

## Actividad 2: La media muestral y la media de la población en diferentes contextos

### PROPÓSITO

Los estudiantes comprenden la distribución de las medias muestrales en contextos de resolución de problemas que involucran casos con reemplazo y sin reemplazo. Además, observan la tendencia de las medias muestrales al modificar el tamaño de las muestras involucradas, para inferir sobre la media poblacional.

### Objetivos de Aprendizaje

**OA 2.** Resolver problemas que involucren los conceptos de media muestral, desviación estándar, varianza, coeficiente de variación y correlación muestral entre dos variables, tanto de forma manuscrita como haciendo uso de herramientas tecnológicas digitales.

**OA b.** Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

**OA d.** Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

**OA i.** Buscar, seleccionar, manejar y producir información matemática/cuantitativa confiable a través de la web.

### Actitudes

- Trabajar colaborativamente en la generación, desarrollo y gestión de proyectos y la resolución de problemas, integrando las diferentes ideas y puntos de vista.
- Interesarse por las posibilidades que ofrece la tecnología para el desarrollo intelectual, personal y social del individuo.

**Duración:** 12 horas pedagógicas

### DESARROLLO

#### EVALUANDO MUESTRAS

Una fábrica de bolas de billar realiza periódicamente controles de calidad a la masa de las bolas, que debe estar comprendida entre ciertas medidas. Cada juego consta de 15 bolas identificadas con un número y un color, más la bola blanca que sirve de tiro.

1. Para comenzar, se requiere resolver el problema de escoger “aleatoriamente” 5 bolas de billar de un total de 16. Evalúen las siguientes formas de escoger la muestra de 5 bolas de billar. En este caso, no se opera directamente con las bolas concretas, sino con sus datos en papel sobre el color y masa.
  - a. Seleccionen el color de 5 bolas de billar, posicionando la punta de un lápiz sobre el recuadro de manera aleatoria.

blanco (157 g); amarillo (160 g); azul (164 g); rojo (158 g); morado (160 g); anaranjado (158 g); verde (161 g); café (162 g); negro (163 g); amarillo con blanco (160 g); azul con blanco (158 g); rojo con blanco (160 g); morado con blanco (163 g); anaranjado con blanco (164 g); verde con blanco (160 g); café con blanco (165 g).

- b. Elijan ahora el color de 5 bolas de billar, posicionando la punta de un lápiz sobre el siguiente recuadro de manera aleatoria.



- c. A partir de cómo se muestran los datos de las bolas de billar, ¿consideran que los dos métodos anteriores son efectivamente aleatorios? ¿Hay diferencias? ¿Hay sesgo en alguno? Argumenten su respuesta a partir de que “cada bola tenga la misma probabilidad de ser escogida”.
    - d. Argumenten si se puede proponer otro método más efectivo para asegurar la “aleatoriedad”. Compartan ideas con el grupo y expliquen el método utilizado.
2. Tomen finalmente una muestra aleatoria de 5 bolas de billar.
  - a. Escriban el color y la masa de las bolas seleccionadas en la siguiente tabla:

N°	Color de la bola	Masa (g)	Masa (Kg)
1			
2			
3			
4			
5			

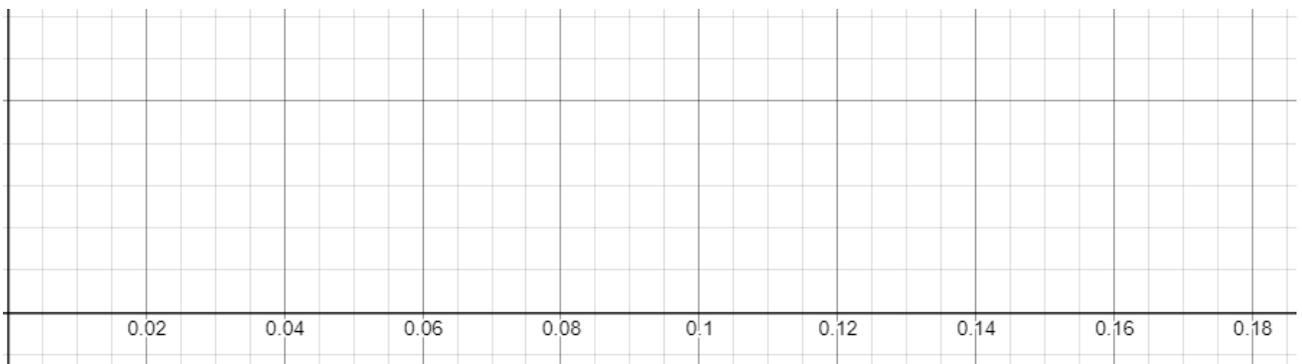
- b. Completen un diagrama de puntos con las masas (en kilogramos) de las bolas seleccionadas en el ejercicio anterior. Recuerden que, si dos o más bolas de billar tienen la misma masa, deben dibujar verticalmente tantos puntos objetos haya, manteniendo la misma distancia entre ellos.
3. ¿Cuál es el promedio de las masas de las bolas de billar en la muestra de 5 bolas?
- a. Completen la tabla y expliquen su procedimiento.

N°	Color de la bola	Masa (g)	Masa (Kg)
1			
2			
3			
4			
5			
SUMA			
PROMEDIO			

- b. Con ayuda del profesor, registren el promedio obtenido en su muestra con los promedios obtenidos por otros 9 grupos. Completen los datos en la tabla siguiente, donde la primera posición es su promedio obtenido y las otras son para los otros grupos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Promedio obtenido										

- c. Representen ahora los datos en un diagrama de puntos de promedios muestrales.



4. Calculen el promedio de la masa de las 16 bolas de billar. Ordenen los datos en la siguiente tabla:

N°	Color de la bola	Masa (g)	Masa (Kg)
1	Blanco		
2	Amarillo		
3	Azul		
4	Rojo		
5	Morado		
6	Anaranjado		
7	Verde		
8	Café		
9	Negro		
10	Amarillo con blanco		
11	Azul con blanco		
12	Rojo con blanco		
13	Morado con blanco		
14	Anaranjado con blanco		
15	Verde con blanco		
16	Café con Blanco		
	SUMA		
	PROMEDIO		

- a. Registren el valor del promedio obtenido de las 16 bolas de billar en el gráfico de puntos, mediante una línea vertical.
  - b. ¿Qué podrían afirmar al comparar el promedio recién determinado de la masa de las 16 bolas de billar y la media muestral que calcularon anteriormente?
5. ¿Qué sucedería con el promedio muestral si en lugar de 5 bolas de billar se escogen aleatoriamente 10 bolas? Dialoguen en el grupo y argumenten.
6. Si utilizaran el mismo método de muestreo, pero en vez de seleccionar 5 bolas de billar seleccionarían 10, ¿cómo afectaría la distribución de las medias muestrales? Compartan ideas en el grupo y elaboren una respuesta.
- a. Seleccionen el color de 10 bolas de billar de manera aleatoria y escriban el color y la masa de las bolas seleccionadas en la siguiente tabla:

N°	Color de la bola	Masa (g)	Masa (Kg)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

8			
9			
10			
	SUMA		
	PROMEDIO		

- b. ¿Cuál es el promedio de las masas de las bolas de billar en su muestra?
- c. Con ayuda del profesor, registren el promedio obtenido en su muestra con los promedios obtenidos por otros 9 grupos. Completen los datos en la tabla siguiente, donde la primera posición es su promedio obtenido y las otras son para los otros grupos.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Promedio obtenido										

- d. Representen ahora los datos en un diagrama de puntos de promedios muestrales.
- e. Registren el promedio de las 16 bolas de billar, ya calculado en la actividad 4, mediante una línea vertical en el diagrama de puntos construido.
- f. ¿Qué podrían afirmar al comparar el promedio recién determinado de la masa de las 16 bolas de billar y la media muestral que calcularon en la actividad 4?

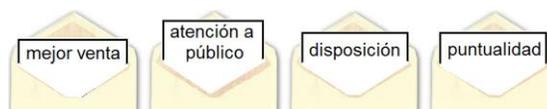
### ENTREGA DE BONOS EN FORMA ALEATORIA

Un día, se informó a cuatro trabajadores de una empresa –Amanda, Bárbara, Carlos y Daniel– que fueron ganadores de un bono por su desempeño, correspondiente a mejor venta, disposición, atención a público y puntualidad, respectivamente. La persona que debe entregar los bonos está confundida y no sabe a quién le corresponde cada uno, por lo que decide repartirlos de manera aleatoria: cada bono tiene la misma probabilidad de ser distribuido a los trabajadores.

1. El jefe de personal, preocupado de que ocurran situaciones como ésta, se pregunta: si cada vez que deban entregar este bono se produjera esta situación con 4 bonos y 4 trabajadores, ¿cuál sería, en promedio, la cantidad de bonos entregados correctamente?
- a. En grupos de 6 estudiantes, representen la situación, asignando la identidad de los 4 trabajadores Amanda, Bárbara, Carlos y Daniel.



- b. Luego, de manera aleatoria, entreguen en un sobre cerrado un bono a cada uno de ellos, indicando el reconocimiento.



- c. Registren en la siguiente tabla el comportamiento del promedio de la cantidad de veces que se entrega correctamente el bono, en la medida en que se repite más veces el experimento (la entrega de los 4 bonos) hasta llegar a 10 experimentos. Es decir, en la última columna, en cada fila registren el promedio acumulado, considerando la fila actual y las anteriores.

Experimento	Cantidad de bonos entregados correctamente	Frecuencia acumulada	Promedio de la cantidad de bonos entregados correctamente
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

2. ¿Qué sucede luego de los 10 experimentos?
- Determinen la media de las medias muestrales.
  - Representen la secuencia de los promedios obtenidos en un solo gráfico. ¿Qué observan?
  - Con base en los datos del gráfico, expliquen qué ocurre con la distribución de las medias muestrales cuando el número de experimentos aumenta. Argumenten a partir de lo que sucedería si se realizara 20 o 30 lanzamientos.
3. ¿Cuáles son las probabilidades, según la cantidad de aciertos de las cartas con los destinatarios?
- Establezcan una representación (diagrama de árbol) a partir de la cantidad de aciertos de las cartas con los destinatarios.
  - Determinen las probabilidades para cada caso, según la cantidad de aciertos. ¿De qué otras maneras podrían determinar estas probabilidades?
  - Completen la siguiente tabla:

Aciertos	0	1	2	3	4	Suma
Probabilidad						

- El promedio de trabajadores que recibieron el bono correctamente, ¿se acerca a algún valor en particular? ¿Qué valor creen que es? Argumenten a partir del concepto de esperanza de una variable aleatoria  $X$ , donde  $X$  = cantidad de aciertos en la entrega de bonos.

## RELACIONANDO MEDIAS MUESTRALES Y LA MEDIA DE LA POBLACIÓN

1. Consideren como población las siguientes tarjetas con puntos:



- Calculen la media del puntaje de la población. Expliquen el procedimiento utilizado.
  - Determinen todas las muestras de tamaño 2, sin reposición. Expliquen el procedimiento utilizado.
  - Calculen la media de cada una de las muestras.
  - Calculen el promedio de todas las medias muestrales.
  - ¿Qué relación observan entre el promedio de las medias muestrales y el promedio de la población? Argumenten a partir de la semejanza entre los resultados.
  - ¿Cómo calcularían la cantidad de muestras de tamaño  $k$  sin reposición que se puede extraer de una población de tamaño  $n$ ? Expliquen su procedimiento, a partir de ejemplos concretos.
2. Un grupo de 5 trabajadores tiene los siguientes ingresos por trabajar horas extra a la semana: \$1 700, \$1 600, \$1 000, \$1 800 y \$2 200.
- Determinen la cantidad de muestras posibles de tamaño 3 y 4 sin reemplazo.
  - Determinen las dos distribuciones muestrales para cada tamaño de muestra.
  - Calculen la media de medias muestrales para ambos casos y represéntalas en un gráfico.
  - ¿Qué información pueden inferir, considerando el contexto? Redacten sus conclusiones.
3. En una producción artesanal de jabones, se revisa la masa en gramos de 4 jabones. Las masas netas obtenidas son 180, 175, 182 y 185.
- Determinen la cantidad de muestras posibles de tamaño 3 sin reemplazo.
  - Determinen la distribución muestral de la masa media de los jabones.
  - Calculen la media de medias muestrales y compárenla con el promedio de la población.
  - Repitan las actividades a, b, y c, pero considerando las muestras con reemplazo.
  - Comparen los datos y saquen sus conclusiones.
4. En los problemas anteriores se propone situaciones en que la elección de las muestras de cierto tamaño es “sin reemplazo o reposición” y en otras, “con reemplazo o reposición”. ¿Qué ocurre en cada caso? Argumenten su respuesta, recurriendo a casos concretos.

## ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Durante la actividad de las bolas de billar, se sugiere enfatizar lo importante que es prever que el método de muestreo sea razonable. Por ejemplo, en el primer caso, al escribir en palabras las características de cada bola de billar, es necesario que todas las palabras tengan la misma probabilidad de ser seleccionadas. Sin embargo, esto no ocurre, pues la característica del color dada en palabras tiene distinta longitud. En el segundo caso, al presentar las imágenes de las bolas de billar de manera simétrica y ordenada, se mejora el hecho de que cada bola tenga igual

- probabilidad de ser escogida. Se recomienda que discutan otras formas de asegurar que el muestreo sea efectivamente aleatorio.
2. Para la actividad de las bolas de billar, se sugiere que hagan la experiencia con diferentes tamaños de muestras. Por ejemplo, primero se solicita un muestreo de 5 bolas para realizar la experiencia. Luego se propone un muestreo de 10 bolas de billar, para que puedan inferir si se acercan más a la media muestral al aumentar el tamaño de la muestra los promedios.
  3. Conviene reforzar con los estudiantes los conceptos clave de *variable*, *parámetro* (característica de la población), *estadístico* (característica de la muestra), *pregunta de investigación*, *población* (grupo completo de personas u objetos de interés o unidades observacionales), *muestra* (parte de la población formada por las personas u objetos a quienes corresponden los datos) y *tipos de muestreo* (muestreo aleatorio simple), para que infieran características sobre la población a partir de una muestra, si se la ha recolectado de manera adecuada.
  4. En la actividad de los bonos en sobres que se entregan “aleatoriamente”, es importante que comprendan que el promedio de los valores observados de una variable aleatoria por medio de repeticiones secuenciales de un mismo experimento se acerca cada vez más a ciertos valores; es decir, la media, la esperanza o valor esperado de dicha variable aleatoria.
  5. Para que determinen las probabilidades según el número de aciertos, se recomienda establecer una representación de “diagrama de árbol” para revisar todas las posibilidades, según si hay 0, 1, 2, 3 o 4 aciertos. Luego, pueden usar la regla de Laplace o la suma o producto de probabilidades.
  6. Otro punto importante es que, a partir de los datos registrados en los gráficos, al aumentar la cantidad de experimentos, la distribución de las medias muestrales varía más al inicio con pocas repeticiones, y comienza a estabilizarse a medida que aumenta la cantidad de repeticiones.
  7. En la última parte de la actividad, se recomienda poner énfasis en el muestreo aleatorio, la cantidad de experimentos a realizar y la media muestral obtenida. Además, será importante que identifiquen diferencias cuando las extracciones son “sin reemplazo o reposición”, o bien “con reemplazo o reposición”.
  8. Cabe destacar algunos aspectos de la estadística inferencial; por ejemplo: que, a partir de una población, se puede seleccionar muestras de un tamaño dado para deducir características de dicha población, e inferir sobre el valor de un parámetro, utilizando estadísticos adecuados.
  9. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
    - Determinan la cantidad de muestras según condiciones dadas.
    - Resuelven problemas que implican la media muestral  $\bar{X}$ , considerando los casos con reemplazo y sin reemplazo.

## RECURSOS Y SITIOS WEB

*Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores*

- Muestreo aleatorio  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://www.rossmanchance.com/applets/randomBabies/RandomBabies.html?language=1>
- Estadística: media de la muestra vs. media de la población  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=Xs0Bzyru3DU>
- Media muestral vs media poblacional  
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=1mSEgwaRB1k>