Actividad 2: La operatoria con números complejos

PROPÓSITO

Se pretende que los estudiantes comprendan la operatoria básica con números complejos de forma pictórica, simbólica y usando herramientas digitales. Se espera que sean capaces de pensar con conciencia y reconocer errores, como también formular y verificar conjeturas para relacionar la multiplicación de números complejos con dilataciones, contracciones y rotaciones, y la suma con la diagonal de un cuadrilátero. Esta actividad les permite representar los números complejos y su operatoria de forma manual o digital.

Objetivos de Aprendizaje

OA 1. Resolver problemas de adición, sustracción, multiplicación y división de números complejos C, en forma pictórica, simbólica y con uso de herramientas tecnológicas.

OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.

Actitudes

- Pensar con conciencia, reconociendo que los errores ofrecen oportunidades para el aprendizaje.

Duración: 6 horas pedagógicas

DESARROLLO

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

1. Sumen y resten números complejos en forma binomial y como par ordenado de forma simbólica, y completen una tabla como la siguiente:

Forma binomial	Como par ordenado	Resultado de forma binomial	Resultado como par ordenado
$(1 + 3i) + (2 + i)$			
	$(-2;\ 4) - (3; -8)$		
		$-2 + i$	
			$(0; -1)$

2. Observen la siguiente representación de números complejos; si pueden, usen herramientas digitales para hacer el dibujo.

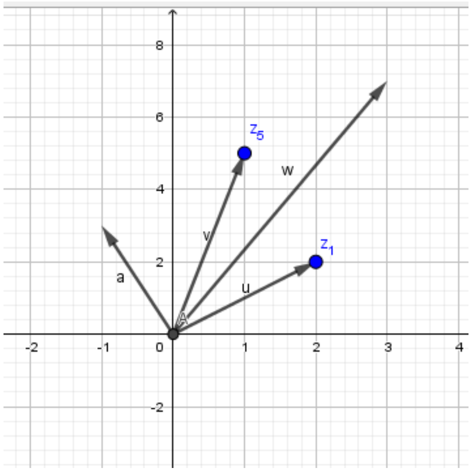

Fig. 5: Adición y sustracción de números imaginarios.

   a. ¿Qué relación aritmética hay entre $z_1, z_5\ y\ w$? ¿Qué relación aritmética hay entre $z_1, z_5\ y\ a$?

   b. ¿Es correcto afirmar que la interpretación geométrica de la adición y sustracción de números imaginarios corresponde a la diagonal de un paralelogramo? Justifiquen su respuesta, utilizando el simulador GeoGebra.

3. Encuentra el número complejo *z* que cumple con la condición dada:

   a. $-3 + 3i = (1 + i) + z$

   b. $3z = -i - (2 + i)$

   c. ¿Para qué valores de *x* se cumple $-1 + 3i = -2 + i - (4 + xi)$?

   d. Si $z = a + bi\ y\ w = c + di$, muestra que $z = w$, si se cumple $a = c\ y\ b = d$.

   e. Compara tus resultados con tus compañeros, descubrirás diferencias en el número complejo encontrado. ¿Dónde está la diferencia? ¿Cómo se puede solucionar?

   f. Representa los números complejos en el plano complejo. ¿Cómo se ven todos los posibles números complejos de la forma $(1 + i) + z$? ¿Qué significa z en este contexto?

4. Considerando la interpretación geométrica de la adición de números imaginarios,

   a. ¿En qué casos dicha adición corresponde a un rectángulo?

   b. ¿En qué casos corresponde a un cuadrado?

   c. ¿En qué casos corresponde a un rombo?

d. Justifiquen sus respuestas a partir de casos particulares, como:

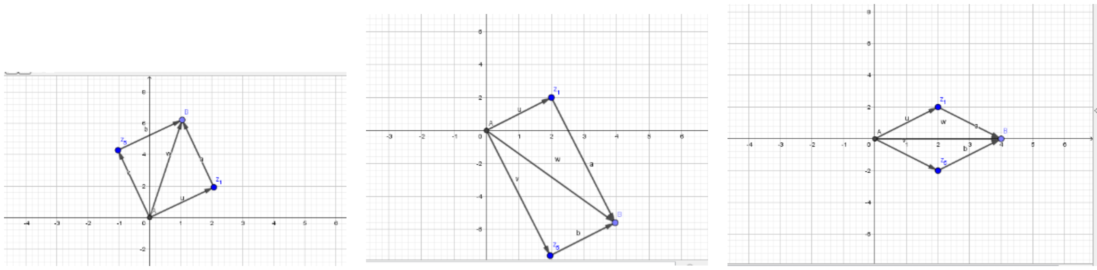

Fig. 6: Adición y sustracción de números imaginarios con deslizadores.

LA MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

1. Si $\boldsymbol{z = a + bi}$ y $\boldsymbol{w = c + di}$, formula una conjetura sobre las condiciones que deben cumplir $\boldsymbol{a, b, c, d}$ para que:
    a. $z \cdot w$ sea un número real; verifícala.
    b. $z \cdot w$ sea un número imaginario puro; verifícala.
2. Un giro de un en 90° puede representarse como $\boldsymbol{(1 + i) \cdot i = i - 1 = -1 + i}$
    a. Represente en el plano el número complejo $\boldsymbol{(1 + i)}$ y el que resulta al girar este número en 90°.
    b. Verifica pictórica y simbólicamente el ángulo de giro al ponderar un número complejo por $\boldsymbol{i^2}$, $\boldsymbol{i^3}$, $\boldsymbol{i^4}$.
    c. Conjetura y verifica cuál es el ángulo de giro al ponderar un número complejo por $\boldsymbol{i^{4n}}$ y por $\boldsymbol{i^{4n+2}}$, para *n* número natural.
    d. Verifica en casos particulares qué sucede para $\boldsymbol{i^{4n+1}}$ y para $\boldsymbol{i^{4n+3}}$, donde $\boldsymbol{n}$ es un número natural.
3. Considera distintos números complejos.
    a. Verifica simbólica y pictóricamente el resultado que se obtiene al multiplicar un número complejo $\boldsymbol{a + bi}$ por un escalar $\boldsymbol{k}$, con $\boldsymbol{a, b}$ números naturales y $\boldsymbol{k}$ número racional en los siguientes casos:
        - $k < 0$
        - $k = 0$
        - $k > 0$
    b. Representa cada multiplicación en el plano complejo.
    c. ¿Para qué valores de $\boldsymbol{k}$ se contrae el vector? ¿Para qué valores de $\boldsymbol{k}$ se dilata el vector? ¿Para qué valores de $\boldsymbol{k}$ el vector cambia de dirección?

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Las actividades están diseñadas para que entiendan la operatoria básica de números imaginarios, apoyándose en su representación vectorial con herramientas digitales como GeoGebra. Se recomienda que transiten entre las expresiones numéricas y su representación en el plano complejo como un vector, y formular problemas y ejercicios de diferentes niveles de dificultad, como:
   a. Dados los vectores $(-2;\ 6)$ y $(-3;\ -1)$, determinar el módulo de la suma de ambos vectores y representarlos en el plano cartesiano.
   b. Representar gráficamente la suma entre los complejos $z = -2 + 5i$ y $w = 4$.
2. En las actividades relacionadas con conjeturar y verificar las conjeturas, conviene que usen algún software gratuito para elaborar las representaciones gráficas al ponderar un número complejo cualquiera por i^{4n} y por i^{4n+2} para n número natural. Se sugiere promover que visualicen e identifiquen regularidades de casos particulares en un software geométrico, y que después comuniquen la regularidad identificada verbal, simbólica o gráficamente.
3. Es importante también considerar que $z \cdot i^{4n+2}$ dará como resultado $z \cdot i$, y su interpretación geométrica significa que se ha realizado una rotación (en el sentido antihorario) en 90°.
4. En la actividad relacionada con ponderar un número complejo por un escalar k, se espera que comprendan que, si el valor del escalar es $k > 1$, entonces la representación del número complejo se dilata en la misma dirección; si el valor del número escalar es $k < -1$, entonces la representación del número complejo se dilata en dirección contraria; si el valor del número k cumple con la condición $-1 < k < 1$, entonces la representación del número complejo se contrae y la dirección del vector resultante depende del signo del valor k.
5. Podrán relacionar la expresión $z \cdot i^n$ con rotaciones y la adición de números complejos con traslaciones. Así, el profesor puede vincular la operatoria de números complejos con transformaciones isométricas.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Representan la operatoria de números complejos de forma simbólica y en el plano cartesiano.
   - Utilizan los números complejos y sus representaciones pictóricas y simbólicas para encontrar solución a ecuaciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para profesores y estudiantes:

- Suma de vectores
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=qvw7j9eKGdg
- Multiplicación y división de números complejos
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/m/PWufCgwF