Actividad 1: Explorar la función exponencial y sus aplicaciones

PROPÓSITO

Se espera que los estudiantes exploren el crecimiento de una bacteria a partir del cambio porcentual constante a medida que transcurre el tiempo, y que actúen de forma perseverante y proactiva para encontrar el modelo matemático que describe la situación. Para esto, se propone que elaboren el modelo a partir de datos de una tabla y de sus conocimientos de álgebra de cursos anteriores, que vinculen sus cálculos con la función exponencial y que luego apliquen el modelo para responder a los problemas planteados.

Objetivos de Aprendizaje

OA 3: Aplicar modelos matemáticos que describen fenómenos o situaciones de crecimiento y decrecimiento, que involucran las funciones exponencial y logarítmica, de forma manuscrita, con uso de herramientas tecnológicas y promoviendo la búsqueda, selección, contrastación y verificación de información en ambientes digitales y redes sociales.

OA e. Construir modelos realizando conexiones entre variables para predecir posibles escenarios de solución a un problema, y tomar decisiones fundamentadas.

OA f. Evaluar modelos para estudiar un fenómeno, analizando críticamente las simplificaciones requeridas y considerando las limitaciones de aquellos.

Actitudes

- Pensar con perseverancia y proactividad para encontrar soluciones innovadoras a los problemas.

Duración: 6 horas pedagógicas.

DESARROLLO

EL CRECIMIENTO LOGÍSTICO Y SU PARTE EXPONENCIAL

1. En condiciones de laboratorio, el número de ejemplares de una población de bacterias crece 10% cada 20 minutos. Al inicio de la observación, a las 8:00 horas, la población tenía aproximadamente $3\,000\,000$ de individuos.

Conexión interdisciplinaria:
Ciencias para la Ciudadanía
OA b, OA c,
3° y 4° medio

a. Completa la siguiente tabla:

Hora	Expresión	Cálculo	Resultado
8:00	$g(0)$	$3\,000\,000$	$3\,000\,000$
8:20	$g(1)$	$3\,000\,000 + 0{,}10 \cdot 3\,000\,000$	$3\,300\,000$
8:40	$g(2)$	$3\,300\,000 + 0{,}10 \cdot 3\,300\,000$	$3\,630\,000$
9:00	$g(3)$		
9:20	$g(4)$		

Tabla 1: Cambio porcentual constante en el crecimiento de bacterias

b. ¿Cuál es la población aproximada de bacterias a las 9:00 horas ($t = 3$)?

c. Reescribe las expresiones $g(1)$ hasta $g(5)$, utilizando el término anterior y factorizando por potencias de 1,10.

$g(1) = 3\,000\,000\ (1 + 0{,}10) = 3\,000\,000 \cdot 1{,}10.$

$g(2) = \ 3\,300\,000\ (1 + 0{,}10) = (3\,000\,000 \cdot 1{,}10) \cdot\ (1 + 0{,}10) = 3\,000\,000 \cdot 1{,}10^2$

$g(3) =$

$g(4) =$

$g(5) =$

Completa la tabla 2 para registrar los cálculos.

Hora	Expresión	Cálculo	Resultado
8:00	$g(0)$	$3\,000\,000$	$3\,000\,000$
8:20	$g(1)$	$3\,000\,000 \cdot 1{,}10^1$	$3\,300\,000$
8:40	$g(2)$	$3\,000\,000 \cdot 1{,}10^2$	$3\,630\,000$
9:00	$g(3)$		
9:20	$g(4)$		
9:40	$g(5)$		

Tabla 2: Cambio porcentual en función del número inicial de bacterias

d. Escribe la función en forma recursiva y de potencia. Describe qué significa cada variable.

e. ¿Cuál sería la población aproximada de bacterias 6 horas más tarde ($t = 18$)?

f. ¿En qué momento se duplica la población de bacterias?

g. ¿Es correcto afirmar que las bacterias duplicarán siempre su población?

GRÁFICA DEL MODELO EXPONENCIAL

1. El siguiente gráfico muestra la situación del crecimiento de las bacterias en la “fase exponencial”.

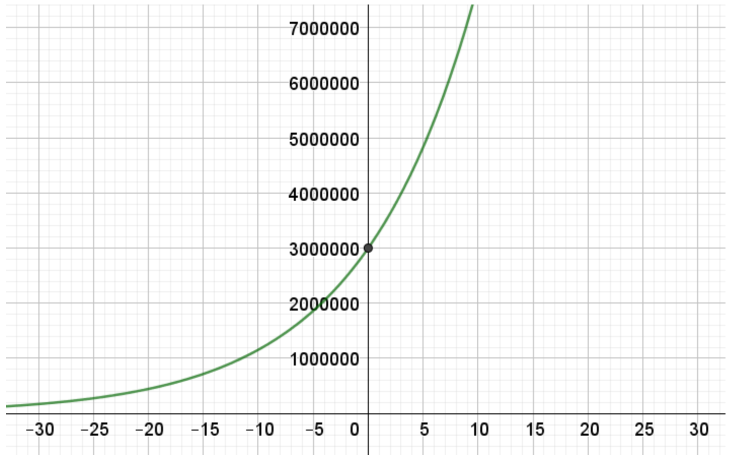


Fig. 1: Gráfico del modelo exponencial

   a. Con un programa, grafica el modelo exponencial $g(t) = 3\,000\,000 \cdot 1{,}10^{t}$ para cada momento t descrito en la tabla. Ajusta la escala en el software convenientemente.

   b. Compara tu gráfico con el mostrado anteriormente: ¿obtuviste puntos o una línea continua?

   c. ¿Dónde cruza el eje Y la función ingresada? ¿Cómo interpretas esto según la situación?

EL CRECIMIENTO DE LAS LENTEJAS DE AGUA

2. Las lentejas de agua *(Lemna minor)* flotan en el agua, tienen raíces pequeñas, se reproducen muy rápido y sirven para tapizar la superficie del agua.

   En entornos naturales como una laguna y en condiciones favorables, pueden mostrar un crecimiento exponencial diario de un 25%.

   a. Al inicio de una investigación, se observa un área de 20 m^2 cubierta de lentejas acuáticas. Construye la función exponencial que representa el crecimiento del área de las lentejas en esa laguna. ¿Cuál es el modelo $g(t) = a \cdot q^{t}$, donde t representa los días?

   b. ¿Qué tamaño tendrá el área cubierta por las lentejas después de 2 semanas?

   c. ¿Qué ecuación o cálculo te permite justificar la respuesta anterior?

   d. ¿Qué tamaño tendrá el área cubierta por las lentejas después de 1 mes? Explica a un compañero los pasos que diste para obtener la respuesta.

   e. Usando GeoGebra, grafica el modelo del crecimiento de la *lemma minor* en este caso y conjetura si este tipo de crecimiento puede convertirse en plaga.

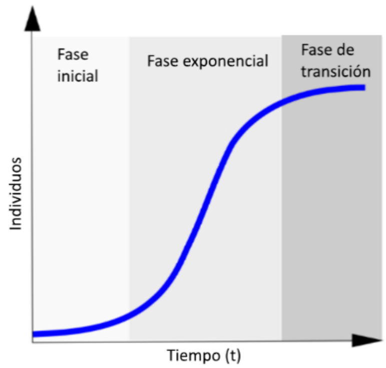
Conexión disciplinar:

Ciencias para la Ciudadanía.

OA f, 3° y 4° medio

d. Si se considera rentable un cultivo de lenteja acuática como fuente sustentable de proteínas vegetales y en una semana el área cultivada se hace 50 veces más grande, determina el factor de crecimiento diario ¿qué indica este factor sobre el cambio de las condiciones de crecimiento? ¿qué puede generar este cambio en el crecimiento de la lenteja?

EL MODELO LOGÍSTICO



1. Enfatizar la demostración algebraica de propiedades del modelo exponencial. Por ejemplo:
   a. Verifica que una función del cambio porcentual constante de la forma$f(t+1) = f(t) + kf(t)$, con $f(0) = 1$, es una función exponencial de la forma f(t) = q^t, en la cual la base q (factor de crecimiento) es igual a $k + 1$.
   b. Verifica algebraicamente que el valor de x_d (en el cual se duplica el valor de la función) es independiente de un cierto x_0 a partir del cual se considera la duplicación del valor funcional.

2. Explora con un compañero un modelo logístico de la forma

$$f(t) = \frac{k}{1 + Ab^{-kt}}$$

El modelo logístico puede explicar varios tipos de fenómenos de la realidad y una de sus fases es el modelo exponencial. Las situaciones son de aumento muy rápido y luego de una estabilidad, por ejemplo, podría ser el caso de una enfermedad por bacterias.

   a. Grafiquen este modelo.
   b. Encuentren una situación que el modelo pueda describir, empleen algún buscador y describan las fases según el modelo.
   c. Realicen variaciones al modelo para que se adapte mejor a la situación que encontraron. Revisen intervalos donde el modelo hace sentido y limiten estos intervalos para ver si "funciona".
   d. Presenten brevemente lo que encontraron a otros grupos, ya sea por medio de un afiche o una presentación breve.

ORIENTACIONES PARA EL DOCENTE

1. Es importante que el estudiante comprenda la función recursiva del modelo de crecimiento $g(t+1) = g(t) + k \cdot g(t)$ y su relación con un cambio porcentual constante. Para ello, hay que reforzar el hecho del significado de k como un porcentaje.
2. Hay que destacar que el incremento se produce cada 20 min. Según esto, $t = 1$ corresponde a las 8:20, mientras que $t = 3$ son las 9:00 y así sucesivamente. La actividad se puede variar en valores, parámetros o intervalos que hagan sentido según el contexto.
3. Se puede agregar otras preguntas que permitan obtener el número de bacterias en diferentes instantes de tiempo. Así se refuerza la comprensión del modelo.
4. El paso del modelo recursivo de cambio porcentual constante al modelo exponencial requiere del manejo algebraico y, particularmente, la factorización. Se necesita hacer el ejercicio con $g(2)$, $g(3)$ y los que sea necesario para que los alumnos comprendan la situación. Lo importante es que puedan plantear el modelo $g(t) = a \cdot q^t$ y luego, usándolo, determinen la cantidad de bacterias en otros instantes y analicen qué valores de la función pueden interpretarse según el contexto y cuáles no. Se requiere apoyar el proceso de factorización para que comprendan hacia qué expresión deben llegar.
5. Se los invita también a ver qué sucede con el tiempo en la duplicación del número de bacterias e investigar si este tiempo es independiente o no del número de bacterias alcanzado en cierto tiempo.
6. Asimismo, se propone un nuevo contexto (plantas acuáticas) en el que pueden aplicar el modelo exponencial encontrado. Esta es otra oportunidad de concebir un crecimiento que, bajo ciertas condiciones, es muy rápido o explosivo y –en el contexto de la *Lemna minor*– puede convertirse en una plaga.
7. Se puede plantear, además, preguntas de mayor análisis que estén enfocadas en un cambio de las condiciones, como en el caso de la última pregunta. Aquí tienen que llegar a una expresión como $g(7) = 20 \cdot 1{,}749^7 = 20 \cdot 50$.
8. Se sugiere los siguientes indicadores para evaluar formativamente los aprendizajes:
   - Utilizan modelos de situaciones de crecimiento y decrecimiento que involucran las funciones exponencial y logarítmica para determinar valores o hacer proyecciones.
   - Construyen modelos de situaciones de crecimiento y decrecimiento que involucran las funciones exponencial y logarítmica para determinar valores o hacer proyecciones.

RECURSOS Y SITIOS WEB

Sitios web sugeridos para estudiantes y profesores:

- Función exponencial
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.wikipedia.org/wiki/Funci%C3%B3n_exponencial
- Crecimiento exponencial y logístico
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://es.khanacademy.org/science/biology/ecology/population-growth-and-regulation/a/exponential-logistic-growth.
- Problema sobre crecimiento exponencial
  https://www.curriculumnacional.cl/link/https://www.youtube.com/watch?v=2vodlQd_Vbc