

## Actividad 1: Hacer inferencias sobre la media de una población usando intervalos de confianza

### PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes comprendan en términos generales el uso de la estadística inferencial y cómo estimar parámetros de una población a partir de estadísticos de muestras de esa población. Con ello, pueden estimar, por ejemplo, la media de una población, con intervalos de confianza de mayor o menor precisión entregando un nivel de confianza según lo requerido o lo deseado.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 4.** Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis.

**OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

**OA c.** Tomar decisiones fundamentadas en evidencia estadística y/o en la evaluación de resultados obtenidos a partir de un modelo probabilístico.

**OA i.** Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

### Actitudes

- Trabajar con responsabilidad y liderazgo en la realización de las tareas colaborativas y en función del logro de metas comunes.
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

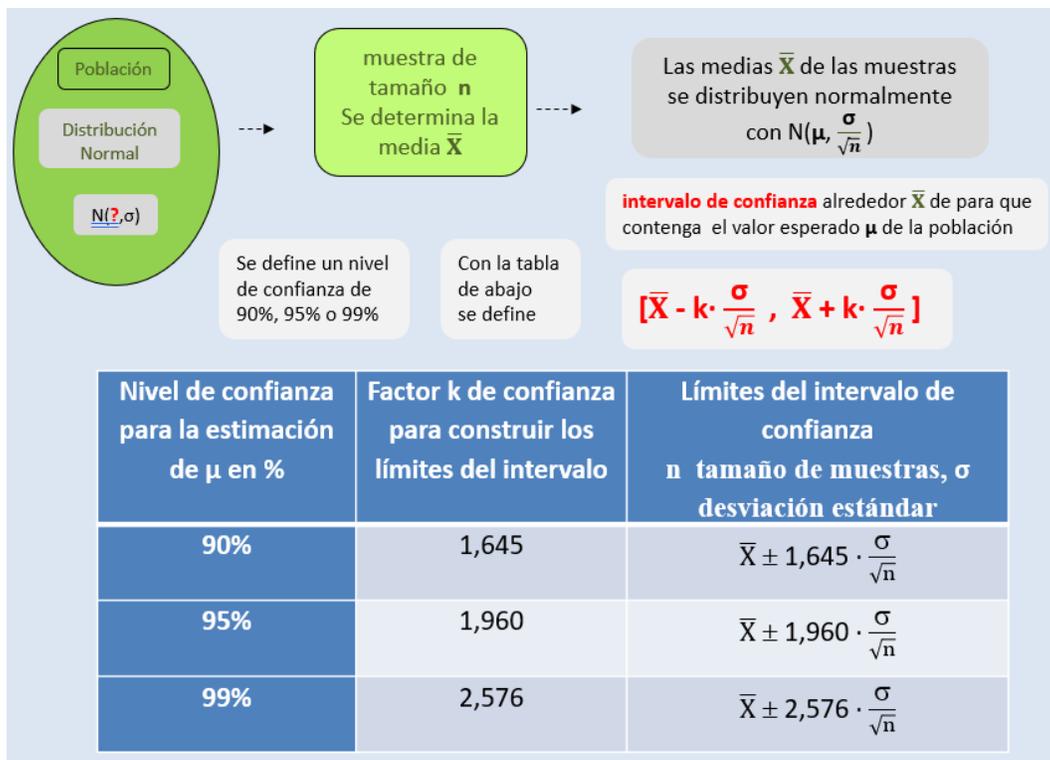
**Duración:** 12 horas pedagógicas

## DESARROLLO

Se sugiere un trabajo colaborativo para las siguientes actividades.

### INTRODUCIR EL CONCEPTO DE UN INTERVALO DE CONFIANZA

1. Observen el siguiente esquema, que presenta en forma sintética cómo trabaja la estadística inferencial a partir de muestras de una población determinada.



2. El nivel de confianza se puede expresar también como  $1 - \alpha$ , donde  $\alpha = 0,1$  o bien  $\alpha = 0,05$  o bien  $\alpha = 0,01$ . Además, el factor  $k$  corresponde al puntaje según una normal estándar  $Z_{\alpha/2}$ . Por ejemplo: si  $\alpha = 0,05$ , se tiene que  $\alpha/2 = 0,025$  y el puntaje  $Z_{\alpha/2}$  [según una tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo)] es  $-1,96$ , que corresponde al valor más cercano de  $0,025$ .

$z$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07
-3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
-3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004
-3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005
-3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008
-3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011
-2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015
-2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021
-2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028
-2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475

3. Del mismo modo que para el nivel de confianza de  $0,95$ , comprueben en la tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo), los puntajes  $Z_{\alpha/2}$  para los niveles de confianza de  $0,90$  y  $0,99$ .
- a. A partir de lo anterior, completen la tabla:

$1 - \alpha$	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$	Intervalo de confianza
0,90	0,05		
0,95	0,025	1,960	$\left[ \bar{X} - 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + 1,960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
0,99	0,005		

- b. Compartan ideas acerca de los parámetros de la población y los estadísticos de las muestras. ¿Sobre qué se quiere inferir o estimar algún valor y cómo? Argumenten.
- c. Si una población se distribuye normalmente  $N(\mu, \sigma)$ , ¿cómo se distribuyen las medias de las muestras de tamaño “ $n$ ” extraídas de dicha población?
- d. En sus propias palabras, ¿qué es un intervalo de confianza para la media “desconocida” de una población de la cual sí se conoce su desviación estándar? Expliquen.
- e. ¿En qué influye el nivel de confianza a la hora de fijar un intervalo para la media de la población? Argumenten.

- f. ¿Cómo se puede interpretar la expresión  $Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  y cómo influye en ella el tamaño “n” de la muestra? Argumenten.

### UN EJEMPLO

Después de una década sin recopilar datos, se quiere determinar aproximadamente el valor esperado  $\mu$  de la estatura entre las mujeres de una población. Se saca una muestra de 100 mujeres, con una estatura media de  $\bar{X} = 154\text{cm}$ . Se conoce la desviación estándar de esa medición:  $\sigma = 6\text{cm}$  y se estima que no ha cambiado.

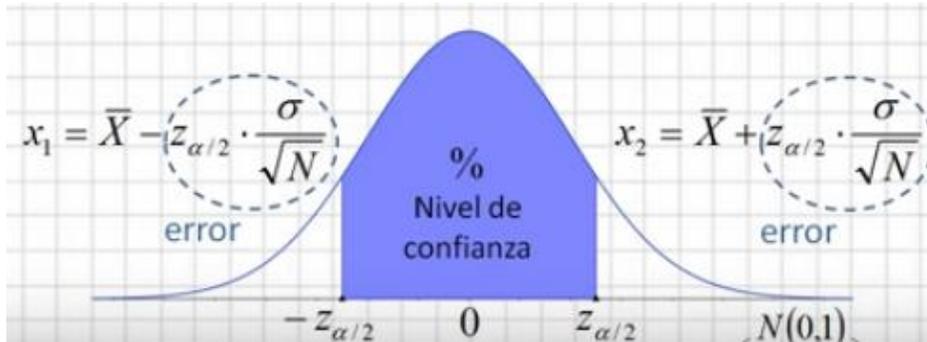
- A partir de la muestra poblacional, describan el procedimiento que determina un intervalo de confianza para estimar el valor esperado poblacional  $\mu$ .
- Determinen el intervalo de confianza alrededor de la media muestral  $\bar{X}$  con un nivel de 95% de confianza, que contenga el valor esperado  $\mu$  de la población.
- Si la media muestral  $\bar{X} = 154\text{ cm}$  hubiera resultado de una muestra de 400 mujeres, ¿qué influencia tendría en el intervalo de confianza? Argumenten.

### ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere comenzar esta unidad con un diagnóstico y repaso de los temas vistos antes y, además, incentivar la noción de confianza. Para ello, los jóvenes los estudiantes elaboran esquemas sobre la ubicación que le darían a las personas que les merecen mayor y menor confianza. Como el tema es muy personal, conviene que los trabajos sean anónimos. Lo ideal es poner al sujeto en el medio, a su alrededor a las personas con mayor grado de confianza y más lejos a medida que va disminuyendo esa confianza. Aunque no es una analogía para el intervalo de confianza, les permitirá acercarse al concepto y comparar con las características específicas para calcular intervalos de confianza.
- Cabe explicarles que, en la estadística descriptiva, se puede describir poblaciones con variables aleatorias; según el contexto, se elige mayoritariamente una variable aleatoria binomial o una variable aleatoria normal. Al conocer los parámetros poblacionales como “n” y “p” en el caso de la binomial, y “ $\mu$ ” y “ $\sigma$ ” en el caso de la normal, se puede determinar probabilidades referidas a muestras de dichas poblaciones.
- Por su parte, la estadística inferencial aplica la siguiente propiedad de cada variable aleatoria normal: Se considera todas las medias  $\bar{X}$  de muestras del mismo tamaño “n” de una población normalmente distribuida con media “ $\mu$ ” y desviación estándar “ $\sigma$ ”. Se puede constatar que la distribución de las medias muestrales  $\bar{X}$  sigue una variable aleatoria normal con el valor esperado “ $\mu$ ” de la población, pero con una desviación reducida “ $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ” que depende del tamaño “n” de las muestras.
- En la práctica se toma una muestra del tamaño “n” de la población, se determina la media  $\bar{X}$  de la muestra y se construye un “intervalo de confianza” alrededor de la media muestral  $\bar{X}$ ; así se tiene “confianza” en que el valor esperado “ $\mu$ ” de la población se encuentre dentro de este

intervalo. Finalmente, con un nivel de confianza deseado, se determina el largo del intervalo utilizando la tabla de la distribución normal estándar (ver Anexo).

5. Se recomienda discutir con ellos acerca del error ( $E$ ) asociado a la estimación de la media mediante intervalos de confianza. Si se considera un nivel de confianza  $1 - \alpha$ , en términos de probabilidad se tiene que  $P(\bar{X} - E \leq \mu \leq \bar{X} + E) = 1 - \alpha$ , donde el error queda expresado por  $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . Esto se puede apreciar en el siguiente esquema:



6. Por ende, una expresión para determinar el tamaño “n” de las muestras acorde al error que se quiere cometer es  $E = \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2$ .
7. Dado que uno de los objetivos de la unidad 4 es OA 4 –Argumentar inferencias acerca de parámetros (media y varianza) o características de una población, a partir de datos de una muestra aleatoria, bajo el supuesto de normalidad y aplicando procedimientos con base en intervalos de confianza o pruebas de hipótesis–, se sugiere compartir con los jóvenes la siguiente propuesta de rúbrica para que evalúen el proceso argumentativo de forma general:

	Totalmente logrado	Medianamente logrado	No logrado
<b>Criterios</b>			
Caracterizan los datos entregados según la variable del problema.	Identifican la cantidad de datos de la muestra y el problema con una distribución normal.	Identifican la cantidad de datos de la muestra.	Mencionan una cantidad que se relaciona con otro problema.
	Identifican el promedio y la desviación estándar en el problema.	Identifican el promedio o la desviación estándar en el problema.	Escriben información numérica.
Establecen la hipótesis o conjetura que defenderán con argumentos, buscando datos en la información entregada u otras fuentes.	Elaboran una hipótesis, basándose en los datos del problema o de otras fuentes relacionadas.	Elaboran una hipótesis, basándose parcialmente en los datos del problema.	Escriben una frase.

Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis para apoyar la argumentación.	Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis apoyando la argumentación asociada al problema.	Calculan intervalos de confianza o realizan pruebas de hipótesis.	Realizan cálculos.
Relacionan los resultados para defender las posturas o hipótesis iniciales.	Relacionan los resultados mediante un hilo conductor, para concluir la postura o hipótesis.	Utilizan los resultados para concluir la postura o hipótesis.	Presentan los resultados.
Comparan resultados para cambiar de posición si es necesario.	Comparan los resultados obtenidos con la hipótesis y la cambian o reafirman, según corresponda.	Comparan los resultados obtenidos con la hipótesis.	Presentan una hipótesis asociada a otros resultados.

8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
- Identifican los elementos principales en una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.
  - Resuelven problemas en los que deben hacer una estimación de la media poblacional, con desviación estándar conocida, por medio de intervalos de confianza.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

### *Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Sitio de Economía y Finanzas que relaciona estas ciencias con la estadística. Universidad Complutense de Madrid.  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://economipedia.com/definiciones/intervalo-de-confianza.html>
- Documento con la teoría de probabilidades y estadística. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.  
[https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.dm.uba.ar/materias/probabilidades\\_estadistica\\_C/2011/1/PyEC142011.pdf](https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.dm.uba.ar/materias/probabilidades_estadistica_C/2011/1/PyEC142011.pdf)
- Curso de Inferencia de una población más bibliografía. Documento del Departamento de Estadística de la Universidad Carlos III, Madrid.  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/aarribas/eng/docs/estII/tema1esp.pdf>
- Intervalos de confianza y otros temas de la inferencia estadística en la página de Minitab, software estadístico con una prueba gratis para su uso.  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/help-and-how-to/statistics/basic-statistics/supporting-topics/basics/what-is-a-confidence-interval/>