Matemáticas

Unidad 1

1° Medio

OA 7

Volumen del cono

GUÍA DELESTUDIANTE

Volumen del cono

Palabras clave

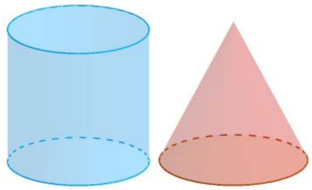
Cono, cuerpo redondo, cilindro, volumen, red del cono recto, red del cilindro recto, conjetura, Arquímedes, aproximación, exhaución.

Preguntas de inicio

- ¿Cómo construir un cono recto en cartulina?
- ¿Qué dimensiones de un cono pueden medirse directamente?
- ¿Cómo obtener las dimensiones de un cono que no es posible medir directamente?
- ¿Con qué volumen conocido se relaciona el volumen del cono?
- ¿Cómo calcular el volumen de un cono?

Presentación

El volumen de un cono se puede obtener utilizando conocimientos anteriores. Éste es un buen ejemplo de cómo en matemática un conocimiento previo sirve de base para uno nuevo.

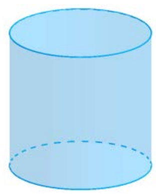
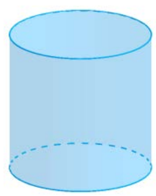
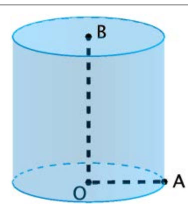
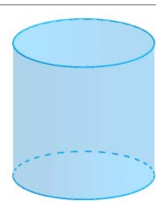
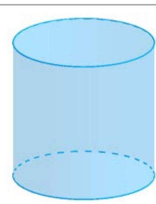


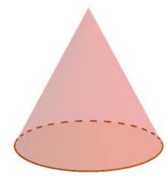
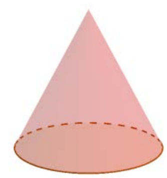
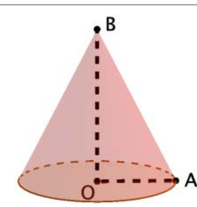
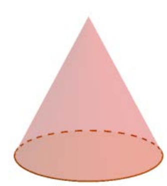
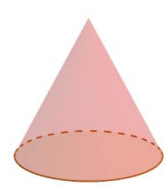
En esta actividad, usaremos cilindros, conos y buscaremos determinar la relación que hay entre ellos.

¡Comencemos!

¿Qué sabemos acerca del cono y del cilindro?

El cono y el cilindro son cuerpos que tienen una forma, propiedades geométricas propias de cada uno. El siguiente cuadro las resume:

El cilindro	
Tiene caras circulares planas y cara lateral qué es curva, también llamada “manto”. Indícalas en la figura.	
¿Cuántas caras tiene un cilindro como el de la figura adjunta?	
En su vista lateral, se ve como un rectángulo. Haz un borrador de la vista lateral del cilindro anterior.	
Tiene altura y radio basal. Indícalos en la figura adjunta.	
Tiene una generatriz. Dibújala en el cilindro adjunto.	
Tiene un eje de rotación. Dibújalo en el cilindro adjunto.	

El cono	
Tiene cara circular plana y cara lateral que es curva, también llamada “manto”. Indícalas en la figura.	
¿Cuántas caras tiene un cono como el de la figura adjunta?	
En su vista lateral, se ve como un triángulo. Haz un borrador de la vista lateral del cono anterior.	
Tiene altura y radio basal. Indícalos en la figura adjunta.	
Tiene una generatriz. Dibújala en el cono adjunto.	
Tiene un eje de rotación. Dibújalo en el cono adjunto.	

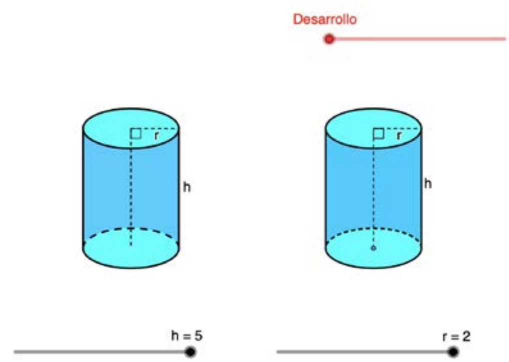
Red del cilindro y del cono

El cilindro y el cono se pueden construir, por ejemplo en cartulina, a partir de figuras recortables planas, las que al ser curvadas y pegadas forman estos cuerpos.

Abre el recurso digital **RED del cilindro**[1].

Cambia su altura y radio basal utilizando los deslizadores rotulados con los mismos nombres.

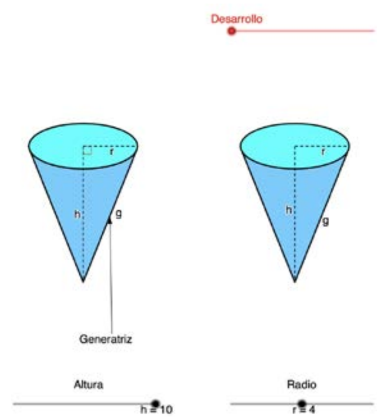
Mueve el deslizador **Desarrollo** para ver la red que forma el cilindro.



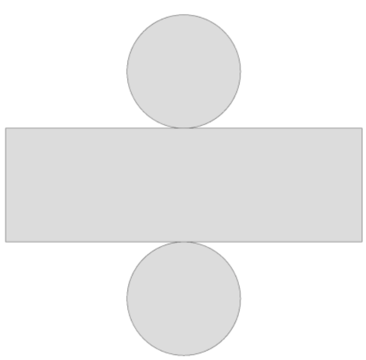
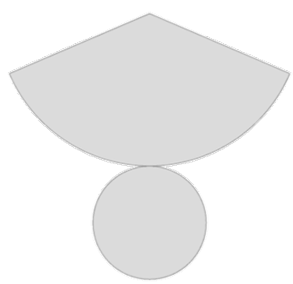
Abre el recurso digital **RED del cono**[2].

Modifica también su altura y su radio basal utilizando los deslizadores correspondientes.

Mueve el deslizador **Desarrollo** para ver la red que forma el cilindro.



En cartulina u otro material similar, construye un cono y un cilindro a partir de las redes de ellos ubicadas en el Anexo al final de este documento. Las siguientes imágenes son miniaturas de estas redes.

Nota que en ambas redes, los círculos de la base son congruentes y al momento de armarse, ambos cuerpostendrán la misma altura. Ambas condiciones son necesarias para el estudio que haremos a continuación.

[1] Recurso digital adaptado de "Desarrollo, áreas y volumen del cilindro", encontrado en la cuenta personal deAntonio Comino en el sitio web de recursos de GeoGebra. Disponible en https://www.geogebra.org/m/BFHkAGXq

[2]Recurso digital adaptado de "Desarrollo, áreas y volumen del cono", encontrado en la cuenta personal deAntonio Comino. Disponible en https://www.geogebra.org/m/BFHkAGXq

El trasvasije desde un recipiente cónico a uno cilíndrico

Para esta actividad, es necesario que hayas construido el cono y el cilindro a partir de las respectivas redes ubicadas en el Anexo de este documento. Será necesario que el cilindro y el cono estén abiertos, es decir, que el cono no tenga su base y que el cilindro tenga sólo una de sus caras basales. La idea es que puedan contener algún material granulado fino que escurra fácil. Por ejemplo, servirá que tengas arena seca o arroz u otro similar.

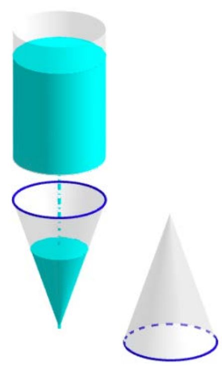
El experimento

1. Rellena el cono con el material granulado hasta que quede rasante.
2. Trasvasija TODO el contenido del cono al cilindro. Asegúrate que quede bien asentado el material dentro del cilindro.
3. Sigue trasvasijando el material granulado de la misma manera indicada en los puntos 1. y 2. anteriores.

¿Cuál es la cantidad mínima de conos que fueron necesarios para llenar el cilindro de forma rasante?

Si tuvieses otro cilindro y otro cono que tienen diferentes dimensiones a los anteriores pero con sus respectivas bases congruentes y con la misma altura, ¿ocurrirá lo mismo con el trasvasije del contenido de este nuevo cono en este nuevo cilindro? Conjetura con tus compañeros una respuesta y escríbela a continuación.

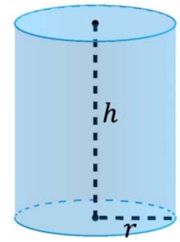
Cuando tú y tus compañeros tengan una conjetura, abran el recurso digital **Volumen cilindro - Vaciado de un cilindro en conos**[3]y corrijan o confirmen su conjetura.



[3] Recurso digital adaptado de "Volumen del cono", encontrado en la cuenta personal de Leopoldo Aranda Murciaen el sitio web de recursos de GeoGebra. Disponible en https://www.geogebra.org/m/c8f4Mg3V

Pasando en limpio

Es probable que anteriormente hayas aprendido que el volumen V_{Ci} de un cilindro recto de altura h y radio r está dado por la expresión:



$$V_{Ci} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

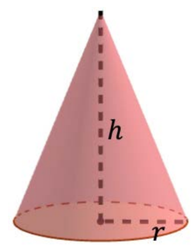
Utilizando lo aprendido en el trabajo realizado en estas actividades, escribiremos la equivalencia hallada entre el volumen de un cilindro (que llamaremos V_{Ci}) y el volumen de un cono (que llamaremos V_{Co}) cuando ambos tienen la misma altura y base:

$$3V_{Co} = V_{Ci}$$

Debido a que conocemos el volumen del cilindro ($V_{Ci} = \pi \cdot r^2 \cdot h$), lo reemplazaremos en la igualdad anterior y despejaremos el volumen del cono V_{Co}, obteniéndose:

$$\begin{aligned} 3V_{Co} &= \pi \cdot r^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \end{aligned}$$

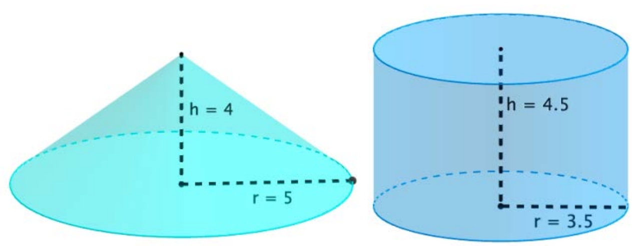
Por lo tanto, el volumen del cono recto de altura h y radio r está dado por la expresión:



$$V_{Co} = \frac{1}{3} \pi \, r^2 \, h$$

Responde

1. Determina el volumen de un CILINDRO de de altura $h = 5$cm y radio basal $r = 3$cm.
2. Determina el volumen de un CONO de altura $h = 3$cm y radio basal $r = 2$cm.
3. Determina el volumen del cilindro y del cono que se muestran en la imagen adjunta.

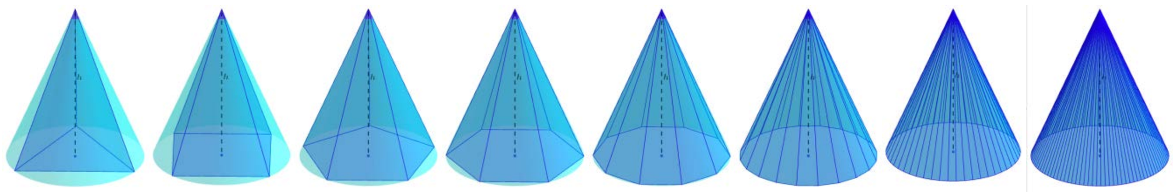


4. Si se tiene un CILINDRO de radio basal 2cm y altura 4cm, determina el volumen del CONO que tiene la misma altura y el mismo radio basal.
5. Se sabe que un cilindro y un cono tienen la misma altura$h$ y el mismo radio basal r. ¿Cuántos conos se necesitan para igualar el volumen de la mitad del cilindro?, ¿y para igualar tres cilindros y medio?

Acerca del cálculo del volumen de cuerpos redondos

El problema de determinar el volumen de un cono, entre otros problemas matemáticos, ha sido estudiado desde hace muchos siglos.

Entre las soluciones que se han ido encontrando, y que no utilizamos en estas actividades, está el **método de exhaución**, el que consiste en realizar una secuencia de cálculos que sean aproximaciones sucesivas de lo que se quiere determinar. En este caso, el método consiste en partir calculando el volumen de una pirámide cuya base es un polígono regular a la que se le va aumentando la cantidad de lados de su base. En cada polígono, el volumen de la pirámide se irá aproximando al volumen del cono respectivo. La imagen siguiente[4] ilustra esto.



Para cerrar

¿Qué hemos aprendido?

El volumen del cilindro y del cono se relacionan cuando ambos tienen la misma altura y el mismo radio basal. Esta relación se puede visualizar con el vaciado del contenido de tres conos en el cilindro, lo que indica que el volumen V_{Co} del cono es un tercio del volumen V_{Ci} del cilindro, lo que lleva a la igualdad$3V_{Co} = V_{Ci}$.

Si con anterioridad se ha estudiado que el volumen de un cilindro circular recto de altura h y radio basal r tiene volumen $V_{Ci} = \pi r^2 h$, entonces, de la igualdad anterior se puede deducir que el volumen del cono circular recto que tiene las mismas dimensiones es $V_{Co} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. La relación$3V_{Co} = V_{Ci}$ y la fórmula del volumen del cono que se deriva de ella ($\frac{1}{3}\pi r^2 h$) es lo central a ser aprendido en estas actividades.

¿Podrías responder las preguntas con que iniciamos esta guía?

Los cuerpos geométricos que se estudian en esta unidad (así como otros objetos de la geometría), pueden ser medidos de diferentes formas, entre ellas, se les pueden medir sus elementos lineales (longitudes), sus superficies (áreas) y la cantidad de espacio que ocupan (volumen). En esta actividad nos centramos en la medición indirecta que podemos hacer del volumen de un cono, a partirdel volumen de un cilindro con misma altura y mismo radio basal.

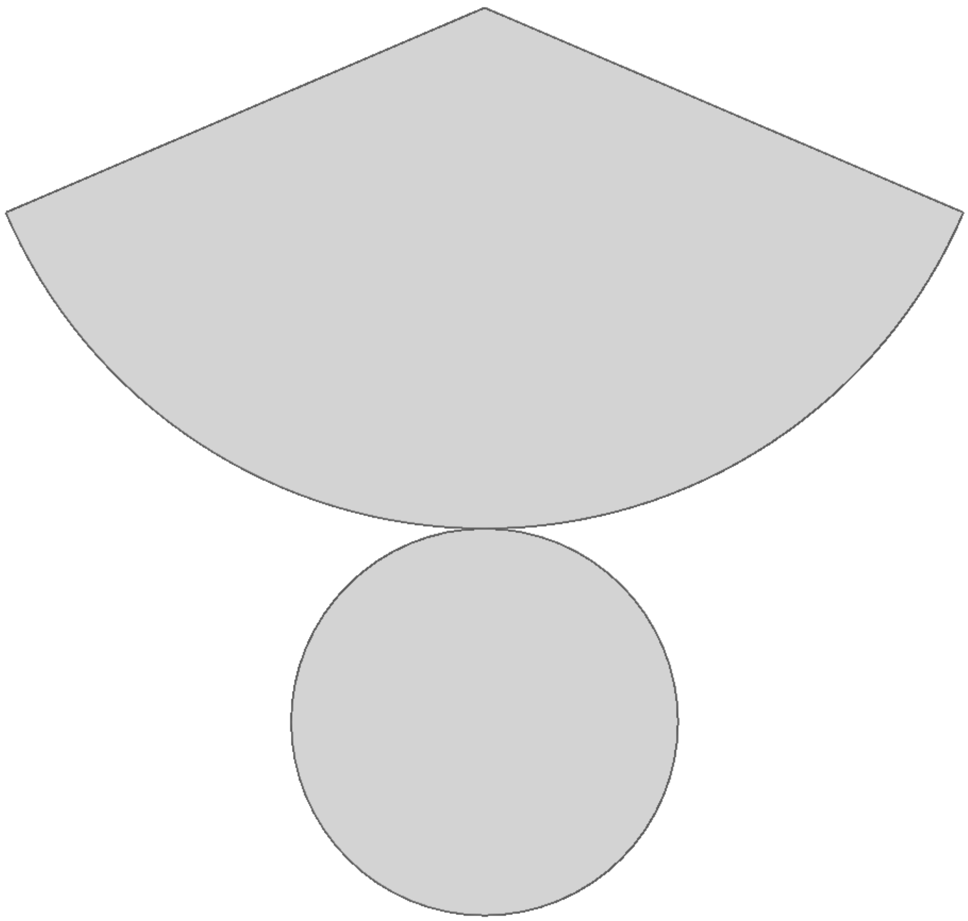
Las preguntas iiniciales son una secuencia propuesta de interrogantes a ser respondidas durante o al final de la clase que utilice estas actividades. Idealmente, se espera que dichas respuestas provengan de los mismos estudiantes.

¡Hasta la próxima!

[4]Imágenes adaptadas del recurso “Volumen y superficie del cilindro y el cono”, encontrado en la cuenta personal deJavier Cayetano Rodríguezen el sitio web de recursos de GeoGebra. Disponible en https://www.geogebra.org/m/gtkyachf

ANEXO

Red del cono.



Red del cilindro