

Actividad 1: Representando el límite de sucesiones en contextos geométricos

PROPÓSITO

Los estudiantes estiman el límite de una sucesión de forma intuitiva y visual. Se comienza con patrones geométricos sencillos y la noción del último elemento de un patrón infinito. Se espera que, al hacer conjeturas sobre el límite, reconozcan que un error es una posibilidad que se puede discutir y sirve a todos para aprender. Además, podrán resolver los problemas utilizando las herramientas digitales o de conocimientos que estén a disposición.

Objetivos de Aprendizaje

OA2. Argumentar acerca de la existencia de límites de funciones en el infinito y en un punto para determinar convergencia y continuidad en contextos matemáticos, de las ciencias y de la vida diaria, en forma manuscrita y utilizando herramientas tecnológicas digitales.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

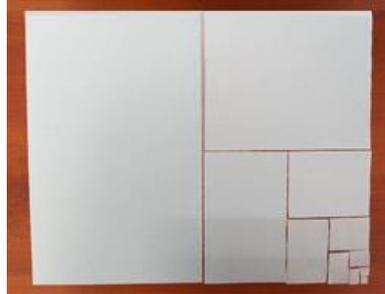
- Pensar con autorreflexión y autonomía para gestionar el propio aprendizaje, identificando capacidades, fortalezas y aspectos por mejorar.

Duración: 12 horas pedagógicas

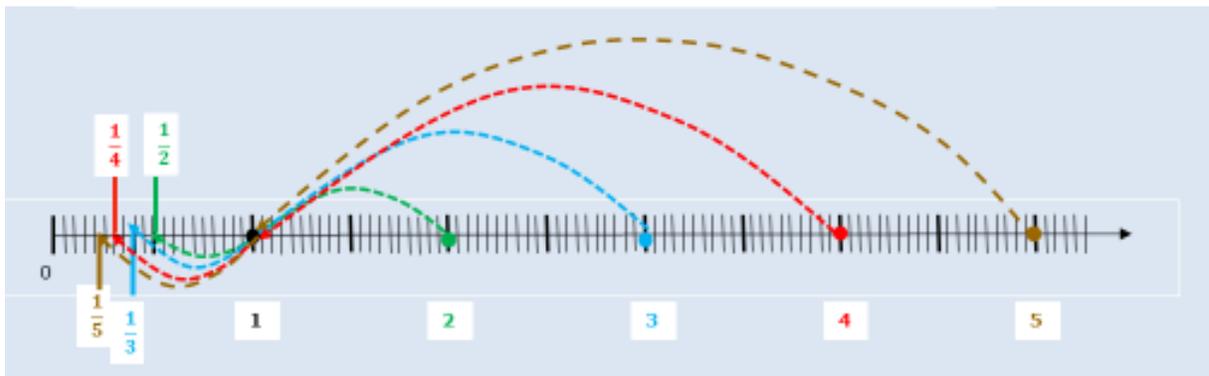
DESARROLLO

COMPRIENDIENDO LOS PATRONES INFINITOS

1. En la imagen se ve las partes ordenadas de una hoja entera de papel, recortadas según un patrón.



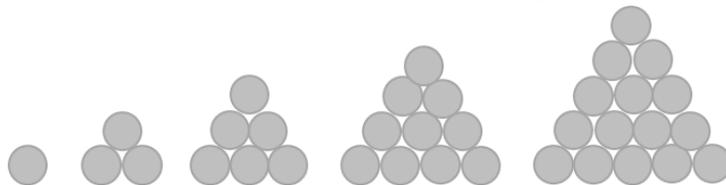
- ¿Cómo podrías describir el patrón de la imagen? Explica a tu compañero la necesidad de utilizar las fracciones en esta descripción.
 - Elabora una expresión algebraica que represente el enésimo elemento de la sucesión. (Nota: la hoja inicial más grande que se ve puede ser el primer paso $n = 1$).
 - Si este patrón continúa eternamente, ¿puedes encontrar el “último elemento” de la sucesión elaborada?, ¿cuál podría ser?
 - Comparte tu conjetura con tu compañero e intenten encontrar juntos el “último elemento” de la sucesión.
 - ¿A qué valor se acercarán los elementos de la sucesión, sin alcanzarlo?
 - ¿Qué relación puedes ver entre “sin alcanzar”, el “infinito” y los números naturales?
 - Grafica puntualmente cada paso de la sucesión.
 - ¿Se pueden ordenar los elementos de la sucesión de menor a mayor? Explica tu conjetura a tu compañero.
 - ¿Qué ocurre con el “último elemento” en este caso?
2. La recta numérica muestra una transformación de números naturales a fracciones.



- ¿En qué intervalo de la recta están todas las transformaciones?
- Elabora algebraicamente el término general (funcional de \mathbb{N} en \mathbb{Q}), que modela esta transformación.

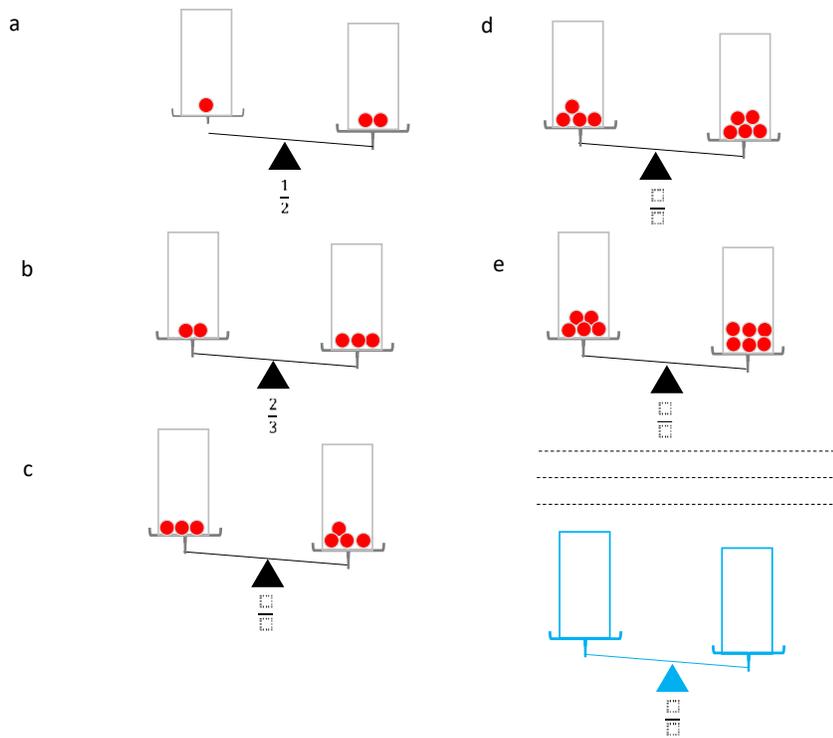
- c. ¿A qué número se acercan los elementos de la sucesión?
- d. Considerando que un elemento de la sucesión alcanza el valor mínimo, ¿qué número sería su imagen previa en la recta numérica?, ¿es esto posible? Explica a tu compañero lo que ocurre en este caso.

3. La imagen muestra cinco “pilas” de círculos, cuya cantidad sigue un patrón numérico.



- a. ¿Cuál podría ser la cantidad de los círculos en la próxima pila?
- b. Determina la cantidad de círculos en la pila n -ésima.
- c. ¿Cuál es la cantidad de círculos cuando n tiende al infinito?
- d. Grafica los valores discretos, observa qué pasa en el gráfico y úsalo para explicar “el último valor”.

4. La imagen muestra una balanza en cuyos platos hay bolitas que tienen la misma masa. Se pone la cantidad de bolitas en los platos siguiendo un patrón. Las fracciones escritas debajo las balanzas representan la razón entre la cantidad de las bolitas en el plato izquierdo y la cantidad de las bolitas en el plato derecho.

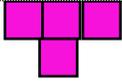
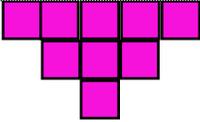
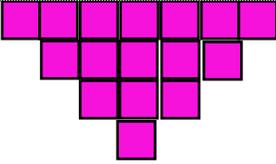


- Describe verbalmente a tu compañero un patrón según el cual se irían llenando ambos platos de la balanza.
- Escribe un patrón según el cual se forman las fracciones que representan la razón entre la cantidad de las bolitas del plato izquierdo y del plato derecho.
- ¿Cuál podría ser el término n -ésimo? Escribe la fracción de la balanza en n -ésima posición dibujada en azul.
- ¿Cuál es el valor al que tienden a llegar todos los elementos de la sucesión de las fracciones?
- ¿Qué valor no pueden superar los elementos de la sucesión?
- Siguiendo infinitamente el mismo procedimiento de llenar las balanzas, ¿alcanzarán el equilibrio en algún momento? Explica a tu compañero lo que piensas.
- Manteniendo la misma cantidad de bolitas e invirtiendo los platos del lado izquierdo con el derecho, ¿cuál es la diferencia con la sucesión anterior?
- Elabora el término general de la nueva sucesión.
- ¿A qué número tienden los elementos de esta sucesión?
- ¿Se pondrá en algún momento la balanza en equilibrio? Explica tu respuesta a un compañero.
- Grafica las dos situaciones en un mismo plano cartesiano y explica utilizando el gráfico.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

- Se sugiere comenzar la unidad 2 con una evaluación diagnóstica para activar conocimientos de cursos anteriores. Algunos de los ejercicios pueden ser:

- Encuentra el patrón del siguiente arreglo de figuras geométricas y completa la tabla.

Figura					
Cantidad de cuadrados	1				
Descripción verbal de las figuras: Fórmula:					

- Grafica la siguiente función de números naturales $f(n) = 2n + 1$ y encuentra un arreglo geométrico que defina el mismo patrón.
 - ¿Cuáles son las características de un patrón? ¿Cuáles son sus diferencias o similitudes con una función?
- Se recomienda considerar las nociones básicas del límite como: i) la aproximación de los valores de la sucesión hacia un valor fijo; ii) a partir de un cierto valor de la sucesión y para cada entorno cada vez más pequeño alrededor del límite, todos los términos de la sucesión se encuentran dentro del entorno. Se debe especificar nuevamente estas nociones en el caso de las funciones para denotar el caso del límite de la función en un punto.
 - Para comenzar con la noción de límite, conviene considerar solo las sucesiones y graficarlas en un plano de coordenadas para visualizar el comportamiento que tienen. En estos casos, cabe hablar de la noción de tendencia de la sucesión, para luego poder hablar de la tendencia de una función.
 - Si fuera pertinente y necesario, se podría trabajar la sucesión presentada en 2 al final de esta actividad, o para retomar como introducción a las funciones en la actividad 4. Esta sucesión tiene término general $\frac{1}{n}$ y puede retomarse para presentar el paso desde los números naturales a los números reales con la función real $f(x) = \frac{1}{x}$. Se puede trabajar comenzando con los números decimales mayores a 1 y ver lo que ocurre en el gráfico.
 - Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Conjeturan sobre el límite de sucesiones, series o funciones.
 - Representan gráficamente para visualizar el comportamiento de la sucesión, serie o función.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Video introductorio a la noción de límite
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limit-basics-dc/limits-introduction-dc/v/introduction-to-limits-hd>
- Estimación de valores de límites a partir de gráficas
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/limit-basics-dc/limits-introduction-dc/e/two-sided-limits-from-graphs>
- Límite que tiende a infinito
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.GeoGebra.org/m/eXtSCdQn>