual se rechaza la hipótesis nula.
 - e. Si se repite dos veces la misma prueba de hipótesis, tal vez se deba decidir de manera diferente.
4. Prueba de hipótesis con variable aleatoria X normalmente distribuida.



En un experimento escolar, el emisor y el receptor del sonido se posicionan a una distancia de $3,40m$ para determinar la velocidad del sonido en el aire. Debido a su naturaleza de propagación, los tiempos t que necesita el sonido para recorrer la distancia deberían tener medidas con el valor esperado de $\mu = 0,0100s$ y una desviación estándar de $\sigma = 0,0010s$. 16 parejas de alumnos registraron sus resultados de las mediciones ya promediados del tiempo t , y los representaron en la siguiente tabla:

grupo	1	2	3	4	5	6	7	8
t en s	0,0094	0,0110	0,0087	0,0092	0,0091	0,0101	0,0081	0,0100

grupo	9	10	11	12	13	14	15	16
t en s	0,0088	0,0093	0,0102	0,0087	0,0091	0,0094	0,0102	0,0085

- Mirando las tablas con los resultados, conjeturen acerca de la tendencia de los tiempos que oscilan alrededor del valor esperado $\mu = 0,0100s$.
 - Elaboren el intervalo de confianza para la hipótesis nula, contrastando el resultado experimental \bar{X} (tiempos medidos) del grupo experimental de los 16 alumnos, con el valor esperado μ , admitiendo un nivel de error de probabilidad de 5%.
 - Determinen la media \bar{X} de las 16 mediciones que resultan del experimento.
 - Según la media \bar{X} calculada, acepten o rechacen la hipótesis nula.
 - Conjeturen acerca de la calidad del reloj digital utilizado en los experimentos.
5. La capacidad de la carga eléctrica de un modelo de batería está etiquetada con $120Ah$. Una empresa automotriz recibe reclamos de clientes que dicen que la carga eléctrica de ese modelo es menor. Se hizo una investigación al interior de la automotriz, testeando al azar $n = 25$ baterías con una media $\bar{X} = 118,8Ah$. La desviación estándar de la capacidad de este modelo es de $\mu = 2,5Ah$.
- Prueben la siguiente hipótesis con un nivel de error de probabilidad de 5%: "El valor esperado μ de la carga eléctrica sigue en $120Ah$ ".
 - ¿Por qué las pruebas de hipótesis dan sentido a la elaboración de intervalos de confianza?



PRUEBAS DE HIPÓTESIS EN EL CONTEXTO DE EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y DE CIENCIAS SOCIALES

- Se lanza un dado 150 veces, y en 60 lanzamientos resulta un número par. La variable aleatoria binomial X representa la cantidad de resultados del evento "número par".
 - ¿Por qué se puede aproximar la variable X mediante una distribución normal? Argumenten su respuesta.
 - Determinen el valor esperado μ y la desviación estándar σ para un dado perfectamente equilibrado.



- c. Prueben la hipótesis “El dado está perfectamente equilibrado”, con un error de probabilidad de 5%.
2. En la revista científica Lifesciences se publicó un artículo sobre el aumento de la estatura media de mujeres y hombres de diferentes países en el mundo, a lo largo de 100 años. (<https://elifesciences.org/articles/13410>). El cuadro adjunto representa los resultados para las chilenas y los chilenos.



Formen grupos según las siguientes hipótesis.

- I. Se rechaza algunas de las hipótesis con un 5% de error de probabilidad.
- Elaboren una tabla con la estatura de 25 hombres, cuya media \bar{X} rechace la hipótesis de estatura media de hombres de 171cm y diga que la estatura media podría ser mayor. La variable X sigue una distribución normal con una desviación estándar de 8cm.
 - Elaboren una tabla con la estatura de 16 mujeres, cuya media \bar{X} rechace la hipótesis de estatura media de 159cm y diga que la estatura media podría ser menor. La variable X sigue una distribución normal, con una desviación estándar de 6cm.
- II. Se acepta algunas de las hipótesis con un 5% de error de probabilidad.
- Elaboren una tabla de 16 hombres cuya media \bar{X} acepte la hipótesis de estatura media de hombres de 171cm. La variable X sigue una distribución normal, con una desviación estándar de 8cm.
 - Elaboren una tabla con la estatura de 25 mujeres, cuya media \bar{X} acepte la hipótesis de estatura media de 159cm. La variable X sigue una distribución normal, con una desviación estándar de 6cm.
- III. Se acepta o se rechaza algunas de las hipótesis con un 5% de error de probabilidad.
- Elaboren una tabla con la estatura de 25 hombres, cuya media \bar{X} acepte la hipótesis de estatura media de hombres de 160cm. La variable X sigue una distribución normal, con una desviación estándar de 6cm.
 - Elaboren una tabla con la estatura de 16 mujeres cuya media \bar{X} rechace la hipótesis de estatura media de 147cm. La variable X sigue una distribución normal con una desviación estándar de 5cm.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Una parte importante de la estadística inferencial se refiere a pruebas de hipótesis mediante las cuales se quiere verificar o rechazar si ha cambiado o no el valor esperado “ μ ” de una población, distribuida con una variable aleatoria normal. Se toma una muestra del tamaño “ n ”, se determina la media muestral \bar{X} y se construye un intervalo de confianza alrededor del valor esperado de la población $[\mu - k \cdot \frac{\sigma}{n}; \mu + k \cdot \frac{\sigma}{n}]$. Si la media muestral \bar{X} está dentro del intervalo de confianza, se acepta la hipótesis nula “no hay cambio”. En el otro caso, se rechaza la hipótesis nula “no hay cambio”.

2. Se sugiere enfatizar con los estudiantes que muchas situaciones estadísticas que involucran una prueba de hipótesis requieren una variable aleatoria binomial; sin embargo, si se considera muestras de tamaño grande, se puede aproximar la variable binomial por una variable normal estandarizada, como se vio en la Unidad 3.
3. Para apoyar la comprensión, es importante que los alumnos sepan representar gráficamente los problemas de una prueba de hipótesis. Se sugiere que ellos mismos elaboren la estrategia de aceptar o rechazar una hipótesis nula.
4. En el segundo punto de la sección “Experimentos Aleatorios y de Ciencias Sociales”, se recomienda representar los resultados de los diferentes grupos, contrastando las diversas estrategias y fomentando la argumentación.
5. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Identifican los elementos principales de una prueba de hipótesis y los argumentos para aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.
 - Resuelven problemas en los que deben plantear una prueba de hipótesis y establecen los argumentos para aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Pruebas de hipótesis
https://www.curriculumnacional.cl/link/http://frrq.cvg.utn.edu.ar/pluginfile.php/3617/mod_resource/content/0/TRANSPARENCIAS/Prueba_Hipotesis-_PPT-2013.pdf
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.monografias.com/trabajos17/pruebas-de-hipotesis/pruebas-de-hipotesis.shtml>

Actividad 4: Elaborar y comprobar o rechazar una hipótesis

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan algo más sobre pruebas de hipótesis; por ejemplo: en relación con la existencia de errores. En estadística inferencial, se considera principalmente dos tipos de errores: Tipo I, rechazar incorrectamente la hipótesis nula (aunque sea verdadera) y Tipo II, aceptar erróneamente la hipótesis nula (aunque sea falsa). Ambos tienen consecuencias en la vida diaria y en todas las investigaciones científicas. Así, en el ámbito escolar, los jóvenes pueden aproximarse a la manera de trabajar científicamente.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 12 horas pedagógicas

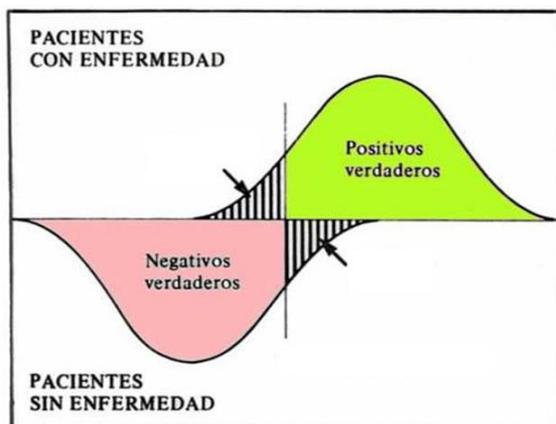
DESARROLLO

DESCUBRIENDO LOS TIPOS DE ERRORES EN ESTADÍSTICA INFERENCIAL

1. Tipo de errores en pruebas de hipótesis relacionados con la hipótesis nula.

Hipótesis nula está	Realidad	
	La hipótesis nula es verdadera	La hipótesis nula es falsa
Rechazada		
Aceptada		

- Averigua en qué caso se debe rechazar la hipótesis nula.
 - Llena cada uno de los espacios grises con una de las siguientes afirmaciones: “decisión correcta”, “error tipo 1” y “error tipo 2”. ¿Qué significa “error tipo 1” y “error tipo 2”?
 - ¿En qué caso, el error corresponde a la probabilidad de error en la hipótesis nula?
2. ¿Falsos positivos? ¿falsos negativos? En el ámbito de la salud, se utilizan los términos “falsos positivos” y “falsos negativos”. En un test médico, se asigna el resultado “positivo” a la diagnosis de ser portador de una enfermedad y en el caso contrario, se asigna el resultado “negativo”. La imagen muestra los cuatro casos de los resultados posibles.



Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA d, e, 3° y 4° medio

- Rotula las zonas achuradas en negro con uno de los términos “falsos positivos” o “falsos negativos”.
- Se considera como hipótesis nula “la persona no tiene la enfermedad”. ¿Cuál es la hipótesis alternativa?
- ¿Con qué tipo de error (“tipo 1” o “tipo 2”) se puede identificar el resultado “falso positivo”? Argumenta la respuesta.
- Manteniendo la hipótesis nula, el test de diagnóstico conlleva un error del “tipo 2”; ¿con qué resultado (“falso positivo” o “falso negativo”) se puede relacionar este error?
- Considerando un test de diagnóstico para detectar si una persona es portadora de un virus altamente contagioso con un cuadro severo de enfermedad, ¿cuál de los errores “tipo 1” o “tipo 2” provocará más consecuencias negativas para la comunidad? Argumenta la respuesta.

- f. Si un test de diagnóstico de ser portador de un virus tiene una precisión de 99,9% de detectar el virus, ¿cuántas de diez mil personas podrían obtener un diagnóstico “falso positivo”?
3. Cómo influye el tamaño n de una muestra de una población normalmente distribuida, en el rechazo o la aceptación de la hipótesis nula.

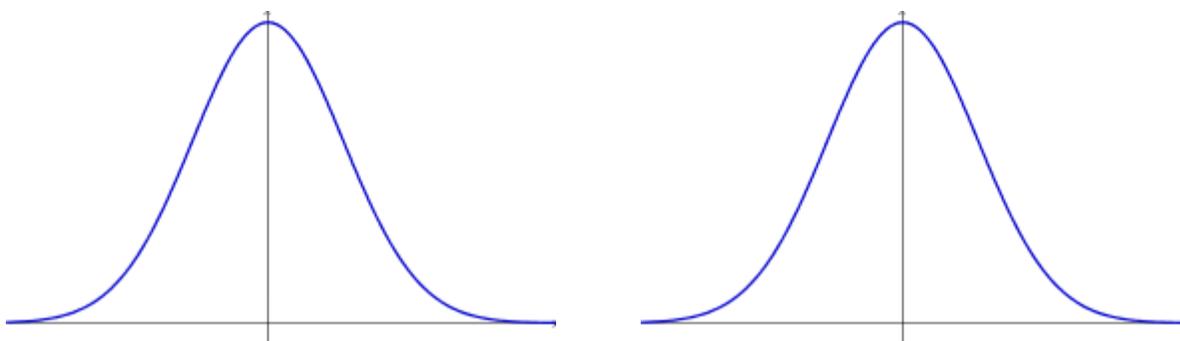
De un manzano grande se puede recolectar anualmente 200kg de manzanas, con una desviación estándar de 30kg. En una plantación, se quiere averiguar si el cambio del microclima en el valle ha variado el rendimiento de los manzanos. Se considera el rendimiento de manzanos bajo el supuesto de una distribución normal y se prueba con un error de probabilidad de 5%.



- a. De una muestra de 25 manzanos, se calcula un promedio de $\bar{X} = 190kg$. Prueba la hipótesis nula para aceptar o rechazar la influencia del cambio del clima.
- b. De otra muestra de 50 manzanos, resulta el mismo promedio de $\bar{X} = 190kg$. Prueba la hipótesis nula para aceptar o rechazar la influencia del cambio del clima.
- c. Compara las dos pruebas y comenta la influencia del tamaño n de la muestra en la hipótesis nula.

¿“Significatividad” o “significatividad alta”?

1. La siguiente imagen muestra el gráfico de dos distribuciones normales de la misma población. Para una prueba de hipótesis nula, se considera un error de probabilidad de 5% en el primer caso y en el segundo, un error de probabilidad de 1%.



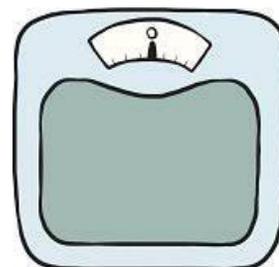
- a. Rotula en ambos gráficos el valor esperado μ .
- b. Marca aproximadamente, en el eje horizontal del primer gráfico, el espacio del rechazo de la hipótesis nula con un error de probabilidad de 5%. ¿A qué tipo de error “tipo 1” o “tipo 2” corresponde frente a la hipótesis nula?
- c. Marca aproximadamente en el eje horizontal del primer gráfico, el espacio de la aceptación de la hipótesis nula con un error de probabilidad de 1%.

- d. Si el resultado de una muestra cae en el espacio de rechazo de una hipótesis nula, se utiliza las expresiones “desviación significativa” o “desviación altamente significativa”. ¿Cuál de los casos se evalúa con “desviación significativa” o “desviación altamente significativa”? Argumenta la respuesta.

SALUD, ELECCIONES DE CANDIDATOS Y MECÁNICA

1. De un documento del Ministerio de Salud de Chile¹³ se puede extraer aproximadamente la información de la masa media de niñas de 10 años de todo Chile, y se concluye que es de 32kg con una desviación estándar de 5kg . Para contrastar esta información con la realidad regional, se conjetura que la masa media de niñas sería menor. De cuatro cursos entre 4° y 5° básico y un total de 64 niñas, resulta una masa media de $30,5\text{kg}$.

Bajo el supuesto de normalidad, se arma la hipótesis de que la masa media de las niñas en la región está representada con los datos de la población. Se arma la hipótesis nula, con un 5% de error de probabilidad, de que la masa media coincide con el nivel nacional.



- ¿Cuál sería la estrategia para verificar la conjetura? Argumenta tu respuesta.
 - Comparando el resultado de la muestra con el intervalo de confianza para la media poblacional ($\mu = 32\text{kg}$) de $[30,78\text{kg}, 33,23\text{kg}]$, ¿qué conclusión se obtiene? Argumenta tu respuesta.
 - Para construir una hipótesis alternativa, se arma un intervalo de confianza bajo el supuesto de que, entre 100 niñas, resulte $\bar{X} = 30,5\text{kg}$. Determinando correctamente el intervalo de confianza para la media poblacional ($\mu = 32\text{kg}$) de $[30,39\text{kg}, 33,61\text{kg}]$ y se rechaza la hipótesis nula. Argumenta este procedimiento con la prueba de hipótesis.
2. El candidato a diputado de un distrito electoral encarga una encuesta para averiguar si obtiene mayoría absoluta en las próximas elecciones. Se elige al azar a 354 personas y 178 de ellas señalan votar por él.
- ¿Cómo se interpreta la “mayoría absoluta” en porcentaje?
 - El candidato piensa que puede sobrepasar el porcentaje de mayoría absoluta. ¿Cómo se debería formular la hipótesis nula y la hipótesis alternativa? Argumenta tu respuesta.
 - ¿Qué factor k en $k \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ para la probabilidad de error de 5% se debe aplicar para el intervalo de confianza? Argumenta tu respuesta.
 - Con los resultados de la encuesta, rechaza o acepta la hipótesis nula. Argumenta tu decisión.
 - El candidato tiene como meta mínima superar el resultado de las últimas elecciones, en las cuales obtuvo 48,5% de los votos. Elabora con la estrategia anterior una prueba de hipótesis para esta meta.



¹³ <https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.bibliotecaminal.cl/wp/wp-content/uploads/2018/03/2018.03.16-Patrones-de-crecimiento-para-la-evaluaci%C3%B3n-nutricional-de-ni%C3%B1os-y-adolescentes-2018.pdf>

3. Una empresa de producción de automóviles indica que el rendimiento del motor por un litro de petróleo de un modelo es de $12,5 \text{ km}$ en recorridos fuera del tránsito urbano. De larga experiencia, se sabe que la variable aleatoria X , que describe el rendimiento del motor, está normalmente distribuida con una desviación estándar de $\sigma = 1,5 \text{ km}$.



En la revista de un club de automóvil se duda de este dato y se conjetura un rendimiento menor. Se analiza 100 autos y su resultado indica un rendimiento medio de $\bar{X} = 12,2 \text{ km}$.

- En una prueba de hipótesis unilateral de un error de probabilidad de 0,05 (considerando el mismo factor k de la actividad 2c.), ¿cuál sería la hipótesis nula y cuál la hipótesis alternativa? Argumenta.
- Acepta o rechaza la hipótesis nula a partir de los datos de la muestra.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- En la primera parte, es importante que los alumnos sepan clasificar los tipos de error gráficamente en la tabla.
- Con la metáfora “ser portador” de un virus, se puede entender mejor los errores “tipo 1” y “tipo 2”, identificándolos como “positivo falsos” y “negativos falsos”.
- Se recomienda poner énfasis en que los jóvenes elaboren la hipótesis nula a partir de resultados experimentales o muestrales.
- En el primer punto de “Salud, elecciones de candidatos y mecánica”, las respuestas no requieren cálculo alguno. El énfasis está en la argumentación y la comunicación.
- En el punto 1c, respecto de la “masa media de niñas”, el resultado muestral conduce a rechazar la hipótesis nula. El relato del procedimiento de aumentar el número de niñas investigadas lleva matemáticamente a una reducción del rango de aceptación, lo que implica aceptar la hipótesis nula. La idea es que los estudiantes cuestionen el aumento posterior del número “ n ” en la prueba de hipótesis, porque ese procedimiento vulneraría los principios científicos de investigación.
- En la situación del “candidato a diputado”, la prueba de hipótesis se realiza unilateralmente para afirmar la mayoría absoluta que significa resultados sobre 50%, que corresponde a $p > 0,50$. La hipótesis nula es $p \leq 0,50$. Para tener un error de 5% en el lado derecho, el intervalo de confianza, que es simétrico, debe tener la confiabilidad 90% que implica el factor $k = 1,645$ según la tabla presentada.
- En la última situación, se sospecha que el rendimiento del motor sea menor y, por esta razón, también se realiza la prueba de hipótesis en forma unilateral con un 5% de error. Los alumnos deben elaborar la hipótesis nula “ $\mu = 12,5 \text{ l}$ ” y testearla frente a la hipótesis alternativa “ $\mu < 12,5 \text{ l}$ ”.

8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Resuelven problemas en los que deben plantear una prueba de hipótesis y establecen los argumentos para aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.
 - Argumentan acerca del error de probabilidad asociado en una prueba de hipótesis, según el nivel de confianza establecido para los intervalos.
 - Argumentan acerca de los errores Tipo I y Tipo II en una prueba de hipótesis.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores

- Errores Tipo I y II
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/basics/type-i-and-type-ii-error/>
- Errores Tipo I
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://explorable.com/es/error-de-tipo-i>

Actividad de Evaluación

Objetivos de Aprendizaje

OA 4. Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA c. Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

OA i. Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

Indicadores de evaluación

- Identifican los elementos principales en una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.
- Resuelven problemas en los que deben estimar la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.
- Argumentan acerca del error asociado en una estimación por intervalos, según el nivel de confianza establecido.
- Identifican los elementos principales de una prueba de hipótesis y los argumentos para aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.
- Resuelven problemas en los que deben plantear una prueba de hipótesis y establecen los argumentos para aceptar o rechazar la “hipótesis nula”.
- Argumentan acerca del error de probabilidad asociado en una prueba de hipótesis, según el nivel de confianza establecido para los intervalos.
- Argumentan acerca de los errores Tipo I y Tipo II en una prueba de hipótesis.

Duración: 6 horas pedagógicas

Se puede usar las siguientes actividades como ejemplos de evaluaciones para la unidad 1, cada una por sí misma o en conjunto. Conviene que los jóvenes trabajen colaborativamente en algunas de ellas para que discutan y propongan estrategias que permitan llegar a la o las soluciones posibles.

1. Una fábrica de lácteos desea constatar el contenido de las cajas de leche de un 1 litro. Según sus datos, tienen una distribución aproximadamente normal con varianza de 0,16 litros. Se toma una muestra aleatoria de caja, se mide el contenido y se obtiene los siguientes litros:

0,970; 0,955; 0,930; 1,104; 1,039; 0,910; 0,944; 0,908; 0,808



- a. Construye un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional.
 - b. Si el nivel de significancia fuera de un 3%, ¿cuál sería el intervalo de confianza?
 - c. ¿Qué se puede afirmar respecto de lo que se prometió en el empaque de este lácteo?
2. Se tiene información acerca de los diámetros de 250 esferas metálicas de rodamientos, producidas por una máquina especializada en una semana. Se obtuvo una media muestral de 0,822 cm, con una desviación estándar de 0,041 cm. Encuentra los intervalos de confianza al 95% y al 99% para la media poblacional del diámetro de todas las esferas metálicas producidas. Compara e interpreta el significado en ambos casos.
 3. Imagina que se mide los tiempos de reacción frente a un evento de un grupo de personas con las mismas características. El especialista estima en 0,05 segundos la desviación estándar. Determina el tamaño “ n ” de la muestra de tiempos de reacción, de modo que:
 - a. Si se considera una confianza del 95%, el error de estimación no supere los 0,01 segundos.
 - b. Si se considera una confianza del 99%, el error de estimación no supere los 0,01 segundos.
 4. Una variable aleatoria X está distribuida normalmente con desviación estándar σ . Se toma muestras del tamaño n cuyas medias son \bar{X} . En los siguientes casos, ¿se puede rechazar la hipótesis nula, con 5% de error de probabilidad, sobre el valor esperado μ ? Argumenta.
 - a. $\bar{X} = 35, \sigma = 5, n = 5, \mu = 40$
 - b. $\bar{X} = 38, \sigma = 5, n = 5, \mu = 40$
 5. En una encuesta efectuada hace unos años, el 65% de la población estaba a favor de mantener dos horarios oficiales, uno de invierno y otro de verano. Actualmente, hay dos grupos grandes en la población que creen que el porcentaje ha cambiado. El grupo A dice que el porcentaje ha disminuido y que sería justo volver a un horario único. El grupo B opina que el porcentaje incluso ha aumentado. Ambos grupos realizan una prueba de hipótesis con una muestra de $n = 100$ con la hipótesis nula $H_0: p = 0,65$.
 - a. ¿Por qué se puede testear con una variable normal? Argumenta.
 - b. ¿Cuál sería la hipótesis alternativa H_1 del grupo A? Argumenta.
 - c. ¿Cuál sería la hipótesis alternativa H_1 del grupo B? Argumenta.

6. En la liquidación total de una tienda de artículos electrónicos, se vende luces LED por masa en paquetes de 500g. La masa de los LED de la fabricación está normalmente distribuida con un valor esperado de 0,3g y una desviación estándar de 0,066g. Para una obra colaborativa de iluminación de un escenario, se necesita una gran cantidad de luces LED.



Prueben la hipótesis: “Un paquete de 500g contiene 1 600 luces LED.” Consideren un error de probabilidad del 5%.

7. Un comerciante mayorista ofrece *pendrives* de segunda selección a un precio económico y afirma que se cuenta con sólo un 10% de desecho. El comprador toma al azar una muestra de 1 000 *pendrives* y detecta 130 defectuosos.
- ¿Qué porcentaje de desecho presenta la muestra?
 - ¿Cómo se puede conjeturar para rechazar la afirmación del comerciante?
 - Elabora una estrategia para una prueba de hipótesis.
 - ¿Cómo se formula favorablemente la hipótesis nula?
 - ¿Qué se puede concluir del resultado de la muestra con un 95% de nivel de confianza?
 - ¿Cuál sería un error del tipo 1?
8. De un manzano se puede recolectar anualmente manzanas, según los siguientes parámetros: $\mu = 200kg$ y $\sigma = 30kg$. De una muestra de 25 manzanos, se calcula un promedio de $\bar{X} = 189 kg$. Prueba la hipótesis nula para aceptar o rechazar la influencia del cambio del clima.
- ¿Cómo influirá la reducción del nivel de error de probabilidad en la hipótesis nula? Argumenten y comuniquen la respuesta.
 - Verifiquen la respuesta con una reducción del nivel de error de 10% a 5%.
 - Si se acepta la hipótesis nula con el nivel de error de probabilidad de 10%, ¿la decisión sería correcta o qué tipo de error se cometería? Argumenta.

9. Imagina que el rendimiento verdadero del motor de un modelo de automóvil de cierta empresa es de 9,9 *km*. En este caso, la hipótesis nula “ $\mu = 10 km$ ” sería falsa con un error del 10%. La variable aleatoria \bar{X} estaría distribuida normalmente con el valor esperado $\mu = 9,9 km$ y desviación estándar $\sigma = 1 km$. Supón que la distribución de las medias \bar{X} tuviera el valor esperado $E(\bar{X}) = 9,8 km$ y la desviación estándar de $\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$.



- Considerando el margen izquierdo de 9,835 *km* para la hipótesis nula de la empresa, determina la probabilidad para que \bar{X} tome un valor $\geq 9,835 km$.
- ¿Qué error (tipo 1 o tipo 2) se cometería, aceptando la hipótesis nula “ $\mu = 10 km$ ”? Argumenta.

PAUTA DE EVALUACIÓN

Criterios de evaluación	Niveles de logros		
	Completamente logrado	Se observa aspectos específicos que pueden mejorar	No logrado por ausencia o no se puede entender nada
Identifican los elementos principales de una situación para determinar el promedio, la desviación estándar e intervalos de confianza.			
Elaboran intervalos de confianza según parámetros dados.			
Toman decisiones frente a situaciones, considerando el intervalo de confianza.			
Comparan situaciones con diferentes intervalos de confianza.			
Evalúan conjeturas, basándose en la distribución normal, la desviación estándar y el intervalo de confianza.			
Argumentan respuestas relacionadas con variables normales, utilizando la distribución normal y el intervalo de confianza.			
Evalúan hipótesis en diferentes situaciones, considerando la distribución normal, la desviación estándar y el intervalo de confianza.			
Describen los pasos para hacer una prueba de hipótesis en situaciones de distribuciones normales.			
Determinan la probabilidad de un intervalo en situaciones de distribuciones normales.			

Proyecto Interdisciplinario

Manual de orientación

¿Qué es el Aprendizaje Basado en Proyectos?

El Aprendizaje Basado en Proyectos se define como una propuesta de enseñanza que se organiza en torno a un problema o necesidad que se puede resolver, aplicando diferentes perspectivas y áreas del conocimiento. Para encontrar la solución, los estudiantes movilizarán conocimientos, habilidades y actitudes durante todo el proceso hasta llegar a una solución que se expresa en un producto. Los proyectos surgen desde sus propias inquietudes e intereses, potenciando así su motivación por aprender y su compromiso frente al propio aprendizaje.

¿Por qué fomenta el trabajo interdisciplinario?

La complejidad de un problema real o necesidad es la razón que justifica la participación y conexión de distintos saberes y disciplinas. Por ejemplo, los proyectos STEM se desarrollan sobre problemas o necesidades que vinculan ciencia, tecnología, matemática e ingeniería para su solución.

¿Cómo se relaciona con las Habilidades para el siglo XXI?

La metodología de proyecto permite que los estudiantes potencien estas habilidades y actitudes, ya que, por ejemplo, su procedimiento los organiza para que busquen juntos una solución, los desafía para que flexiblemente encuentren una respuesta nueva al problema y para que reflexionen con otros desde diferentes perspectivas, generando así el trabajo colaborativo, la comunicación y el pensamiento crítico y creativo.

¿Cuáles son los elementos del Aprendizaje Basado en Proyectos?

Pregunta o problema central

Los problemas que se aborda en un proyecto se vinculan con situaciones reales y significativas para los estudiantes. Se relacionan con sus inquietudes e intereses y los motivan a explorar y participar activamente en la búsqueda responsable de una solución.

Indagación sostenida

Cuando se enfrentan a un problema desafiante, comienza el proceso de búsqueda para construir soluciones. Durante este proceso, los alumnos hacen nuevas preguntas, utilizan recursos y profundizan los conocimientos.

Autenticidad

Los proyectos tienen un contexto auténtico. Por ejemplo: los estudiantes resuelven problemas que enfrentan las personas fuera de la escuela, pero también pueden centrarse en problemas auténticos dentro de ella. Los proyectos pueden tener un impacto real en los demás, como cuando los alumnos atienden una necesidad en su escuela o comunidad (por ejemplo: diseñar y construir un huerto

escolar, mejorar un parque comunitario, ayudar a los inmigrantes locales); también pueden crear algo que otras personas usarán o experimentarán. Un proyecto puede tener autenticidad personal si refleja las preocupaciones, los intereses, las culturas, las identidades y los problemas de los estudiantes en sus vidas.

Voz y elección del estudiante

Los alumnos deben sentir que pueden participar activamente, tomar decisiones, expresar sus puntos de vista, proponer soluciones durante el trabajo en equipo y expresarse por medio de los productos que crean. Participan activamente en un proyecto, desde el momento en que identifican el problema hasta que divulgan el producto; así fortalecen su compromiso y motivación con el propio aprendizaje.

Metacognición

A lo largo de un proyecto los estudiantes –junto con el docente– deben reflexionar sobre lo que están aprendiendo, cómo están aprendiendo y por qué están aprendiendo. La reflexión puede ocurrir de manera informal, como parte de la cultura y el diálogo en el aula, pero también debe ser una parte explícita de los diarios del proyecto, la evaluación formativa programada, las discusiones en los puntos de control del proyecto y las presentaciones públicas de su trabajo. La reflexión sobre el proyecto en sí, cómo se diseñó e implementó, los ayuda a decidir cómo podrían abordar su próximo proyecto y a mejorar la forma de aplicar esta metodología.

Crítica y revisión

Los estudiantes deben estar abiertos a dar y recibir comentarios constructivos acerca del trabajo propio y el de sus compañeros, lo que permite mejorar los procesos y productos del proyecto. Idealmente, tiene que hacerlo según protocolos formales y con el apoyo de rúbricas. Los invitados o expertos externos también pueden ayudar, brindando un punto de vista auténtico y real. La crítica y revisión del trabajo propio permite a los alumnos evaluar los resultados de su aprendizaje, fortaleciendo la evaluación formativa.

Producto público

A diferencia de otras metodologías, en el Aprendizaje Basado en Proyectos la respuesta o solución a la pregunta o problema se expresa en un "producto", que puede ser un artefacto tangible, multimedial o digital, una presentación sobre la solución a un problema, un desempeño o evento, entre otras opciones. Al finalizar el proyecto, los estudiantes tienen que poder presentarlo públicamente; eso aumenta su motivación, ya que no se reduce a un intercambio privado entre profesor y alumno. Esto tiene un impacto en el aula y en la cultura escolar, pues ayuda a crear una "comunidad de aprendizaje", en la cual los estudiantes y los maestros discuten lo que se está aprendiendo, cómo se aprende, cuáles son los estándares de desempeño aceptables y cómo se puede mejorar el desempeño de los alumnos. Finalmente, hacer que el trabajo de los alumnos sea público es una forma efectiva de comunicarse con los pares y los miembros de la comunidad.

¿Qué debo considerar antes de la ejecución de un proyecto?

- Incorporar en la planificación anual de la asignatura una o más experiencias de proyectos, tomando en cuenta el tiempo semanal de la misma.
- Si la asignatura es de 2 horas a la semana, se recomienda incorporar un proyecto acotado o abordar toda una unidad de aprendizaje mediante esta metodología.
- Si la asignatura es de 6 horas semanales, se recomienda destinar un tiempo fijo a la semana (por ejemplo, 2 horas) para el proyecto.
- La planificación anual también debe incorporar la exhibición pública de los proyectos. Se recomienda que sea una instancia en que se invite a los padres, familias, expertos y otros miembros de la comunidad (se sugiere solicitar a la dirección del establecimiento que reserve un día para llevar a cabo la actividad).
- Identificar en los Objetivos de Aprendizaje, tópicos, necesidades o problemas que se pueda abordar interdisciplinariamente con dos o más asignaturas.
- Si el proyecto involucra a dos o más asignaturas, los profesores deben planificarlo juntos y solicitar un tiempo adecuado para ello a su jefe técnico o al director.
- Una vez hecha esta planificación e iniciado el año escolar, se debe explicar a los estudiantes en qué consiste esta metodología, exponerles los tópicos que se identificó en las Bases Curriculares y pedirles que, a partir de ello, propongan problemas o preguntas que se puede resolver o responder mediante un proyecto.
- El Aprendizaje Basado en Proyectos requiere de un trabajo grupal y colaborativo. Cada integrante del grupo debe asumir un rol específico, el cual puede ir rotando durante la ejecución del proyecto.

¿Cómo se organiza y ejecuta el proyecto?

Para organizar el proyecto, se presenta una ficha con diferentes componentes que ayudarán a ejecutarlo. A continuación, se explica cada uno de esos componentes.

Resumen del proyecto

Síntesis del tema general, el propósito y el resultado esperado del proyecto.

Nombre del proyecto

Se recomienda incluir un subtítulo que evidencie el tema o el contenido que se trabaja en el proyecto.

Problema central

En esta sección, se expone un párrafo de la pregunta o problema que se quiere resolver por medio del proyecto. Se recomienda explicar cuál es el tema que se va a resolver y por qué el proyecto puede hacerlo o desarrollar reflexiones profundas en los alumnos.

Propósito

Se explica el objetivo general y específico del proyecto.

Objetivos de Aprendizaje de Habilidades y Conocimientos

En esta sección, se explica cuáles son los Objetivos de Aprendizaje de la asignatura que se desarrollará en el proyecto. Se espera que sean interdisciplinarios, por lo que se recomienda incorporar los OA de las otras asignaturas involucradas.

Tipo de Proyecto Interdisciplinario

Es importante aclarar qué aspectos de las distintas disciplinas se aplicará en el proyecto. Esta sección busca que el docente exponga y explique tales relaciones de manera que sea más fácil guiar el trabajo interdisciplinario. Para esto, conviene que se coordine con los profesores de las otras áreas disciplinares.

Producto

Todo proyecto debe tener como resultado un producto; es decir, algún objeto, aparato, informe, estudio, ensayo, disertación oral, escrita, visual, audiovisual o multivisual para que los estudiantes divulguen el trabajo realizado.

Habilidades y actitudes para el siglo XXI

Es importante que el docente resalte que esta metodología pretende que los alumnos desarrollen habilidades y actitudes del siglo XXI, que son transversales a todas las áreas del currículum. Esto permite que profesores y alumnos sean conscientes de que ellas van más allá de los conocimientos y habilidades disciplinares.

Recursos

Se tiene que describir los componentes, insumos de trabajo, bibliografía o elementos fundamentales para el proyecto.

Etapas

Hay que planificar el proyecto según fases de trabajo, considerando el tiempo destinado al mismo en la planificación anual.

Cronograma semanal

Es importante planificar el avance del proyecto clase a clase; en una sola se puede desarrollar más de una etapa, o una etapa puede durar más de una clase. Lo importante es que la planificación sea clara y ordenada para que profesor y alumnos trabajen de la manera más regular posible, considerando los avances u obstáculos que puedan encontrar en el desarrollo del proyecto.

Evaluación formativa y sumativa

En esta sección, el docente tiene que especificar con qué criterios se evaluará el proyecto y qué instrumentos se aplicará, tanto en la dimensión formativa como en la sumativa. Es importante recordar que la retroalimentación es un componente esencial del proyecto, por lo que profesor debe señalar cómo llevará a cabo dicho proceso.

Difusión final

Dependiendo del objetivo del proyecto, se sugiere que cuando lo terminen, los alumnos dediquen algún tiempo para difundirlo a la comunidad escolar.

Proyecto STEM: Selección natural

Entendiendo la evolución a través del juego

Resumen del Proyecto

El proyecto busca que los estudiantes sean capaces de corregir preconceptos erróneos sobre la selección natural y la teoría de la evolución, como visiones teleológicas, creacionistas, ideas acerca del desarrollo “progresivo” del ser humano, y pensar que la cooperación y el altruismo no se pueden por el mecanismo de selección natural. Para corregir los preconceptos errados, se diseñan actividades concretas tipo juego que les permitan cambiar sus preconcepciones de la biología evolucionaria para comenzar a dar explicaciones más científicas.

Primero, jugarán un juego de Selección Natural de un rasgo físico, el color, y luego otro de un rasgo conductual, la cooperación. Representarán los resultados de los juegos con gráficos y estadísticas que les permitirán aplicar habilidades transversales de ciencias y matemática. Finalmente, presentarán los resultados a la comunidad.

<p>Nombre del Proyecto</p> <p style="text-align: center;">SELECCIÓN NATURAL Entendiendo la evolución a través del juego</p>	
<p>Problema central</p> <p>¿En qué consiste realmente la selección natural dentro del proceso de la evolución de las especies? La evolución es un tema central en Biología; aunque ha ido ganando preponderancia en la enseñanza, todavía prevalecen muchas concepciones erradas y la enseñanza no logra solucionar esa deficiencia. Los sesgos esencialistas pueden distorsionar juicios sobre una amplia gama de fenómenos evolutivos, como los conceptos de variación, herencia, adaptación, domesticación, especialización y extinción. Los estudiantes, ya antes de entrar a la escuela, vienen con preconcepciones teleológicas y vitalistas, que los inducen a concebir una evolución lamarckiana, y les dificulta comprender los mecanismos ciegos de la selección natural.</p>	
<p>Propósito</p> <p>Se pretende que los alumnos cambien sus preconcepciones de biología sobre evolución para comenzar a dar explicaciones más científicas, usando selección natural en lugar de explicaciones teleológicas y creacionistas. Se espera que, por medio de este proyecto, comprendan y expliquen el mecanismo de selección natural, en el entendido de que es un sistema ciego y que el azar es central en su funcionamiento. También se busca que comprendan el rol de la herencia de rasgos (tanto físicos como conductuales), grafiquen patrones y desarrollen el pensamiento poblacional. Esto se evidencia con la construcción de explicaciones científicas que empleen correctamente el concepto de evolución.</p>	
<p>Objetivos de Aprendizaje de Habilidades</p> <p>CIENCIAS</p> <p>OA Habilidades</p> <p>OA a. Formular preguntas y problemas sobre tópicos científicos de interés, a partir de la observación de fenómenos y/o la exploración de diversas fuentes.</p> <p>OA d. Analizar las relaciones entre las partes de un sistema en fenómenos y problemas de interés, a partir de tablas, gráficos, diagramas y modelos.</p> <p>OA e. Construir, usar y comunicar argumentos científicos.</p>	<p>Preguntas</p> <ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo funciona la selección natural? • ¿Cómo podemos observar y explicar la teoría evolutiva de Darwin sin observar a los animales directamente? • ¿Se puede utilizar la estadística para comprender la selección natural?

OA f. Desarrollar y usar modelos basados en evidencia, para predecir y explicar mecanismos y fenómenos naturales.

MATEMÁTICA

OA Conocimiento y comprensión

OA 3. Modelar fenómenos o situaciones cotidianas del ámbito científico y del ámbito social, que requieran el cálculo de probabilidades y la aplicación de las distribuciones binomial y normal.

OA Habilidades

OA e. Construir modelos, realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

BIOLOGÍA DE LOS ECOSISTEMAS

OA Conocimiento y comprensión

OA 1. Explicar el estado de la biodiversidad actual a partir de teorías y evidencias científicas sobre el origen de la vida, la evolución y la intervención humana.

- ¿Hay factores colaborativos en la evolución de las especies, o la supervivencia y adaptación se dan sólo por factores individuales?

Tipo de Proyecto Interdisciplinario STEM

- Matemática
- Biología

Producto

Análisis estadístico del resultado de los juegos acerca de la selección natural tanto del rasgo color como el de cooperación.

Reporte audiovisual sobre los resultados estadísticos de los juegos y su relación con el concepto de selección natural.

Habilidades y actitudes para el siglo XXI

Pensamiento crítico

Trabajo colaborativo

Comunicación

Recursos

SELECCIÓN NATURAL

- Un pliego de papel color tierra de 3 x 1,5m
- Fichas de color blanco y color tierra de 5 x 5 cm (100 de cada color)
- Bolsas para guardar las fichas que indiquen: Generación I, II y III; si fueron capturadas o no.
- Hojas para confeccionar cuadros estadísticos y gráficos.

Cómic de explicación en <http://www.conectastem.cl/conecta/Comics/seleccion-natural/>

COOPERACIÓN

- 2 contenedores plásticos de 0,5 x 1.0 m, adaptados con una red y una ventana en la tapa.
- Adornos de Navidad tipo guiraldas esféricas de distintos tamaños.
- Ganchos elaborados con alambres de dos tipos: gancho simple y gancho doble, de unos 4 cm.
- Bolsas para guardar ganchos y adornos que indiquen Generación I, II y III para organismos muertos y sobrevivientes.

Cómic de explicación en <http://www.conectastem.cl/conecta/Comics/coopera/>

Etapas

- Fase 1: Comprensión del problema: ¿en qué consiste la selección natural? Conversar con los estudiantes sobre la evolución, explicando cómo el factor del azar influye en ella.
- Fase 2: Juego de selección natural
- Fase 3: Análisis estadístico de selección natural
- Fase 4: Comprensión del problema: la evolución, ¿es producto únicamente de la capacidad individual, o la cooperación y la organización con otros puede facilitar la sobrevivencia?
- Fase 5: Juego de cooperación
- Fase 6: Análisis estadístico de cooperación
- Fase 7: Presentación de resultados a la comunidad

Cronograma semanal

Primera clase (Fases 1, 2 y 3)

- Plantear el problema.
- Guiar a los estudiantes mediante preguntas y actividades de descubrimiento para construir conocimiento respecto de la selección natural, preguntándoles acerca de sus preconcepciones y explicando cómo el azar influye en la selección evolutiva.

Ejemplo: Extracto de la serie Cosmos (2017), capítulo 2. <https://www.youtube.com/watch?v=JlkXsG4Jfwg>

- Aplicar el juego de la selección natural.
- Elaborar informe y gráficos estadísticos.

Segunda clase (Fases 4, 5 y 6)

- Plantear el problema.
- Guiar a los estudiantes mediante preguntas y actividades de descubrimiento para construir conocimiento acerca de la cooperación entre los individuos de una especie.

Ejemplo: Revisar documental “Nuestro Planeta” (2019)

- Aplicar juego de la cooperación.
- Elaborar informe y gráficos estadísticos

Tercera clase (Fase 7)

- Presentar resultados aprendidos a la comunidad.
- Se propone analizar el problema del criadero de gallinas ponedoras de huevos y las dos opciones de selección artificial (gallina que pone más huevos de cada caja se reproduce más, todas las gallinas de la jaula que pone más huevos se reproducen más); que los estudiantes predigan cuál opción es mejor y, luego de conocer los resultados, intenten explicarlos.

Evaluación Formativa

Retroalimentación de cada fase del proceso.

Evaluación Sumativa

Informe de gráficos y estadísticas

Difusión Final

Demostración de las conclusiones frente a la comunidad.

Bibliografía

Araya, R., Bahamondes, M., Contador, G., Dartnell, P. y Aylwin, M. (2013) "Enseñanza de la selección natural con juego masivo por internet", en *Congreso de Pedagogía 2013*, La Habana, Cuba.

"Comic Coopera", Conecta Stem, <http://www.conectastem.cl/conecta/Comics/coopera/>

"Comic Selección Natural", Conecta Stem <http://www.conectastem.cl/conecta/Comics/seleccion-natural/>

Muir, W.M. (1995). Group selection for Adaptation to Multiple-Hen Cages: Selection Program and Direct Responses. En *Poultry Sciences* 75(4), p. 447-458

Bibliografía

- Araya, R. y Matus, C. (2008). *Estadística y probabilidades: Buscando un orden para el azar. Material del estudiante. Unidad estadística y probabilidades*. Santiago: Universidad de Santiago.
- Arias, J. M. y otros (1992). *Hoja de cálculo en la enseñanza de las matemáticas en secundaria*. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C., Burrill, G. F. y Reading, C. (Eds.). (2011). Teaching Statistics. En *School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study: the 18Th ICMI Study* (Vol. 14). New ICMI Study Series.
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. B. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Springer.
- Ben-Zvi, D. (2004). Reasoning about variability in comparing distributions. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 42-63.
- _____. (2011). Statistical reasoning learning environment. EM TEIA | *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2(2).
- Casella, G. y Berger, R. (1998). *Statistical Inference. Pacific Grove*. California: Thomson Learning.
- Castillo, I. y Guijarro, M. (2006). *Probabilidad y Estadística, Apuntes de Estadística*. Madrid: Pearson Educación.
- Del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49(1), 53-64.
- Díaz, J., Batanero, M. y Cañizares, M. (1987). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- Estrella, S. y Olfos, R. (2013). Estudio de clases para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística en Chile. En: A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas*. (pp. 167 – 192). Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela, 2013. ISBN: 978-980-00-2744-8.
- Fadel, Ch., Bialik, M. y Trilling, B. (2016). *Educación en cuatro dimensiones: las competencias que los estudiantes necesitan para su realización*. Santiago: Graphika.
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review*, 75(3), 372-396.
- _____. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, 31(3), 72-77.
- Glaymann, M. y Varga, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela*. Barcelona: Teide.

- Govinden, P. (1999). *Introducción a la estadística*. Bogotá: McGraw-Hill Interamericana.
- Griffin, P. (2014). *Assessment for Teaching*. Melbourne: Cambridge University Press.
- Instituto Nacional de Estadísticas. (2017). *Entrega final CENSO 2017*. Recuperado de <https://www.censo2017.cl/>
- Johnson, R. y Kubly, P. (2008). *Estadística elemental: Lo esencial*. Santa Fe, México: Cengage Learning.
- Larmer, J., Mergendoller, J. y Boss, S. (2015). *Setting the Standard for Project Based Learning: A Proven Approach to Rigorous Classroom Instruction*. Alexandria, VA.: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173.
- Moore, D. S. (2005). *Estadística aplicada básica*. Editorial Antoni Bosch.
- Moss, C. y Brookhart, S. (2009). *Advancing formative assessment in every classroom: a guide for instructional leaders*. Alexandria, VA.: Association for Supervision and Curriculum Development.
- OCDE (2015). *Estudios Económicos de la OCDE Chile*. Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos. Recuperado de <https://www.oecd.org/eco/surveys/Chile-2015-vision-general.pdf>
- Pfannkuch, M. y Ben-Zvi, D. (2011). Developing teachers' statistical thinking. En *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 323-333). Springer Netherlands.
- Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En Ben-Zvi, D. y Garfield, J. B. (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17-46). Netherlands: Springer.
- Pfannkuch, M., Wild, C. J. y Regan, M. (2014). Students' difficulties in practicing computer-supported statistical inference: Some hypothetical generalizations from a study. En *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen—Using Tools for Learning Mathematics and Statistics* (pp. 393-403). Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Saavedra, E. (2005). *Contenidos básicos de estadística y probabilidad*. Santiago: Universidad de Santiago.
- Shaughnessy, M., Chance, B.L. y Kranendonk, H. (2009). *Enfoque de las matemáticas para la educación media superior: razonamiento y construcción de significados*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Triola, M. (2004). *Probabilidad y estadística*. México: Pearson Educación.
- Vygotsky, L. (1978). Interaction between learning and development. En Gauvain y Cole (Eds.) *Readings on the Development of Children*. New York: Scientific American Books, pp.34 – 40.

Villa, J. (2016). *El rango percentil y las puntuaciones z*. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=OnG0oxzkaFE>

Wiggins, G. y McTighe, J. (2005). *Understanding by design*. Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.

World Bank (2019). *Proyecto de Capital Humano*. Recuperado de <https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.bancomundial.org/es/publication/human-capital>

_____. (2019). *Datos*. Recuperado de <https://datos.bancomundial.org/>

_____. (2011). *The understanding by design guide to creating high-quality units*. Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.

Anexos

Anexo 1: Rúbricas para la evaluación del proyecto

Rúbrica para el Trabajo Colaborativo

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

Desempeño individual	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p>1</p> <p>Se hace responsable de sí mismo</p>	<ul style="list-style-type: none"> No demuestra preparación, información y disposición para trabajar en equipo. No usa las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas de proyecto. No hace la mayoría de las tareas del proyecto o no las completa a tiempo. 	<ul style="list-style-type: none"> En general demuestra preparación, información y disposición para trabajar con el equipo. Usa las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas del proyecto, pero de manera consistente. Realiza algunas tareas pero necesita que se le recuerde al respecto. Completa la mayoría de las tareas a tiempo. A veces usa retroalimentación de los otros para mejorar su trabajo. 	<ul style="list-style-type: none"> Demuestra preparación, información y disposición para trabajar; estando bien informado acerca del tema del proyecto y cita y usa la evidencia para investigar y reflexionar acerca de ideas con el equipo. Usa sistemáticamente las herramientas tecnológicas acordadas con el equipo para comunicar y gestionar las tareas del proyecto. Realiza las tareas sin que se le tenga que recordar al respecto. Completa la totalidad de las tareas a tiempo. Usa la retroalimentación de los otros para mejorar su trabajo.
<p>2</p> <p>Ayuda al equipo</p>	<ul style="list-style-type: none"> No ayuda al equipo a resolver problemas; puede generar problemas. No hace preguntas de sondeo ni expresa ideas o elabora en respuesta a preguntas y discusiones. No da retroalimentación útil a los otros. No ofrece ayudar a los otros si estos lo necesitan. 	<ul style="list-style-type: none"> Coopera con el equipo, pero puede no ser activo en la ayuda para solucionar problemas. A veces expresa sus ideas claramente, hace preguntas de sondeo y elabora en respuesta a preguntas y discusiones. Da retroalimentación a otros, pero esto no es siempre útil. A veces ofrece ayudar a los otros si estos lo necesitan. 	<ul style="list-style-type: none"> Ayuda al equipo a resolver problemas y manejar los conflictos. Ayuda a la generación de discusiones efectivas al expresar sus ideas claramente, hacer preguntas de sondeo, asegurarse que todos sean escuchados y al responder de manera reflexiva ante nueva información y perspectivas. Da retroalimentación efectiva (específica, factible y apoyadora) a los otros para que puedan mejorar su trabajo. Ofrece ayuda a los otros si es que los necesitan.
<p>3</p> <p>Respeto a otros</p>	<ul style="list-style-type: none"> Es irrespetuoso o poco amable con sus compañeros de equipo (puede interrumpir, ignorar las ideas de los otros o herir sentimientos) No reconoce o respeta otras posturas. 	<ul style="list-style-type: none"> En general, es educado y amable con sus compañeros de equipo. En general, reconoce y respeta las posturas de los otros y al estar en desacuerdo, lo expresa de forma diplomática. 	<ul style="list-style-type: none"> Es educado y amable con sus compañeros de equipo. Reconoce y respeta las posturas de los otros y al estar en desacuerdo, lo expresa de forma diplomática.

Rúbrica para el Pensamiento Crítico

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

Oportunidad de pensamiento crítico en las fases del proyecto	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p>1</p> <p>Lanzamiento del proyecto.</p> <p>Analiza la pregunta clave e inicia la indagación.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Solo ve los aspectos superficiales de la pregunta clave o solo un punto de vista de la misma. 	<ul style="list-style-type: none"> Identifica algunos aspectos centrales de la pregunta clave, pero puede no ver sus complejidades ni considerar variados puntos de vista. Realiza preguntas complementarias acerca del tema o acerca de lo que la audiencia o usuarios del producto quieren o necesitan, pero no indaga lo suficiente en ello. 	<ul style="list-style-type: none"> Demuestra comprensión acerca de los aspectos centrales de la pregunta clave, identificando en detalle lo que se necesita saber para responderla y considerando varios posibles puntos de vista para responderla. Realiza preguntas complementarias que permiten enfocar o ampliar la indagación, si es que se necesita. Hace preguntas complementarias para lograr la comprensión acerca de lo que la audiencia o usuarios del producto quieren o necesitan.
<p>2</p> <p>Construcción de conocimiento, comprensión y habilidades.</p> <p>Recopilar y evaluar información.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Es incapaz de integrar la información para responder la pregunta clave; recopila muy poca o demasiada información y esta es irrelevante o viene de muy pocas fuentes. Acepta la información sin cuestionar su validez ni evaluar su calidad. 	<ul style="list-style-type: none"> Intenta integrar la información para responder la pregunta clave; pero puede ser muy poca o demasiada información y/o viene de muy pocas fuentes o de algunas irrelevantes. Comprende que la calidad de la información debe ser considerada pero no aplica este criterio de manera rigurosa. 	<ul style="list-style-type: none"> Integra suficiente información relevante para responder la pregunta clave. Esta información proviene de múltiples y variadas fuentes. Evalúa de manera rigurosa la calidad de la información (considera su utilidad, precisión y credibilidad; distingue los hechos de las opiniones; reconoce el sesgo).

Oportunidad de pensamiento crítico en las fases del proyecto	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p style="text-align: center;">3</p> <p>Desarrollo y revisión de ideas y productos.</p> <p>Uso de evidencia y sus normas de evaluación.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Acepta argumentos para la obtención de posibles respuestas a la pregunta clave sin cuestionar si su razonamiento es válido. • Usa la evidencia sin considerar cuán sólida esta es. • Confía en "su instinto" para evaluar y revisar las ideas, prototipos de productos o soluciones a los problemas (no usa las normas de evaluación). 	<ul style="list-style-type: none"> • Reconoce la importancia y necesidad de un razonamiento válido y evidencia sólida, pero no los evalúa de forma cuidadosa al formular respuestas a la pregunta clave. • Evalúa y revisa ideas, prototipos de producto, soluciones a los problemas, basándose en normas incompletas o inválidas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Evalúa argumentos para la obtención de posibles respuestas a la pregunta clave considerando si es que el razonamiento es válido y la evidencia es relevante y suficiente. • Justifica la elección de los criterios usados para evaluar las ideas, prototipos de productos o soluciones a los problemas. • Revisa los borradores, diseños y soluciones inadecuadas y explica por qué no se ajustan a las normas.
<p style="text-align: center;">4</p> <p>Presentación de productos y la respuesta a la pregunta clave.</p> <p>Justifica sus elecciones, considera alternativas y sus implicancias.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Elige un medio para presentar sin considerar las ventajas y desventajas de usar otros medios para presentar un tema o idea en particular. • No es capaz de dar razones válidas o evidencia adecuada para defender elecciones con el fin de responder la pregunta central o crear productos. • No considera ni respuestas alternativas, ni distintos diseños del producto o diferentes puntos de vista para responder a la pregunta clave. • No es capaz de explicar el nuevo conocimiento ganado a través de la realización del proyecto. 	<ul style="list-style-type: none"> • Considera las ventajas y desventajas de usar diferentes medios para presentar un tema o idea en particular, pero no de forma rigurosa. • Explica opciones tomadas al responder la Pregunta clave o la creación de productos, pero algunas razones no son válidas o carecen de evidencia que las apoye. • Entiende que puede haber alternativas de respuestas a la pregunta de manejo o diseños para productos, pero no los considera cuidadosamente. • Puede explicar algunas cosas aprendidas en el proyecto, pero no está del todo claro acerca de nuevos conceptos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Evalúa las ventajas y desventajas de usar otros medios para presentar un tema o idea. • Justifica sus elecciones al responder la pregunta central o al crear productos dando razones válidas con evidencia que las respalde. • Reconoce las limitaciones de una sola respuesta a la pregunta central o al diseño del producto (cómo puede no ser completa, certera o perfecta) y considera perspectivas alternativas. • Puede explicar claramente los nuevos aprendizajes adquiridos en el proyecto y cómo estos pueden ser transferidos a otras situaciones o contextos.

Rúbrica de Pensamiento Creativo e Innovación

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

Oportunidad de creatividad e innovación en distintas fases del proyecto	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p>1</p> <p>Lanzamiento del proyecto.</p> <p>Definición del desafío creativo</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Puede solo "seguir instrucciones" sin comprender el propósito de la innovación o considerar las necesidades e intereses del público objetivo. 	<ul style="list-style-type: none"> • Comprende el propósito de la innovación, pero no considera a cabalidad las necesidades e intereses del público objetivo 	<ul style="list-style-type: none"> • Comprende el propósito de la innovación (¿quién necesita esto? ¿por qué?) • Desarrolla perspicacia acerca de las necesidades e intereses del público objetivo.
<p>2</p> <p>Construcción de conocimiento, comprensión y habilidades.</p> <p>Identifica fuentes de información</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Usa solo fuentes de información usuales (página web, libro, artículo). • No ofrece nuevas ideas durante las discusiones. 	<ul style="list-style-type: none"> • Encuentra una o dos fuentes de información que no son las usuales (página web, libro, artículo). • Ofrece nuevas ideas durante las discusiones, pero sus puntos de vista son poco variados. 	<ul style="list-style-type: none"> • Encuentra maneras o lugares inusuales para obtener nueva información (adultos expertos, miembros de la comunidad, empresas, organizaciones, literatura), además de las fuentes usuales (página web, libro, artículo). • Promueve puntos de vista divergentes y creativos durante las discusiones.
<p>3</p> <p>Desarrollo y revisión de ideas y productos.</p> <p>Generación y selección de ideas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Permanece dentro de los parámetros ya existentes; no usa técnicas para la generación de ideas para el desarrollo de nuevas ideas para la creación de productos. • Selecciona una idea sin evaluar su calidad. • No formula nuevas preguntas ni elabora la idea seleccionada. • No considera ni usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto. 	<ul style="list-style-type: none"> • Desarrolla algunas ideas originales para los productos, utilizando una o dos veces las técnicas de generación de ideas. • Evalúa las ideas antes de seleccionar una, pero no de manera rigurosa. • Formula una o dos preguntas nuevas, pero puede hacer solo pequeñas modificaciones a la idea seleccionada. • Demuestra algo de imaginación al dar forma a las ideas para la elaboración de un producto, pero permanece dentro de límites convencionales. • Considera y usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto, pero no busca esta retroalimentación. 	<ul style="list-style-type: none"> • Usa técnicas para la generación de ideas para el desarrollo de nuevas ideas para la creación de productos. • Evalúa cuidadosamente la calidad de las ideas y selecciona la mejor para darle forma a un producto. • Formula preguntas nuevas y toma distintas perspectivas para elaborar y mejorar la idea seleccionada. • Usa el ingenio y la imaginación y se sale de los límites convencionales al dar forma a las ideas para la elaboración de un producto. • Busca y usa la retroalimentación y la crítica para revisar el producto y así cumplir de una mejor manera con las necesidades del público objetivo.

Oportunidad de creatividad e innovación en distintas fases del proyecto	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p style="text-align: center;">4</p> <p style="text-align: center;">Presentación de productos y respuestas a las preguntas centrales.</p> <p style="text-align: center;">Presentación del trabajo a los usuarios o público objetivo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Presenta ideas y productos de forma convencional (presentaciones ppt, cargadas de texto, recitación de notas, falta de elementos de interacción con la audiencia) 	<ul style="list-style-type: none"> • Añade algunos detalles que poseen atractivo visual a los medios utilizados en la presentación. • Intenta incluir elementos en la presentación que la harán más animada y atractiva. 	<ul style="list-style-type: none"> • Crea medios para una presentación atractiva visualmente, evitando las formas convencionales (presentaciones ppt cargadas de texto, recitación de notas, falta de elementos de interacción con la audiencia). • Incluye elementos en la presentación que son especialmente vivaces, llamativos o poderosos y acordes al público objetivo.
<p style="text-align: center;">5</p> <p style="text-align: center;">Originalidad</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Usa modelos, ideas o direccionamientos existentes; no es original o único. • Sigue reglas y convenciones; usa materiales e ideas de maneras típicas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Tiene algunas ideas novedosas o considera mejoras, pero algunas de estas ideas son predecibles o convencionales. • Puede tentativamente tratar de desmarcarse de las reglas y convenciones, o encontrar nuevos usos para materiales e ideas comunes. 	<ul style="list-style-type: none"> • Es novedoso, único y sorprendente; muestra un toque personal. • Puede romper las reglas y convenciones de manera exitosa o usar materiales e ideas comunes de formas nuevas, inteligentes y sorprendidas.
<p style="text-align: center;">6</p> <p style="text-align: center;">Valor</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No es útil o valioso para el público objetivo/usuario. • No funcionaría en el mundo real porque es poco práctico o inviable. 	<ul style="list-style-type: none"> • Es útil y valioso en cierta medida; puede no resolver ciertos aspectos del problema o ajustarse exactamente a la necesidad previamente identificada. • No queda claro si es que el producto sería práctico o viable. 	<ul style="list-style-type: none"> • El producto se percibe como útil y valioso, resuelve el problema ya definido o la necesidad previamente identificada. • Es práctico y viable.
<p style="text-align: center;">7</p> <p style="text-align: center;">Estilo</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Es seguro, común y corriente y, de hecho, es un estilo convencional. • Contiene tres o más elementos que nos son coherentes entre sí, dificultando su comprensión. 	<ul style="list-style-type: none"> • Tiene algunos toques interesantes, pero carece de un estilo distintivo. • Tiene uno o dos elementos que pueden ser excesivos o no coherentes entre sí. 	<ul style="list-style-type: none"> • Está bien diseñado, es llamativo, tiene un estilo distintivo pero adecuado al propósito. • Combina diferentes elementos logrando un todo coherente.

Nota: El término "producto" se usa en esta rúbrica como un término que abarca el resultado del proceso de innovación durante un Proyecto. Un producto puede ser un objeto construido, una propuesta, presentación, solución a un problema, servicio, sistema, obra artística o literaria, un invento, un evento, una mejora a un producto existente, etc.

Rúbrica de Diseño del Proyecto

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

	No presenta las características del Proyecto efectivo	Necesita más desarrollo	Incluye características del proyecto efectivo
<p>1</p> <p>Metas de aprendizaje del estudiante: conocimiento esencial, comprensión y habilidades para alcanzar el éxito</p>	<ul style="list-style-type: none"> Las metas de aprendizaje del estudiante no son claras ni específicas: el proyecto no está enfocado en los estándares. El proyecto no abarca, evalúa o demuestra el desarrollo de habilidades para el éxito. 	<ul style="list-style-type: none"> El proyecto se enfoca en los estándares derivados del conocimiento y de la comprensión, pero puede referirse a muy pocas o demasiadas metas o metas sin mucha importancia. Las habilidades para el éxito están presentes, pero pueden ser demasiadas para ser enseñadas y evaluadas de manera adecuada. 	<ul style="list-style-type: none"> El proyecto se enfoca en la enseñanza de habilidades y conocimiento importante enfocado en los estudiantes. Estos conocimientos se ajustan a los estándares y representan conocimientos centrales de las asignaturas. Las habilidades para el éxito se abordan de manera explícita para ser enseñadas y evaluadas, como los son el pensamiento creativo, la colaboración, la creatividad y la gestión del proyecto.
<p>2</p> <p>Problema o pregunta desafiante</p>	<ul style="list-style-type: none"> El proyecto no se enfoca en un problema o pregunta central (es más parecido a una unidad con varias tareas); o el problema o pregunta es muy fácil de resolver o de responder para que la existencia del proyecto se justifique. El problema o pregunta inicial no gira en torno a una pregunta que sea esencial para el proyecto o presenta graves fallas como, por ejemplo: <ul style="list-style-type: none"> >Tiene una sola y/o simple respuesta. >No es motivante para los estudiantes (suena demasiado compleja o académica, como si viniera de un libro y, por ende, es atractiva solo para el profesor). 	<ul style="list-style-type: none"> El proyecto se enfoca en un problema o pregunta central, pero el nivel de desafío puede ser inapropiado para los estudiantes a quienes va dirigido. La pregunta inicial para el proyecto se relaciona con el mismo, pero no captura su problema o pregunta central (puede ser más como una temática más amplia). La pregunta inicial cumple con algunos de los criterios presentes en la columna de "incluye las características" pero carece de otros. 	<ul style="list-style-type: none"> El proyecto se enfoca en un problema o pregunta central con un desafío apropiado. El proyecto se enmarca en una pregunta inicial que es: <ul style="list-style-type: none"> >Abierta: hay más de una respuesta correcta. >Comprensible e inspiradora para los estudiantes. >Alineada con las metas de aprendizaje. Para responder esta pregunta los estudiantes deberán obtener las habilidades, conocimiento y comprensión adecuados.
<p>3</p> <p>Indagación constante</p>	<ul style="list-style-type: none"> El proyecto es más bien una actividad de hacer o construir cosas que un proceso extendido de indagación. No existe un proceso para que los estudiantes generen preguntas que guíen la indagación. 	<ul style="list-style-type: none"> La indagación es limitada (puede ser breve y ocurrir solo una o dos veces en el proyecto; la búsqueda de información es la tarea principal; no existen preguntas realmente profundas). Los estudiantes generan preguntas, pero mientras algunas pueden ser cubiertas, otras no son usadas para guiar la indagación y, por ende, no afectan el camino que toma el proyecto. 	<ul style="list-style-type: none"> La indagación es sostenida a lo largo del tiempo y es rigurosa académicamente (los estudiantes hacen preguntas, buscan e interpretan datos, desarrollan y evalúan soluciones o construyen evidencia para obtener respuestas y generar nuevas preguntas). A lo largo del proyecto, la indagación está conducida por preguntas generadas por parte de los estudiantes que son fundamentales para el desarrollo del proyecto.

	No presenta las características del Proyecto efectivo	Necesita más desarrollo	Incluye características del proyecto efectivo
<p>4</p> <p>Autenticidad</p>	<ul style="list-style-type: none"> El proyecto se asemeja a un trabajo en clases tradicional; carece de tareas, herramientas y contexto del mundo real. No genera un impacto real en el mundo ni habla de los intereses personales de los estudiantes. 	<ul style="list-style-type: none"> El proyecto presenta algunas características auténticas, pero estas pueden ser limitadas o ser lejanas a las necesidades del contexto. 	<ul style="list-style-type: none"> El proyecto presenta un contexto auténtico y tareas y herramientas del mundo real; cumple estándares de calidad, genera un impacto en el mundo o habla sobre las preocupaciones, intereses o identidades personales de los estudiantes.
<p>5</p> <p>Voz y elección del estudiante</p>	<ul style="list-style-type: none"> No se les da oportunidad a los estudiantes para que expresen su voz y tomen decisiones que afecten el contenido o proceso del proyecto; el proyecto está dirigido por el docente. O bien, se espera que los estudiantes trabajen de manera demasiado independiente sin una guía adecuada por parte del docente y/o que trabajen de esta manera antes de que sean capaces de hacerlo. 	<ul style="list-style-type: none"> Se les dan pocas oportunidades a los estudiantes para que expresen su voz y tomen decisiones de mediana importancia (decidir cómo dividir tareas dentro del grupo o qué sitio web usar para investigar). Los estudiantes trabajan, en cierta medida de manera independiente del docente, pero podrían hacer más por sí solos. 	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes tienen oportunidades para expresar su voz y tomar decisiones acerca de los temas importantes (temas a investigar, preguntas, textos y recursos usados, gente con quien trabajar, productos a ser creados, uso del tiempo, organización de las tareas). Los estudiantes tienen oportunidades para tomar responsabilidades significativas y trabajar lo más independientemente del profesor como sea apropiado hacerlo, pero de manera guiada.
<p>6</p> <p>Reflexión</p>	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes y el docente no participan en conjunto de la reflexión acerca de qué y cómo los estudiantes aprenden acerca del diseño del proyecto y su gestión. 	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes y el docente participan en conjunto de algún tipo de reflexión acerca del proyecto y luego de la culminación del mismo, pero no de forma regular o en profundidad. 	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes y el docente participan en conjunto de una reflexión profunda y comprensiva tanto durante el proyecto como después de su culminación. Reflexionan también acerca de cómo aprenden los estudiantes, el diseño del proyecto y su gestión.
<p>7</p> <p>Crítica y revisión</p>	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes obtienen retroalimentación limitada o irregular acerca de sus productos y el trabajo en progreso y esta retroalimentación es solo por parte de él, no de los pares. No se requiere su utilización o los estudiantes no saben cómo utilizarla para revisar y mejorar su trabajo. 	<ul style="list-style-type: none"> Se provee a los estudiantes de oportunidades para dar y recibir retroalimentación acerca de la calidad de los productos y del trabajo en progreso, pero este espacio para la retroalimentación puede carecer de estructura o solo existir una vez. Los estudiantes leen o reciben oralmente la retroalimentación acerca de su trabajo, pero no la usan para revisar y mejorar su trabajo. 	<ul style="list-style-type: none"> Se provee regular y estructuradamente a los estudiantes de oportunidades para dar y recibir retroalimentación acerca de la calidad de los productos y del trabajo en progreso por parte de los pares, los docentes y de otros fuera de la clase, si la ocasión lo amerita. Los estudiantes usan la retroalimentación acerca de su trabajo para revisarlo y mejorarlo.
<p>8</p> <p>Producto</p>	<ul style="list-style-type: none"> Los estudiantes no hacen de su producto algo público que se presente a una audiencia o que se ofrezca a la gente más allá de la clase. 	<ul style="list-style-type: none"> El trabajo de los estudiantes se hace público solo para los compañeros y el docente. Los estudiantes presentan productos pero no se les pide que expliquen cómo trabajaron ni qué aprendieron. 	<ul style="list-style-type: none"> El trabajo de los estudiantes se hace público al presentar, mostrar u ofrecerlo a la gente más allá de la clase. Se les pregunta a los estudiantes que expliquen las razones que justifican sus elecciones, su proceso de indagación, cómo trabajaron, qué aprendieron etc.

Rúbrica de Presentación del Trabajo

El proyecto tiene uno o más de los siguientes problemas en cada área

El proyecto incluye algunas características del proyecto efectivo, pero presenta algunas debilidades

El proyecto tiene las siguientes fortalezas

	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p>1</p> <p>Explicación de las ideas e información</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No presenta información, argumentos, ideas o hallazgos de forma concisa y lógica; el argumento no contiene evidencia que lo valide; la audiencia no puede seguir la línea de razonamiento. • La selección de información, desarrollo de ideas y el estilo son inapropiados para el propósito, tarea y audiencia (puede ser demasiada o muy poca información o un enfoque erróneo). • No se refiere a perspectivas o puntos de vista alternativos u opuestos. 	<ul style="list-style-type: none"> • Presenta información, argumentos, hallazgos y evidencia de una manera que no siempre es clara, concisa y lógica; la línea de razonamiento es a veces difícil de seguir por parte de la audiencia. • Intenta seleccionar información, desarrollar ideas y usar un estilo apropiados para el propósito, tarea y audiencia, que no son por completo exitosos. • Intenta referirse a perspectivas alternativas u opuestas, pero no de forma completa o clara. 	<ul style="list-style-type: none"> • Presenta información, argumentos, hallazgos y evidencia en forma clara, concisa y lógica; la línea de razonamiento se puede seguir fácilmente por parte de la audiencia. • Selecciona información, desarrolla ideas y usa un estilo apropiado al propósito, la tarea y la audiencia. • Abarca perspectivas alternativas u opuestas de manera clara y acabada.
<p>2</p> <p>Organización</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No cumple los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación. • No incluye una introducción y/o conclusión. • Usa el tiempo de manera poco adecuada; la totalidad de la presentación o parte de ella es muy corta o muy larga. 	<ul style="list-style-type: none"> • Cumple la mayoría de los requerimientos respecto de los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación. • Una introducción y conclusión, pero no son claras ni interesantes. • Generalmente organiza bien el tiempo, pero puede usar demasiado o muy poco tiempo en un tema, material de apoyo o idea. 	<ul style="list-style-type: none"> • Cumple todos los requerimientos con respecto a lo que debe ser incluido en la presentación. • Incluye una introducción y conclusión que son claras e interesantes. • Organiza bien el tiempo y no hay ninguna parte de la presentación que sea o muy larga o muy corta.
<p>3</p> <p>Mirada y lenguaje corporal</p>	<ul style="list-style-type: none"> • No mira a la audiencia, lee las notas o láminas. • No usa gestos o movimientos. • Carece de pose y confianza (mueve los dedos, se agacha, se ve nervioso). • Usa ropa inapropiada para la ocasión. 	<ul style="list-style-type: none"> • Mantiene contacto visual con poca frecuencia. Lee las notas o diapositivas la mayor parte del tiempo. • Utiliza algunos gestos o movimientos que no parecen naturales. • Presenta una actitud que demuestra confianza y adecuación a la situación. Solo se observa un poco de inquietud y movimiento nervioso. • Intenta usar una presentación personal adecuada para la ocasión. 	<ul style="list-style-type: none"> • Mantiene contacto visual con la audiencia la mayor parte del tiempo; solo en algunas ocasiones mira las notas o diapositivas. • Utiliza gestos y movimientos naturales. • Presenta una actitud que demuestra confianza y adecuación a la situación. • Posee una presentación personal acorde a la ocasión.

	Bajo el estándar	Acercándose al estándar	Cumple el estándar
<p>4</p> <p>Voz</p>	<ul style="list-style-type: none"> No pronuncia bien o habla demasiado bajo que dificulta la comprensión; frecuentemente usa muletillas (uuh, mmm, entonces, y, como, etc.) no adapta el discurso al contexto y la tarea. 	<ul style="list-style-type: none"> La mayor parte del tiempo habla de manera clara; utiliza una voz lo suficientemente fuerte para que la audiencia pueda escuchar la mayor parte del tiempo, pero puede hablar ocasionalmente de forma monótona. Usa muletillas. Intenta adaptar el discurso al contexto o tarea, pero no es consistente o no tiene éxito en su intento. 	<ul style="list-style-type: none"> Habla de manera clara y a un ritmo adecuado; ni muy rápido ni muy lento. Habla lo suficientemente fuerte para que todos puedan escuchar; cambia el tono y el ritmo para mantener el interés. Rara vez usa muletillas Adapta el discurso al contexto y la tarea. Domina el registro formal cuando su uso es necesario.
<p>5</p> <p>Elementos de ayuda para la presentación</p>	<ul style="list-style-type: none"> No usa elementos de audio, visuales o de medios. Usa solo uno o pocos elementos visuales, de audio o de medios pero estos no añaden valor a la presentación y pueden incluso distraer. 	<ul style="list-style-type: none"> Usa elementos de audio, visuales o de medios, pero estos pueden a veces distraer o no añadir valor a la presentación. 	<ul style="list-style-type: none"> Usa elementos de audio, visuales o de medios bien elaborados para fortalecer la comprensión de los hallazgos, el razonamiento y la evidencia y añadir interés. Incorpora de forma adecuada y natural a la presentación los elementos visuales, de audio o de medios.
<p>6</p> <p>Respuesta a las preguntas de la audiencia</p>	<ul style="list-style-type: none"> No responde a las preguntas por parte de la audiencia (se sale del tema o no comprende las preguntas y no busca explicación o clarificación de las mismas) 	<ul style="list-style-type: none"> Responde algunas preguntas de la audiencia, pero no siempre de forma clara o completa. 	<ul style="list-style-type: none"> Responde las preguntas de la audiencia en forma clara y completa. Busca clarificaciones a las preguntas, admite cuando no sabe o explica cómo encontrar la respuesta cuando es incapaz de dar una respuesta.
<p>7</p> <p>Participante en presentaciones de equipo</p>	<ul style="list-style-type: none"> No todos los miembros del grupo participan; solo uno o dos de ellos hablan. 	<ul style="list-style-type: none"> Todos los miembros del equipo participan, pero no en la misma proporción. 	<ul style="list-style-type: none"> Todos los miembros del equipo participan por aproximadamente el mismo período de tiempo. Todos los miembros del equipo son capaces de responder las preguntas sobre el tema como un todo y no solo acerca de su parte de la presentación.

Anexo 2. Tabla de distribución normal estándar

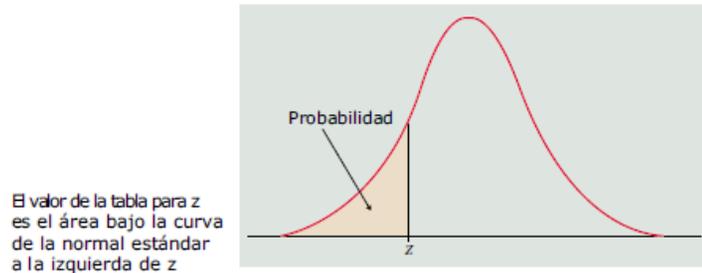


TABLA A: Probabilidades de la normal estándar

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

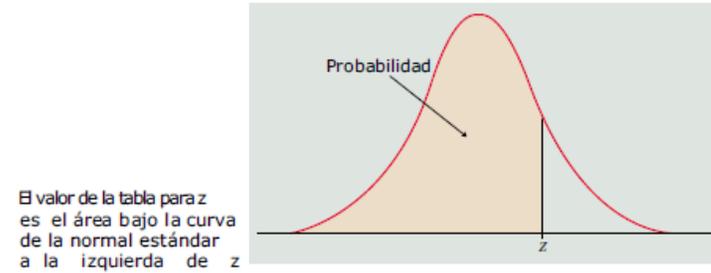


TABLA A: Probabilidades de la normal estándar (cont.)

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

El valor de la tabla para p y C es el valor crítico t^* que deja una probabilidad p a la derecha y una probabilidad C entre $-t^*$ y t^*

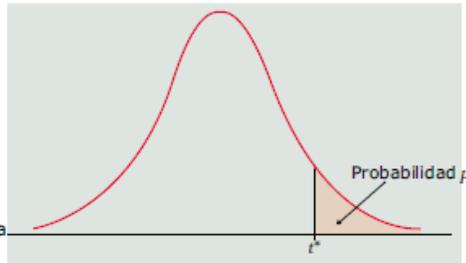
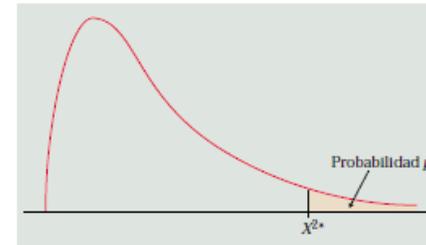


TABLA B Valores críticos de la distribución t de Student

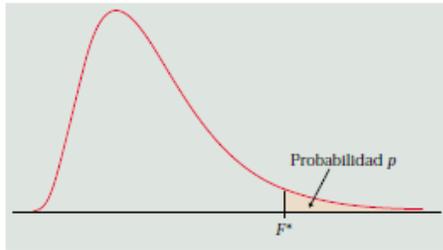
gl	Probabilidad de la cola p											
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	15.89	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
z^*	0.674	0.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291
	50%	60%	70%	80%	90%	95%	96%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
	Nivel de confianza C											



El valor de la tabla para p es el valor crítico χ^2_* que deja la probabilidad p a la derecha

TABLA C: Valores críticos de la distribución χ^2 de Pearson

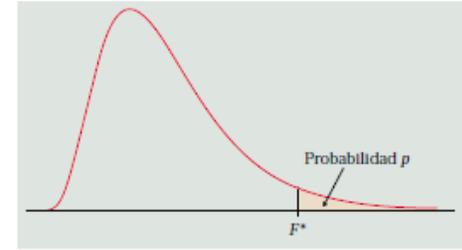
gl	Probabilidad de la cola p											
	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	1.32	1.64	2.07	2.71	3.84	5.02	5.41	6.63	7.88	9.14	10.83	12.12
2	2.77	3.22	3.79	4.61	5.99	7.38	7.82	9.21	10.60	11.98	13.82	15.20
3	4.11	4.64	5.32	6.25	7.81	9.35	9.84	11.34	12.84	14.16	16.27	17.73
4	5.39	5.99	6.74	7.78	9.49	11.14	11.67	13.28	14.86	16.42	18.47	20.00
5	6.63	7.29	8.12	9.24	11.07	12.83	13.39	15.09	16.75	18.39	20.51	22.11
6	7.84	8.56	9.45	10.64	12.59	14.45	15.03	16.81	18.55	20.25	22.46	24.10
7	9.04	9.80	10.75	12.02	14.07	16.01	16.62	18.48	20.28	22.04	24.32	26.02
8	10.22	11.03	12.03	13.36	15.51	17.53	18.17	20.09	21.95	23.77	26.12	27.87
9	11.39	12.24	13.29	14.68	16.92	19.02	19.68	21.67	23.59	25.46	27.88	29.67
10	12.55	13.44	14.53	15.99	18.31	20.48	21.16	23.21	25.19	27.11	29.59	31.42
11	13.70	14.63	15.77	17.28	19.68	21.92	22.62	24.72	26.76	28.73	31.26	33.14
12	14.85	15.81	16.99	18.55	21.03	23.34	24.05	26.22	28.30	30.32	32.91	34.82
13	15.98	16.98	18.20	19.81	22.36	24.74	25.47	27.69	29.82	31.88	34.53	36.48
14	17.12	18.15	19.41	21.06	23.68	26.12	26.87	29.14	31.32	33.43	36.12	38.11
15	18.25	19.31	20.60	22.31	25.00	27.49	28.26	30.58	32.80	34.95	37.70	39.72
16	19.37	20.47	21.79	23.54	26.30	28.85	29.63	32.00	34.27	36.46	39.25	41.31
17	20.49	21.61	22.98	24.77	27.59	30.19	31.00	33.41	35.72	37.95	40.79	42.88
18	21.60	22.76	24.16	25.99	28.87	31.53	32.35	34.81	37.16	39.42	42.31	44.43
19	22.72	23.90	25.33	27.20	30.14	32.85	33.69	36.19	38.58	40.88	43.82	45.97
20	23.83	25.04	26.50	28.41	31.41	34.17	35.02	37.57	40.00	42.34	45.31	47.50
21	24.93	26.17	27.66	29.62	32.67	35.48	36.34	38.93	41.40	43.78	46.80	49.01
22	26.04	27.30	28.82	30.81	33.92	36.78	37.66	40.29	42.80	45.20	48.27	50.51
23	27.14	28.43	29.98	32.01	35.17	38.08	38.97	41.64	44.18	46.62	49.73	52.00
24	28.24	29.55	31.13	33.20	36.42	39.36	40.27	42.98	45.56	48.03	51.18	53.48
25	29.34	30.68	32.28	34.38	37.65	40.65	41.57	44.31	46.93	49.44	52.62	54.95
26	30.43	31.79	33.43	35.56	38.89	41.92	42.86	45.64	48.29	50.83	54.05	56.41
27	31.53	32.91	34.57	36.74	40.11	43.19	44.14	46.96	49.64	52.22	55.48	57.86
28	32.62	34.03	35.71	37.92	41.34	44.46	45.42	48.28	50.99	53.59	56.89	59.30
29	33.71	35.14	36.85	39.09	42.56	45.72	46.69	49.59	52.34	54.97	58.30	60.73
30	34.80	36.25	37.99	40.26	43.77	46.98	47.96	50.89	53.67	56.33	59.70	62.16
40	45.62	47.27	49.24	51.81	55.76	59.34	60.44	63.69	66.77	69.70	73.40	76.09
50	56.33	58.16	60.35	63.17	67.50	71.42	72.61	76.15	79.49	82.66	86.66	89.56
60	66.98	68.97	71.34	74.40	79.08	83.30	84.58	88.38	91.95	95.34	99.61	102.7
80	88.13	90.41	93.11	96.58	101.9	106.6	108.1	112.3	116.3	120.1	124.8	128.3
100	109.1	111.7	114.7	118.5	124.3	129.6	131.1	135.8	140.2	144.3	149.4	153.2



El valor de la tabla para p es el valor crítico F^* que deja la probabilidad p a la derecha

TABLA D Valores críticos de la distribución F de Fisher

		Grados de libertad en el numerador								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Grados de libertad en el denominador	p									
1	.100	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
	.050	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
	.025	647.79	799.50	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28
	.010	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5859.0	5928.4	5981.1	6022.5
	.001	405284	500000	540379	562500	576405	585937	592873	598144	602284
2	.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
	.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
	.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39
	.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
	.001	998.50	999.00	999.17	999.25	999.30	999.33	999.36	999.37	999.39
3	.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
	.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
	.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
	.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
	.001	167.03	148.50	141.11	137.10	134.58	132.85	131.58	130.62	129.86
4	.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
	.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
	.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
	.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
	.001	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47
5	.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
	.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
	.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
	.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
	.001	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.83	28.16	27.65	27.24
6	.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
	.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
	.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
	.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
	.001	35.51	27.00	23.70	21.92	20.80	20.03	19.46	19.03	18.69
7	.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
	.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
	.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
	.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
	.001	29.25	21.69	18.77	17.20	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33



El valor de la tabla para p es el valor crítico F^* que deja la probabilidad p a la derecha

TABLA D Valores críticos de la distribución F de Fisher (cont.)

		Grados de libertad del numerador										
		10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
1	.100	60.19	60.71	61.22	61.74	62.05	62.26	62.53	62.69	62.79	63.06	63.30
	.050	241.88	243.91	245.95	248.01	249.26	250.10	251.14	251.77	252.20	253.25	254.19
	.025	968.63	976.71	984.87	993.10	998.08	1001.4	1005.6	1008.1	1009.8	1014.0	1017.7
	.010	6055.8	6106.3	6157.3	6208.7	6239.8	6260.6	6286.8	6302.5	6313.0	6339.4	6362.7
	.001	605621	610668	615764	620908	624017	626099	628712	630285	631337	633972	636301
2	.100	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.49
	.050	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49	19.49
	.025	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.48	39.49	39.50
	.010	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.46	99.47	99.47	99.48	99.48	99.50
	.001	999.40	999.42	999.43	999.45	999.46	999.47	999.47	999.48	999.48	999.49	999.50
3	.100	5.23	5.22	5.20	5.18	5.17	5.17	5.16	5.16	5.15	5.14	5.13
	.050	8.79	8.74	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.53
	.025	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	14.01	13.99	13.95	13.91
	.010	27.23	27.05	26.87	26.69	26.58	26.50	26.41	26.35	26.32	26.22	26.14
	.001	129.25	128.32	127.37	126.42	125.84	125.45	124.96	124.66	124.47	123.97	123.53
4	.100	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.76
	.050	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.63
	.025	8.84	8.75	8.66	8.56	8.50	8.46	8.41	8.38	8.36	8.31	8.26
	.010	14.55	14.37	14.20	14.02	13.91	13.84	13.75	13.69	13.65	13.56	13.47
	.001	48.05	47.41	46.76	46.10	45.70	45.43	45.09	44.88	44.75	44.40	44.09
5	.100	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.16	3.15	3.14	3.12
	.050	4.74	4.68	4.62	4.56	4.52	4.50	4.46	4.44	4.43	4.40	4.37
	.025	6.62	6.52	6.43	6.33	6.27	6.23	6.18	6.14	6.12	6.07	6.02
	.010	10.05	9.89	9.72	9.55	9.45	9.38	9.29	9.24	9.20	9.11	9.03
	.001	26.92	26.42	25.91	25.39	25.08	24.87	24.60	24.44	24.33	24.06	23.82
6	.100	2.94	2.90	2.87	2.84	2.81	2.80	2.78	2.77	2.76	2.74	2.72
	.050	4.06	4.00	3.94	3.87	3.83	3.81	3.77	3.75	3.74	3.70	3.67
	.025	5.46	5.37	5.27	5.17	5.11	5.07	5.01	4.98	4.96	4.90	4.86
	.010	7.87	7.72	7.56	7.40	7.30	7.23	7.14	7.09	7.06	6.97	6.89
	.001	18.41	17.99	17.56	17.12	16.85	16.67	16.44	16.31	16.21	15.98	15.77
7	.100	2.70	2.67	2.63	2.59	2.57	2.56	2.54	2.52	2.51	2.49	2.47
	.050	3.64	3.57	3.51	3.44	3.40	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.23
	.025	4.76	4.67	4.57	4.47	4.40	4.36	4.31	4.28	4.25	4.20	4.15
	.010	6.62	6.47	6.31	6.16	6.06	5.99	5.91	5.86	5.82	5.74	5.66
	.001	14.08	13.71	13.32	12.93	12.69	12.53	12.33	12.20	12.12	11.91	11.72

TABLA D Valores críticos de la distribución F de Fisher (cont.)

p	Grados de libertad en el numerador									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
8	.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
	.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
	.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
	.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
	.001	25.41	18.49	15.83	14.39	13.48	12.86	12.40	12.05	11.77
9	.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
	.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
	.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
	.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
	.001	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11
10	.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
	.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.18
	.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
	.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
	.001	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.93	9.52	9.20	8.96
11	.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
	.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
	.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
	.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
	.001	19.69	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12
12	.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
	.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
	.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
	.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
	.001	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48
13	.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
	.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
	.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31
	.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
	.001	17.82	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98
14	.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
	.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
	.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21
	.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
	.001	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.44	7.08	6.80	6.58
15	.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
	.050	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
	.025	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
	.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
	.001	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26
16	.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
	.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
	.025	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05
	.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
	.001	16.12	10.97	9.01	7.94	7.27	6.80	6.46	6.19	5.98
17	.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
	.050	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
	.025	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98
	.010	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
	.001	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75

TABLA D Valores críticos de la distribución F de Fisher (cont.)

Grados de libertad en el numerador										
10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.30
3.35	3.28	3.22	3.15	3.11	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.93
4.30	4.20	4.10	4.00	3.94	3.89	3.84	3.81	3.78	3.73	3.68
5.81	5.67	5.52	5.36	5.26	5.20	5.12	5.07	5.03	4.95	4.87
11.54	11.19	10.84	10.48	10.26	10.11	9.92	9.80	9.73	9.53	9.36
2.42	2.38	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.22	2.21	2.18	2.16
3.14	3.07	3.01	2.94	2.89	2.86	2.83	2.80	2.79	2.75	2.71
3.96	3.87	3.77	3.67	3.60	3.56	3.51	3.47	3.45	3.39	3.34
5.26	5.11	4.96	4.81	4.71	4.65	4.57	4.52	4.48	4.40	4.32
9.89	9.57	9.24	8.90	8.69	8.55	8.37	8.26	8.19	8.00	7.84
2.32	2.28	2.24	2.20	2.17	2.16	2.13	2.12	2.11	2.08	2.06
2.98	2.91	2.85	2.77	2.73	2.70	2.66	2.64	2.62	2.58	2.54
3.72	3.62	3.52	3.42	3.35	3.31	3.26	3.22	3.20	3.14	3.09
4.85	4.71	4.56	4.41	4.31	4.25	4.17	4.12	4.08	4.00	3.92
8.75	8.45	8.13	7.80	7.60	7.47	7.30	7.19	7.12	6.94	6.78
2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	1.98
2.85	2.79	2.72	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.49	2.45	2.41
3.53	3.43	3.33	3.23	3.16	3.12	3.06	3.03	3.00	2.94	2.89
4.54	4.40	4.25	4.10	4.01	3.94	3.86	3.81	3.78	3.69	3.61
7.92	7.63	7.32	7.01	6.81	6.68	6.52	6.42	6.35	6.18	6.02
2.19	2.15	2.10	2.06	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.93	1.91
2.75	2.69	2.62	2.54	2.50	2.47	2.43	2.40	2.38	2.34	2.30
3.37	3.28	3.18	3.07	3.01	2.96	2.91	2.87	2.85	2.79	2.73
4.30	4.16	4.01	3.86	3.76	3.70	3.62	3.57	3.54	3.45	3.37
7.29	7.00	6.71	6.40	6.22	6.09	5.93	5.83	5.76	5.59	5.44
2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.85
2.67	2.60	2.53	2.46	2.41	2.38	2.34	2.31	2.30	2.25	2.21
3.25	3.15	3.05	2.95	2.88	2.84	2.78	2.74	2.72	2.66	2.60
4.10	3.96	3.82	3.66	3.57	3.51	3.43	3.38	3.34	3.25	3.18
6.80	6.52	6.23	5.93	5.75	5.63	5.47	5.37	5.30	5.14	4.99
2.10	2.05	2.01	1.96	1.93	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.80
2.60	2.53	2.46	2.39	2.34	2.31	2.27	2.24	2.22	2.18	2.14
3.15	3.05	2.95	2.84	2.78	2.73	2.67	2.64	2.61	2.55	2.50
3.94	3.80	3.66	3.51	3.41	3.35	3.27	3.22	3.18	3.09	3.02
6.40	6.13	5.85	5.56	5.38	5.25	5.10	5.00	4.94	4.77	4.62
2.06	2.02	1.97	1.92	1.89	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.76
2.54	2.48	2.40	2.33	2.28	2.25	2.20	2.18	2.16	2.11	2.07
3.06	2.96	2.86	2.76	2.69	2.64	2.59	2.55	2.52	2.46	2.40
3.80	3.67	3.52	3.37	3.28	3.21	3.13	3.08	3.05	2.96	2.88
6.08	5.81	5.54	5.25	5.07	4.95	4.80	4.70	4.64	4.47	4.33
2.03	1.99	1.94	1.89	1.86	1.84	1.81	1.79	1.78	1.75	1.72
2.49	2.42	2.35	2.28	2.23	2.19	2.15	2.12	2.11	2.06	2.02
2.99	2.89	2.79	2.68	2.61	2.57	2.51	2.47	2.45	2.38	2.32
3.69	3.55	3.41	3.26	3.16	3.10	3.02	2.97	2.93	2.84	2.76
5.81	5.55	5.27	4.99	4.82	4.70	4.54	4.45	4.39	4.23	4.08
2.00	1.96	1.91	1.86	1.83	1.81	1.78	1.76	1.75	1.72	1.69
2.45	2.38	2.31	2.23	2.18	2.15	2.10	2.08	2.06	2.01	1.97
2.92	2.82	2.72	2.62	2.55	2.50	2.44	2.41	2.38	2.32	2.26
3.59	3.46	3.31	3.16	3.07	3.00	2.92	2.87	2.83	2.75	2.66
5.58	5.32	5.05	4.78	4.60	4.48	4.33	4.24	4.18	4.02	3.87

TABLA D Valores críticos de la distribución F de Fisher (cont.)

		Grados de libertad en el numerador								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Grados de libertad en el denominador	p									
	18	.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04
.050		4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
.025		5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93
.010		8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
.001		15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56
19	.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
	.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
	.025	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88
	.010	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
	.001	15.08	10.16	8.28	7.27	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39
20	.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
	.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
	.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
	.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
	.001	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24
21	.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
	.050	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
	.025	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80
	.010	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
	.001	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11
22	.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
	.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.39	2.34
	.025	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76
	.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
	.001	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99
23	.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
	.050	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
	.025	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73
	.010	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
	.001	14.20	9.47	7.67	6.70	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89
24	.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
	.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
	.025	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
	.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
	.001	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80
25	.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
	.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
	.025	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68
	.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
	.001	13.88	9.22	7.45	6.49	5.89	5.46	5.15	4.91	4.71
26	.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
	.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
	.025	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65
	.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
	.001	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64
27	.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
	.050	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.30	2.25
	.025	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63
	.010	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
	.001	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57

TABLA D Valores críticos de la distribución F de Fisher (cont.)

		Grados de libertad en el numerador										
		10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
18	.100	1.98	1.93	1.89	1.84	1.80	1.78	1.75	1.74	1.72	1.69	1.66
	.050	2.41	2.34	2.27	2.19	2.14	2.11	2.06	2.04	2.02	1.97	1.92
	.025	2.87	2.77	2.67	2.56	2.49	2.44	2.38	2.35	2.32	2.26	2.20
	.010	3.51	3.37	3.23	3.08	2.98	2.92	2.84	2.78	2.75	2.66	2.58
	.001	5.39	5.13	4.87	4.59	4.42	4.30	4.15	4.06	4.00	3.84	3.69
19	.100	1.96	1.91	1.86	1.81	1.78	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.64
	.050	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.93	1.88
	.025	2.82	2.72	2.62	2.51	2.44	2.39	2.33	2.30	2.27	2.20	2.14
	.010	3.43	3.30	3.15	3.00	2.91	2.84	2.76	2.71	2.67	2.58	2.50
	.001	5.22	4.97	4.70	4.43	4.26	4.14	3.99	3.90	3.84	3.68	3.53
20	.100	1.94	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.69	1.68	1.64	1.61
	.050	2.35	2.28	2.20	2.12	2.07	2.04	1.99	1.97	1.95	1.90	1.85
	.025	2.77	2.68	2.57	2.46	2.40	2.35	2.29	2.25	2.22	2.16	2.09
	.010	3.37	3.23	3.09	2.94	2.84	2.78	2.69	2.64	2.61	2.52	2.43
	.001	5.08	4.82	4.56	4.29	4.12	4.00	3.86	3.77	3.70	3.54	3.40
21	.100	1.92	1.87	1.83	1.78	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.62	1.59
	.050	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.92	1.87	1.82
	.025	2.73	2.64	2.53	2.42	2.36	2.31	2.25	2.21	2.18	2.11	2.05
	.010	3.31	3.17	3.03	2.88	2.79	2.72	2.64	2.58	2.55	2.46	2.37
	.001	4.95	4.70	4.44	4.17	4.00	3.88	3.74	3.64	3.58	3.42	3.28
22	.100	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.60	1.57
	.050	2.30	2.23	2.15	2.07	2.02	1.98	1.94	1.91	1.89	1.84	1.79
	.025	2.70	2.60	2.50	2.39	2.32	2.27	2.21	2.17	2.14	2.08	2.01
	.010	3.26	3.12	2.98	2.83	2.73	2.67	2.58	2.53	2.50	2.40	2.32
	.001	4.83	4.58	4.33	4.06	3.89	3.78	3.63	3.54	3.48	3.32	3.17
23	.100	1.89	1.84	1.80	1.74	1.71	1.69	1.66	1.64	1.62	1.59	1.55
	.050	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.88	1.86	1.81	1.76
	.025	2.67	2.57	2.47	2.36	2.29	2.24	2.18	2.14	2.11	2.04	1.98
	.010	3.21	3.07	2.93	2.78	2.69	2.62	2.54	2.48	2.45	2.35	2.27
	.001	4.73	4.48	4.23	3.96	3.79	3.68	3.53	3.44	3.38	3.22	3.08
24	.100	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.57	1.54
	.050	2.25	2.18	2.11	2.03	1.97	1.94	1.89	1.86	1.84	1.79	1.74
	.025	2.64	2.54	2.44	2.33	2.26	2.21	2.15	2.11	2.08	2.01	1.94
	.010	3.17	3.03	2.89	2.74	2.64	2.58	2.49	2.44	2.40	2.31	2.22
	.001	4.64	4.39	4.14	3.87	3.71	3.59	3.45	3.36	3.29	3.14	2.99
25	.100	1.87	1.82	1.77	1.72	1.68	1.66	1.63	1.61	1.59	1.56	1.52
	.050	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.82	1.77	1.72
	.025	2.61	2.51	2.41	2.30	2.23	2.18	2.12	2.08	2.05	1.98	1.91
	.010	3.13	2.99	2.85	2.70	2.60	2.54	2.45	2.40	2.36	2.27	2.18
	.001	4.56	4.31	4.06	3.79	3.63	3.52	3.37	3.28	3.22	3.06	2.91
26	.100	1.86	1.81	1.76	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.58	1.54	1.51
	.050	2.22	2.15	2.07	1.99	1.94	1.90	1.85	1.82	1.80	1.75	1.70
	.025	2.59	2.49	2.39	2.28	2.21	2.16	2.09	2.05	2.03	1.95	1.89
	.010	3.09	2.96	2.81	2.66	2.57	2.50	2.42	2.36	2.33	2.23	2.14
	.001	4.48	4.24	3.99	3.72	3.56	3.44	3.30	3.21	3.15	2.99	2.84
27	.100	1.85	1.80	1.75	1.70	1.66	1.64	1.60	1.58	1.57	1.53	1.50
	.050	2.20	2.13	2.06	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.79	1.73	1.68
	.025	2.57	2.47	2.36	2.25	2.18	2.13	2.07	2.03	2.00	1.93	1.86
	.010	3.06	2.93	2.78	2.63	2.54	2.47	2.38	2.33	2.29	2.20	2.11
	.001	4.41	4.17	3.92	3.66	3.49	3.38	3.23	3.14	3.08	2.92	2.78

TABLA D Valores críticos de la distribución F de Fisher (cont.)

		Grados de libertad en el numerador								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Grados de libertad en el denominador	p									
	28	.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90
.050		4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
.025		5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61
.010		7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
29	.100	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.24	4.93	4.69	4.50
	.050	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
	.025	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
	.010	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59
30	.100	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
	.050	13.39	8.85	7.12	6.19	5.59	5.18	4.87	4.64	4.45
	.025	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
	.010	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	.100	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
	.050	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
	.025	13.29	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39
	.010	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
50	.100	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
	.050	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45
	.025	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
	.010	12.61	8.25	6.59	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02
60	.100	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76
	.050	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
	.025	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38
	.010	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
100	.100	12.22	7.96	6.34	5.46	4.90	4.51	4.22	4.00	3.82
	.050	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
	.025	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
	.010	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
200	.100	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
	.050	11.97	7.77	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.86	3.69
	.025	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69
	.010	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
1000	.100	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24
	.050	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
	.025	11.50	7.41	5.86	5.02	4.48	4.11	3.83	3.61	3.44
	.010	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66
1000	.100	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
	.050	5.10	3.76	3.18	2.85	2.63	2.47	2.35	2.26	2.18
	.025	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
	.010	11.15	7.15	5.63	4.81	4.29	3.92	3.65	3.43	3.26
1000	.100	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64
	.050	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
	.025	5.04	3.70	3.13	2.80	2.58	2.42	2.30	2.20	2.13
	.010	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
.001	10.89	6.96	5.46	4.65	4.14	3.78	3.51	3.30	3.13	

TABLA D Valores críticos de la distribución F de Fisher (cont.)

		Grados de libertad en el numerador										
		10	12	15	20	25	30	40	50	60	120	1000
28	.100	1.84	1.79	1.74	1.69	1.65	1.63	1.59	1.57	1.56	1.52	1.48
	.050	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.71	1.66
	.025	2.55	2.45	2.34	2.23	2.16	2.11	2.05	2.01	1.98	1.91	1.84
	.010	3.03	2.90	2.75	2.60	2.51	2.44	2.35	2.30	2.26	2.17	2.08
29	.100	4.35	4.11	3.86	3.60	3.43	3.32	3.18	3.09	3.02	2.86	2.72
	.050	1.83	1.78	1.73	1.68	1.64	1.62	1.58	1.56	1.55	1.51	1.47
	.025	2.18	2.10	2.03	1.94	1.89	1.85	1.81	1.77	1.75	1.70	1.65
	.010	2.53	2.43	2.32	2.21	2.14	2.09	2.03	1.99	1.96	1.89	1.82
30	.100	3.00	2.87	2.73	2.57	2.48	2.41	2.33	2.27	2.23	2.14	2.05
	.050	4.29	4.05	3.80	3.54	3.38	3.27	3.12	3.03	2.97	2.81	2.66
	.025	1.82	1.77	1.72	1.67	1.63	1.61	1.57	1.55	1.54	1.50	1.46
	.010	2.16	2.09	2.01	1.93	1.88	1.84	1.79	1.76	1.74	1.68	1.63
40	.100	2.51	2.41	2.31	2.20	2.12	2.07	2.01	1.97	1.94	1.87	1.80
	.050	2.98	2.84	2.70	2.55	2.45	2.39	2.30	2.25	2.21	2.11	2.02
	.025	4.24	4.00	3.75	3.49	3.33	3.22	3.07	2.98	2.92	2.76	2.61
	.010	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.42	1.38
50	.100	2.08	2.00	1.92	1.84	1.78	1.74	1.69	1.66	1.64	1.58	1.52
	.050	2.39	2.29	2.18	2.07	1.99	1.94	1.88	1.83	1.80	1.72	1.65
	.025	2.80	2.66	2.52	2.37	2.27	2.20	2.11	2.06	2.02	1.92	1.82
	.010	3.87	3.64	3.40	3.14	2.98	2.87	2.73	2.64	2.57	2.41	2.25
60	.100	1.73	1.68	1.63	1.57	1.53	1.50	1.46	1.44	1.42	1.38	1.33
	.050	2.03	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.63	1.60	1.58	1.51	1.45
	.025	2.32	2.22	2.11	1.99	1.92	1.87	1.80	1.75	1.72	1.64	1.56
	.010	2.70	2.56	2.42	2.27	2.17	2.10	2.01	1.95	1.91	1.80	1.70
100	.100	3.67	3.44	3.20	2.95	2.79	2.68	2.53	2.44	2.38	2.21	2.05
	.050	1.71	1.66	1.60	1.54	1.50	1.48	1.44	1.41	1.40	1.35	1.30
	.025	1.99	1.92	1.84	1.75	1.69	1.65	1.59	1.56	1.53	1.47	1.40
	.010	2.27	2.17	2.06	1.94	1.87	1.82	1.74	1.70	1.67	1.58	1.49
200	.100	2.63	2.50	2.35	2.20	2.10	2.03	1.94	1.88	1.84	1.73	1.62
	.050	3.54	3.32	3.08	2.83	2.67	2.55	2.41	2.32	2.25	2.08	1.92
	.025	1.66	1.61	1.56	1.49	1.45	1.42	1.38	1.35	1.34	1.28	1.22
	.010	1.93	1.85	1.77	1.68	1.62	1.57	1.52	1.48	1.45	1.38	1.30
1000	.100	2.18	2.08	1.97	1.85	1.77	1.71	1.64	1.59	1.56	1.46	1.36
	.050	2.50	2.37	2.22	2.07	1.97	1.89	1.80	1.74	1.69	1.57	1.45
	.025	3.30	3.07	2.84	2.59	2.43	2.32	2.17	2.08	2.01	1.83	1.64
	.010	1.63	1.58	1.52	1.46	1.41	1.38	1.34	1.31	1.29	1.23	1.16
1000	.100	1.88	1.80	1.72	1.62	1.56	1.52	1.46	1.41	1.39	1.30	1.21
	.050	2.11	2.01	1.90	1.78	1.70	1.64	1.56	1.51	1.47	1.37	1.25
	.025	2.41	2.27	2.13	1.97	1.87	1.79	1.69	1.63	1.58	1.45	1.30
	.010	3.12	2.90	2.67	2.42	2.26	2.15	2.00	1.90	1.83	1.64	1.43
1000	.100	1.61	1.55	1.49	1.43	1.38	1.35	1.30	1.27	1.25	1.18	1.08
	.050	1.84	1.76	1.68	1.58	1.52	1.47	1.41	1.36	1.33	1.24	1.11
	.025	2.06	1.96	1.85	1.72	1.64	1.58	1.50	1.45	1.41	1.29	1.13
	.010	2.34	2.20	2.06	1.90	1.79	1.72	1.61	1.54	1.50	1.35	1.16
.001	2.99	2.77	2.54	2.30	2.14	2.02	1.87	1.77	1.69	1.49	1.22	

Anexo 3. Muestras de Masas

1	Masa 1	Masa 2	Masa 3	Masa 4	Masa 5	Masa 6	Media de muestra
2	88,01	73,48	93,56	72,90	98,15	83,36	84,91
3	66,79	76,68	76,82	72,22	80,46	76,21	74,86
4	62,53	76,07	82,17	80,53	76,14	76,54	75,66
5	88,57	81,42	76,37	71,98	63,13	65,15	74,44
6	73,65	75,75	79,22	79,39	74,59	67,26	74,98
7	72,13	56,83	61,54	76,88	93,87	56,08	69,56
8	92,88	82,58	80,16	70,12	78,72	85,46	81,65
9	83,42	80,10	67,20	61,30	64,46	61,06	69,59
10	82,25	71,79	75,49	85,15	66,93	85,57	77,86
11	87,65	79,08	78,97	56,54	75,22	52,97	71,74
12	70,93	96,52	67,32	86,86	87,05	80,22	81,48
13	86,48	80,63	93,97	72,82	95,51	89,76	86,53
14	80,85	76,36	82,28	70,93	85,42	85,49	80,22
15	95,20	69,85	80,29	80,45	90,58	80,24	82,77
16	76,71	62,36	85,84	68,35	62,83	73,79	71,65
17	63,47	92,77	74,19	97,19	78,56	65,79	78,66
18	68,01	80,60	116,11	84,67	64,60	78,56	82,09
19	67,78	70,33	73,45	83,58	71,95	73,15	73,37
20	85,36	75,51	92,99	76,61	77,39	92,12	83,33
21	75,05	67,84	76,31	65,90	65,04	30,72	63,48
22	60,52	88,58	94,33	83,71	69,24	87,48	80,64
23	94,67	85,09	76,36	90,06	94,71	85,69	87,76
24	91,74	89,70	89,10	48,09	60,94	96,10	79,28
25	73,02	64,67	70,37	67,81	71,31	66,27	68,91
26	62,55	65,96	73,42	71,68	73,69	78,46	70,96
27	77,57	85,59	98,49	55,95	85,65	82,75	81,00
28	77,10	95,83	67,57	102,28	106,95	52,00	83,62
29	79,95	83,57	68,68	88,07	69,56	76,63	77,74
30	78,42	63,51	63,59	85,05	78,42	39,32	68,05
31	85,89	60,27	85,48	101,04	83,10	67,49	80,55
32	76,97	83,10	76,79	78,44	84,93	69,21	78,24
33	75,28	83,25	84,75	84,71	82,39	82,70	82,18
34	89,67	70,13	91,88	66,96	79,77	93,73	82,02
35	76,02	72,25	103,08	83,60	90,34	86,49	85,30
36	80,47	79,57	103,32	105,17	63,41	54,64	81,10
37	57,17	93,70	55,84	49,70	61,15	81,09	66,44
38	103,76	49,88	79,57	69,09	80,59	74,97	76,31
39	82,19	83,56	79,52	64,83	74,82	81,76	77,78
40	63,01	77,33	78,14	74,82	68,98	71,42	72,28
41	75,17	81,54	82,62	82,44	61,24	90,18	78,86
42	83,14	82,11	58,58	40,72	73,18	92,74	71,74

1	Masa 1	Masa 2	Masa 3	Masa 4	Masa 5	Masa 6	Media de muestra
43	82,62	72,87	88,89	69,34	77,05	80,66	78,57
44	89,79	67,79	97,53	60,34	70,66	80,55	77,78
45	82,81	96,62	68,68	92,39	93,81	82,99	86,22
46	85,69	67,39	82,63	72,02	96,48	92,55	82,79
47	77,53	87,68	66,76	75,00	53,30	90,07	75,06
48	88,66	77,44	84,74	71,51	91,00	73,76	81,19
49	72,01	78,65	63,42	66,53	78,92	60,15	69,95
50	82,99	96,84	88,24	85,43	70,03	67,00	81,75
51	70,24	66,79	71,17	98,88	55,86	79,53	73,75
52	82,31	87,31	89,87	61,74	63,22	75,43	76,65
53	53,11	72,92	85,14	47,25	62,76	66,27	64,58
54	68,95	64,70	53,57	79,81	69,70	71,52	68,04
55	86,80	54,78	89,86	96,12	89,13	71,66	81,39
56	81,43	80,14	83,85	70,92	74,29	77,29	77,99
57	94,32	81,86	59,96	87,79	52,49	68,75	74,20
58	73,94	63,48	98,33	66,56	78,31	75,35	76,00
59	52,65	89,51	84,54	86,83	69,28	91,45	79,04
60	53,19	77,21	65,32	75,94	77,07	85,51	72,37
61	76,98	82,69	83,63	111,61	73,33	74,41	83,78
62	101,17	68,56	71,40	78,33	78,88	68,92	77,88
63	70,60	88,38	75,62	73,76	75,52	81,14	77,50
64	82,41	85,60	89,39	67,86	75,28	88,09	81,44
65	78,04	66,98	67,22	77,59	81,60	50,31	70,29
66	91,99	96,52	72,72	71,59	95,88	71,90	83,43
67	93,88	60,60	76,76	109,45	65,03	93,05	83,13
68	72,75	74,99	64,35	77,93	69,93	76,04	72,66
69	100,02	78,53	79,34	86,50	67,22	79,73	81,89
70	65,74	68,46	57,36	59,94	83,56	57,86	65,49
71	69,44	78,98	85,32	76,75	86,61	80,17	79,54
72	89,00	74,60	60,31	61,79	101,70	96,66	80,68
73	60,67	43,71	93,41	76,06	73,22	70,76	69,64
74	74,99	52,31	84,73	78,93	86,20	69,16	74,39
75	65,44	65,41	68,08	77,84	95,82	81,19	75,63
76	71,19	87,16	77,93	55,47	72,82	86,85	75,24
77	88,79	72,37	92,40	97,95	58,78	72,75	80,51
78	103,38	83,10	78,62	89,62	78,61	74,67	84,67
79	50,17	67,75	97,26	64,97	84,78	93,42	76,39
80	86,38	94,61	101,10	78,01	74,30	74,62	84,84
81	96,96	79,89	51,61	64,48	59,02	81,97	72,32
82	80,16	79,88	74,06	65,84	82,39	78,58	76,82
83	68,32	93,67	80,09	67,62	84,47	102,23	82,73

1	Masa 1	Masa 2	Masa 3	Masa 4	Masa 5	Masa 6	Media de muestra
84	85,14	69,39	74,91	77,65	74,09	73,34	75,75
85	85,96	76,21	63,07	69,44	62,22	68,19	70,85
86	55,00	64,72	84,11	74,31	85,81	81,77	74,29
87	96,41	81,90	86,27	60,86	66,54	71,31	77,21
88	84,67	84,97	69,61	96,74	74,13	47,44	76,26
89	80,72	83,99	95,06	93,08	67,62	78,16	83,10
90	96,86	78,95	73,13	89,10	76,45	89,30	83,96
91	76,00	62,42	49,54	73,33	80,74	66,28	68,05
92	75,94	78,34	72,04	77,11	86,19	96,78	81,07
93	83,11	81,71	83,12	96,17	62,97	90,17	82,87
94	79,66	90,64	115,14	95,81	80,31	57,14	86,45
95	71,37	88,67	65,93	105,09	97,24	64,67	82,16
96	73,95	98,67	59,55	62,29	85,46	59,85	73,30
97	88,89	83,79	64,79	59,55	91,12	89,00	79,52
98	112,94	59,42	56,45	82,72	64,72	76,93	75,53
99	56,96	63,56	86,70	102,48	75,68	67,72	75,52
100	69,73	76,22	94,04	56,46	72,14	73,62	73,70
101	79,71	72,80	79,25	97,64	73,24	71,89	79,09
102	63,55	85,05	69,81	70,57	94,29	75,14	76,40
103	70,77	73,28	75,05	99,45	72,64	80,62	78,63
104	91,11	82,18	79,61	78,07	66,02	51,47	74,74
105	70,49	90,34	78,17	84,30	75,16	60,72	76,53
106	61,71	92,09	65,88	97,49	82,14	109,34	84,78
107	129,02	53,07	84,29	62,93	85,23	59,40	78,99
108	85,83	81,45	87,95	60,63	78,38	73,13	77,90
109	73,74	70,54	75,79	79,03	76,58	89,11	77,47
110	79,90	54,24	82,80	82,58	95,44	69,71	77,44
111	82,84	98,74	85,57	100,47	76,39	58,68	83,78
112	73,08	66,70	93,76	81,12	74,88	79,07	78,10
113	83,19	86,19	87,43	81,11	84,64	57,19	79,96
114	71,03	79,08	85,27	69,17	83,45	69,05	76,18
115	91,41	52,40	66,48	76,23	75,68	67,27	71,58
116	58,56	80,19	81,56	86,77	112,31	79,98	83,23
117	93,61	80,49	76,79	80,15	70,52	82,93	80,75
118	89,85	82,06	74,34	83,69	63,97	69,11	77,17
119	85,49	77,24	70,98	62,83	85,69	82,50	77,46
120	70,92	85,31	60,25	70,33	90,77	64,90	73,75
121	71,88	84,99	81,63	98,58	81,77	91,52	85,06
122	66,05	57,46	84,69	38,40	86,51	56,42	64,92
123	84,39	95,08	113,07	76,01	42,99	95,28	84,47
124	45,91	71,70	88,80	88,49	80,58	63,17	73,11

1	Masa 1	Masa 2	Masa 3	Masa 4	Masa 5	Masa 6	Media de muestra
125	79,49	70,37	62,72	89,85	88,91	96,34	81,28
126	91,35	74,13	87,72	53,79	69,48	80,00	76,08
127	69,70	84,49	64,54	63,45	100,79	75,09	76,34
128	49,46	74,78	94,98	68,31	77,55	76,26	73,56
129	71,07	62,50	78,82	77,18	65,38	78,45	72,23
130	87,30	48,88	62,87	82,49	100,64	72,02	75,70
131	99,92	73,91	60,17	90,08	56,68	82,69	77,24
132	84,20	80,93	75,03	96,86	69,55	100,80	84,56
133	75,98	83,80	59,60	74,80	106,17	83,74	80,68
134	77,07	78,55	103,07	82,40	108,79	71,75	86,94
135	72,15	73,64	106,48	80,91	63,45	91,81	81,41
136	83,11	96,54	85,45	71,03	96,74	78,96	85,31
137	64,34	87,16	82,81	57,87	68,54	71,27	72,00
138	75,01	59,64	87,92	68,31	90,30	83,63	77,47
139	69,68	75,95	80,90	98,52	74,33	77,34	79,45
140	80,57	71,57	61,54	67,66	92,93	65,50	73,30
141	59,57	84,93	63,63	66,13	81,78	75,88	71,99
142	70,94	50,87	94,27	66,79	96,12	92,86	78,64
143	64,95	88,41	57,08	75,94	72,33	66,35	70,85
144	66,15	86,26	74,59	93,65	55,78	73,55	75,00
145	88,56	71,34	82,46	91,97	79,03	58,32	78,61
146	83,13	73,49	67,75	82,62	70,38	81,16	76,42
147	75,06	86,29	83,22	62,94	93,06	75,19	79,29
148	70,27	95,01	94,64	76,89	62,36	75,59	79,13
149	69,96	71,61	58,37	58,61	71,23	77,92	67,95
150	78,14	96,94	64,24	74,95	76,54	69,06	76,64
151	53,19	60,15	58,98	70,09	81,46	87,28	68,53
152	59,04	80,68	65,30	70,68	50,16	65,61	65,24
153	76,58	80,50	80,38	94,07	76,38	81,17	81,52
154	61,99	89,23	78,58	57,82	75,41	108,31	78,55
155	65,41	107,19	70,39	60,56	66,95	87,47	76,33
156	74,43	84,07	65,65	81,29	72,55	72,88	75,14
157	61,25	90,16	76,45	75,87	66,74	72,01	73,75
158	90,68	91,73	89,27	77,06	83,94	77,52	85,03
159	62,96	80,76	57,83	86,41	89,91	76,99	75,81
160	70,63	86,78	76,36	62,85	63,38	86,90	74,49
161	77,86	49,87	90,25	70,44	96,51	63,71	74,77
162	70,55	77,17	69,89	68,71	77,14	73,56	72,84
163	63,26	69,37	67,44	70,40	91,15	79,55	73,53
164	77,14	70,13	75,90	49,43	78,06	90,22	73,48
165	83,24	72,13	83,42	79,54	99,03	95,69	85,51

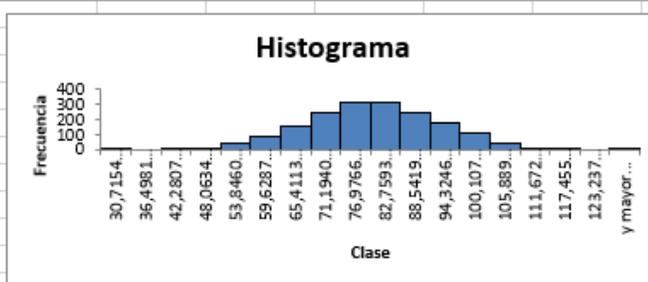
1	Masa 1	Masa 2	Masa 3	Masa 4	Masa 5	Masa 6	Media de muestra
166	73,11	69,34	73,96	74,13	65,41	58,18	69,02
167	76,61	70,85	67,82	100,56	78,87	59,63	75,72
168	65,79	77,67	91,79	82,11	84,58	103,35	84,21
169	70,45	96,99	95,17	84,77	69,99	79,50	82,81
170	79,84	56,87	72,28	51,86	81,97	76,10	69,82
171	82,81	77,29	90,03	70,64	99,49	92,43	85,45
172	91,42	97,12	70,82	94,43	39,81	76,07	78,28
173	59,08	57,60	81,33	90,98	79,86	65,62	72,41
174	75,18	89,74	81,80	72,60	95,48	65,03	79,97
175	85,74	63,38	90,57	88,13	94,98	80,01	83,80
176	69,38	74,94	95,88	64,06	94,82	111,19	85,04
177	59,31	54,46	73,03	85,26	65,68	93,79	71,92
178	111,82	59,80	89,62	79,51	94,70	72,28	84,62
179	85,06	86,02	52,50	65,66	63,97	68,74	70,32
180	77,15	96,06	68,05	86,68	76,76	91,88	82,76
181	67,47	85,21	83,71	72,17	71,76	71,58	75,32
182	77,43	92,13	75,29	62,62	66,68	65,72	73,31
183	64,09	73,85	62,75	72,13	78,60	81,80	72,21
184	65,97	89,43	56,55	73,16	82,78	86,49	75,73
185	93,75	84,06	82,69	65,25	75,72	81,77	80,54
186	64,70	76,60	93,96	89,66	56,89	45,15	71,16
187	86,98	81,68	56,17	92,09	76,49	56,30	74,95
188	94,14	97,21	78,68	82,68	90,60	63,56	84,48
189	85,10	100,22	81,51	53,36	80,04	68,02	78,04
190	56,16	84,24	84,81	75,02	76,41	46,88	70,59
191	72,53	60,29	61,01	68,01	72,68	94,36	71,48
192	79,05	61,18	74,28	89,33	78,04	71,76	75,61
193	74,78	73,08	53,86	78,60	100,14	62,41	73,81
194	62,84	88,22	83,77	93,50	74,87	81,01	80,70
195	81,26	83,11	74,74	79,09	67,93	89,71	79,31
196	47,35	75,00	66,40	82,03	55,28	64,59	65,11
197	87,65	81,80	73,94	68,41	83,35	89,09	80,71
198	74,74	124,62	70,21	70,72	66,24	75,45	80,33
199	70,52	72,77	76,85	54,81	77,79	75,42	71,36
200	88,83	62,50	85,97	65,60	78,71	69,10	75,12
201	90,28	98,73	73,68	72,05	77,69	97,63	85,01
202	69,03	83,48	64,46	72,44	89,86	96,67	79,32
203	71,21	83,74	87,22	52,04	92,06	84,98	78,54
204	50,03	45,11	85,12	61,74	98,99	107,70	74,78
205	57,21	69,18	56,96	53,07	89,91	74,42	66,79
206	84,64	65,62	85,19	76,98	86,26	79,25	79,66

1	Masa 1	Masa 2	Masa 3	Masa 4	Masa 5	Masa 6	Media de muestra
207	61,21	88,44	79,23	81,71	67,61	55,87	72,34
208	63,64	80,04	71,56	82,90	64,45	101,25	77,31
209	85,72	64,42	64,52	77,18	84,01	69,41	74,21
210	61,16	65,83	101,42	83,38	75,65	83,86	78,55
211	52,69	64,95	86,65	58,97	91,12	88,40	73,80
212	70,06	88,27	58,68	66,68	69,68	68,59	70,33
213	78,03	72,96	81,83	77,87	114,92	63,04	81,44
214	82,54	87,91	68,78	87,94	71,24	59,58	76,33
215	98,00	92,55	55,31	79,61	82,93	82,88	81,88
216	71,08	73,76	86,23	74,62	56,77	61,86	70,72
217	102,29	94,67	66,04	83,85	87,77	69,28	83,98
218	69,89	65,32	72,83	81,10	82,37	100,12	78,60
219	93,69	81,67	93,84	92,16	78,71	76,50	86,09
220	67,16	90,70	76,78	64,05	74,16	77,01	74,98
221	72,84	90,88	47,76	70,64	85,13	69,67	72,82
222	76,56	91,89	80,67	76,56	84,34	86,72	82,79
223	94,79	69,58	102,76	76,18	90,61	86,01	86,65
224	79,38	55,87	92,36	91,20	55,25	106,41	80,08
225	78,19	83,95	80,78	87,16	80,88	75,49	81,08
226	72,33	84,09	55,38	78,20	95,95	77,72	77,28
227	97,04	51,39	75,77	71,43	56,57	89,64	73,64
228	61,22	75,97	73,16	82,91	70,04	79,69	73,83
229	90,89	73,60	87,03	88,99	58,41	82,93	80,31
230	87,15	71,14	94,23	81,08	69,66	86,31	81,59
231	93,79	69,61	79,87	72,70	76,56	81,69	79,04
232	76,60	49,27	82,45	59,66	97,06	91,41	76,07
233	74,56	98,99	83,70	61,73	73,86	55,20	74,67
234	83,27	72,83	54,57	88,09	84,79	67,10	75,11
235	93,17	58,32	71,32	75,71	64,27	54,77	69,59
236	55,41	80,14	67,03	71,28	71,22	54,34	66,57
237	67,01	86,82	62,08	84,34	75,24	56,71	72,03
238	74,56	69,78	79,20	76,83	87,80	104,18	82,06
239	76,45	64,06	63,55	61,34	90,39	94,74	75,09
240	91,47	60,11	53,14	67,83	74,92	73,61	70,18
241	78,64	75,35	86,39	101,48	83,68	74,31	83,31
242	71,55	84,22	79,97	66,14	71,61	73,88	74,56
243	61,89	83,17	94,28	87,02	63,02	84,86	79,04
244	87,12	67,28	73,73	94,12	66,75	76,66	77,61
245	77,09	70,96	84,29	66,71	76,22	76,44	75,29
246	73,22	78,24	60,99	97,03	70,56	77,78	76,30
247	86,03	78,16	93,62	85,60	83,99	88,96	86,06

1	Masa 1	Masa 2	Masa 3	Masa 4	Masa 5	Masa 6	Media de muestra
248	81,34	87,71	88,66	90,49	99,20	98,86	91,04
249	79,75	80,96	54,71	93,00	66,84	72,75	74,67
250	95,83	79,35	106,41	68,12	87,02	67,45	84,03
251	75,89	69,62	104,55	83,49	82,79	70,94	81,21
252	79,91	85,53	60,64	89,01	90,55	96,34	83,66
253	75,82	66,83	78,71	77,59	95,24	81,45	79,27
254	82,03	89,41	60,48	86,64	46,54	99,73	77,47
255	69,39	85,94	92,71	90,43	61,66	80,19	80,05
256	81,52	84,51	78,54	69,52	80,30	58,09	75,41
257	89,66	114,04	78,60	57,52	84,69	79,94	84,08
258	78,36	76,20	78,15	80,34	82,84	58,77	75,78
259	61,91	67,63	79,91	88,79	83,77	75,55	76,26
260	63,41	70,77	66,39	75,36	66,58	67,44	68,32
261	75,14	95,04	91,19	63,96	78,31	68,88	78,75
262	59,16	70,62	106,44	59,97	64,17	88,91	74,88
263	91,83	69,47	89,93	98,03	73,02	90,78	85,51
264	80,51	95,39	72,90	50,25	94,47	85,55	79,85
265	63,33	79,69	95,99	84,50	93,89	101,62	86,50
266	78,33	109,81	70,42	74,96	59,94	95,58	81,51
267	78,48	65,22	90,89	74,50	70,65	71,78	75,25
268	74,98	67,88	61,11	77,35	65,14	73,16	69,94
269	67,47	78,02	103,11	73,28	94,60	78,13	82,44
270	70,56	89,76	112,15	84,99	92,83	91,40	90,28
271	79,34	52,80	56,20	91,74	89,69	108,43	79,70
272	101,96	71,08	96,96	62,76	90,84	89,99	85,60
273	84,99	63,19	73,99	75,81	68,54	54,38	70,15
274	76,98	64,50	61,07	88,06	76,41	83,77	75,13
275	69,37	75,06	100,12	85,32	80,64	62,86	78,89
276	79,61	72,46	82,37	76,05	76,42	99,71	81,10
277	98,11	62,71	66,09	78,11	73,82	73,45	75,38
278	78,83	74,44	104,32	79,19	62,92	78,18	79,65
279	74,35	88,39	69,19	62,28	88,79	78,22	76,87
280	87,46	47,92	68,54	79,67	81,46	76,71	73,63
281	58,89	83,46	79,43	83,50	95,43	69,42	78,35
282	54,79	87,48	71,73	49,97	76,21	82,44	70,44
283	90,85	72,32	97,06	73,54	80,12	71,08	80,83
284	85,16	74,20	103,30	92,67	77,52	76,71	84,93
285	96,54	67,34	82,10	73,72	96,59	97,98	85,71
286	79,33	78,25	71,34	95,92	76,77	69,08	78,45
287	73,87	81,06	78,24	69,51	76,07	76,99	75,96
288	78,64	84,50	78,63	80,67	79,12	74,32	79,31

1	Masa 1	Masa 2	Masa 3	Masa 4	Masa 5	Masa 6	Media de muestra
289	89,64	87,27	71,19	98,22	81,41	77,60	84,22
290	86,24	91,75	89,25	53,91	88,94	87,75	82,97
291	83,63	84,04	79,49	85,24	51,01	57,16	73,43
292	101,82	73,98	73,68	88,55	68,36	86,20	82,10
293	80,16	54,60	66,25	80,90	100,49	91,92	79,05
294	76,23	78,64	87,59	104,98	57,34	95,47	83,37
295	70,64	58,82	59,48	71,19	81,56	87,79	71,58
296	60,30	59,17	64,63	63,44	101,70	72,28	70,25
297	81,82	97,59	84,27	71,03	77,19	71,37	80,54
298	51,51	101,49	85,76	88,65	68,18	65,00	76,76
299	94,62	54,75	69,21	68,55	70,98	80,97	73,18
300	63,96	111,65	68,41	62,90	60,24	69,46	72,77
301	69,65	100,83	70,61	53,23	70,01	85,38	74,95

Media de las masa:	77,3	Clase	Frecuencia
Desviación estándar	12,9	30,715478	1
n=6		36,498128	0
		42,280778	4
		48,063429	12
		53,846079	43
		59,628729	95
		65,41138	163
		71,19403	248
		76,97668	313
		82,759331	313
		88,541981	251
		94,324631	177
		100,10728	110
		105,88993	42
		111,67258	17
		117,45523	9
		123,23788	0
		y mayor...	2



Media de las media:	77,45	Clase	Frecuencia
Desviación estándar	5,21	63,476216	1
		65,097791	2
		66,719366	5
		68,340941	6
		69,962516	10
		71,584092	17
		73,205667	20
		74,827242	29
		76,448817	45
		78,070392	26
		79,691968	35
		81,313543	28
		82,935118	26
		84,556693	21
		86,178268	20
		87,799844	7
		89,421419	0
		y mayor...	2

