

Actividad 1: Resolver problemas que involucren la circunferencia y sus elementos

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes argumenten sobre la veracidad o falsedad de conjeturas y resuelvan problemas de geometría asociados a la circunferencia y sus elementos. En particular, se les presenta el teorema de Johnson y pueden usar las herramientas digitales disponibles para aprender y resolver problemas.

Objetivos de Aprendizaje

OA 4: Resolver problemas de geometría euclidiana que involucran relaciones métricas entre ángulos, arcos, cuerdas y secantes en la circunferencia, de forma manuscrita y con uso de herramientas tecnológicas.

OA a. Construir y evaluar estrategias de manera colaborativa al resolver problemas no rutinarios.

OA d. Argumentar, utilizando lenguaje simbólico y diferentes representaciones para justificar la veracidad o falsedad de una conjetura, y evaluar el alcance y los límites de los argumentos utilizados.

Actitudes

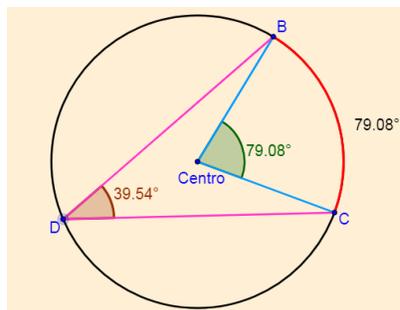
- Aprovechar las herramientas disponibles para aprender y resolver problemas.

Duración: 3 horas pedagógicas

DESARROLLO

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

1. Observa la siguiente imagen y, apoyándote en GeoGebra, responde las siguientes preguntas.



- a. ¿Qué conjetura podrías plantear sobre la medida del ángulo BDC al desplazar el punto D a través de la circunferencia? ¿Cómo podrías argumentarla y validarla matemáticamente?
- b. ¿Qué conjetura podrías plantear sobre la medida del ángulo BDC al desplazar el punto B o C a través de la circunferencia? ¿Utilizaste los mismos argumentos para tu supuesto anterior?

- c. ¿Qué conjetura podrías plantear sobre la relación entre la medida del ángulo BDC y la medida del ángulo BOC? ¿Qué diferencias hay entre las tres conjeturas y sus argumentos?
2. Observa la siguiente imagen y, apoyándote en GeoGebra, responde las siguientes preguntas.

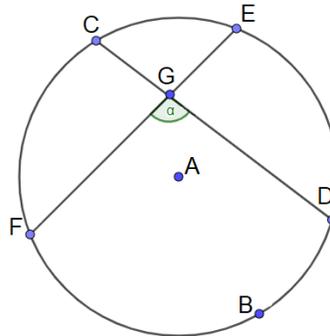
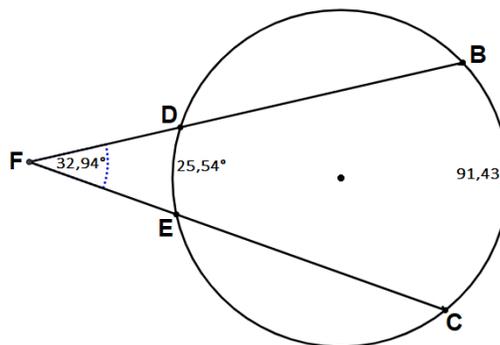


Figura: Imagen de aplicación GeoGebra diseñada para apoyar la actividad.

- a. ¿Qué conjetura podrías plantear sobre la medida del ángulo α y la de los ángulos CGE y DGF?
- b. ¿Se podría afirmar que el doble de la medida del ángulo α es igual a la adición de las medidas de los ángulos CGE y DGF? ¿Qué proposición sustenta tu respuesta?
3. Observa la siguiente imagen y, apoyándote en GeoGebra, plantea conjeturas.



- a. ¿Qué conjetura podrías plantear sobre la medida del ángulo DFE y los arcos de circunferencia DE y BC?
- b. ¿Se podría afirmar que el doble de la medida del ángulo DFE es igual a la adición de las medidas de los arcos de circunferencia DE y BC? ¿Qué proposición sustenta tu respuesta? Explica tu pensamiento y procedimiento a un compañero.

EL TEOREMA DE JOHNSON

Formen grupos y comenten la siguiente información: “La geometría euclidiana está considerada como acabada y se asume que todas las posibles relaciones entre figuras planas y sus elementos ya fueron caracterizadas y sistematizadas hace miles de años por Euclides en su colección de libros *Los elementos*. Pero en 1916, Roger Arthur Johnson (1890-1954) mostró que no era así. Este geómetra estadounidense encontró una relación entre tres circunferencias de igual radio, cuya demostración no se conocía. ¿Será que aún hay relaciones en geometría por descubrir?”.

1. Comenten sobre el enunciado y la conclusión del teorema de Johnson: Dadas tres circunferencias de igual radio, donde todas se intersecan en un mismo punto P, la circunferencia definida por los otros tres puntos de intersección tiene el mismo radio que las anteriores.
2. Observen la siguiente imagen y accedan al archivo GeoGebra, que permitirá manipular las figuras geométricas, conjeturar y responder las interrogantes planteadas.

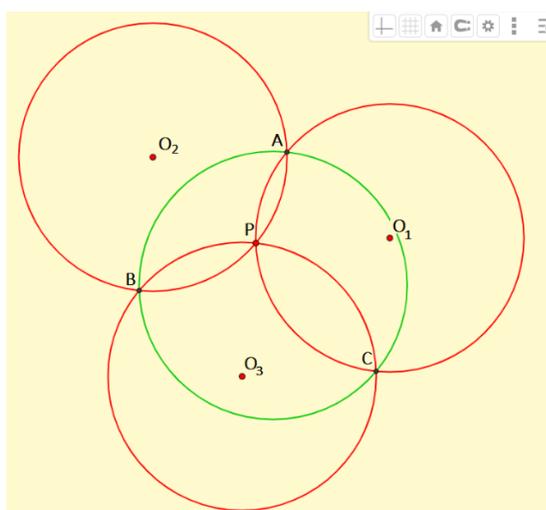


Figura: Esquema del teorema de Johnson.

- a. Las tres circunferencias de color rojo, ¿siempre tienen la misma área? Explica a tu compañero en qué basas tu respuesta.
 - b. ¿Cuántas intersecciones hay entre los tres círculos rojos? ¿Qué características o propiedades pueden señalar de los puntos de intersección A, B y C?
 - c. ¿Qué relación existe entre las tres circunferencias rojas y la verde? Dicha relación geométrica, ¿se cumple siempre? Exploren GeoGebra y justifiquen su respuesta.
 - d. ¿Por qué el círculo verde tiene igual radio que los tres rojos? ¿Cuál es la relación con el teorema de Johnson?
3. Accedan a la siguiente dirección web, donde encontrarán un archivo GeoGebra del teorema de Johnson, y construyan una infografía que permita comprender y explicar la demostración de ese teorema: <https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/m/JZQUnMx2>

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Algunas preguntas para orientarlos a conjeturar son: ¿Cuál es el tamaño de las circunferencias? ¿Qué elementos identifican? ¿Cuántas intersecciones hay entre dos círculos? Describan con sus palabras la posición de las circunferencias y los elementos que tienen en común.
2. Con el teorema de Johnson, se pretende que los jóvenes exploren la relación entre estas tres circunferencias de igual radio, tanto con regla y compás como con un software de geometría dinámica como GeoGebra. Si no pueden trabajar en el laboratorio de computación, se recomienda usar *datashow* con la aplicación diseñada en GeoGebra para esta actividad y apoyar la exploración que realizan con regla y compás.
3. Antes de presentar el teorema, cabe preguntarles cómo construir tres circunferencias tales que todas tengan igual radio y pasen por un mismo punto P. Hay varias formas de responder esto y dependerá de si el punto P se considera dado o no. Conviene que describan cómo lo hicieron y justifiquen por qué cumple con lo solicitado.
4. Para construir la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C, posiblemente intenten usar el punto como centro. Cuando vean que no pueden, se debe discutir sobre cómo armar un círculo a partir de sólo tres puntos.
5. Una circunferencia clave para caracterizar esta relación es la que pasa por los centros de las tres iniciales, pues permitirá demostrar el teorema. Es importante que identifiquen por sí mismos que esta circunferencia de centro P tiene igual radio que las otra tres y justifiquen por qué.
6. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
 - Explican las relaciones métricas entre ángulos, arcos o cuerdas en la circunferencia, utilizando dibujos, esquemas o proposiciones.
 - Justifican el uso de propiedades sobre ángulos, arcos o cuerdas al resolver un problema.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Johnson circles
https://www.curriculumnacional.cl/link/https://en.wikipedia.org/wiki/Johnson_circles
- Roger Arthur Johnson
<https://www.curriculumnacional.cl/link/http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/johnson.html>
- Teorema de Johnson en GeoGebra
<https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.geogebra.org/m/JZQUnMx2>