

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 5: FUNCIÓN INVERSA Y COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

OA 1: Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada.

OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones, para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

PREGUNTAS ESENCIALES

- ¿Qué tipos de problemas se pueden resolver con funciones?

- ¿Por qué es necesario componer funciones para modelar algunos fenómenos?

a.- ¿Por qué hay problemas que requieren de la función inversa para ser resueltos?

PROPÓSITO

Al realizar estas actividades se espera que los estudiantes puedan investigar casos especiales de la función inversa de una función y de composición de funciones, verificar el cambio del sentido de las variables si se pasa de una función a su inversa, razonar acerca el comportamiento de una de las magnitudes de una proporcionalidad inversa si la otra se multiplica o se divide y modelar fenómenos en economía y física con el concepto de función inversa de una función.

DURACIÓN	CONEXIÓN
Actividad individual: 2 horas pedagógicas Actividad colaborativa: 2 horas pedagógicas	Economía: Modelar los fenómenos económicos de oferta y demanda, precio y ganancia, etc. mediante la composición de funciones y la operación entre funciones. Resolver problemas con el modelo de la proporcionalidad inversa en el contexto de la Ley de Boyle-Mariotte de Física y Química.

CONTEXTO

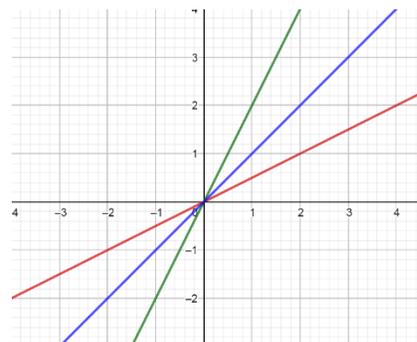
Actividad colaborativa: Se elaboran dos modelos según los cuales los gastos para el empaque de libros encargados se disminuyen con la cantidad de libros enviados. Se contrastan ambos modelos con la factibilidad real. En otra actividad resuelven problemas con el modelo de la proporcionalidad inversa

en el contexto de la Ley de Boyle-Mariotte de Física y Química. En una posible actividad colaborativa de “desafío” se componen dos funciones y se restan dos funciones en un contexto de física.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

A. ACTIVIDAD INDIVIDUAL: REPRESENTAR FUNCIONES Y FUNCIONES INVERSAS EN UN AMBIENTE CARTESIANO

- Se consideran pares de funciones de una función f con su inversa f^{-1} .
 - ¿Por qué las rectas verdes y rojas representan un par de función f e inversa f^{-1} respectivamente?
 - ¿Por qué la función g representada por la recta azul es inversa de sí misma?
 - Verifica esta propiedad de la función g mediante un diagrama sagital.
- Se considera la función f con $f(x) = \frac{1}{x}$.
 - Determina el dominio y el recorrido de f .
 - Elabora el gráfico de f en el primer cuadrante del sistema de coordenadas.
 - ¿Qué simetría axial tiene el gráfico de f y qué se puede conjeturar acerca de su función inversa f^{-1} ?
 - Desarrolla la ecuación de la función inversa f^{-1} para verificar o rechazar la conjetura.
 - Elabora un diagrama sagital entre f y f^{-1} y compáralo con el diagrama sagital de la actividad 1.c.
 - Verifica algebraicamente, que funciones g con $g(x) = a \cdot x^{-1}, (a \neq 0)$ son inversa de sí misma.
- Con base en los resultados de las actividades anteriores determina la ecuación de una función afín h que es inversa de sí misma y verifica gráficamente el resultado mediante herramientas tecnológicas digitales como GeoGebra.
- Se considera la función k con $k(x) = \frac{-2}{x}$.
 - Elabora mediante herramientas tecnológicas como GeoGebra el gráfico de k para $x > 0$.
 - Conjetura acerca de la pregunta, ¿es k inversa de sí misma?
 - ¿Qué función debe resultar si se compone una función con su inversa? Representa la respuesta mediante un diagrama sagital.

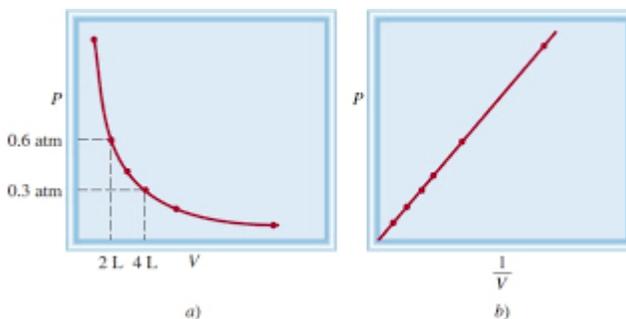


- d. Determina la ecuación de la función compuesta k o k^{-1} para verificar la conjetura de la actividad b.

B. ACTIVIDAD COLABORATIVA: MODELAR PROBLEMAS DE COSTOS DE EMPAQUE Y DE RELACIONES ENTRE VOLUMEN Y PRESIÓN DE GASES USANDO FUNCIONES

- Para agregar los costos para el empaque de libros de enciclopedia que se mandan a los clientes, se consideran costos fijos de \$10 000 para mantener la infraestructura del empaque. Se quiere modelar la situación, de costos variables del empaque, con una función afín decreciente de tal manera que a partir de 10 ejemplares el envío quede libre de costos del empaque. En otra variante se piensa en el modelo de la proporcionalidad inversa que considera, por ejemplo, costos de \$2 000 de empaque si se encargan 5 libros.
 - Elaboran el gráfico que representa la función f del primer modelo y la función g del segundo modelo. (escala: eje X: 1 una unidad representa 1 libro, eje Y: 1 unidad representa \$1 000)
 - Determinan la ecuación funcional para ambas funciones.
 - Verifican que ambas funciones son invertibles.
 - Explican para la función inversa de ambas funciones el significado de la variable independiente y de la variable dependiente.
 - ¿Qué debilidades tienen ambos modelos, si se sobrepasa la cantidad de 10 ejemplares?
 - ¿Qué debilidad tiene el modelo de la proporcionalidad inversa con respecto a los gastos fijos?

- En un recipiente de gas tiene un pistón móvil. Si se disminuye el volumen del gas, se aumenta la presión que rige en el gas. Durante el proceso del cambio del volumen se debe mantener la temperatura del gas (proceso isotérmico)
 - Según el gráfico, ¿qué función entre presión y volumen se representa?
 - Elabora la ecuación de la función p que modela la presión en dependencia del volumen.
 - ¿Por qué el segundo gráfico modela el mismo fenómeno?
 - Determina la función inversa p^{-1} de la función p según el primer gráfico.
 - Elabora el gráfico de la función inversa p^{-1} y explica el cambio del significado de las variables.



ORIENTACIONES PARA LA ACTIVIDAD DE AULA

1. En la actividad individual, se recomienda poner énfasis en las diferentes representaciones de la función inversa f^{-1} de una función f en las formas pictóricas: diagramas sagitales, gráficos simétricos en un sistema de coordenadas y simbólicas. La composición de una función f con su inversa f^{-1} debe llevar a la función de identidad $g(x) = x$ (con el gráfico $y = x$) Esto se puede argumentar en forma genérica a través de la metáfora de máquina y explicitar con un ejemplo dado.
2. En la actividad colaborativa, se recomienda poner énfasis en el comportamiento de las magnitudes cuando se acercan a los márgenes dados por las situaciones consideradas. En una posible actividad de “desafío” se compone dos funciones: cuadrática con afín y se restan dos funciones cuadráticas.
3. Para el cierre de las actividades, pregúnteles ¿qué les pareció la actividad?, ¿qué les fue más difícil?, ¿cómo resolvieron las actividades?, ¿les fueron útiles las sugerencias dadas por el docente?
4. Apoye a los estudiantes en el desarrollo de las diferentes actividades, observe su trabajo e interacción. No entregue las respuestas, haga preguntas para orientarlos a desarrollar las actividades.
5. En la actividad colaborativa, deles, en primer lugar, un lapso para entenderlo. Luego, permítales que hagan ensayo y error como estrategia: que experimenten, que conjeturen, que pongan a prueba sus estrategias. Ello les ayudará a entender, preguntarse, cuestionarse si algo no resulta.
6. La actividad colaborativa es una muy buena oportunidad para que los estudiantes expresen su propia imaginación y creatividad, que ejerciten sus habilidades, que arriesguen estrategias, que desarrollen su pensamiento matemático.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web para corriente alterna sugeridos para profesores y estudiantes

- https://www.ecured.cu/Funci%C3%B3n_Inversa
- <https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/finding-inverse-functions/a/finding-inverse-functions>
- <https://www.GeoGebra.org/m/QyC6GmyW>

ORIENTACIONES DE EVALUACIÓN FORMATIVA

Luego de la actividad individual

- ¿Qué observar?

Indicadores de evaluación

- Conjeturan y argumentan la existencia de inversas de funciones, las determinan y las representan gráficamente.
- Resuelven problemas de composición de funciones utilizando diagramas cartesianos, diagramas sintácticos o metáforas.
- Resuelven problemas de operaciones con funciones y composición de funciones.
- Resuelven problemas que involucran una función f y su inversa f^{-1} , y las representan de manera manual y digital.

Actitudes

Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos, asumiendo riesgos con confianza en las propias capacidades, incluso cuando no se consigue un resultado inmediato.

Consideraciones en la evaluación formativa

- Antes de continuar, se sugiere tomar unos minutos de la clase y hacer una puesta en común con los estudiantes de manera de verificar los aprendizajes logrados por ellos, o bien las dificultades que han tenido.
- Verificar en qué preguntas ha habido mayor dificultad y dar nuevas orientaciones o ayuda a los estudiantes.
- Retomar una o más preguntas para mostrar de qué manera abordarlas, aprovechando las respuestas de los estudiantes que han avanzado.

- Posibles adecuaciones de la actividad:

-A. Reforzar conceptos o procedimientos. Cuando no se ha tenido el éxito esperado con la actividad propuesta, es necesario considerar actividades tales como el **Ejemplo de Actividad de refuerzo**, en las que se pueda volver a revisar los aspectos claves de las funciones como, por ejemplo, distinguir entre variable dependiente e independiente.

-B. Continuar con la actividad tal como está diseñada. Desarrollar la **actividad colaborativa** para profundizar en el OA propuesto a partir de lo trabajado individualmente.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE REFUERZO: REFORZAR CONCEPTOS PARA EL ESTUDIO DE FUNCIONES

Se sugiere al docente proponer actividades como las siguientes:

1. Despejar las ecuaciones a la variable indicada en paréntesis.

a. $2y - 3x = -1$ (y)

b. $\frac{1}{4}x + 2y = \frac{1}{4}$ (x)

2. La función f tiene la ecuación $f(x) = 2x + 5$. Determina la pendiente de la recta que representa la función f^{-1} .

Luego de la actividad colaborativa

- ¿Qué observar?

Indicadores de evaluación

- Conjeturan y argumentan la existencia de inversas de funciones, las determinan y las representan gráficamente.
- Resuelven problemas de composición de funciones utilizando diagramas cartesianos, diagramas sintácticos o metáforas.
- Resuelven problemas de operaciones con funciones y composición de funciones.
- Resuelven problemas que involucran una función f y su inversa f^{-1} , y las representan de manera manual y digital.

Actitudes

- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

Consideraciones en la evaluación formativa

- Antes de cerrar la actividad, se sugiere tomar unos minutos de la clase y hacer una puesta en común con los estudiantes de manera de verificar los aprendizajes logrados por ellos, o bien las dificultades que han tenido en el trabajo colaborativo.
- Verificar en qué preguntas ha habido mayor dificultad.
- Retomar una o más preguntas para mostrar de qué manera abordarlas, aprovechando las respuestas de los estudiantes que han avanzado. Por ejemplo: ¿Cómo se reconoce que una función representa una proporcionalidad inversa? ¿Qué delimitaciones tiene el modelo elaborado? ¿Qué pasa con el significado de las variables si se considera la función inversa?

- Posibles adecuaciones de la actividad:

-A. Mayor desafío. Cuando las actividades individual y colaborativa han sido desarrolladas con éxito y fluidez, sería pertinente plantear un desafío que amplíe ligeramente los límites del OA. Para ello se pueden considerar actividades tales como el **Ejemplo de Actividad de desafío** que se muestra a continuación.

- Preguntas esenciales

Al final de cada una de las actividades invite a los estudiantes a responder una o más de las preguntas esenciales.

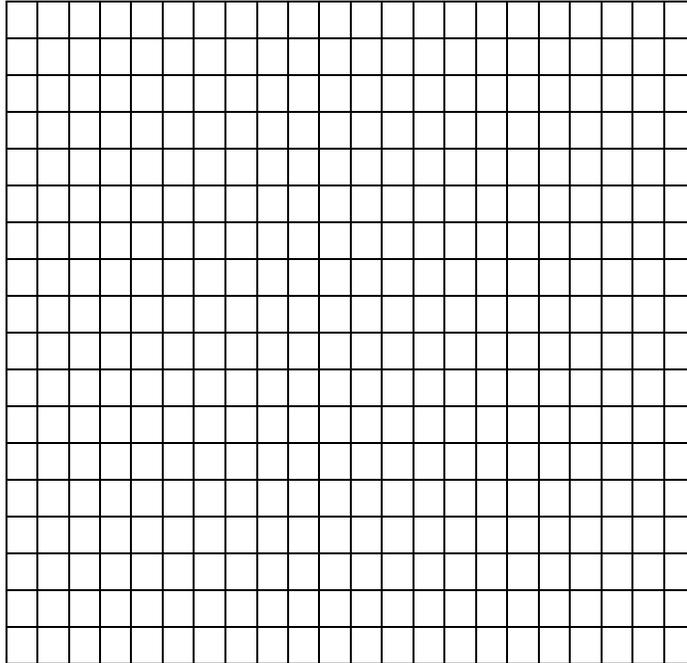
EJEMPLO DE ACTIVIDAD O PREGUNTA PARA CONSTATAR EL LOGRO DE HABILIDADES: ARGUMENTAR LOS NEXOS ENTRE FUNCIÓN Y SU INVERSA A PARTIR DE SUS REPRESENTACIONES GRÁFICAS.

Tanto la actividad individual como la colaborativa tienen como principal propósito, que los estudiantes logren el OA de habilidades matemáticas “representar” que incluye el cambio de representaciones entre las pictóricas y las simbólicas. Además, se requiere la habilidad de “argumentar y comunicar” en el ámbito de la economía y de las ciencias naturales.

Para evaluar el logro de dichas habilidades, se pueden formular las siguientes actividades o interrogantes:

1. ¿Por qué, la función g con $g(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$ no tiene inversa? Argumenta la respuesta.
2. Una recta tiene los puntos $P(2,2)$ y $Q(6,3)$ que pertenecen al gráfico de una función f
 - a. Marquen los puntos en el sistema cartesiano de coordenadas de abajo.

- b. Elaboran el gráfico de la función inversa f^{-1} .



- c. Verifiquen simbólicamente el resultado gráfico.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD DE DESAFÍO: MODELAR Y ARGUMENTAR LA CAÍDA LIBRE DE OBJETOS USANDO FUNCIONES

Para profundizar en el aprendizaje se sugiere al docente proponer actividades tal como:

La bolita verde se cae desde una altura mayor que la posición que tiene la bolita roja. La diferencia entre ellos es d . En el instante, en el cual la bolita verde pasa la posición de la bolita roja, ella empieza a caerse. Para ambas bolitas se considera una “caída libre” que se modela con una función cuadrática f con la ecuación $f(t) = k \cdot t^2$ en la cual k es un factor constante y t es el tiempo corre desde el inicio de la caída. En el instante $t = 1$ s la bolita verde pasa la posición de la bolita roja.

- a. Conjeturan: ¿La bolita verde y la bolita roja mantienen una distancia constante entre ellos durante la caída libre? Argumentan y comunican la conjetura.
- b. En comparación con la bolita verde, para la cual rige el tiempo t , se debe considerar que la bolita roja tiene el tiempo $t - 1$ s (segundos). La caída libre la bolita verde se modela con la función f y para la bolita roja hay que considerar la composición de f con la función g con $g(t) = t - 1$. Elaboran la expresión algebraica de la diferencia de los recorridos entre ambas bolitas y confirman o rechazan la conjetura de la actividad a.

