Educación de Adultos

Educación Matemática

Programas de Estudio
Educación Media

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Matemática

Subsector
Educación Matemática

Programas de Estudio
Educación Media de Adultos

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Educación Matemática
Programas de Estudio, Educación Media de Adultos
Educación Media, Unidad de Currículum y Evaluación
ISBN 978-956-292-172-5
Registro de Propiedad Intelectual Nº 168.858
Ministerio de Educación, República de Chile
Alameda 1371, Santiago
Primera Edición Diciembre de 2007

Santiago, diciembre de 2007

Estimados profesores y profesoras:

Desde el año 2000, la Educación de Adultos se encuentra en un proceso de reforma orientado a aumentar su cobertura y mejorar su calidad para responder más adecuadamente a las exigencias de la sociedad y a las características de las personas jóvenes y adultas que acuden a la Educación de Adultos para concluir su escolaridad.

Para alcanzar el desarrollo inclusivo y democrático que nuestro país anhela, Chile debe ofrecer oportunidades educacionales a todos sus habitantes, incluyendo a aquellos que en épocas anteriores tuvieron que abandonar, por diferentes razones, el sistema escolar. Asimismo, Chile tiene el desafío de instalar un sistema de educación permanente que permita a las personas formarse a lo largo de su vida, renovándose o reaprendiendo de acuerdo al dinamismo de la sociedad y del conocimiento. Por ello, la Educación de Adultos tiene una importancia fundamental en el Chile de hoy, más aún considerando que el Estado debe garantizar que cada joven chileno complete al menos 12 años de educación.

Una educación para jóvenes y adultos en los tiempos actuales debe ser una enseñanza de calidad, que responda a las necesidades que las personas tienen tanto en su vida diaria como en el ámbito laboral y social. Como educación permanente, los contenidos de la Educación de Adultos deben estar vinculados con las diversas esferas y etapas en que se desarrolla la vida de cada estudiante.

Los nuevos programas para la Enseñanza Media de Adultos han sido elaborados por el Ministerio de Educación y aprobados por el Consejo Superior de Educación para ser puestos en práctica, por los establecimientos que elijan aplicarlos, en el año 2008. En sus objetivos, contenidos y actividades buscan responder tanto a los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios definidos en el Decreto Supremo N° 239, como a las necesidades de aprendizaje de personas jóvenes y adultas en el momento actual. Al mismo tiempo, constituirán un importante apoyo para el profesor o profesora en su práctica docente.

Estos programas son una invitación a los docentes para mejorar el proceso educativo. Por ello, demandan cambios importantes en las prácticas de profesores y profesoras. Son un desafío de preparación y estudio, de compromiso con la vocación formadora y de altas expectativas frente al aprendizaje de los y las estudiantes.

Esperamos que acepten este reto por mejorar y actualizar los aprendizajes de las personas que asisten a la Educación de Adultos, para que ellas cumplan su esperanza de egresar mejor preparadas para enfrentar las exigencias que les impone el medio en que se desenvuelve su vida.

YASNA PROVOSTE CAMPILLAY
Ministra de Educación

Primer Nivel de Educación Media

Presentación

Como se señala en la presentación del marco curricular para la Enseñanza Media de Adultos, los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media de Adultos han sido elaborados considerando las herramientas y habilidades que los estudiantes adultos y adultas necesitan para comprender su entorno y los tópicos que se presentan en otras áreas del conocimiento, así como también para continuar estudios postsecundarios.

A través de este currículum, traducido pedagógicamente en la propuesta de los programas de estudio para cada ciclo, se busca profundizar el conocimiento y dominio del lenguaje matemático que los adultos y adultas traen tanto de la Educación Básica como de su experiencia de vida. Esto se traduce en una comprensión más profunda de conceptos, estrategias o procedimientos y estructuras matemáticas, llegándose a dominar un lenguaje capaz de describir regularidades y fenómenos que los rodean, más complejos que los vistos en la Enseñanza Básica.

El primer nivel de Educación Media propone inicialmente una actualización y profundización de conceptos relativos a números enteros y potencias de base racional positiva con exponente natural, cuyo dominio constituye un requisito ineludible en la adecuada apropiación del concepto de número real y su posterior aplicación en la resolución de problemas y situaciones en diversos contextos. Es importante que las actividades propuestas para la aplicación de dichos conocimientos matemáticos se realicen, siempre que sea posible y pertinente, en contextos reales y cercanos al mundo adulto, otorgando de esta forma significado al aprendizaje. Posteriormente, el estudio continúa con los temas relativos a álgebra y funciones, probabilidades y conceptos relativos a geometría de semejanza y transformaciones isométricas.

Este programa está constituido por cuatro módulos: Números; Álgebra y funciones; Geometría, y Probabilidades. Una descripción detallada de cada módulo y de las unidades correspondientes se encuentra en la introducción de cada uno de ellos.

Siguiendo las orientaciones del marco curricular, la profundización en la comprensión de conceptos y el desarrollo de habilidades matemáticas obedece a dos grandes aspiraciones. Por un lado, mejorar la capacidad de razonar en forma lógica, desarrollando aspectos tales como el pensamiento deductivo y la argumentación matemática, y por otro lado, fomentar el uso de herramientas matemáticas en el planteo y solución de problemas de la vida cotidiana.

En el desarrollo del programa es importante considerar los conocimientos que las personas jóvenes y adultas poseen a partir de sus experiencias de vida y de sus estudios escolares y sus necesidades. De ese modo, las actividades propuestas pueden ser permanentemente adaptadas, ampliadas, reducidas o complementadas cuando sea pertinente.

Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios

Objetivos Fundamentales

Al término del Primer Nivel de Enseñanza Media, los estudiantes adultos y adultas habrán desarrollado la capacidad de:

1. Reconocer la necesidad de ampliar el ámbito numérico más allá de los números enteros, incorporando los números racionales y los números reales, para estudiar y representar nuevas situaciones.
2. Comprender el significado de potencias de base racional y exponente entero, y utilizar sus propiedades para expresar y operar grandes y pequeñas cantidades en la resolución de problemas.
3. Utilizar un lenguaje algebraico básico que permita establecer relaciones entre variables, verificar propiedades numéricas y representar situaciones de la vida cotidiana.
4. Utilizar funciones lineales, ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones para modelar fenómenos reales provenientes del ámbito científico, cotidiano o del mundo del trabajo.
5. Aplicar conceptos y propiedades asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y transformaciones isométricas en situaciones de la vida cotidiana.
6. Formalizar nociones de estadística descriptiva para analizar y resolver problemas de la vida cotidiana e interpretar información presente en los medios de comunicación,
7. Distinguir situaciones deterministas de aquéllas en las que interviene el azar y aplicar relaciones matemáticas para calcular la probabilidad de un suceso en situaciones de equiprobabilidad.
8. Reconocer la matemática como un lenguaje para describir objetos, información, fenómenos, relaciones, regularidades y modelos que capturan propiedades relevantes de la realidad, de la vida cotidiana y de otras áreas del conocimiento.
9. Profundizar, generalizar y relacionar las herramientas y estrategias matemáticas ya conocidas para modelar la realidad y resolver problemas.

Contenidos Mínimos Obligatorios

I. Números

a. Actualización y profundización de contenidos de la Educación Básica, en relación con:
   - Identificación y uso de números enteros en contextos cotidianos, orden, operatoria, representación en la recta numérica y aplicación a situaciones problemáticas.
   - Potencias con base racional positiva y exponente natural como multiplicación iterada y su aplicación en la resolución de problemas.
   - Las nociones de razón, proporcionalidad directa e inversa, porcentajes, elaboración de tablas y gráficos correspondientes a magnitudes proporcionales y sus usos en diferentes contextos.

b. Identificación y uso de números racionales en contextos cotidianos, representación decimal, orden, operatoria, representación en la recta numérica y aplicación a situaciones problemáticas.

c. Interpretación de potencias de base racional y exponente entero y su utilización en variados ámbitos. Utilización de potencias de base 10 para escribir grandes y pequeños números (con exponentes tanto positivos como negativos), y comparar magnitudes. Deducción de las propiedades de potencias a partir de identificación de regularidades tanto en la multiplicación como en la división.

d. Identificación de números irracionales como números que no pueden ser escritos como un cuociente entre dos números enteros[1]. Representación de algunos números irracionales en la recta numérica. Aproximación de números irracionales y su relación con los números decimales. Reconocimiento de los números reales como la unión de los números racionales e irracionales.

II. Álgebra y funciones

a. Significado y uso de las letras en el lenguaje algebraico, convenciones sintácticas, uso de paréntesis, ausencia del símbolo de la multiplicación entre dos variables. Valorización de expresiones algebraicas y reducción de términos semejantes.
b. Productos de expresiones algebraicas simples obtenidas por aplicación de la propiedad distributiva. Productos notables y su representación geométrica. Factorización de expresiones algebraicas simples.
c. Uso de lenguaje algebraico para demostrar relaciones, verificar y generalizar propiedades numéricas (por ejemplo, representar en forma general la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición.).
d. Reconocimiento de la función lineal y afín en variados contextos, su notación y su gráfica. Resolución de problemas que se modelan mediante funciones lineales y afines.
e. Estudio de problemas provenientes de diferentes contextos que involucren el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Análisis de la pertinencia de la solución.
f. Resolución algebraica y gráfica de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones.

III. Geometría

a. Actualización y profundización de contenidos de la Educación Básica, en relación con:
    - Nociones geométricas tales como: ángulo, rectas, polígonos, perímetro y área de figuras planas, volumen de cuerpos geométricos regulares.
b. Semejanza de figuras planas, dibujos a escala en diversos contextos. Teorema de Thales y algunas aplicaciones a la vida cotidiana.
c. Traslaciones, reflexiones y rotaciones de figuras planas y construcción de figuras por traslación, simetría y rotación en 45º, 90º y 180º. Aplicaciones de las transformaciones isométricas en diversos ámbitos (por ejemplo: la naturaleza, el arte, la arquitectura).

IV. Estadística y probabilidades

a. Actualización y profundización de contenidos de la Educación Básica, en relación con:
    - Nociones de gráfico de barras, gráfico circular, medidas de tendencia central y su uso para analizar y comparar información contenida en conjuntos de datos no agrupados.

1 Con denominador distinto de cero.

b. Interpretación y construcción de tablas de frecuencia de datos no agrupados en intervalos, (frecuencia absoluta, relativa y porcentual) extraídos de contextos cotidianos.

c. Descripción y análisis de juegos de azar sencillos. Cálculo de probabilidades para eventos equiprobables mediante la razón entre casos favorables y posibles (regla de Laplace). Análisis de situaciones de diversos ámbitos donde interviene el azar (por ejemplo, acciones en la bolsa de comercio, resultados de juegos deportivos, etc.).

Organización del programa

Para que los estudiantes adultos y adultas alcancen los Objetivos Fundamentales (OF) y se aborden todos los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO), se ha organizado cada nivel de la Educación Media de Adultos en una estructura curricular modular. Los módulos se definen como bloques unitarios de aprendizaje, de duración variable, que pueden ser aplicados en las diversas modalidades de la Educación Media de Adultos y que en su conjunto abordan la totalidad de CMO del nivel.

Cada módulo considera seis componentes

a. **Introducción,** donde se presenta de manera sintética el propósito del módulo y se dan algunas recomendaciones metodológicas, que sugieren al docente enfoques específicos para tratar los contenidos y las actividades con el fin de optimizar el logro de los aprendizajes en el aula.
b. **Contenidos del módulo,** que corresponden a los Contenidos Mínimos Obligatorios que se abordan en el módulo.
c. **Aprendizajes esperados.** Esta sección es el eje fundamental de la propuesta, ya que en ella se define lo que se espera logren los y las estudiantes, es un listado de aprendizajes concretos, precisos y observables. El programa se construye para realizar estos aprendizajes.
d. **Sugerencias de evaluación,** donde se hacen recomendaciones que buscan orientar al docente en el diseño del proceso de evaluación y, en algunos casos, se entregan recomendaciones metodológicas.
e. **Unidades,** son ordenaciones temáticas breves que abordan parte de los aprendizajes del módulo. Las unidades pretenden ser una orientación pedagógica para el logro de los aprendizajes esperados. En cada unidad se consideran los siguientes componentes:
   - *Introducción*, que explica el foco temático de la unidad y los aprendizajes que en ella se potencian.
   - *Aprendizajes esperados e indicadores de evaluación*. En un cuadro se detallan los aprendizajes esperados que se trabajan en la unidad, señalándose para cada uno de ellos indicadores. Los indicadores corresponden a acciones realizadas por los estudiantes adultos y adultas, observables y verificables en el ambiente educativo, que permiten determinar si se ha logrado el aprendizaje esperado. Los indicadores no son exhaustivos, pero desglosan los aspectos o elementos principales del aprendizaje con el propósito de apoyar la evaluación, ofreciendo al docente un conjunto de elementos que puede observar durante el proceso para conocer si el aprendizaje se logró y en qué medida. Esto busca apoyar al docente para que la evaluación que realice esté directamente relacionada con los aprendizajes relevantes del nivel.
   - *Ejemplos de actividades*, que pretenden ser un apoyo práctico, que aporten ideas del tipo de actividades que se pueden realizar para el logro de los aprendizajes. En las actividades se incluyen sugerencias metodológicas que orientan la realización y el propósito, y son relevantes, porque ponen especial énfasis en la especificidad de la educación de adultos.

f. **Bibliografía.** Al final del nivel se incluye un listado de libros y páginas Web que el profesor o profesora puede consultar para buscar información adicional.

La distribución de horas para el tratamiento de las unidades de cada módulo debiera estar en referencia a las características propias de los estudiantes que se atiende. En el caso de que se asigne un número desigual de horas para cada una de ellas, se debe tener presente el cumplimiento de los aprendizajes esperados para el conjunto del módulo. Sin perjuicio de lo anterior, la carga horaria estimada para este sector en este nivel, en la modalidad educativa presencial tradicional, es de 4 horas semanales en ambas modalidades educativas, Humanístico-Científica y Técnico-Profesional.

El conjunto de módulos y unidades de este nivel se especifican en la siguiente matriz:

Matriz de módulos y sus unidades

Módulos			
I Números y proporcionalidad.	**II** Álgebra y funciones.	**III** Geometría.	**IV** Estadística y probabilidades.
Unidades			
Unidad 1: Actualización de números enteros.	**Unidad 1:** Lenguaje algebraico.	**Unidad 1:** Actualización de conceptos geométricos.	**Unidad 1:** Gráficos estadísticos y medidas de tendencia central.
Unidad 2: Números reales.	**Unidad 2:** Factores y productos.	**Unidad 2:** Semejanza de figuras planas.	**Unidad 2:** Tablas de distribución de frecuencias.
Unidad 3: Proporcionalidad y porcentajes.	**Unidad 3:** Función lineal y afín.	**Unidad 3:** Transformaciones isométricas.	**Unidad 3:** Juegos de azar y probabilidades.
	Unidad 4: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones.		

Módulo I

Números y proporcionalidad

Introducción

El propósito central de este módulo es actualizar los conocimientos acerca de los diferentes conjuntos numéricos que los estudiantes adultos y adultas manejan, y buscar una profundización que tendrá como columna vertebral la resolución de problemas.

Se permite así que las personas del curso continúen con el desarrollo de sus habilidades especialmente en la resolución de problemas, siendo capaces de interpretar adecuadamente la información entregada como así también los resultados obtenidos.

Junto con lo anterior, se busca ampliar el ámbito numérico al conjunto de los números reales encontrándose de esta forma con números imposibles de representar como una fracción y con la experiencia de aproximar números decimales en situaciones cotidianas.

Este módulo está constituido por 3 unidades:

Unidad 1: Actualización de números enteros.
Unidad 2: Números reales.
Unidad 3: Proporcionalidad y porcentajes.

En los niveles anteriores los estudiantes han conocido y operado con números enteros. La primera unidad tiene por finalidad actualizar los conocimientos que los alumnos poseen sobre estos números y profundizar su conocimiento resolviendo situaciones que requieren su operatoria.

La segunda unidad actualiza los conocimientos sobre los números racionales incorporando el conjunto de los números irracionales. De lo anterior se obtiene el conjunto de los números reales como la unión de los racionales e irracionales. Además, se incorporan problemas de notación científica, crecimiento y decrecimiento exponencial.

La tercera unidad actualiza conocimientos relativos a proporcionalidad entre variables, mediante la resolución de situaciones problemáticas y la utilización de lenguaje algebraico. Junto a lo anterior, se incorpora el estudio de diversos problemas relativos al porcentaje y su utilización en la vida cotidiana.

Se propone revisar los temas que se señalan en los Contenidos Mínimos Obligatorios, en la perspectiva de los Objetivos Fundamentales, a partir de situaciones que no sean una simple repetición de las que se abordaron en los niveles anteriores sino, más bien, planteando situaciones que evoquen contenidos y procedimientos, y para profundizar en algunos aspectos que llevan a avanzar tanto en su aprendizaje como en el desarrollo de sus capacidades.

Contenidos del módulo

1. Actualización y profundización de contenidos de la Educación Básica, en relación con:
   - Identificación y uso de números enteros en contextos cotidianos, orden, operatoria, representación en la recta numérica y aplicación a situaciones problemáticas.
   - Potencias con base racional positiva y exponente natural como multiplicación iterada y su aplicación en la resolución de problemas.
2. Identificación y uso de números racionales en contextos cotidianos, representación decimal, orden, operatoria, representación en la recta numérica y aplicación a situaciones problemáticas.
3. Interpretación de potencias de base racional y exponente entero y su utilización en variados ámbitos. Utilización de potencias de base 10 para escribir grandes y pequeños números (con exponentes tanto positivos como negativos), y comparar magnitudes. Deducción de las propiedades de potencias a partir de identificación de regularidades tanto en la multiplicación como en la división.
4. Identificación de números irracionales como números que no pueden ser escritos como un cuociente entre dos números enteros[2]. Representación de algunos números irracionales en la recta numérica. Aproximación de números irracionales y su relación con los números decimales. Reconocimiento de los números reales como la unión de los números racionales e irracionales.
5. Actualización y profundización de las nociones de razón, proporcionalidad directa e inversa, elaboración de tablas y gráficos correspondientes a magnitudes proporcionales y sus usos en diferentes contextos.

2 Considerando que el denominador debe ser distinto de cero.

Aprendizajes esperados del módulo[3] y sugerencias de evaluación

APRENDIZAJES ESPERADOS	SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN
A partir del desarrollo de este módulo se espera que los estudiantes adultos y adultas: • Interpreten información que involucra números enteros y realicen comparaciones entre ellos. • Realicen operaciones con números enteros. • Resuelvan situaciones problemáticas en las que intervienen números enteros. • Reconozcan las propiedades de la adición y la multiplicación de números enteros. • Resuelvan problemas que involucran potencias de base entera y exponente natural.	La evaluación de estos aprendizajes requiere presentar a los estudiantes adultos y adultas diversas situaciones que involucren números enteros, operaciones y sus propiedades. Es importante no sólo comunicar los resultados, sino también los procedimientos utilizados y analizar la pertinencia de los mismos de acuerdo al enunciado.
• Expresen números muy grandes o muy pequeños en notación científica y viceversa. • Resuelvan problemas que implican fenómenos de crecimiento o decrecimiento exponencial. • Aproximen números racionales por redondeo y truncamiento. • Reconozcan los números irracionales como aquellos que no pueden ser escritos en forma de fracción. • Resuelvan problemas en los que intervienen números racionales e irracionales.	Respecto a los problemas de notación científica es necesario proponer contextos motivadores, por ejemplo, magnitudes astronómicas o microscópicas, entre otras. Es importante enfatizar, mediante distintas situaciones de exploración y conjetura, la diferencia entre un número racional y un número irracional. La idea es que esto no sea un mero aprendizaje memorístico. Otro aspecto a considerar es que los estudiantes adultos y adultas manejen con fluidez las distintas representaciones de un número racional y sepan operar con ellas.
• Distingan entre situaciones de variación proporcional y no proporcional y entre situaciones de proporcionalidad directa e inversa. • Resuelvan problemas que implican variación proporcional directa e inversa. • Interpreten representaciones a escala. • Resuelvan problemas que involucran el cálculo de porcentajes.	En la evaluación de estos aprendizajes es necesario presentar diversas situaciones donde los estudiantes identifiquen variables que se encuentran relacionadas en forma proporcional de aquellas que no lo están. En aquellos casos donde exista proporcionalidad, identifiquen si es directa o inversa. Es importante enfatizar en el concepto de proporcionalidad, es decir, productos o cuocientes constantes, de manera de evitar los usuales errores conceptuales. Por ejemplo, "dos variables están en proporción directa si una aumenta y la otra también lo hace". El caso de porcentajes se sugiere revisar como una aplicación de la proporcionalidad directa.

3 A continuación se describen los aprendizajes esperados para este módulo, los cuales se encuentran precisados posteriormente en el desarrollo de cada unidad a través de la descripción de sus respectivos indicadores de evaluación. Se incorporan sugerencias generales para la evaluación. No obstante, para este efecto es muy importante orientarse por los indicadores señalados.

Unidad 1: Actualización de números enteros

Introducción

En esta unidad se retoma el conjunto de los números enteros, proponiéndose una serie de situaciones problemáticas que permiten actualizar la operatoria y uso de los números enteros en contextos cotidianos cercanos a los estudiantes adultos y adultas.

La importancia de esta unidad radica en que consigue ser la unión entre los contenidos tratados en octavo básico y el inicio de la enseñanza media, no siendo una mera repetición de lo visto sino más bien una actualización de los mismos.

En la unidad se sugieren actividades referidas a la interpretación y operación con números enteros, estudio de propiedades y la resolución de situaciones problemáticas que involucren dichos números. En esta unidad, además, se introducen las potencias de base entera y exponente natural, como una manera de actualizar los conocimientos adquiridos en la Educación Básica para continuar en la siguiente unidad con las potencias de base racional y exponente entero.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Interpreta información que involucra números enteros y realiza comparaciones entre ellos.	Cada estudiante: • Interpreta adecuadamente el significado del signo + y – en los números. • Ordena números enteros en variadas situaciones.
• Realiza operaciones con números enteros.	• Suma, resta, multiplica y divide números enteros.
• Resuelve situaciones problemáticas en las que intervienen números enteros.	• Analiza pertinencia de resultados de operaciones en relación con el contexto dado. • Comunica soluciones y describe procedimientos de cálculo.
• Reconoce las propiedades de la adición y la multiplicación de números enteros.	• Aplica la conmutatividad de la adición y de la multiplicación de números enteros. • Aplica la asociatividad de la adición y de la multiplicación de números enteros. • Aplica la distributividad de la multiplicación con respecto de la adición de números enteros.
• Resuelve problemas que involucran potencias de base entera y exponente natural.	• Calcula potencias de base entera y exponente natural. • Encuentra el elemento ausente en la igualdad de una potencia con su valor.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Analizar diversas situaciones en las que se utilizan números enteros. Discutir acerca del significado del signo (–).

Por ejemplo:

a. Una dueña de casa gastaba en promedio $ 8.000 cada semana en las compras de la feria. Actualmente, le faltan $ 2.000 para comprar los mismos productos en la misma cantidad que estaba acostumbrada. ¿Cómo se puede escribir este déficit usando un número entero?

b. Don Claudio, al revisar su informe de cuenta corriente, se da cuenta de que tiene un saldo de $ -123.000. ¿Qué significa esto?

c. En televisión se ha informado que el invierno de 2007 fue uno de los más fríos de los últimos 25 años. En Santiago, en un día, la temperatura mínima registrada llegó a los -5°, y la temperatura máxima sólo alcanzó los 11°. ¿Cuál fue la variación de temperatura de ese día?

d. El equipo de fútbol colista en la tabla de posiciones tiene un registro de 12 goles a favor y 27 goles en contra.
   - Escribir estas cantidades como números enteros.
   - ¿Cuál es la diferencia de goles que tiene el equipo?

Actividad 2

Representar información y establecer comparaciones utilizando una recta numérica. Establecer reglas generales respecto del orden de los números enteros.

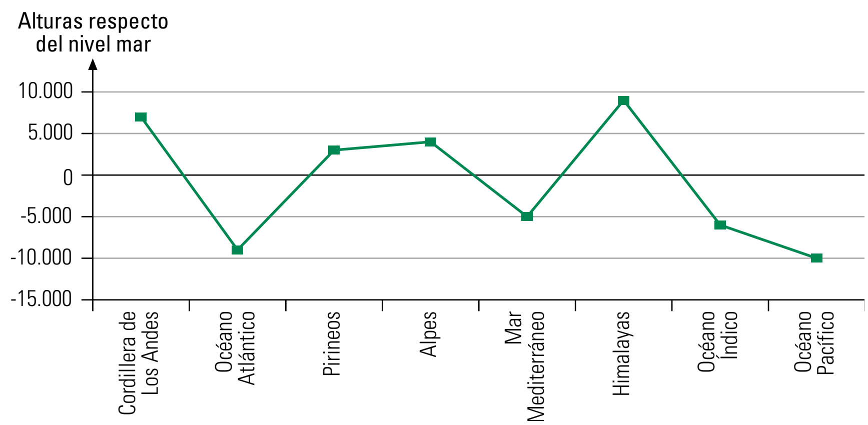
Actividad 3

Resolver problemas que involucran números enteros.

Por ejemplo:

a. A partir de la siguiente información[4].

Alturas máxima de cordilleras y profundidades mínimas de mares y océanos



- ¿Cuántos metros hay aproximadamente entre la cumbre más alta de la Cordillera de los Andes y la mayor profundidad del Océano Pacífico?

b. La siguiente tabla entrega las temperaturas máximas y mínimas de diversas ciudades del mundo, registradas un día del mes de julio:

CIUDAD, PAÍS	TEMP. MÍN / MÁX (EN GRADOS CELSIUS)
Bogotá, Colombia	9 / 19
Santiago, Chile	1 / 11
México, México	12 / 22
Buenos Aires, Argentina	1 / 8
Bassein, Birmania	26 / 28
New Brighton, Nueva Zelanda	6 / 11
La Paz, Bolivia	-4 / 11
Pto. Natales, Chile	-2 / 6
Pta. Arenas, Chile	-2 / 2
Palena, Chile	-1 / 4
Butuan, Filipinas	25 / 33

Fuente: www.espanol.weather.com

4 Gráfico tomado y traducido de Van Dieren,Thomas, Françoise et al., *Mathématiques 1. De question en question*, Didier-Hatier, Bélgica, 1993.

- ¿Qué ciudad presenta la menor oscilación térmica?
- ¿Qué ciudad presenta la mayor oscilación térmica?
- ¿Cuál es el promedio de las temperaturas máximas de las ciudades informadas? ¿Y de las temperaturas mínimas informadas?

c. El siguiente cuadro muestra la diferencia horaria entre Chile y algunos países del mundo. Para estimar la hora en otros países, se debe sumar o restar a la hora chilena la cantidad de horas que aparecen en este cuadro:

PAÍS	INVIERNO	VERANO	PAÍS	INVIERNO	VERANO
Alemania	+6	+4	Holanda	+6	+4
Argentina	+1	0	Inglaterra	+5	+3
Australia	+14	+14	Israel	+7	+5
Austria	+6	+4	Italia	+6	+4
Bélgica	+6	+4	Japón	+13	+12
Bolivia	0	-1	México	-1	-3
Brasil	+1	+1	Nicaragua	-2	-3
Chile Insular	-2	-2	Noruega	+6	+4
Colombia	-1	-2	Nueva Zelanda	+16	+16
Dinamarca	+6	+4	Panamá	-1	-2
Ecuador	-1	-2	Paraguay	0	0
España	+6	+4	Portugal	+5	+3
EEUU California	-3	-5	Suecia	+6	+4
EEUU Nueva York	0	-2	Suiza	+6	+4
Francia	+6	+4	Taiwán	+12	+11
Grecia	+7	+5	Venezuela	0	-1

Fuente: Guía Comercial 2006-2007, Telefónica Chile.

- ¿Qué hora es en verano en Venezuela cuando en Chile son las 17:00 hrs.? ¿Y en invierno?
- ¿Qué hora es en invierno en México cuando en Chile son las 11:00 a.m.? ¿Y en verano?
- ¿Qué hora es en Australia cuando en Chile son las 08:00 a.m.?
- Si tomaras un avión en Santiago a las 08:00 a.m. y viajaras a Isla de Pascua en 2 horas, ¿a qué hora llegarías a la Isla de Pascua según la hora insular?

- Un viaje desde Chile a Japón dura aproximadamente 29 horas. Si en invierno salieras a las 09:00 a.m. del aeropuerto de Santiago con destino a Japón y no modificaras tu reloj. Al llegar a Japón ¿qué hora marcaría tu reloj? ¿Qué hora sería en realidad en Japón?
- Si en verano la selección chilena de fútbol jugara en Francia un partido con la selección de ese país a las 20:00 horas, ¿a qué hora comenzaría el partido de fútbol en Chile?

Actividad 4

Resolver ejercicios en los cuales es necesario aplicar el orden de las operaciones y las reglas de los signos.

Por ejemplo:

Determina el valor de los siguientes ejercicios:

a. $-8 + 10 - 3 - 4 + 5 =$

b. $(-2) + (-4)\ ((-3) + 8) =$

c. $-(-10) \div (-5) - 2{\cdot}(-1) + -3 \cdot 2 =$

d. $(6 + (-9)\ ) \cdot [(-5) + (-2) \cdot (3 + (-1))] =$

e. $(-17) \cdot (-3) \cdot 0 - (4{\cdot}9) \div (-4) =$

Actividad 5

Reconocer propiedades de los números enteros.

Por ejemplo:

Establecer que la multiplicación de números enteros al igual que en el caso de la adición de números naturales es conmutativa, asociativa y distributiva con respecto de la adición.

Actividad 6

Expresar y calcular potencias de base entera y exponente natural.

Por ejemplo:

La Sra. Teresa, al revisar su correo electrónico, se encontró con un mensaje de buena fortuna, creado y enviado por una amiga. Para que este mensaje tuviera éxito, la Sra. Teresa debía pedir un deseo y mandarle el mismo mensaje de buena esperanza que ella recibió a dos amigos(as) más. Así su deseo se cumpliría.

a. La Sra. Teresa aceptó sus condiciones y luego de pedir su deseo, lo mandó a dos amigos suyos. Si sus dos amigos aceptan entrar a la cadena del mensaje, ¿a cuántas nuevas personas le llegará el mensaje?

b. Si la Sra. Teresa es la primera persona del mensaje, hacer un esquema (dibujo) de cómo se comporta esta cadena. Luego, expresarla en forma de potencia.

c. Si la cantidad de mensajes hubieran sido 3 y no 2, ¿cuántos mensajes en total se habrían mandado entre la Sra. Teresa, sus amigos y los amigos de éstos?

d. Si la cantidad de mensajes hubieran sido el doble de los iniciales, ¿cuántos mensajes en total se habrían mandado entre la Sra. Teresa, sus amigos y los amigos de éstos?

Sugerencias metodológicas

En la actividad 1, el apoyo en situaciones concretas es fundamental para lograr una adecuada comprensión de los números enteros. En cada caso es conveniente que identifiquen el signo, punto de referencia u origen y magnitud que representan.

La actividad 2 tiene por objetivo establecer las reglas generales respecto del orden de los números enteros apoyándose en una recta numérica, reconociendo que los números que están a la derecha son mayores que los que están a la izquierda. Se sugiere proponer actividades similares con información que involucre números fraccionarios o decimales positivos y negativos como es el caso de las temperaturas.

En la actividad 3, se persigue que los estudiantes adultos y adultas analicen el significado del signo de números luego de operar con ellos y que comprendan que utilizados en algunos contextos, el signo indica la posición en función a un referente arbitrario.

Tanto en la actividad 3 como en la 4, es importante resaltar que en las propiedades y en los procedimientos de cálculo con números enteros no se producen grandes cambios en relación con lo que las personas del curso ya conocían de la operatoria con números naturales.

Los estudiantes adultos y adultas se encuentran familiarizados con la adición con números naturales y saben cómo operar con ellos. Teniendo como base ese aprendizaje pueden poner a prueba el comportamiento de la adición con números con signo. Conviene realizar diversos ejercicios observando el comportamiento de las propiedades de la adición con números enteros. Es importante analizar preguntas como “¿es posible sumar o restar números no importando el orden en que se encuentren?”, y analizar esta situación a partir de los resultados, porque son distintos. ¿Qué significado tiene el cero en este nuevo ámbito numérico? Se puede abordar el opuesto de un número planteando preguntas tales como: “En el estado de cuenta de Andrea aparecen $–15.000, ¿cuánto dinero tiene que depositar para pagar su deuda y quedar con $0?”. “Cobreloa tenía 2 goles a favor y después del último partido tiene 0 goles a favor y 0 en contra, ¿ganó el último partido o lo perdió, por cuántos goles?”.

Los procedimientos de cálculo para la multiplicación y división con números enteros son similares a los empleados con números naturales. Es conveniente revisar y aplicar las reglas que permiten resolver las operaciones y, particularmente, los signos resultantes luego de operar.

Es importante, además, que las personas del curso puedan comunicar no sólo las soluciones a determinados problemas sino, también, los procedimientos utilizados.

Del desarrollo de la actividad 5 es importante resaltar que en las propiedades y en los procedimientos de cálculo con números enteros no se producen grandes cambios en relación con lo que los estudiantes adultos y adultas ya conocían sobre la operatoria con números naturales.

En la actividad 6, el profesor o profesora debe propiciar el uso de las propiedades de potencias, buscando números que no sean fácilmente calculables por los y las estudiantes para así generar la necesidad del uso y aplicación de las propiedades. Junto con lo anterior, es importante destacar que las propiedades no deben ser abordadas de manera única en un ejercicio, es decir, deben aplicarse dos o más en un mismo ejercicio buscando su interacción e interrelación.

Unidad 2: Números reales

Introducción

En esta unidad se abordan situaciones y problemas que permiten a cada estudiante evocar conceptos y procedimientos que se comenzaron a trabajar en niveles anteriores, especialmente los relacionados con los números racionales.

De manera particular, se abordan fenómenos de crecimiento y decrecimiento exponencial insertos en contextos cotidianos, de manera que los estudiantes adultos y adultas tengan la posibilidad de inferir conjeturas y probar sus hipótesis de trabajo en forma práctica, logrando así un avance cualitativo en el repertorio de habilidades matemáticas.

Por otro lado, se retomará la utilización de potencias de 10 con exponente entero y la manera en que éstas se inscriben dentro de la notación científica para expresar grandes y pequeños números.

Junto con lo anterior, en esta unidad se presentan los números irracionales como aquellos números imposibles de representar como una fracción, ampliando así el ámbito numérico que poseen los estudiantes para lo cual es necesario que las personas del curso consideren la calculadora como instrumento de apoyo.

Finalmente, los números reales serán presentados como el sistema numérico más amplio en el que los estudiantes adultos y adultas pueden situarse, siendo capaces de realizar cálculos y resolver diversas situaciones problemáticas en las cuales es conveniente realizar aproximaciones, por redondeo o truncamiento de los números involucrados.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Resuelve problemas en los que intervienen números racionales.	Cada estudiante: • Compara números racionales tanto en su forma fraccionaria como decimal. • Transforma satisfactoriamente una fracción a decimal y viceversa. • Suma, resta, multiplica y divide números racionales. • Comunica soluciones y describe procedimientos de cálculos.
• Expresa números muy grandes o muy pequeños en notación científica y viceversa.	• Expresa adecuadamente en notación científica diversos números racionales. • Expresa como número racional números escritos en forma científica.
• Resuelve problemas que implican fenómenos de crecimiento o decrecimiento exponencial.	• Expresa cantidades como potencias de base racional y exponente entero. • Identifica adecuadamente situaciones de crecimiento exponencial o decrecimiento. • Realiza inferencias correctamente. • Comunica soluciones y describe procedimientos de cálculos.
• Aproxima números racionales por redondeo y truncamiento.	• Redondea y trunca números decimales en diferentes contextos.
• Reconoce los números irracionales como aquellos que no pueden ser escritos en forma de fracción.	• Identifica números irracionales y los distingue de los racionales. • Identifica las raíces cuadradas que dan origen a los números irracionales. • Construye trazos que admiten como medida algunas raíces. • Ubica algunos números irracionales en la recta numérica. • Intercala números irracionales entre dos números reales dados.
• Resuelve problemas en los que intervienen números irracionales.	• Aproxima números infinitos no periódicos mediante defecto y exceso. • Usa la calculadora para obtener distintas aproximaciones de números irracionales.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Resolver problemas en los cuáles es necesario comparar números racionales de igual unidad de medida.

Por ejemplo:

a. Juan compra en el supermercado $\frac{1}{8}$ de kilogramo de aceituna, $\frac{3}{4}$ de kilogramo de queso, $\frac{4}{5}$ de kilogramo de jamón y $\frac{1}{2}$ kilogramo de pepinillos.

- ¿De qué alimento compró más cantidad de kilogramos y de cuál menos?
- ¿Cuántos kilogramos más compró de queso si lo comparas con la compra de aceituna?

b. Esteban es el responsable de comprar las bebidas del paseo anual, para lo cual se le encargó que comprara 8 litros de bebida de fantasía, 7 litros de agua mineral y 8 litros de jugo natural. Estando en el supermercado decide comprar 5 envases de bebida de fantasía de 1 litro y medio; 3 envases agua mineral de 2 litros y medio; 4 envases de jugo natural de litro y medio.

- ¿Logró comprar la cantidad de agua mineral requerida?
- ¿Alcanzó a comprar los 8 litros de jugo natural?
- Realiza un esquema en que se representen los tres tipos de bebidas (fantasía, agua mineral y jugo natural) de manera comparativa y responde: ¿De cuál bebida compró más litros?

Actividad 2

Resolver problemas que involucran uso de racionales, su representación como decimales o fracciones, y la necesidad de operar con ellos.

Por ejemplo:

a. Una casa comercial, por cierre de su local, lanza todos sus productos a mitad de precio. ¿Cuánto cuesta un vestido que tenía un valor inicial de $12.990?

b. En la sección de quesos y cecinas de un supermercado, se encuentra en oferta un queso de una determinada marca. La oferta consiste que por la compra de 1 kilogramo de queso, hay de regalo $\frac{1}{8}$ de kilogramo.

- ¿Cuánto queso de regalo se lleva una persona que compra 2,5 kilogramos de queso?
- Si un cliente, al comprar sólo 1 kilogramo, no quiere $\frac{1}{8}$ de kilogramo de regalo y pide que le hagan el descuento equivalente en el precio cobrado. ¿Cuánto queso, del kilogramo, pagó finalmente?

Actividad 3

Resolver situaciones en las que intervienen números muy grandes o muy pequeños, utilizando la notación de potencias para expresarlas y hacer cálculos.

Por ejemplo:

a. Sabiendo que la velocidad de la luz es de 300.000 $\frac{km}{s}$.

- Expresar en notación científica la velocidad de la luz.
- Expresar en notación científica la velocidad de la luz pero ahora en $\frac{m}{s}$.
- Calcular la distancia recorrida por un haz de luz en el espacio durante un año y exprésala en kilómetros.
- Calcular la distancia, en kilómetros, que hay entre la Tierra y una estrella que se encuentra a 3,5 años luz. (Año luz es la distancia que recorre la luz en un año y equivale aproximadamente a $9{,}46 \cdot 10^5$ m.).

b. Expresar en notación decimal las siguientes cantidades:

- El grosor de un cabello humano que mide aproximadamente $2 \cdot 10^{-2}$ cm.
- Peso promedio aproximado de una mosca es $7{,}3 \cdot 10^{-5}$ cm.
- La basura generada en Chile el año 2003, según la CONAMA fue aproximadamente $6{,}132 \cdot 10^9$ kg.
- La masa de un protón es aproximadamente $1{,}67262 \times 10^{-27}$ kg.
- Masa del Sol es aproximadamente $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg.
- Masa de la Tierra es aproximadamente $5{,}9660 \cdot 10^{24}$ kg.

Actividad 4

Resolver problemas de crecimiento y de decrecimiento exponencial.

Por ejemplo:

En un laboratorio se cultivan bacterias en una probeta. Se constata que bajo ciertas condiciones de iluminación y de alimentación el número de bacterias se duplica cada día.

Suponiendo que el primer día hay una bacteria. Completa la tabla de la evolución de la población de bacterias en los 8 primeros días:

Nº DÍAS	1	2	3	4	5	6	7	8
Población								

a. ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 10, 12, 14 días?

b. ¿Cuál es la población de bacterias al cabo de *n* días?

Actividad 5

Resolver problemas que involucran la aproximación de un número decimal.

Por ejemplo:

a. Alicia y su marido desean comprar un departamento que posea dos o tres dormitorios, llegando a la conclusión de que lo más conveniente es aceptar la oferta de 2.200 U.F.:

- ¿A cuánto asciende el valor del departamento en pesos?, si consideramos que el valor de la U.F. en cierto día es de $19.469,20.
- ¿A cuánto asciende el valor si desean tener una idea aproximada a la unidad de millón?
- Si para financiar la compra del departamento, solicita un préstamo hipotecario a 20 años:
  - ¿Cuántas U.F. debe pagar mensualmente por concepto de dividendo?
  - En pesos, ¿cuánto deben pagar mensualmente? (usar valor U.F. anterior ($19.469,20)).

b. La siguiente tabla muestra el número de llamadas y minutos de comunicación de larga distancia nacional para teléfonos de red fija:

AÑO	N° DE LLAMADAS (MILES)	MINUTOS HABLADOS (MILES)
2000	755.175	2.515.680
2001	783.169	2.470.347
2002	809.572	2.213.602

Fuente: "Compendio estadístico 2003 del INE".

- ¿Cuál es el promedio de llamadas en el periodo 2000 y 2002?
- ¿Cuántos minutos en promedio se habló en cada llamada el año 2002?
- Aproximar a la unidad de millón más cercana la cantidad de minutos hablados en cada año para luego calcular un promedio estimado de minutos hablados entre el periodo 2000 y 2002.
- Calcular la cantidad total de minutos hablados entre el periodo 2000 y 2002, pero ahora, truncando la cantidad de minutos hablados en cada año a la centena de mil más cercana.

Actividad 6

Identificar números irracionales en la vida cotidiana.

Por ejemplo:

El número áureo, representado por la letra griega Φ (Phi, se lee "fi", en honor al escultor griego Fidias), es un número irracional que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887\ 4989484820\ 4586834365\ 6381177203\ 09179805 \ldots$$

Una de las majestuosidades griegas es el Partenón, en Atenas (creado el siglo V a.C.):

Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo

En esta obra, la razón entre las medidas de su base y su alto, del alto del techo y el alto de sus columnas y de otras que se pueden deducir de la imagen, dan como resultado el número áureo.

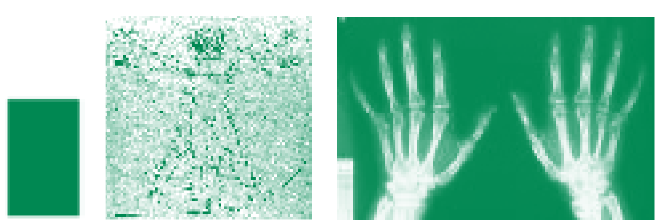
El número áureo es un número que se encuentra en diferentes situaciones, como en el arte, siendo la obra maestra de Leonardo Da Vinci, en su cuadro de la Gioconda o Monalisa su más difundida aplicación, ya que Da Vinci utilizó rectángulos áureos para plasmar el rostro de la Monalisa.

Fuente: **http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo**

En el cuerpo humano el número áureo aparece en muchas medidas.

Calcular el valor de las siguientes razones:

- Entre la altura total de una persona y la altura a la que se encuentra su ombligo.
- Entre la distancia del hombro a los dedos de un brazo y la distancia del codo a los dedos.
- Entre la altura de la cadera y la altura a la rodilla.
- Entre la medida del primer hueso de los dedos (metacarpiano) y la medida de la primera falange, o entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera.
- Entre la medida del largo de la boca y la medida del largo de la nariz.



Fuente: **http://descartes.cnice.mecd.es/Geometria/belleza/canonaureo.htm**

¿Qué valor se obtiene, en cada una de ellas? Considerando los errores de medición, ¿es un valor aproximado de Phi?

Actividad 7

Aproximar números decimales e irracionales por defecto y exceso.

Por ejemplo:

a. Al pensar en películas largas todos nos acordamos de inmediato de “Lo que el viento se llevó”, un clásico que parecía no tener fin. Sin embargo, queda muy lejos de la película de mayor duración de todos los tiempos. Y es que la película más larga de la historia dura nada menos que 5.220 minutos; es decir, 87 horas. Su título es “The cure for insomnia”, que traducido quiere decir “El remedio contra el insomnio”, lo que da una idea de su contenido. Tenía solo un actor en pantalla, Lee Groban (un poeta y artista visionario), y fue rodada en 1986, bajo la dirección de John Henry Timmis.

Fuente: **http://noticiasinteresantes.blogcindario.com/2007/01/00470-la-pelicula-mas-larga-de-la-historia-duraba-87horas.html**

En este caso particular es fácil determinar la duración de la película, pero en casos como:

- La película “El hombre araña 3”, dura 156 minutos, ¿cuánto tiempo mínimo en horas, nuestros hijos estarán dentro de una sala de cine?
- La película “Harry Potter y la orden del Fénix”, dura 145 minutos, ¿cuánto tiempo mínimo en horas, nuestros hijos estarán dentro de la sala de cine?
- La película “Piratas del Caribe 3”, dura 168 minutos, ¿cuánto tiempo mínimo en horas, nuestros hijos estarán dentro de una sala de cine?

Fuente: **http://www.cinehoyts.cl/**

b. Tres hermanos, luego de recibir una herencia, deben repartirse 7 hectáreas (há) de terreno en partes iguales. ¿Cuántas há, aproximadamente, tocará a cada uno de ellos?

c. La Ruta del Vino del valle de Colchagua, es el primer circuito turístico del vino creado en Chile, en el año 1996. Desde la oficina central, en la ciudad de Santa Cruz, se organizan, coordinan, venden y operan los tours a las principales viñas de la zona, así como también trabajan a través de los más importantes operadores turísticos del país.

Fuente: http://www.rutadelvino.cl/mapa.html (adaptación).

Frente a este tipo de panorama turístico, la familia Millar, con domicilio en Santiago, hace sus averiguaciones y se informa de que la distancia entre Santiago y Rancagua es de 84,13 km y la distancia entre Rancagua y San Fernando es de 54,13 km. Con esto planifican un viaje por un día. Si su automóvil tiene un rendimiento de 12,7 kilómetros por litro de bencina, ¿cuánta bencina deben tener, como mínimo, para ir y volver a San Fernando?

d. Sabiendo que $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$. $\sqrt{3}$ no puede ser mayor que $\sqrt{4}$, o sea, mayor que 2. Luego $\sqrt{2}$, no puede ser mayor que $\sqrt{3}$. Aplicando la definición de raíz cuadrada: “la raíz cuadrada de un número x es aquel número no negativo que multiplicado por sí mismo es x”; $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ deben estar entre 1 y 2. Calcular algunas cifras decimales para ambas raíces.

Actividad 8

Completar secuencias de números donde los números irracionales están involucrados.

Por ejemplo:

En la siguiente serie numérica, se puede observar que cada número se obtiene sumando los dos números que le anteceden:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...

Esta serie de números se conoce como la sucesión de Fibonacci, quien fue su descubridor, y corresponde a una famosa serie, ya que en ella se puede descubrir el número áureo.

a. ¿Cuáles son los siguientes tres términos de esta sucesión?

b. Al dividir dos términos consecutivos de la sucesión, siempre el mayor sobre el menor se obtienen los siguientes resultados:

$\frac{1}{1} = 1;$

$\frac{2}{1} = 2;$

$\frac{3}{2} = 1,5;$

$\frac{5}{3} = 1,6666\ldots$

Al seguir este proceso de división entre los términos de la sucesión:

c. ¿A qué número se acerca o se parece el obtenido?

d. ¿Es un número racional o irracional?

Actividad 9

Resolver problemas que involucran números irracionales.

Por ejemplo:

Fernanda desea comprar un televisor y se acerca al vendedor, éste le explica que los televisores se clasifican según la medida de la diagonal de sus pantallas, en pulgadas. Además le informa, que la marca ofrecida por la tienda tiene medidas de pantalla real. Fernanda entonces se dirige al televisor que más le gustó y obtiene los siguientes datos de la medida de la pantalla: 42 cm de largo y 32,88 cm de ancho. Si 1 pulgada equivale a 2,54 cm, ¿cuántas pulgadas tiene el televisor que eligió Fernanda?

Sugerencias metodológicas

La primera actividad tiene como propósito que los estudiantes adultos y adultas recuerden métodos para comparar números racionales, por ejemplo, igualando denominadores y comparando los numeradores. Pueden analizar sus procedimientos y confirmar su conclusión comparando los decimales que se obtienen al dividir el numerador por el denominador en cada una de las fracciones. En el caso de trabajar con números decimales, es conveniente recordar un procedimiento similar al empleado con los números naturales: ir comparando cada dígito comenzando por la izquierda del número.

En la medida en que se va trabajando con números racionales, es importante mencionar que éstos aparecen con frecuencia en diversas situaciones de la vida diaria, por lo tanto, es conveniente extraer los ejemplos desde los contextos en que se presenten.

Es importante que a través de diversos ejemplos, las personas del curso comprendan que los números racionales pueden ser escritos de diversas formas. Por ejemplo, el número racional $\frac{3}{4}$, puede ser escrito como $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{75}{100} = 0{,}75 \quad 0{,}750 = 0{,}7500$, etc. También todo número racional puede escribirse en forma decimal periódica, además de que todo número entero puede escribirse como un decimal con período cero.

Se recomienda el uso de calculadora. Sin embargo, es necesario hacer notar que la mayor parte de las calculadoras no operan directamente con fracciones, lo que implica previamente transformar las fracciones en números decimales, considerando el margen de error que se produce en cada caso.

En la actividad 4 se muestra que situaciones de crecimiento exponencial posibilitan el uso de tablas, las que entregan a los estudiantes adultos y adultas una herramienta práctica y sencilla para registrar la información, como así también una metodología de trabajo científico que permite generar conjeturas.

Se sugiere utilizar para este tipo de registro la siguiente tabla:

Día	0	1	2	3	4	5	....
Población	1	2	4	....	....	....	....
Población escrita como potencia	...	...	2^2	2^3	....	....	....

Por otro lado, sería conveniente analizar la situación práctica de decrecimiento exponencial, por ejemplo la que se obtiene al plegar por la mitad en forma sucesiva una hoja de papel, calculando así, ¿cuál sería, en teoría, el grosor de la hoja obtenida, al cabo de n dobleces?

En la actividad 5 el profesor o profesora debe dejar en evidencia con este tipo de situaciones que requieren diferentes cálculos, y donde debamos utilizar números decimales o números irracionales, se hace necesario aproximar. Se puede investigar el origen de la U.F., para qué se implementó y cuándo, etc. Enriqueciendo el bagaje cultural e informativo de las personas del curso.

Es importante que reconozcan a los números irracionales como aquéllos que no pueden ser escritos en forma de fracción, tal como es el caso de las raíces o del número Phi. Un error bastante difundido es clasificar a los números irracionales fijándose en el desarrollo decimal de los números. La calculadora sólo muestra algunas cifras decimales, ya que ésta trunca las cifras. Por ejemplo: 0,47826086956521739130434782608696... (que corresponde al dividir 11 por 23) tiene un período de 22 cifras, sin embargo, una calculadora común y corriente entrega sólo las 11 primeras cifras lo que podría hacer pensar que es un número sin período y por lo tanto irracional.

La actividad 6, en particular, tiene como propósito que los estudiantes reconozcan que los números irracionales se encuentran en la vida diaria más de lo que ellos se imaginan. Generalmente en la educación media estos números pasan inadvertidos por los estudiantes ya que generalmente se estudian los racionales, se mencionan los irracionales y se pasa al estudio de los reales.

Es importante que el profesor o profesora deje en evidencia la incorporación de los números irracionales en el mundo cotidiano y de manera particular el número áureo o de oro. Es un número que se encuentra en diferentes situaciones, por ejemplo, las tarjetas de crédito y los documentos de identidad están diseñados en un rectángulo áureo. En la naturaleza, la razón entre la distancia entre las espiras del interior espiralado de cualquier caracol (no sólo del nautilus), en el número de las hojas de una planta, en el arreglo de las hojas alrededor del tallo y en la posición de las hojas, las secciones y las semillas de una piña. En biología, cuando la traquea se divide en sus bronquios si medimos el diámetro de los bronquios por el de la traquea se obtiene Phi, o el de la aorta con sus dos ramas terminales (ilíacas primitivas).

En la actividad 7 letra d se espera que los estudiantes adultos y adultas calculen algunas cifras para $\sqrt{2}$ y que se den cuenta de que si elevan al cuadrado 1, obtienen 1, que es menor que 2 y si elevan al cuadrado 2, obtienen 4, que es mayor que 2. Luego, el número que elevado al cuadrado da 2, está comprendido entre 1 y 2, es decir: $1 < \sqrt{2} < 2$. Luego pueden tomar 1,1; 1,2; 1,3; ... y los elevan al cuadrado hasta conseguir un número que elevado al cuadrado supere a 2, que es precisamente 1,5. Luego pueden escribir: $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Siguiendo este proceso pueden escribir sucesivamente:

$$
\begin{gathered}
1 < \sqrt{2} < 2 \\
1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5 \\
1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42 \\
1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415 \\
\ldots < \ldots < \ldots
\end{gathered}
$$

Siguiendo este proceso, cada vez se pueden acercar más al valor de $\sqrt{2}$. Es importante considerar que al aumentar el número de cifras, el error cometido es cada vez menor. De forma similar pueden calcular algunas cifras decimales para $\sqrt{3}$.

En la actividad 8 se pretende que las personas del curso comprendan que cuanto mayores son los términos de la sucesión, los cuocientes entre dos términos consecutivos de la sucesión se acercan cada vez más al valor del número de Phi.

En la actividad 9 es indispensable el trabajo con la calculadora y la aplicación del teorema de Pitágoras, debiendo transformar finalmente el valor obtenido a pulgadas.

Unidad 3: Proporcionalidad y porcentajes

Introducción

En esta unidad se resolverán diversas situaciones cotidianas relacionadas con magnitudes directa e inversamente proporcionales, para lo cual se propiciará la utilización de los registros gráficos, como así también el uso de tablas en la resolución de los problemas.

En los niveles anteriores los estudiantes adultos y adultas han trabajado el cálculo de porcentajes, sin embargo, en esta unidad se busca aplicar el uso de los porcentajes en problemas cotidianos, por ejemplo, aquellos relacionados con la tasa de desempleo, créditos bancarios, situaciones comerciales de rebaja o el IVA.

Por otro lado, el elemento distintivo de esta unidad es la presentación de situaciones ante las cuales las personas del curso deberán tomar una decisión, para lo cual necesariamente aplicarán los contenidos de las unidades anteriores, y con certeza emitir un juicio ante el problema planteado.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Distingue entre situaciones de variación proporcional y no proporcional y entre situaciones de variación proporcional directa e inversa.	• Cada estudiante: • Identifica las variables que intervienen en una situación, gráfico o tabla de valores. • Identifica si en una determinada situación en la cual intervienen al menos dos variables, éstas se relacionan o no proporcionalmente. • Ante tablas de valores o gráficos identifica aquéllas que representan una relación de proporcionalidad (directa o inversa). • Determina si una variación proporcional es directa o inversa, verificando si el cuociente o el producto es constante, respectivamente.
• Resuelve problemas que implican variación proporcional directa.	• Elabora tablas y gráficos correspondientes a situaciones de proporcionalidad directa. • Identifica e interpreta datos que implican la existencia de proporcionalidad directa entre las variables involucradas. • Relaciona la constante de proporcionalidad directa con un cuociente constante. • Comunica la o las soluciones obtenidas, relacionándolas con el contexto y describe su procedimiento.
• Interpreta representaciones a escala.	• Interpreta los datos referentes a la escala en un plano, mapa o figura. • Dibuja un plano a escala de objetos o lugares, indicando la escala utilizada.
• Resuelve problemas que involucran el cálculo de porcentajes.	• Interpretan información expresada en términos de porcentajes. • Establece un procedimiento de resolución. • Comunica la o las soluciones obtenidas relacionándolas con el contexto y describe su procedimiento.
• Resuelve problemas que implican variación proporcional inversa.	• Elabora tablas y gráficos correspondientes a situaciones de proporcionalidad inversa. • Identifica e interpreta datos que implican la existencia de proporcionalidad inversa entre las variables involucradas. • Relaciona la constante de proporcionalidad inversa con un producto constante. • Comunica la o las soluciones obtenidas relacionándolas con el contexto y describe sus procedimientos.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Analizar situaciones donde intervienen al menos dos variables, identificar las variables y distinguir situaciones de variación proporcional de aquellas que no lo son.

Por ejemplo:

a. Distancia versus tiempo de un automóvil que viaja a una velocidad constante.

b. Las edades y pesos de las personas del curso.

c. La medida del lado de un cuadrado y su área.

d. La medida del lado de un cuadrado y su perímetro.

e. Las edades y estaturas de las personas del curso.

f. Número de vueltas que da la rueda de una bicicleta para recorrer una distancia y el diámetro de la rueda.

g. Número de horas que está encendida una máquina de helados y dinero que se recauda por las ventas.

h. Buscan ejemplos de la vida cotidiana en que dos variables son proporcionales. Comparten sus ejemplos con sus compañeros y compañeras de curso.

Actividad 2

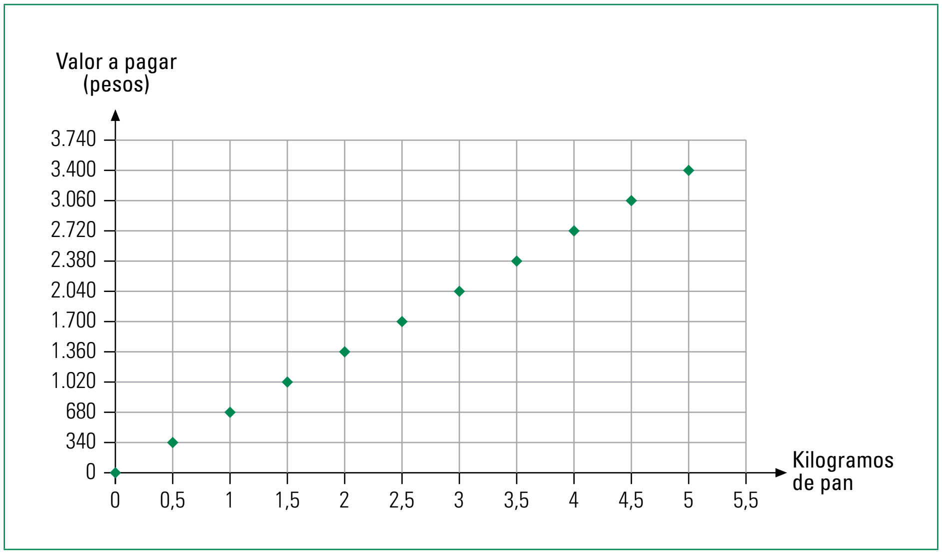
En diversas situaciones problemáticas decidir en cuáles de ellas, las variables están relacionadas por medio de una proporción directa o inversa.

Por ejemplo:

a. La edad de una madre es de 25 años y la de su hija es de 5 años. A medida que transcurren los años, ¿se mantiene constante la razón entre la edad de la madre con respecto a la de su hija? Completar la siguiente tabla sirve de ayuda para responder:

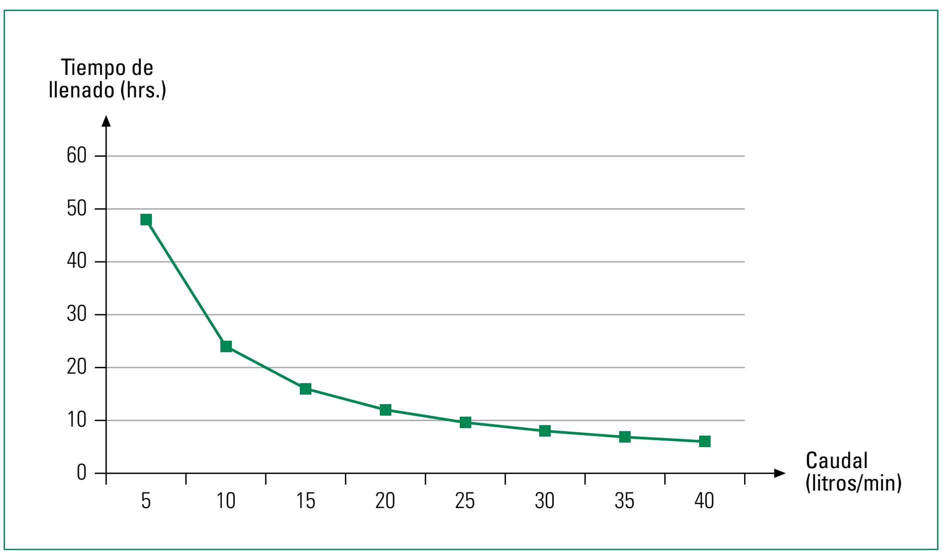
AÑOS TRANSCURRIDOS	EDAD INICIAL	1	2	5	8	10	15	20
Edad madre	25	26			33			
Edad hija	5	6					20	

b. El precio a pagar versus kilogramos de pan comprados está dado por el siguiente gráfico:



¿Resulta proporcional esta relación? De ser así, ¿qué tipo de proporción es?

c. El siguiente gráfico muestra la relación que existe entre el caudal constante de un grifo versus el tiempo que tarda en llenar un estanque de agua:



- ¿Qué tipo de proporción está representada en el gráfico?
- ¿Existe un caudal ideal para llenar el estanque de agua en 0 horas?

Actividad 3

Resolver situaciones problemáticas que involucran proporcionalidad directa o inversa.

Por ejemplo:

a. En cierto libro de cocina aparece la siguiente receta:

PANQUEQUES DE CHOCOLATE
Cantidad: 6 panqueques
Ingredientes: • 1 1/2 huevo • 1/2 cucharada de azúcar granulada • 1/2 taza de harina • 1/2 taza de leche • 1/2 cucharadita de sal • 1 cucharada de chocolate en polvo o cacao • 1 cucharada de margarina derretida o aceite • 1/2 taza de azúcar flor
Preparación: Poner en una licuadora huevos, azúcar granulada, sal, harina, leche, aceite y chocolate o cacao. Cocinar por pequeñas cantidades en un sartén caliente con unas gotas de aceite para que no se peguen. Rellenar los panqueques con frutas picadas, adornar con frutas y espolvorear azúcar flor.

Completar la siguiente tabla para determinar la cantidad de ingredientes que se necesita para cada cantidad de panqueques:

CANTIDAD DE PANQUEQUES	HUEVOS	AZÚCAR GRANULADA	HARINA	LECHE	SAL	CHOCOLATE O CACAO	MARGARINA O ACEITE	AZÚCAR FLOR
6								
9								
12								
15								
18								

b. Luis y Gonzalo compraron un número de rifa que costaba \$2.000. Gonzalo puso \$1.200 y Luis el resto. Si lograron ganar un premio de \$50.000 y se repartieron en forma proporcional al dinero que cada uno aportó, ¿cuánto dinero le corresponde a cada uno?

c. Observar la foto de la pulga considerando que está a una escala de 27:1, lo que indica que lo que en la imagen mide 27 mm, en la realidad mide 1 mm. Estimar cuántas veces más pequeña es la pulga real y calcular cuánto mide su cuerpo aproximadamente:

Fuente: **www.nlm.nih.gov/medlineplus/spanish/ency/esp_imagepages/1239.htm**

Actividad 4

Analizar y resolver situaciones diversas de variación proporcional inversa entre dos variables. Construir una tabla de valores y un gráfico.

Por ejemplo:

a. Un ganadero tiene 30 animales y forraje para alimentarlos durante 12 días dándole a cada uno la misma porción de alimento diario. Si compra 5 animales más, ¿le alcanzará para más o menos días?, ¿para cuántos días?

b. Un viaje en bus entre dos puntos de Santiago demoraba 50 minutos viajando en promedio a 60 $\frac{km}{h}$. Si con el nuevo transporte viaja en promedio a 70 $\frac{km}{h}$ ¿cuántos minutos se demorará en recorrer la misma distancia? Y si viaja en promedio a 50 $\frac{km}{h}$, ¿cuántos minutos se demora?

c. Don Carlos construyó una pieza de 2,9 metros de ancho por 3,2 metros de largo y para el piso decidió poner cerámicas. En la ferretería observó que la cerámica tiene distintos tamaños. Completar la siguiente tabla, donde "*x*" representa el área que cubre una palmeta de cerámica e "*y*" la cantidad de palmetas de cerámica:

MEDIDA DE LA BALDOSA	ÁREA QUE ABARCA (X)	CANTIDAD DE PALMETAS DE CERÁMICA QUE NECESITA (Y)
30 cm x 46 cm	1380 cm^2	68
43 cm x 43 cm		
38 cm x 38 cm	1444 cm^2	65
50 cm x 50 cm		
31 cm x 45 cm	1395 cm^2	
20 cm x 30 cm		
20 cm x 20 cm		

- ¿Las variables están relacionadas proporcionalmente? ¿En forma directa o inversa? Justificar.
- Una vez completada la tabla construir el gráfico asociado a ella.

Actividad 5

Resolver problemas de situaciones que involucran el cálculo de porcentajes.

Por ejemplo:

a. Calcular el precio a pagar por un jeans que se encuentra con un 30% de descuento, si el precio sin rebaja es $14.990. Comentar acerca del IVA.

b. El Servicio Nacional del Consumidor (SERNAC) analizó los precios de nueve tiendas de la capital entre el 21 y 27 de de enero de 2007 y detectó diferencias de hasta 150% en los precios de uniformes, entre la tienda más cara, con respecto a la más barata.

En la tienda con el mayor precio un pantalón cuesta $14.000 y una camisa $8.000, ¿cuál es el precio de estos productos en la tienda más barata?

Actividad 6

Resolver problemas que involucren interés simple y compuesto.

Por ejemplo:

a. Las instituciones financieras, como los Bancos, utilizan un mecanismo basado en el interés compuesto para calcular los intereses de ahorros y créditos, que reciben u otorgan a sus clientes. Este interés consiste en calcular los intereses de un período y sumarlos al capital inicial, formando un nuevo capital.

Completar la siguiente tabla, considerando un depósito inicial de $100.000 (capital inicial), a una tasa de interés compuesto mensual del 2%:

MES	CAPITAL ($)	INTERÉS ($)	NUEVO CAPITAL ($)
1	100.000	2.000	102.000
2			
3			
4			
5			

- ¿Cuál es el capital obtenido al cabo del segundo año?
- ¿Cuál es el capital obtenido al cabo del quinto año?
- ¿Es posible conjeturar el capital acumulado al cabo de "*n*" años?

Actividad 7

Resolver problemas que involucran el cálculo de porcentajes iterados.

Por ejemplo:

Una conocida multitienda de la ciudad se encuentra hace una semana liquidando todo el vestuario y calzado de mujer. En un mostrador se exhibe un pantalón cuyo precio normal era $22.990, sin embargo, durante la liquidación es posible comprarlo con el 30% de descuento:

- ¿Cuál es el valor que debe pagar por el pantalón, luego de aplicada la rebaja?

El último día de liquidación coincide con el ocho de marzo, día internacional de la mujer y para celebrar este acontecimiento la tienda prepara una rebaja sobre rebaja ofreciendo todos los productos, con un 20% de descuento adicional:

- ¿Cuál es el valor final del pantalón luego de aplicarle estos dos descuentos?
- Si primero se rebajó el 30% y luego el 20%, ¿el valor es el mismo si se hubiese rebajado el 50% al inicio de la liquidación?
- Si pudieras elegir entre el sistema que rebaja primero el 30% y sobre el nuevo precio el 20%, o un descuento inicial del 50%, ¿cuál elegirías tú? Justifica tu respuesta.

Sugerencias metodológicas

El objetivo de las cuatro primeras actividades es que las personas del curso rememoren el conocimiento sobre las relaciones proporcionales adquiridas en el nivel anterior.

Conviene recordar que dos variables x e y son proporcionales si se cumple una de las siguientes condiciones:

- Su cuociente o razón $\frac{y}{x}$ es constante. En este caso se dice que las variables "x" e "y" son directamente proporcionales.
- Su producto $y \cdot x$ es constante. En este caso se dice que las variables "x" e "y" son inversamente proporcionales.

Una forma intuitiva de trabajar inicialmente el concepto de proporción directa e inversa es presentándola como: "si dos variables se relacionan en proporción directa; entonces cuando una de las variables aumenta en un determinado factor, la otra también aumenta", y "si dos variables se relacionan en proporción inversa; entonces cuando una variable aumenta en un cierto factor la otra variable disminuye en el mismo factor". Gráficamente, una proporción directa se representa por con una línea recta que pasa por el origen. En el caso de la proporción inversa se obtiene una curva descendente que no intercepta a los ejes coordenados, llamada hipérbola. En este tipo de representación, es necesario que el profesor o profesora preste atención a las escalas usadas en los ejes de los gráficos de los y las estudiantes. Si la escala está mal elegida o no es uniforme, el gráfico puede distorsionarse.

El proceso de resolución; el análisis de los datos; el uso de tablas de valores para ordenar la información, para reflexionar y apoyar el razonamiento; el uso de proporciones, la realización de discusiones y debates, constituyen un buen soporte para lograr la discriminación entre este tipo de problemas y disponer de procedimientos de resolución.

Se puede permitir que las personas del curso enfrenten de manera autónoma las situaciones planteadas o trabajen en pequeños grupos, con el fin de que sean ellas mismas quienes evoquen los conocimientos adquiridos anteriormente pues estos temas fueron trabajados en el tercer nivel de Enseñanza Básica, luego pueden socializar sus respuestas con el resto del curso.

En las últimas tres actividades de porcentajes se presentan situaciones en que las tiendas utilizan rebajas y promociones para atraer a los compradores. Es necesario saber interpretar estos anuncios de modo de tomar una buena decisión a la hora de comprar un producto. En relación con el ejemplo se pueden plantear diversas estrategias para hacer los cálculos. Por ejemplo, para calcular el precio a pagar por el jeans que se encuentra con un 40% de descuento si el precio sin rebaja es de $14.990, basta multiplicar 0,6 por 14.990. Esto no es muy evidente para la mayoría de los y las estudiantes y se debe a que habitualmente se hace un aprendizaje muy mecánico del cálculo de porcentajes sin detenerse a analizar las diferentes alternativas de resolución que pueden encontrarse.

Se sugiere proponer diversos problemas contextualizados donde se usen porcentajes, por ejemplo, calcular porcentajes de una cantidad, qué porcentaje representa una cantidad respecto de otra, situaciones donde se requiera descontar un porcentaje de una cantidad dada, en una liquidación de sueldo determinar los descuentos previsionales y de salud, etc.

Es necesario que las personas del curso interpreten correctamente los datos y preguntas del problema, que puedan diseñar una estrategia o camino de solución, realizar los cálculos correspondientes e interpretar los resultados obtenidos en relación a la situación planteada.

Particularmente, en la actividad 6, el profesor o profesora podrá relacionar los valores obtenidos al final de cada capitalización con la fórmula que existe de interés compuesto.

En la actividad 7 se desea contextualizar situaciones que necesitan cálculos de un porcentaje sobre otro porcentaje. El profesor o profesora puede ampliar la situación llegando a plantear la situación de cálculo de a% sobre el b% de una cantidad C.

Además de las actividades que se han sugerido en esta unidad, cada docente puede proponer otras de acuerdo a la realidad de cada grupo y región.

Módulo II

Álgebra y funciones

Introducción

En los niveles anteriores, los estudiantes adultos y adultas han usado letras para generalizar situaciones. Por ejemplo, para representar medidas de longitud, han usado las fórmulas para calcular área, perímetro y volumen de figuras geométricas; han trabajado el Teorema de Pitágoras y han analizado diferentes situaciones donde se relacionan dos variables en forma proporcional.

Este módulo se centra en el desarrollo de la capacidad de generalización de situaciones que derivan del trabajo con los números o con las formas geométricas, apoyada en la potencialidad del lenguaje algebraico para describir esas generalizaciones. El lenguaje algebraico se relaciona con el ámbito de la geometría, con las regularidades de figuras y patrones y también con situaciones cercanas a la vida diaria de los estudiantes.

Este módulo está constituido por cuatro unidades:

Unidad 1: Lenguaje algebraico.
Unidad 2: Factores y productos.
Unidad 3: Función lineal y afín.
Unidad 4: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

En la primera unidad se desarrollan situaciones que permiten incorporar gradual y significativamente el uso de letras para la expresión de ideas, relaciones, conceptos, propiedades, etc. Específicamente se propone comenzar con un cambio de registro entre el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, donde el significado de las letras estará referido al ámbito de la aritmética, de regularidades y patrones y también de situaciones próximas a la vida cotidiana como son el cálculo del área y el perímetro. Es importante tener presente entonces que las letras en este contexto representan números o categorías de números, lo que debe ser analizado rigurosamente con los estudiantes adultos y adultas.

En la segunda unidad se abordan la multiplicación de expresiones algebraicas junto con los productos notables y las factorizaciones. El enfoque de esta unidad es ir relacionando los productos notables con su interpretación geométrica con el fin de tener una visión global de éstos. Esta unidad es concebida como una prolongación de la anterior ya que los contenidos estudiados en la primera son prerrequisitos para ésta.

Considerando los temas tratados anteriormente y los temas de proporcionalidad tratados en el módulo I, en la tercera unidad se aborda la noción de función y, más particularmente, problemas a los cuales se puede asociar una función lineal o una función afín. Se incorpora la resolución tanto analítica como gráfica de este tipo de problemas.

Finalmente, en la última unidad se aborda las ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas por medio de la resolución de problemas. Para tratar estos temas se consideran situaciones problemáticas significativas, en contextos cotidianos de las personas adultas que pongan en evidencia la necesidad de utilizar estos contenidos.

Es importante que el profesor o profesora vaya poniendo en evidencia cómo tanto los métodos gráficos como algebraicos, tanto la intuición como la aplicación rigurosa de determinados conceptos y fórmulas, el ensayo y el error, la reflexión, etc. constituyen aspectos importantes en el aprendizaje de las matemáticas y, en definitiva, en el desarrollo del pensamiento matemático.

Contenidos del módulo

1. Significado y uso de las letras en el lenguaje algebraico, convenciones sintácticas: uso de paréntesis, ausencia del símbolo de la multiplicación entre dos variables, valorización de expresiones algebraicas y reducción de términos semejantes.
2. Productos de expresiones algebraicas simples obtenidas por aplicación de la propiedad distributiva. Productos notables y su representación geométrica. Factorización de expresiones algebraicas simples.
3. Uso de lenguaje algebraico para demostrar relaciones, verificar y generalizar propiedades numéricas (por ejemplo, representar en forma general la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición).
4. Reconocimiento de la función lineal y afín en variados contextos, su notación y su gráfica. Resolución de problemas que se modelen mediante funciones lineales y afines.
5. Estudio de problemas provenientes de diferentes contextos que involucren el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Análisis de la pertinencia de la solución.
6. Resolución algebraica de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones.

Aprendizajes esperados del módulo[5] y sugerencias de evaluación

APRENDIZAJES ESPERADOS	SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN
A partir del desarrollo de este módulo se espera que los estudiantes adultos y adultas: • Traduzcan expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa. • Representen categorías de números por medio de expresiones algebraicas. • Utilicen fórmulas de distintos ámbitos como una aplicación del lenguaje algebraico. • Reduzcan términos semejantes.	Al evaluar estos aprendizajes esperados es necesario considerar diversas situaciones en las cuales el uso de letras para expresar relaciones entre los datos sea efectivamente una ayuda para la comprensión de la situación, para su comunicación o para encontrar soluciones. Es importante que los estudiantes adultos y adultas puedan hacer un cambio de registro que va desde el lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa.
• Multipliquen y factoricen expresiones algebraicas. • Calculen productos notables y los factoricen. • Interpreten geométricamente los productos notables. • Demuestren propiedades numéricas en los números naturales. • Analicen las variaciones que se producen en las expresiones algebraicas que representan áreas, perímetros y volúmenes por cambios en las medidas lineales de sus elementos.	En la evaluación de este aprendizaje es importante observar que los estudiantes adultos y adultas al multiplicar expresiones algebraicas apliquen las propiedades necesarias de las potencias para luego reducir términos semejantes. Es pertinente, también, que vean la factorización como el proceso inverso de la multiplicación. Aparte de reconocer y calcular productos notables y sus factorizaciones es necesario que las personas del curso puedan darle significado a estos procedimientos por medio de la aritmética y la geometría de modo que no se transformen en ejercicios rutinarios de cálculos sino que puedan utilizarlos para resolver problemas, demostrar propiedades, etc.
• Identifiquen en diversas situaciones relaciones de dependencia entre variables que constituyen una función, distinguiéndolas de las que no lo son.	La evaluación de este aprendizaje debiera concentrarse en observar las habilidades de las personas del curso para identificar si cierta relación entre dos variables constituye o no una función. Por otra parte, es importante plantear situaciones de evaluación que permitan a los estudiantes adultos y adultas poner en evidencia su capacidad de describir el comportamiento de variables a partir de la función expresada tanto algebraicamente como gráficamente.
• Resuelvan problemas que se modelan por medio de una función lineal y afín.	Para la evaluación de este aprendizaje se sugiere presentarles diversas situaciones de variados ámbitos donde los estudiantes adultos y adultas puedan construir el modelo y expresarlo por medio de tablas de valores, a través de una expresión algebraica y en forma gráfica, estableciendo las relaciones entre estas formas de representación. Es importante que las personas del curso reconozcan ambas funcionen, las diferencien de otras no lineales, reconozcan las situaciones que éstas permiten analizar y que asocien la función lineal con la ecuación de la recta.

5 A continuación se describen los aprendizajes esperados para este módulo, los cuales se encuentran precisados posteriormente en el desarrollo de cada unidad a través de la descripción de sus respectivos indicadores de evaluación. Se incorporan sugerencias generales para la evaluación. No obstante, para este efecto es muy importante orientarse por los indicadores señalados.

APRENDIZAJES ESPERADOS	SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN
• Grafiquen una función e interpreten el gráfico.	Para evaluar este aprendizaje es importante que los y las estudiantes reconozcan las variables, establezcan la dependencia, ubiquen adecuadamente los ejes de coordenadas y establezcan escalas adecuadas. En términos más generales, las personas del curso deben poder reconocer características de las funciones lineales y afines.
• Resuelvan problemas que requieren plantear una ecuación de primer grado con una incógnita.	La evaluación de este aprendizaje esperado requiere que los estudiantes adultos y adultas puedan modelar un problema por medio de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Es importante que la evaluación contemple que las personas adultas puedan dar sentido a las expresiones algebraicas y que estas sean útiles para comprender y resolver el problema. El profesor o profesora debe tener presente que muchas situaciones que teóricamente se pueden resolver por medio de ecuaciones, los adultos y adultas encuentran otras formas de resolverlas comúnmente en su vida diaria. Por esta razón, es importante que proponga situaciones y problemas en contextos cotidianos que sean significativos para los estudiantes, en los cuales deban poner en juego sus aprendizajes. Es conveniente que discutan y comparen las expresiones algebraicas que se pueden plantear para una misma situación, verificar las que son equivalentes y las que efectivamente corresponden a la situación planteada.
• Resuelvan problemas que requieren plantear y resolver, por medios algebraicos o gráficos, un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.	Del mismo modo que respecto del aprendizaje anterior, es importante que los estudiantes adultos y adultas verifiquen que las ecuaciones con que resolvieron el problema sean pertinentes a él. Por otra parte, el profesor o profesora puede proponer que resuelvan un problema tanto algebraica como gráficamente para aquellas situaciones que involucran el planteamiento de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas y la interpretación de soluciones a partir del gráfico. Se sugiere que evalúen la conveniencia de utilizar un procedimiento gráfico y uno algebraico y que analicen la existencia y pertinencia de la soluciones.

Unidad 1: Lenguaje algebraico

Introducción

En esta unidad se propone abordar de manera sistemática el uso de letras para la expresión de situaciones diversas, tanto de la vida cotidiana, provenientes del entorno laboral, familiar, ciudadano de las personas del curso como de relaciones matemáticas en que resultan ser una herramienta esencial para expresar relaciones o propiedades de manera sintética. Se considera necesario que los estudiantes adultos y adultas realicen un cambio de registro que va desde un lenguaje natural a un lenguaje algebraico.

Es importante también que se utilicen fórmulas de distintos ámbitos, (siempre que sean conocidos para ellos) como una aplicación del lenguaje algebraico. Junto con lo anterior la reducción de términos semejantes se plantea en contextos significativos para las personas del curso.

Es importante que se analicen las diferencias entre la operatoria algebraica y la operatoria aritmética, porque los estudiantes adultos y adultas tienden a generalizar sus coincidencias. Por ejemplo, el número 27 es un número de dos cifras en que 2 es la cifra de las decenas y 7 la de las unidades, en cambio en álgebra "ab" representa el producto de "a" por "b"; "$3m + n$" puede corresponder a un número de dos cifras en el que "m" es la cifra de las decenas y "n" la de las unidades. La interpretación de la expresión "sea x un número" suele asumirse como "x" un número entero positivo y "$-x$" como un entero negativo. Para corregir y ampliar esa interpretación, es necesario que el profesor o profesora proponga variados ejemplos para llegar a generalizaciones que incorporen positivos y negativos y también otro tipo de números como fracciones o decimales.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Traduce expresiones del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa.	Cada estudiante: • Expresa algebraicamente un enunciado verbal y viceversa. • Evalúa expresiones algebraicas.
• Representa categorías de números por medio de expresiones algebraicas.	• Utiliza letras para representar familias de números (por ejemplo, cualquier número par es de la forma $2n$, siendo n un natural)
• Utiliza fórmulas de distintos ámbitos como una aplicación del lenguaje algebraico.	• Identifica las variables en una fórmula y las evalúan. • Despeja incógnitas.
• Reduce términos semejantes.	• Reconoce términos semejantes y los reducen aplicando cuando sea necesario la propiedad de las operaciones y la convención del uso de paréntesis.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico expresiones en las que se nombran las variables y expresiones en las que se deben identificar las variables.

Por ejemplo:

a. Completar la siguiente tabla en la cual se deben traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico distintas expresiones y viceversa:

LENGUAJE NATURAL	LENGUAJE ALGEBRAICO
• El antecesor del número x.	
• El sucesor de un número y.	
• El producto entre el doble de m y el triple de n.	
	$2x + 7y$
• El área de una baldosa cuadrada de x cm de lado.	
• La distancia que recorre un automóvil en 30 minutos si va a una velocidad de $x\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$.	
• Un número impar.	
• La suma de tres números pares consecutivos.	
• La diferencia entre dos números pares cualquiera.	
• La edad de una persona en 15 años más.	
• El precio de un artículo si es rebajado en un 20%.	
• El precio de un artículo que se le agrega el 19% de IVA.	

Actividad 2

Calcular valores de expresiones algebraicas, dado los valores de las variables de dichas expresiones.

Por ejemplo:

a. Los grados Celsius y los grados Fahrenheit son unidades que se utilizan para medir temperaturas. La fórmula que los relaciona es:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Donde *C* son los grados Celsius y F los grados Fahrenheit.

- ¿A cuántos grados Fahrenheit corresponden 100° *C*?
- ¿A cuántos grados Celsius equivalen 0° *F*?

b. La fórmula que relaciona la velocidad (*v*) que lleva un móvil, con la distancia (*d*) recorrida y el tiempo (*t*) empleado es:

$$v = \frac{d}{t}$$

- Un automóvil recorre 155 km en 1,5 horas, ¿cuál es la velocidad promedio que lleva?
- Un automóvil debe recorrer 80 km en 50 minutos, ¿a qué velocidad promedio debe viajar?

Actividad 3:

Expresar algebraicamente sucesiones de números y patrones geométricos indicando el conjunto numérico al que pertenecen las variables.

Por ejemplo:

a. Los mundiales de fútbol se realizan cada cuatro años, por lo tanto desde 1962 son: 1962, 1966, 1970, 1974, 1978, 1982, 1986, 1990, 1994, 1998, 2002, 2006, ...

- Escribir los 5 próximos años en que se jugará un mundial de fútbol.
- En el año 2056, ¿se jugará un mundial de fútbol?
- Encontrar una expresión algebraica que represente esta situación.

b. La licencia para conducir automóviles clase B, se renueva cada 6 años. Si una persona saca su primera licencia el año 2007:

- ¿Cuáles son los próximos 5 años en que tendrá que renovar su licencia?
- Encontrar una expresión algebraica que represente esta situación.

c. La siguiente secuencia se obtiene de ir agregando dos fósforos a la figura anterior para formar triángulos. Si se continúa de igual forma:

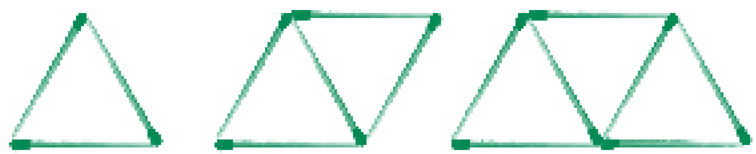


Figura 1 Figura 2 Figura 3

- ¿Cuántos fósforos se necesitan para formar la figura número 10?, ¿y la 11?
- Buscar una expresión algebraica que represente la cantidad de fósforos necesarios para formar una figura con n triángulos.

Actividad 4

Expresar algebraicamente relaciones numéricas y reducir términos semejantes.

Por ejemplo:

a. El perímetro de un rectángulo, si su largo es 7 unidades mayor que su ancho.

b. La suma de cuatro números impares consecutivos.

c. El perímetro de un triángulo rectángulo de catetos "$3x$" y "$4x$".

d. En un loteo de parcelas, existen distintos tipos de sitios, los más caros son aquellos cuyo largo (fondo) es el triple ancho (frente). Además, son los más grandes.

- ¿Cuál es el perímetro de un terreno con estas características?
- ¿Cuál es el área (superficie) de un terreno con estas características?
- Si el frente de uno de estos terrenos, mide 26 metros, ¿cuánto mide su superficie? ¿Cuántos metros de alambre se necesitan para cercarlo, considerando tres corridas de alambre?

Sugerencias metodológicas

En la primera actividad es importante que el profesor o profesora vaya orientando el significado y uso de las letras en el lenguaje algebraico. Que se haga una diferencia entre la primera tabla, donde se nombran las variables y los cambios de registros son directos y, en la segunda donde los estudiantes adultos y adultas deben designar ellos mismos las variables.

Es conveniente que se resuelvan ejercicios en que una misma situación se pueda escribir algebraicamente de varias maneras, por ejemplo, la expresión “tres números consecutivos” se puede escribir:

- $x,\ x + 1,\ x + 2$
- $x - 4,\ x - 3,\ x - 2$
- $x + 7,\ x + 8,\ x + 9, \ldots$

Se sugiere para la actividad 2 que se estudien fórmulas de interés para las personas del curso relacionadas con otras disciplinas como biología, química, física, etc.

En la actividad 3, después de encontrar un término general de cada secuencia, los profesores y profesoras pueden realizar preguntas como las siguientes: ¿en el año 2023 se jugará un mundial de fútbol?, ¿cuál es el trigésimo número de cada secuencia?, para que analicen así la utilidad de encontrar un término general. Es recomendable sugerirle que ordenen los datos en una tabla, que le facilite ver con mayor claridad la secuencia numérica, como la siguiente:

NÚMERO DE TRIÁNGULOS	CANTIDAD DE FÓSFOROS
1	3

Es esencial que el profesor o profesora mencione una regla de formación de cada secuencia para cada uno de los ejercicios, de lo contrario pueden haber múltiples soluciones.

Finalmente para la actividad 4 es importante mencionar que el profesor o profesora destaque la necesidad de reducir aquellos términos semejantes en una expresión algebraica obteniendo así el resultado lo mas simplificado posible. También se debe hacer mención en que a diferencia de la aritmética, en el álgebra se obtienen expresiones que no solamente contienen valores numéricos sino que además factores literales y en muchas ocasiones adiciones, sustracciones y/o, multiplicaciones, como por ejemplo, $4x + 6$, a diferencia de la aritmética que se obtiene un número.

Unidad 2: Factores y productos

Introducción

Esta unidad se orienta al desarrollo de la capacidad de generalización apoyada en una sistematización del lenguaje algebraico focalizando el aprendizaje en cálculos de productos y factores.

El objetivo de esta unidad es lograr que nuestros estudiantes adultos y adultas no solamente memoricen las fórmulas de los productos notables sino también que los utilicen para la resolución de problemas, demostración de propiedades y generalizaciones considerando como conocimientos previos la operatoria aritmética y el cálculo del área de rectángulos.

Por otra parte, la utilización del álgebra en la demostración de algunas propiedades de los números naturales promueve el desarrollo de habilidades cognitivas superiores junto con sistematizar el método de construcción matemática.

Finalmente, es una buena instancia para conjeturar y analizar la variación en el perímetro y el área de figuras y el volumen de cuerpos geométricos al hacer cambios lineales en alguno de sus elementos, permitiendo evidenciar que no necesariamente un cambio lineal en un factor significará otro cambio lineal en el resultado final.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Multiplica y factoriza expresiones algebraicas.	Cada estudiante: • Interpreta la multiplicación de expresiones algebraicas como el cálculo de áreas de algunas figuras planas. • Aplica las propiedades de las potencias y la propiedad distributiva para multiplicar expresiones algebraicas. • Factoriza expresiones donde uno de los factores resulta un monomio o un polinomio.
• Calcula productos notables y los factorizan.	• Calcula distintos productos notables aplicando propiedades de las potencias, propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición o utilizando las fórmulas una vez deducidas. • Factoriza expresiones en que sus factores constituyen productos notables.
• Interpreta geométricamente los productos notables.	• Expresa el área de cuadrados y rectángulos mediante el uso de ciertos productos notables.
• Demuestra propiedades numéricas en los números naturales.	• Traduce a lenguaje algebraico la propiedad enunciada, obteniendo una expresión algebraica. • Realiza operaciones algebraicas que permiten simplificar la expresión inicial y obtener la tesis planteada, demostrando la propiedad.
• Analiza las variaciones que se producen en las expresiones algebraicas que representan áreas, perímetros y volúmenes por cambios en las medidas lineales de sus elementos.	• Expresa algebraicamente el perímetro, área o volumen de la situación planteada. • Realiza cambios en uno de los factores de la expresión. • Analiza la variación producida.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Expresar y calcular el área de figuras planas mediante el producto de expresiones algebraicas, eliminar paréntesis, reducir términos semejantes y factorizar.

Por ejemplo:

a. Está más o menos estandarizado que 1 caja de cerámica, independientemente de la medida de la baldosa (el lado), cubra una superficie de 1,5 m^2. Luego, podemos afirmar que los m^2 de cerámica, en función del número de cajas, está dado por la siguiente relación:

$$m = 1{,}5 \cdot c$$

donde m representa los metros cuadrados de cerámica y c el número de cajas de cerámica.

- ¿Cuántos m^2 cubren 5 cajas de cerámica?
- ¿Cuántas cajas de cerámica se necesitan, como mínimo para cubrir 20 m^2?

Pero también existen locales donde se rematan o liquidan materiales de construcción, pudiendo comprar cerámicas por unidad, ya que son remesas de producciones no vendidas. En este caso, saber cuántas cerámica comprar (b) para cubrir una determinada superficie, dependerá de la medida del lado (l) de la cerámica. Luego nuestra relación será la siguiente:

$$m = b \cdot l \ (m \text{ en } m^2)$$

- ¿Cuántos m^2 se pueden cubrir con 20 cerámicas cuadradas cuyo lado mide 30 cm?
- Si se compran cerámicas cuadradas, cuya medida es de 20 cm de lado, ¿cuántas se deben comprar para cubrir 2 m^2?
- Expresar algebraicamente una relación que permita determinar la cantidad de cajas, de 1,5 m^2, que se pueden embalar dependiendo de la cantidad de cerámicas cuadradas y de su respectiva medida.
- A partir de la expresión encontrada en el paso (e) calcular la cantidad de cerámicas cuadradas que se necesitan para embalar 2 cajas de 1,5 m^2, sabiendo que la medida de su lado es de 30 m^2.

b. La cantidad de productos elaborados en una empresa está dada por la producción de dos de sus máquinas; en una de ellas, por cada 5 artículos producidos 1 sale defectuoso en 1 hora de producción, lo que se expresa como $5b - 1m$; en la otra, por cada 3 artículos producidos 1 sale defectuoso en 1 hora de producción, lo que se expresa como $3b - 1m$.

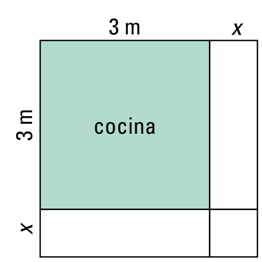
- ¿Cómo queda expresada la cantidad total de artículos producidos en 1 hora de funcionamiento de las máquinas?
- ¿Cómo queda expresada la cantidad total de artículos producidos en 8 horas de funcionamiento de las máquinas?
- Si la producción en ambas máquinas se reduce a la mitad y la distribución entre artículos buenos y defectuosos se mantiene, ¿cómo queda expresada la cantidad total de artículos producidos en 1 hora de funcionamiento?

Actividad 2

Reconocer los productos notables, resolver y expresar esos productos como factores.

Por ejemplo:

a. Se desea ampliar una cocina que tiene forma cuadrada de 3 metros por lado, en una determinada cantidad de metros (x), tal como lo muestra el siguiente dibujo:



- ¿Qué expresión algebraica representa la nueva área de la cocina?
- Si la ampliación considera 1,5 metros más, ¿cuál es la nueva superficie que tendrá la cocina?

b. En la era de las comunicaciones y de la tecnología, resulta común olvidarse de procedimientos simples de algunos cálculos, especialmente de aquellos que tienen relación con la multiplicación y división. En el caso particular de la multiplicación se recurre al uso y la memorización que se tiene de las tablas de multiplicar, y esto cuando las cantidades son pequeñas. En otros casos, hacemos uso de la calculadora, que hoy en día está en todos los celulares que masivamente han conquistado nuestras carteras y bolsillos. ¿Pero qué ocurre cuando nos encontramos desprovistos de estas ayudas, incluso de un buen lápiz y tenemos que hacer una multiplicación no tan simple? Pues bien, eso fue lo que le pasó a don Luis. Pero se acordó de un método, que no olvidó nunca cuando lo aprendió porque lo encontró muy interesante.

Don Luis tenía que determinar el producto de $18 \cdot 22$. ¿Qué fue lo que hizo?, muy simple, descompuso ambos números como una suma por diferencia de la siguiente manera:

$$(20-2)\cdot(20+2) \text{ (pues } 20-2=18 \quad \text{y} \quad 20+2=22\text{)}$$

Luego aplicó propiedades de productos notables y desarrolló:

$$(20-2)\cdot(20+2) = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$$

- Aplicando este método, calcular el producto de $35 \cdot 25$.
- Encontrar otros pares de números para multiplicarlos por medio de este método. ¿Se podría generalizar para cualquier par de números multiplicados?

Actividad 3

Demostrar distintas propiedades numéricas. Inicialmente en un contexto numérico, y luego algebraico.

Por ejemplo:

a. Una persona tiene en uno de sus bolsillos una cierta cantidad de dinero formada por billetes de \$10.000, \$5.000 y de \$1.000. ¿Qué podríamos asegurar de dicha cantidad?:

- Que tiene en total \$16.000.
- Que tiene más de \$100.000 en total.
- Que la cantidad de dinero que tiene corresponde a una cifra par.
- Que la cantidad de dinero que tiene corresponde a una cifra impar.
- Que tiene más billetes de \$10.000 que de \$5.000.

Lo único que podemos afirmar con seguridad es que la cantidad de dinero que tiene en el bolsillo corresponde a un par. Esto se debe a que los billetes que tiene corresponden a denominaciones pares, y la suma de números pares da como resultado un número par.

- ¿Cómo se escribe un número par cualquiera?

b. Con respecto a la misma situación anterior, consideremos ahora que en el bolsillo sólo existen monedas de $1 y de $5:

- ¿Qué condición se debe cumplir para que la cantidad de dinero que hay en el bolsillo corresponda a una cifra par?
- ¿Qué condición se debe cumplir para que la cantidad de dinero que hay en el bolsillo corresponda a una cifra impar?
- ¿Cómo se escribe un número impar cualquiera?

c. Demostrar que "la suma de un número par con un impar es siempre impar".

Actividad 4

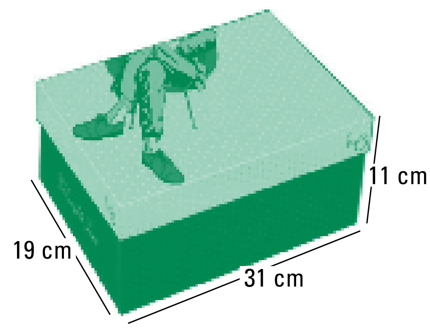
Analizar las variaciones que se producen en las expresiones algebraicas que representan áreas, perímetros y volúmenes por cambios en las medidas lineales de sus elementos.

Por ejemplo:

a. La siguiente marca y tipo de leche se encuentra con la siguiente oferta:

Si las medidas originales del envase de 1 litro son: para la base 6 cm · 9,5 cm y para la altura 16,5 cm. ¿Cuántos centímetros más de alto tiene el envase de la promoción?

b. Una caja de zapatos de dama es un 10% más pequeña que una caja de zapato de hombre, con respecto a la medida de sus lados. La siguiente imagen muestra las dimensiones que tiene una caja de zapatos de hombre:



- Calcular las medidas que tiene una caja de zapatos de dama.
- ¿Cuánto más volumen tiene una caja de zapato de hombre que la caja de zapato de dama?

Sugerencias metodológicas

En la primera actividad se busca establecer relaciones entre el cálculo de productos y factores en álgebra con el cálculo de medidas y cálculos aritméticos.

Es necesario utilizar fórmulas de distintos ámbitos como una aplicación del lenguaje algebraico y plantear problemas que sean significativos para las personas del curso.

Es importante que los estudiantes adultos y adultas den valores a las letras que se utilizan para constatar como éstas pueden representar una diversidad de valores. La valoración de expresiones puede ser una manera que permita identificar la escritura del producto y además ser utilizada para apoyar el desarrollo de habilidades de cálculo mental y aproximaciones.

En la actividad 2 con el apoyo del dibujo el profesor o profesora debe dirigir el ejercicio a que las personas del curso logren darse cuenta que el cuadrado de lado $(3m + x)$ cm, estaría compuesto de dos cuadrados de lados $3m$ y x cm respectivamente y dos rectángulos de lado x y $3m$ cm. De aquí pueden deducir la fórmula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, distinguiendo así que $(a + b)^2$ es muy diferente de $(a^2 + b^2)$.

En la actividad 3 se pretende que los estudiantes adultos y adultas, antes de abordar problemas de propiedades numéricas en forma general, analicen primero algunos casos simples y más concretos, para luego abordar, demostraciones que representen este tipo de propiedades, como “demostrar que la diferencia entre dos números consecutivos al cuadrado siempre impar” o “demostrar que la suma de un número al cuadrado y su sucesor al cuadrado es siempre impar”.

Se sugiere, que en la mayoría de las actividades, se trabaje en grupo mixtos para que discutan las posibles estrategias de abordaje de un ejercicio o una demostración. Es muy importante que diferencien una demostración de una constatación o comprobación.

Unidad 3: Función lineal y afín

Introducción

En el módulo anterior, los estudiantes adultos y adultas resolvieron y analizaron problemas de proporcionalidad directa que involucraban constantes de proporcionalidad positiva y también valores positivos para las variables "x" e "y". En esta unidad este modelo se extenderá a la función $y = mx + n$. Será necesario analizar una diversidad de situaciones de variados ámbitos para construir el modelo y expresarlo por medio de tablas de valores, a través de su expresión algebraica y en forma gráfica, estableciendo relaciones entre estas formas de representación.

Con el fin de incorporar el concepto de función, que ha estado implícitamente presente en niveles anteriores, se proponen actividades que permitan, inicialmente, distinguir entre lo que constituye y lo que no constituye una función. Posteriormente se sugieren actividades para abordar dos funciones en particular: la función lineal y la función afín.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Identifica en diversas situaciones relaciones de dependencia entre variables que constituyen una función distinguiéndolas de las que no lo son.	Cada estudiante: • Identifica las variables en una relación expresada verbalmente. • Identifica y caracterizan una función. • Determina el dominio y el recorrido de una función.
• Grafica una función e interpreta el gráfico.	• Grafica una función, distinguiendo las variables y dando nombre a los ejes. • Describe el comportamiento de las variables a partir del gráfico.
• Resuelve problemas que se modelan por medio de una función lineal y afín.	• Diferencia una función de dependencia lineal entre dos variables de otras no lineales. • Asocia el gráfico de una función lineal con la ecuación de una recta. • Grafica una función lineal y una función afín. • Interpreta el comportamiento de las variables a partir del gráfico de una función lineal y de una función afín. • Encuentra la o las soluciones a un problema a partir del planteamiento de la función correspondiente.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Identificar si dos variables que están relacionadas constituyen una función y diferenciar variable dependiente de la independiente.

Por ejemplo:

a. La siguiente tabla muestra la relación que existe entre el número de llamadas realizadas por un celular y el valor que se debe pagar por minuto hablado:

Minutos hablados	1	2	3	4	5	6
Valor a pagar ($)	80	160	240	320	400	480

- Si llamamos "*y*" al valor a pagar por los minutos hablados y "*m*" a los minutos hablados, determinar la función que representa dicha relación.
- Realizar un gráfico con los datos de la tabla y completar para otros valores.

Actividad 2

A partir de situaciones, establecer una relación entre dos conjuntos de datos, de los cuales uno es explícito y el otro está por determinar. Completar tablas y realizar gráficos. Determinar dominio y recorrido de una función.

Por ejemplo:

La siguiente tabla muestra la dosificación necesaria para preparar mezclas de concreto en la construcción:

DOSIFICACIÓN SUGERIDA PARA RADIER SIN GRAVILLA		
Volumen a confeccionar	0.167	m^3
Cemento Melón Especial	1	Sacos de 42,5 kilos
Grava	115	Litros
Gravilla	0	Litros
Arena	90	Litros
Agua	22	Litros

Fuente: http://www.lafarge.cl/cemento/javascript_imagen/afinados.html

a. A partir de la tabla entregada, realizar una tabla que especifique la cantidad de metros cúbicos que se pueden preparar con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 sacos de cemento:

SACOS DE CEMENTO	1	2	3	4	5	6	7	8
Volumen m^3								

b. Determinar la función que relaciona el volumen a confeccionar de mezcla para un radier sin gravilla y el número de sacos de cemento.

c. ¿Todos los valores de la tabla tienen su correspondiente volumen? ¿Esto ocurre con cualquier valor que se evalué en la función obtenida? ¿Qué valores no se pueden usar como valores para el número de sacos de cemento?

d. Elaborar un gráfico a partir de la función obtenida.

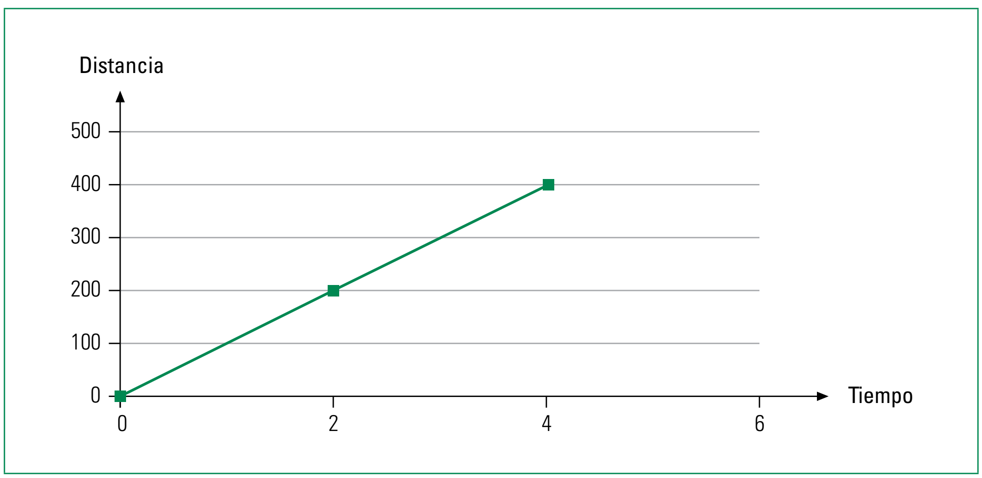
Actividad 3

Analizar y resolver problemas que se modelan por medio de una función lineal.

Por ejemplo:

En la siguiente tabla y gráfico se muestra el tiempo y la distancia recorrida por un bus a una velocidad constante:

TIEMPO (HORAS)	DISTANCIA RECORRIDA (KILÓMETROS)
0,25	25
2	200
4	400



a. Determinar la función que relaciona la distancia recorrida con respecto al tiempo.

b. ¿Cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente?

c. ¿Los datos de la tabla representan una relación lineal?

d. Si "t" representa el tiempo, ¿qué representa 10t?

e. ¿En cuántas horas el bus ha recorrido 850 km?

Actividad 4

Resuelven problemas que se modelan por medio de una función afín.

Por ejemplo:

a. Una compañía de teléfonos celulares cobra un cargo fijo de $2.590. Cada minuto que se habla vale $76 en cualquier horario:

- ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
- ¿Cuánto se paga por hablar 25, 37 y 55 minutos, respectivamente? Registrar estos datos en una tabla y graficar esta situación.
- Si llamamos "*c*" al valor total de la cuenta y "*x*" a los minutos hablados, expresa c en función de *x*.

b. Un restaurante es popular por su típica oferta: "COMA TODO LO QUE PUEDA POR SÓLO $3.000":

¿Cómo es la función que representa la relación consumo-precio? ¿Cómo se puede representar gráficamente esta función?

Sugerencias metodológicas

En las dos primeras actividades es necesario que el profesor o profesora defina una función en términos más generales, que represente las relaciones pedidas donde a cada uno de los números involucrados en las tablas le corresponde uno y sólo un número, introduciendo así el concepto de función. Donde el conjunto de partida se llama dominio de la función, el conjunto de los números obtenidos se llama recorrido de la función.

En la actividad 3 es importante que el profesor o profesora vaya sistematizando, en la medida que las actividades se van desarrollando, una manera más general de representar una función lineal de la forma $f: R \rightarrow R$, donde $x \rightarrow ax$, "x" pertenece al conjunto de los números reales y "a" es un número real cualquiera.

Este tipo de actividades son básicas para luego resolver variados problemas referidos tanto a la función lineal como afín y que permitirán definirlas a partir de sus características básicas.

Al igual que en la actividad anterior, en la número 4, se sugiere que el profesor o profesora vaya sistematizando los contenidos en la medida que el problema se va desarrollando, con el fin de caracterizar la función afín de manera más general de la forma $f: R \rightarrow R$, donde $x \rightarrow ax + b$, "x" pertenece al conjunto de los números reales y "a" y "b" son números cualesquiera. Se puede destacar, en ese momento, que en la función afín, un caso particular es $f: R \rightarrow R$, donde $x \rightarrow ax + 0$, es decir, una función lineal.

Un aspecto importante que se debiera destacar es que se pasa de una función lineal a una afín agregando "b" a la ordenada de cada uno de los puntos y, así, la recta que representa a $x \rightarrow ax$ es trasladada paralelamente sobre el eje Y. Por otra parte, los diferentes problemas propuestos debieran poder determinar algunos casos particulares. Por ejemplo, en una función afín, si $a = 0$, la recta correspondiente a la función es paralela al eje X.

Unidad 4: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Introducción

Esta unidad propone la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas respectivamente por medio del planteamiento de problemas.

Es necesario señalar la importancia de que las actividades contemplen que las personas del curso puedan dar sentido a las expresiones algebraicas y que éstas sean útiles a la comprensión y resolución del problema. El profesor o profesora debe tener presente que muchas situaciones que teóricamente se pueden resolver por medio de ecuaciones, los estudiantes adultos y adultas las encuentran y resuelven comúnmente en su vida diaria. Por esta razón, las situaciones que se proponen y las que se propongan posteriormente deben permitir la utilización de sus conocimientos previos.

Una de las mayores dificultades en el aprendizaje de estos temas es la traducción de los enunciados de los problemas al lenguaje algebraico, específicamente al planteamiento de las ecuaciones. En la resolución de diversos problemas, los estudiantes adultos y adultas suelen verbalizar involucrando varios subentendidos. Por ejemplo, si dicen "sea "x" las manzanas" en la resolución de algún problema relativo al tema, no explicitan si es la cantidad de manzanas o si es el precio de las mismas u otro significado. Es conveniente recalcar que deben explicitar con precisión qué significa cada una de las incógnitas.

Considerando las características del curso, puede ser muy interesante que trabajen en grupos y resuelvan problemas sin mayores indicaciones adicionales y que compartan finalmente sus resultados.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Resuelve problemas que requieren plantear una ecuación de primer grado con una incógnita.	Cada estudiante: • Traduce del lenguaje natural al lenguaje algebraico un problema que se modela mediante una ecuación. • Utiliza propiedades de las operaciones para resolver una ecuación. • Reduce términos semejantes. • Analiza la pertinencia de la solución encontrada en relación con el contexto del problema.
• Resuelve problemas que requieren plantear y resolver, por medios algebraicos o gráficos, un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.	• Traduce enunciados verbales a sistemas de ecuaciones definiendo las incógnitas. • Resuelve los sistemas recurriendo al método más conveniente de resolución. • Analiza la existencia y pertinencia de las soluciones. • Comprueba las soluciones graficando. • Comunica la solución del problema y describen los procedimientos seguidos.

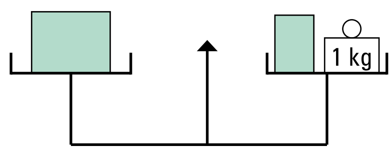
Ejemplos de actividades

Actividad 1

Solucionar problemas que se resuelven modelando la situación mediante una ecuación.

Por ejemplo:

a. Se tienen varios pesos, bloques de madera iguales y una balanza de platos. Si en un lado de la balanza se pone un bloque de madera y al otro lado, es decir, en el otro plato, un peso de 1 kg y la mitad de un bloque de madera, la balanza se mantiene en equilibrio:



- ¿Qué ecuación permite encontrar el peso del bloque de madera?
- ¿Cuánto pesa el bloque de madera?
- ¿Existe otra solución?

b. En un local comercial se venden pantalones y poleras. Si en un día se venden el triple de pantalones que de poleras, vendiendo en total 164 prendas, ¿cuántos pantalones se vendieron?

c. Yo tengo 40 años y mi hija tiene 13. ¿En cuántos años yo tendré el doble de la edad de mi hija?

d. Una persona parte desde su casa caminado hacia el campo a una velocidad constante de $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Dos horas más tarde, desde el mismo lugar, parte otra persona *B* en bicicleta con el fin de alcanzarla, a una velocidad constante de $20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. ¿En cuánto tiempo la segunda persona (*B*) alcanzará a la primera?

Actividad 2

Resolver problemas que se traducen algebraicamente en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de primer grado.

Por ejemplo:

a. En una verdulería se compraron 8 kg de manzana y 5 lechugas pagando \$8.830. Al mes siguiente por la misma compra se pagaron \$9.960 ya que el kilogramo de manzana había aumentado en 15% y cada lechuga un 5%. ¿Cuánto paga una persona que compra 5,5 kilogramos de manzana y 2 lechugas?

Actividad 3

Resolver problemas que implican plantear y resolver un sistema de ecuaciones de primer grado.

Por ejemplo:

En un teatro se venden 50 entradas, de las cuales algunas son entradas para galería que valen \$1.200 y otras para platea que valen \$1.800. Si en total se recaudaron \$78.000:

a. ¿Cuántas entradas de galería y de platea se vendieron?

b. Hacer una representación grafica de esta situación. ¿Cómo se interpreta el punto de intersección de las rectas?

Actividad 4

Comprobar que en un problema la solución algebraica es equivalente a la solución gráfica. Analizar la existencia y pertinencia de las soluciones.

Por ejemplo:

a. Un restaurante cobra una cuota de entrada de \$6.400 y el cliente se puede servir los platos que desee. Otro, no cobra cuota de entrada, pero cobra \$1.600 por plato servido:

   - ¿Hasta qué cantidad de platos servidos resulta ser más barato el segundo restaurante?
   - Graficar esta situación.

b. La trayectoria de un móvil que se mueve en línea recta está dada por la función $y = 3x + 4$ y la trayectoria de un segundo móvil está dada por la función $y = 3x - 5$. "x" representa el tiempo e"y" la distancia desde el origen.

- ¿En qué punto se intersectan?
- Graficar la trayectoria se realizan ambos móviles.

Sugerencias metodológicas

En la actividad 1 se sugiere que los problemas propuestos a las personas del curso requieran plantear ecuaciones para resolverlos. Además es recomendable, siempre que el curso lo necesite, recordar las propiedades de las igualdades para que la resolución de las ecuaciones tenga sentido y no sólo se convierta en un método rutinario.

La actividad 2 propone la resolución de sistemas de ecuaciones ligados a la resolución de problemas utilizando alguno de los métodos de resolución conocidos tales como método de reducción, igualación o sustitución. Es importante que los estudiantes adultos y adultas identifiquen que los valores literales representan objetos o elementos del problema planteado. Es pertinente también resolver problemas en que las soluciones se puedan obtener por medio del planteamiento de una ecuación o un sistema de ecuaciones, para que los y las estudiantes analicen la pertinencia de los 2 tipos de resoluciones, como por ejemplo: "la suma de dos números es 37, si el triple del menor aumentado en 7 es igual al mayor , ¿cuáles son los números?". La resolución con ecuaciones se plantea de la siguiente manera:

- El número menor: x.
- El número mayor: $37 + x$.

La ecuación es: $3x + 7 = 37 + x$.

El mismo problema se puede resolver con un sistema de ecuaciones, de la siguiente manera:

- Número mayor x.
- Número menor y.

$$\text{Sistema: } \begin{aligned} x - y &= 37 \\ 3y + 7 &= x \end{aligned}$$

En la actividad 3 y 4 el objetivo es que los estudiantes adultos y adultas resuelvan sistemas algebraica y gráficamente, y analicen la ventaja y desventaja de cada uno de los métodos.

Es importante poner énfasis en la representación geométrica que tienen las soluciones algebraicas correspondientes: una, ninguna o infinitas soluciones y que constaten que si el sistema tiene una solución, entonces al graficar las rectas correspondientes se cortan en un punto. De igual manera verifican que si el sistema tiene infinitas soluciones, las rectas son coincidentes y, finalmente, si el sistema no tiene solución las rectas son paralelas.

Módulo III

Geometría

Introducción

En el presente módulo se abordan temas de geometría relativos a figuras semejantes y movimientos rígidos en el plano, materias en las que se encuentran aplicaciones prácticas para las personas del curso. El solucionar problemas de geometría, permite el desarrollo de la imaginación y la apertura que sensibiliza a mirar el arte, la naturaleza y en general elementos de la vida cotidiana desde otro punto de vista.

Este módulo se ha organizado en las siguientes unidades:

Unidad 1: Actualización de conceptos geométricos.
Unidad 2: Semejanza de figuras planas.
Unidad 3: Transformaciones isométricas.

El propósito central de la primera unidad es la actualización de conceptos geométricos que se relacionan con el perímetro y el área de figuras geométricas planas, así como de conceptos que se relacionan con el volumen de cuerpos geométricos y sus respectivas unidades de medida y equivalencias.

En la segunda unidad del módulo, se tratan contenidos relativos a semejanza de figuras planas y se establecen relaciones de proporcionalidad entre trazos, los que se enfatizan con el teorema de Thales. Los dibujos a escala se destacan en esta unidad debido a la conexión que generan entre la semejanza de figuras planas y la proporcionalidad, además de encontrar éstos en contextos cotidianos para los estudiantes adultos y adultas.

Para finalizar este módulo, en la tercera unidad el estudio es centrado en las transformaciones isométricas en el plano, principalmente abordadas desde el arte y las distintas construcciones geométricas. El aprendizaje de estas transformaciones privilegia el desarrollo de habilidades asociadas al sentido espacial y dominio de propiedades geométricas, lo que contribuye finalmente al desarrollo de habilidades cognitivas de orden superior.

Se propone revisar los Contenidos Mínimos Obligatorios, en la perspectiva de los Objetivos Fundamentales, a partir de situaciones que no sean una simple repetición de las que se abordaron en los niveles anteriores sino, más bien, planteando situaciones similares no sólo para recordar conceptos y procedimientos, sino también para profundizar en algunos aspectos que llevan a avanzar tanto en su aprendizaje como en el desarrollo de las capacidades.

Contenidos del módulo

1. Actualización y profundización de contenidos de la Educación Básica, en relación con:
    - Reconocimiento de nociones geométricas tales como: ángulo, rectas, polígonos, perímetro y área de figuras planas, volumen de cuerpos geométricos.
2. Semejanza de figuras planas, dibujos a escala en diversos contextos. Teorema de Thales y algunas aplicaciones a la vida cotidiana.
3. Traslaciones, reflexiones y rotaciones de figuras planas y construcción de figuras por traslación, simetría y rotación en 45º, 90º y 180º. Aplicaciones de las transformaciones isométricas en diversos ámbitos (por ejemplo: la naturaleza, el arte, la arquitectura).

Aprendizajes esperados del módulo[6] y sugerencias de evaluación

APRENDIZAJES ESPERADOS	SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN
A partir del desarrollo de este módulo se espera que los estudiantes adultos y adultas: • Identifiquen y clasifiquen ángulos en agudos, rectos, obtusos y extendidos.	La evaluación de este aprendizaje requiere que los estudiantes adultos y adultas identifique cómo está compuesto un ángulo, además de identificar el ángulo recto, para realizar las comparaciones tomando este ángulo como referente.
• Identifiquen posiciones de rectas en el plano.	La evaluación de este aprendizaje requiere presentar a las personas del curso situaciones en que se aprecie el paralelismo entre trazos y la intersección entre trazos. Es importante destacar que en la intersección de rectas se puede encontrar la condición de perpendicularidad entre rectas.
• Resuelvan situaciones problemáticas que involucran cálculo de área y perímetro. • Analicen el efecto que puede tener en el perímetro y área de una figura geométrica el modificar la longitud de alguno de sus elementos.	La evaluación de este aprendizaje requiere presentar a los estudiantes adultos y adultas situaciones en que sea necesario calcular el perímetro y el área de distintas representaciones de figuras planas presentes en la vida cotidiana, o que pertenezcan a contextos cercanos.
• Calculen el volumen de distintos cuerpos geométricos rectos.	Este aprendizaje requiere de parte de los estudiantes adultos y adultas, identificar los elementos (altura, radio, apotema, entre otros) en los diferentes cuerpos geométricos para obtener el volumen. Es importante presentar a las personas adultas situaciones en diversos contextos cercanos en que es necesario determinar el volumen y verificar la pertinencia de las unidades utilizadas.
• Realicen ampliaciones y reducciones de figuras geométricas planas.	La evaluación de este aprendizaje considera que utilizando diversos procedimientos, las personas del curso realicen ampliaciones y reducciones de figuras geométricas, y describan aquellos aspectos que se mantienen invariantes y aquellos que cambian.
• Apliquen el teorema de Thales para resolver problemas que involucren proporcionalidad de trazos.	La evaluación de este aprendizaje considera que los estudiantes adultos y adultas deben verificar las condiciones necesarias para aplicar el Teorema de Thales de acuerdo a la información presente en un problema y, si corresponde, utilicen éste correctamente.
• Estimen y calculen distancias y longitudes utilizando semejanza de triángulos para resolver problemas en diversos contextos.	La evaluación de este aprendizaje requiere que las personas del curso reconozcan triángulos semejantes en el cálculo de longitudes explicitando la estrategia usada en la solución del problema planteado.
• Caractericen y realicen transformaciones isométricas en el plano cartesiano, reconociendo las invariantes producidas por estas transformaciones. • Reconozcan traslaciones, simetrías y rotaciones en expresiones artísticas y en la naturaleza.	La evaluación de este aprendizaje requiere que los estudiantes adultos y adultas realicen transformaciones isométricas como traslación, rotación y simetría, identificando características de cada una de éstas y las reconozcan en la naturaleza y el arte.

6 A continuación se describen los aprendizajes esperados para este módulo, los cuales se encuentran precisados posteriormente en el desarrollo de cada unidad a través de la descripción de sus respectivos indicadores de evaluación. Se incorporan sugerencias generales para la evaluación. No obstante, para este efecto es muy importante orientarse por los indicadores señalados.

Unidad 1: Actualización de conceptos geométricos

Introducción

En niveles anteriores se han estudiado contenidos relacionados a los conceptos de perímetro y área de figuras geométricas, además de volumen en cuerpos geométricos. El objetivo de esta unidad es actualizar y profundizar estos contenidos, llegando al estudio y análisis de variaciones en parámetros de una fórmula. Se logra resolver problemas donde el cálculo de perímetro y área con sus respectivas unidades, cobran gran sentido y relevancia por su conexión con la experiencia cotidiana.

Otro de los temas tratados es el relacionado al volumen de cuerpos geométricos, en esta ocasión, centrado en el cálculo más que en el concepto.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Identifica y clasifica ángulos en agudos, rectos, obtusos y extendidos.	Cada estudiante: • Identifica la característica que tiene el ángulo recto y el ángulo extendido. • Identifica ángulos en diversas construcciones y formas del entorno. • Clasifica diferentes ángulos en agudos y obtusos, teniendo como referente el ángulo recto.
• Identifica posiciones de rectas en el plano.	• Identifica si las rectas se interceptan o no. • Reconoce que en la intersección de rectas existe un caso particular. • Caracteriza la intersección de rectas en rectas secantes y perpendiculares y la no intersección en rectas paralelas.
• Resuelve situaciones problemáticas que involucran cálculo de área y perímetro.	• Interpreta correctamente los datos y la pregunta del problema relativo a perímetro o área de figuras geométricas. • Calcula el perímetro y el área de cuadrados, rectángulos y triángulos. • Expresa los resultados del perímetro y el área en la unidad de medida correspondiente. • Interpreta adecuadamente los resultados obtenidos en función del contexto del problema.
• Analiza el efecto que puede tener en el perímetro y área de una figura geométrica el modificar la longitud de alguno de sus elementos.	• Aumenta o disminuye la longitud del ancho o largo de una figura en un factor dado. • Analiza el efecto sobre el perímetro o el área de una figura geométrica la modificación de uno o más de uno de sus lados.
• Calcula el volumen de distintos cuerpos geométricos rectos.	• Identifica la base y la altura en los cuerpos geométricos. • Calcula el volumen de prismas, cilindros y conos rectos. • Expresa el resultado del volumen en la unidad de medida correspondiente.

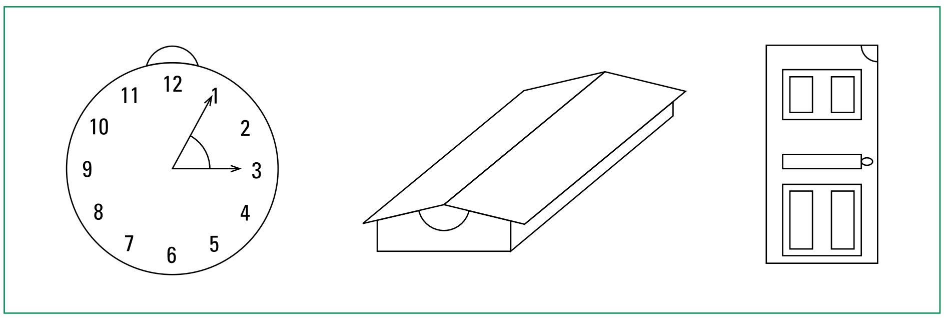
Ejemplos de actividades

Actividad 1

Identificar y clasificar distintos tipos de ángulos teniendo como referencia el ángulo recto y el ángulo extendido.

Por ejemplo:

a. Indicar en cuál de las siguientes imágenes hay un ángulo agudo, uno recto o un ángulo obtuso:



Actividad 2

Identificar en planos, mapas y esquemas rectas paralelas, secantes y perpendiculares. Analizar características y condiciones de las diferentes posiciones de rectas en el plano.

Por ejemplo:

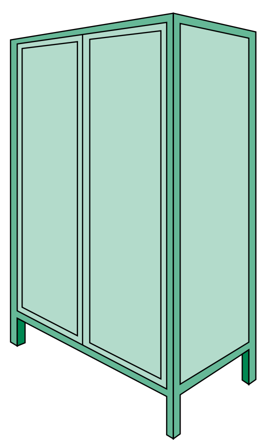
a. En la cuidad de Talca, capital de la séptima región del Maule, no se quisieron hacer problemas con los nombres de sus calles. Las nombraron, a partir de su Plaza de Armas, según la dirección hacia donde se avanzaba: 1 cuadra al norte, 1 Norte; 1 cuadra al sur, 1 Sur; 1 cuadra al poniente, 1 Poniente; 1 cuadra al oriente, 1 Oriente, y así sucesivamente.

El siguiente plano, de la cercanía a la Plaza de Armas, describe esta singular realidad:

Fuente: **http://www.planos.cl/sstreetguide/sstreetguide/#** (adaptación).

- Otra característica de sus calles es que básicamente son casi todas paralelas. Nombra tres pares de calles que aparezcan en el plano que sean paralelas entre sí.
- Nombra dos pares de calles que aparezcan en el plano que sean perpendiculares entre sí.
- Nombra un par de calles que no sean paralelas ni perpendiculares en el plano (secantes).

b. Algunos muebles, especialmente aquellos conformados con repisas, como el que se muestra en la imagen, están diseñados con elementos paralelos y perpendiculares.



¿Existen muebles que rompan esta tendencia práctica? De ser así, buscar y mostrar a qué se debe ese tipo de diseño.

Actividad 3

Determinar perímetro y área de diferentes figuras geométricas. Realizar transformaciones de unidades de medida de uso frecuente de acuerdo al contexto del problema analizando la pertinencia de ésta.

Por ejemplo:

a. Se quiere embaldosar una superficie rectangular de 2,5 metros de ancho por 3,2 metros de largo con baldosas cuadradas de 20 cm de lado:

- ¿Cuántas baldosas se necesitan?
- Si se utilizan baldosas de 33 cm de lado, ¿cuántas se necesitan para cubrir la misma superficie?

b. Se desea confeccionar cortinas para una ventana rectangular que mide 1,8 metros de ancho por 1,3 metros de alto, de tal manera de dejar 20 cm más a todos los lados de la ventana, para la cenefa y para cubrir completamente la ventana. ¿Cuántos metros cuadrados de género se debe comprar para hacer las cortinas?

c. Se quiere cercar una parcela rectangular de 850 metros de largo y 550 metros de fondo con 3 corridas de alambre, ¿cuántos metros de alambre se necesitan?

d. Un local de pizzas ofrecía tradicionalmente su tamaño familiar, de 40 cm de diámetro, en $8.000. Ahora, ofrece por el mismo precio, una pizza con 8 cm más de radio:

- ¿Cuál es el diámetro de la nueva pizza?
- En función de su área, ¿cuánta pizza más trae la nueva pizza?

Actividad 4

Analizar los efectos que puede tener sobre el perímetro y el área de una figura geométrica la modificación de la longitud de uno o más de uno de sus elementos.

Por ejemplo:

a. El lado de un cuadrado aumenta en un 50%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

b. El largo y el ancho de un rectángulo aumentan su medida en un 25%, ¿en cuánto aumenta su perímetro y su área? ¿Son iguales estas 2 medidas? Justifica.

c. Una empresa de detergentes quiere cambiar la etiqueta cuadrada de 25 cm^2 que tiene el envase de su producto, por otra que tenga la misma superficie. ¿Cuál puede ser la medida de esta nueva etiqueta y qué forma tendría? Dé al menos 3 sugerencias.

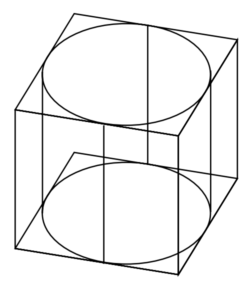
Actividad 5

Determinar el volumen en diferentes cuerpos geométricos expresando los resultados en las unidades de medida correspondiente.

Por ejemplo:

a. Para transportar manzanas de exportación, una empresa ha decidido incorporar en el interior de sus tradicionales cajones de forma cúbica un cilindro inscrito tal como lo muestra la figura siguiente, con el fin de evitar golpes que puedan deteriorar la calidad de dicha fruta durante su traslado.

Para amortiguar dichos golpes deciden rellenar el espacio comprendido entre el cubo y el cilindro que transporta las manzanas, con agua. Si el cubo tiene una arista de 110 cm, ¿cuántos centímetros cúbicos de agua se necesitan para llenar este espacio?



b. Una empresa quiere mandar una mercadería al extranjero que consta de:

DIMENSIONES DE CADA CAJA (EN METROS)	NÚMEROS DE CAJA	PESO DE CADA UNA (EN KILOS)
1 x 0,5 x 0,75	5	6
0,8 x 0,5 x 0,8	4	5,5
0,75 x 1 x 0,75	8	12

La persona encargada del envío consulta dos compañías de transporte de carga, encontrando las siguientes ofertas:

- Transporte vía marítima: cobra 220 dólares por cada m^3 de carga.
- Transporte vía aérea: para calcular este cobro se utiliza el mayor número, sea éste el del volumen en m^3 o el del peso en toneladas, y se multiplica por 456,5 dólares.

Según esta información:

- ¿Qué medio de transporte resulta más económico?
- ¿Cuál es la diferencia de precio entre los 2 transportes para esta carga?

Sugerencias metodológicas

En la actividad 1 se actualizan conocimientos relacionados con la clasificación de ángulos, esta clasificación se encuentra centrada principalmente en ángulos agudos y obtusos, tomando como referente el ángulo recto y el ángulo extendido, cuyas definiciones deben ser actualizadas. Es posible que alguna de las personas pregunte por la clasificación de los ángulos mayores a un extendido y menores a un completo. La idea es centrarse en los ángulos presentados (agudo, recto, obtuso y extendido) y mirar estos otros ángulos como aquellos que se forman con un giro antihorario.

En la actividad 2 es importante señalar que el esquema es sólo una representación de la realidad ya que las rectas están formadas por una sucesión continua e infinita de puntos. También se sugiere introducir el concepto de rectas secantes, ya que no siempre las rectas que se cortan son perpendiculares, de esta forma es recomendable recalcar la particularidad de las rectas perpendiculares en relación con las rectas secantes.

En la actividad 3 se sugiere que el profesor o profesora enfatice el hecho que no se puede transformar una unidad de longitud con una de área.

Es conveniente recalcar la importancia de mantener una misma unidad de medida durante todo el desarrollo del ejercicio, de lo contrario se generará un problema para establecer en qué unidades queda expresado el resultado.

En la actividad 5 se propone buscar ejemplos de la vida cotidiana en donde se requiere calcular el volumen de distintos cuerpos geométricos. Lo comentan con el resto del curso. En el desarrollo de esta actividad el docente puede ir sistematizando las fórmulas de volúmenes de los diferentes cuerpos geométricos, tales como: prismas rectos, cilindro, cono y pirámides rectas, entre otros.

Unidad 2: Semejanza de figuras planas

Introducción

En esta unidad se aborda la semejanza de figuras planas desde la observación de nuestro entorno y a través del trabajo con los triángulos.

En el entorno nos encontramos muchas veces con objetos semejantes, por ejemplo, las llamadas muñecas rusas. Éstas pueden ser guardadas una dentro de otra y poseen el mismo diseño cambiando solo el tamaño. Otro lugar donde podemos observar semejanza es en la imagen contenida por una hoja de transparencia proyectada por un retroproyector sobre un telón. Un caso particular de la semejanza de figuras planas es la congruencia que podemos observar en la producción en serie de posters, de un papel mural, en el diseño de una servilleta, además, en la duplicación de una fotografía o en una fotocopiadora, conservando las dimensiones del original.

En relación con el estudio de la medida de trazos proporcionales se incluye el Teorema de Thales, el cual es considerado para solucionar problemas de longitudes desconocidas en los lados de triángulos semejantes.

En el estudio de estas situaciones es necesario incorporar los conceptos de proporcionalidad y paralelismo. Estos conceptos nos ayudarán en el análisis de determinadas situaciones referidas a semejanza de figuras planas, como también en el análisis de aplicación del Teorema de Thales.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Realiza ampliaciones y reducciones de figuras planas utilizando diferentes estrategias.	Cada estudiante: • Amplia o reduce una figura geométrica utilizando un cuadriculado en la figura. • Reconoce el factor de ampliación o reducción de una figura geométrica. Por ejemplo, el doble, a la mitad, tres veces, entre otras. • Reconoce las invariantes de una figura geométrica al ser ampliada o reducida.
• Aplica el Teorema de Thales en problemas sobre proporcionalidad de trazos.	• Reconoce las condiciones necesarias para aplicar el teorema de Thales. • Determina longitudes de trazos utilizando el Teorema de Thales.
• Estima y calcula longitudes utilizando semejanza entre triángulos para resolver problemas en diversos contextos.	• Describe el procedimiento utilizado para resolver situaciones de cálculo de distancias y longitudes aplicando la semejanza de triángulos. • Aplicando semejanza de triángulos resuelve el problema.

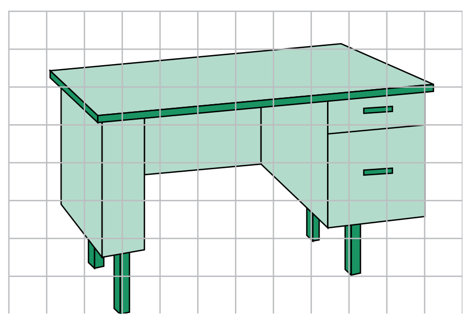
Ejemplos de actividades

Actividad 1

Realizar la ampliación de un dibujo o fotografía, trazando un cuadriculado sobre él y reproducirlo en un cuadriculado de mayor tamaño. Para realizar una reducción realizan lo mismo, reproduciendo el dibujo en un cuadriculado de menor tamaño.

Por ejemplo:

Ampliar el siguiente mueble al doble, cuadriculando:

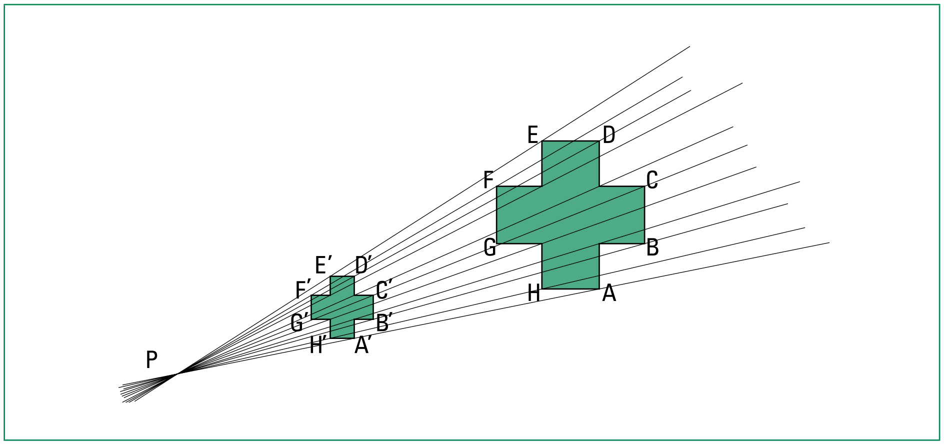


Actividad 2

Realizar ampliaciones y reducciones utilizando proyecciones. Incorporar la notación para explicitar la correspondencia entre los lados del polígono original y el que resulta de la ampliación o reducción. Verificar la relación que se establece entre el factor de proyección y la relación entre los lados de ambos polígonos.

Por ejemplo:

a. Encontrar qué relación existe entre la razón de proyección y los respectivos lados de la figura base y su reducción, es decir entre: AH y A'H'; BC y B'C', etc.

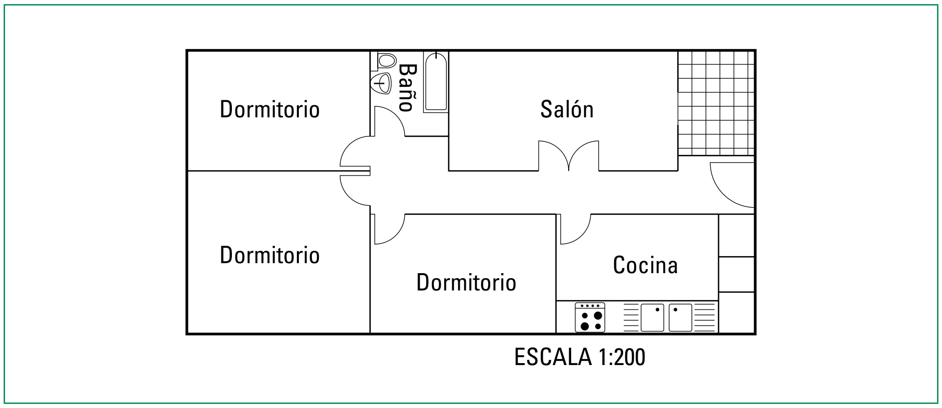


Actividad 3

Calcular distancias en planos dibujados a escala. Dibujar el plano de la planta de una construcción, especificando la escala utilizada.

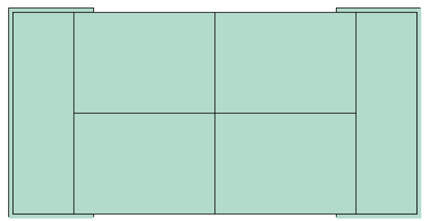
Por ejemplo:

a. Considerando la escala dada, en cm, para las medidas lineales del plano de una casa, calcular las dimensiones reales de cada dormitorio, de la cocina y el salón:



b. Construir el plano del colegio utilizando una escala dada por el profesor o profesora.

c. La municipalidad de cierta localidad quiere construir una multicancha deportiva de uso social para los miembros de la comuna. Para ayudar con este objetivo un vecino les lleva el siguiente plano:



Teniendo en cuenta las medidas dadas en el dibujo realizado por el vecino:

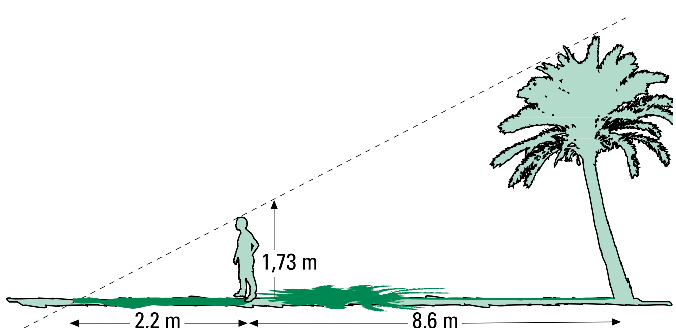
- ¿Cuál es la superficie real de la multicancha, si el dibujo está construido a una escala 1:250 para sus medidas lineales?

Actividad 4

Resolver problemas en diversos contextos que requieran la aplicación de Teorema de Thales para su solución.

Por ejemplo:

Una persona mide la sombra proyectada de una palmera y se ubica justo al final de ella, lo muestra la imagen. Si la persona mide 1,73 metros y la sombra que proyecta mide 2,2 metros, ¿cuál es la altura aproximadamente de la palmera?

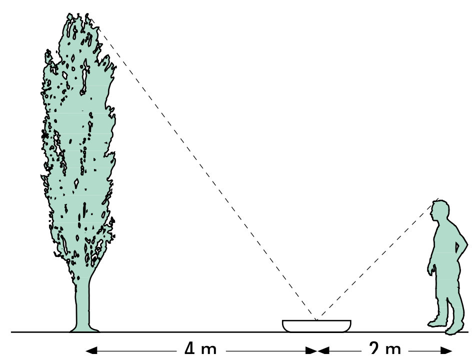


Actividad 5

Resolver problemas en diversos contextos aplicando la semejanza de triángulos.

Por ejemplo:

Una persona parada frente a un árbol quiere medir la altura de éste, para lo cual pone un espejo en el suelo a 4 m del árbol y a 2 m de él, como se señala en el dibujo. Si la persona hasta el nivel de sus ojos tiene una altura de 1,5 m, ¿cuál es la altura aproximada del árbol?



Sugerencias metodológicas

Un aspecto a considerar en esta unidad es la distinción entre una semejanza intuitiva y la que está determinada por principios de proporcionalidad. En el trabajo con la imagen se persigue establecer la idea de ampliaciones o reducciones proporcionales, por ende, se recomienda que se trabaje con la idea de un factor de ampliación o reducción, para el caso es un factor de ampliación igual a 2.

Para la actividad 1, se sugiere comenzar realizando algunas preguntas tales como: ¿qué entienden ustedes por figuras semejantes?, ¿cuándo sé que estoy observando dos figuras semejantes?, si los estudiantes adultos y adultas recuerdan o dominan el concepto, se puede preguntar por ¿qué utilidad ven ustedes en la semejanza?.

En la actividad 2, los y las estudiantes deberán incorporar la notación correspondiente para identificar los trazos que son correspondientes entre ambas figuras, para identificar aquellos trazos que resultan paralelos, como también, los trazos en que uno de los extremos corresponde al punto de proyección (P). Se sugiere que trabajen factores de proyección mayores que 1, igual a 1 y menor que 1, para inducir la discusión sobre el resultado de proyectar figuras con estos factores. En el caso de los factores de proyección negativos se considera que la longitud resultante se traza en sentido opuesto a la figura, manteniendo como referente el punto de proyección.

Como continuidad para la actividad 3, las personas del curso pueden aplicar este concepto en la construcción de distintos tipos de situaciones de acuerdo al campo laboral en donde se desempañen. Es posible que se pueda ejemplificar con modelos de muebles que muestran diversas tiendas, observando en ellos que es importante mantener una notación que permita interpretar dichos planos.

En cuanto a los planos de casas se pueden analizar aquellos que aparecen en folletos y revistas. A partir de ellos se puede interpretar las escalas y los espacios destinados a cada tipo de ambiente, también pueden realizar ampliaciones o reducciones de los planos, estableciendo la nueva escala con respecto a la casa "real".

A partir de la actividad 4 se sugiere hacer que los estudiantes adultos y adultas se organicen en grupos y desarrollen estas actividades midiendo un muro de la escuela o un árbol, como también, que propongan situaciones donde es posible utilizar el Teorema de Thales y la semejanza de triángulos.

Unidad 3: Transformaciones isométricas

Introducción

En esta unidad el aprendizaje de propiedades de las figuras geométricas y la visualización de movimientos rígidos en el plano dan lugar a las denominadas transformaciones isométricas.

Estas transformaciones tienen una estrecha relación con la congruencia de figuras geométricas, tópico habitual en nuestra educación media, y se vincula con distintas expresiones de arte. Su aprendizaje favorece el desarrollo de habilidades espaciales y al estudio de propiedades de figuras geométricas.

El pintor y matemático M.C. Escher, tiene una diversidad de obras en que se vislumbra esta estrecha conexión entre las artes y las transformaciones isométricas.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Caracteriza la traslación, la simetría y la rotación de figuras geométricas en un plano.	Cada estudiante: • Identifica la traslación, como el movimiento de todos los puntos de una figura geométrica en el plano de acuerdo a una dirección, sentido y magnitud dada. • Identifica la simetría axial como el movimiento de todos los puntos de una figura geométrica a una misma distancia de una recta (eje). • Identifica la rotación como el movimiento de todos los puntos de una figura geométrica en torno a un centro y un ángulo de 45º, 90º o 180º.
• Realiza traslaciones, simetrías y rotaciones de figura geométricas, reconociendo las invariantes en dichas figuras.	• Construye una traslación desplazando los vértices de la figura geométrica con una dirección, sentido y magnitud dada. • Construye una rotación de una figura geométrica utilizando y reconociendo el centro de rotación y el ángulo de giro. • Identifica que la forma de las figuras no cambia. • Identifica que el tamaño de las figuras no cambia.
• Reconoce traslaciones, simetrías y rotaciones en expresiones artísticas y en la naturaleza.	• Identifica traslaciones, simetrías y rotaciones en distintas obras de arte, por ejemplo, M.C. Escher. • Identifica simetrías axiales en la naturaleza.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Reconocer las transformaciones isométricas presentes en distintos contextos cotidianos.

Por ejemplo:

Asocia a cada situación la transformación isométrica correspondiente:

a. Los movimientos de las manecillas de un reloj.

b. El movimiento de un ascensor de un edificio.

c. El movimiento de un carrusel.

d. La apertura y cierre de una puerta.

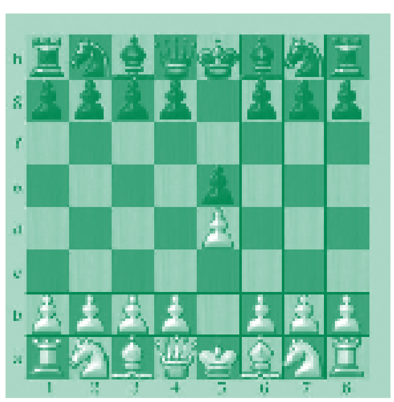
e. La mirada de una persona en el espejo.

Actividad 2

Representar, identificar y determinar las coordenadas de puntos en un sistema coordenado.

Por ejemplo:

El tablero de ajedrez está organizado de tal manera que las piezas toman ubicaciones especificas desde el momento de la partida; para este efecto, las filas se han designado por letra y las columnas por números, de la siguiente manera:



Se puede observar que el rey blanco tiene la posición inicial *a*4 y la reina negra parte en la posición *h*5. Este tipo de notación en ajedrez se le llama "notación algebraica" y es la forma de cómo se entienden las jugadas. Matemáticamente, esta notación puede ser escrita como par ordenado, de la forma (*a*,4) y (*h*,5), y harían referencia a la misma posición. Esto es lo que llamamos un punto en un plano coordenado, donde "*a*", "4", "*h*" y "5" corresponden a las coordenadas de dichos puntos. A diferencia de lo que ocurre en el mundo del ajedrez, en geometría, siempre se lee y se anota la coordenada horizontal (abscisa) primero y la coordenada vertical (ordenada), en segundo lugar. Por lo tanto, la ubicación de las dos piezas referenciadas, geométricamente como punto, tienen la ubicación (4, *a*) y (5, *h*), respectivamente.

Usando la notación de punto, indicar la posición de las siguientes piezas del ajedrez:

- Peón negro, que ya fue movido en el tablero.
- Peón blanco, que ya fue movido en el tablero.
- Reina blanca.
- Torre blanca del lado derecho.
- Torre negra del lado derecho.

Actividad 3

Trasladar distintas figuras geométricas en un plano coordenado.

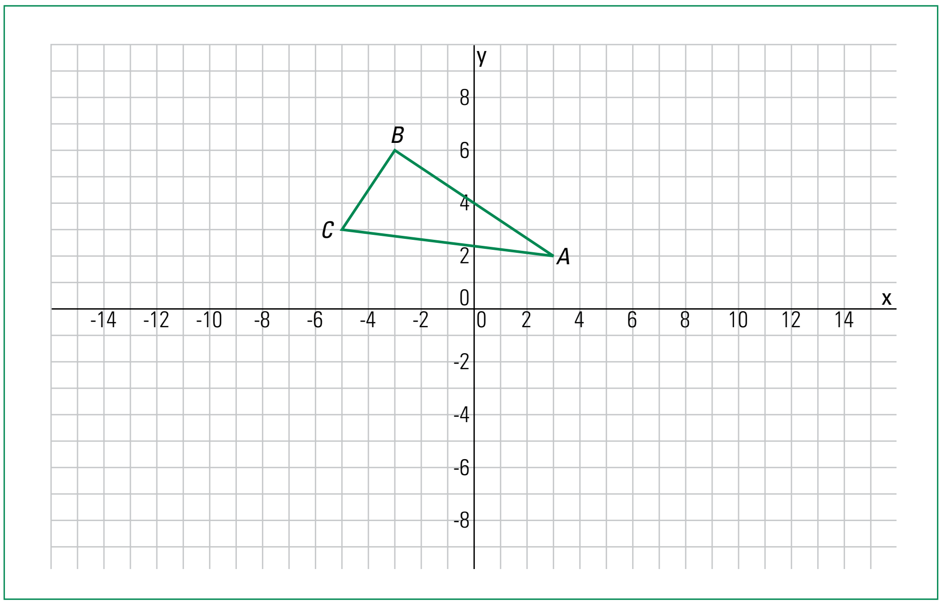
Por ejemplo:

a. Cada pieza del ajedrez se mueve de una forma diferente. La torre se mueve cualquier cantidad de casillas libres, pero sólo horizontal o verticalmente, mientras que el alfil se mueve cualquier cantidad de casillas libres, pero sólo diagonalmente. De esta forma, un alfil siempre se moverá por casillas de un solo color. Por ello se dice que cada jugador tiene un alfil de casillas blancas que se mueve por éstas, y otro de casillas negras. La dama o reina combina los movimientos de la torre y el alfil, pudiéndose mover horizontal, vertical y diagonalmente tantas casillas libres como desee. El rey puede moverse solamente una casilla horizontal, vertical o diagonalmente. Finalmente, el caballo es la única pieza que puede saltar, es decir, que puede ir de la casilla de inicio a la de destino sin que se lo impida una pieza interpuesta; el caballo se mueve en forma de "*L*": las casillas de origen y destino distan dos casillas horizontales más una vertical (o viceversa).

   - Mirando el tablero de la actividad anterior, ¿cuántas casillas debe bajar y luego moverse hacia al lado el caballo negro que está en la posición (*h*, 1) para ubicarse en la posición (*f*, 2)?
   - Si en el tablero estuviera sólo la reina blanca, en la posición (6, *c*), ¿cómo se puede describir el movimiento que haría para ubicarla en el lugar (3, *f*) en dos movimientos rectos?

- Sabiendo que la torre solo puede hacer movimientos rectos, si en el tablero estuviera solo la torre negra de la posición (8, *h*), ¿cómo se puede describir el movimiento que haría para ubicarla en el lugar (4, *d*) en dos movimientos rectos? ¿Es la única alternativa que se tiene?, nombre por lo menos tres.

b. Identificar las coordenadas de los vértices del triángulo *ABC*, luego trasladarlo según la siguiente descripción: 5 posiciones a la derecha para la primera coordenada (abscisa) y 3 posiciones a la izquierda para la segunda coordenada (ordenada). Nombrar los nuevos vértices del triángulo trasladado:

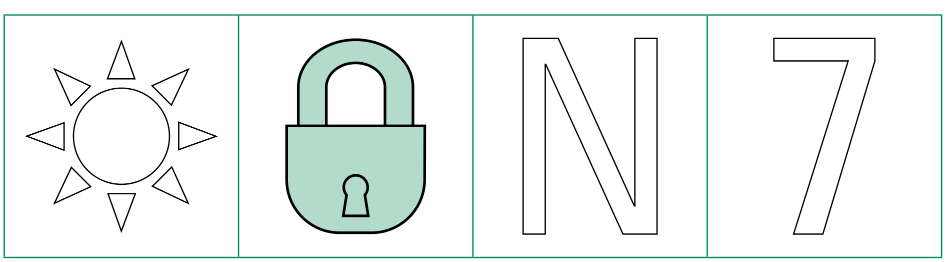


Actividad 4

Dibujar figuras simétricas y reconocer sus ejes de simetría.

Por ejemplo:

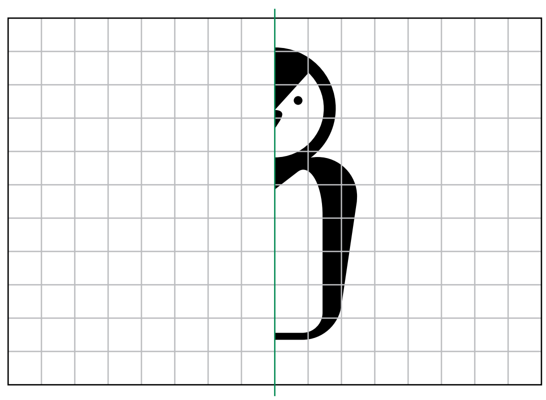
a. En caso que corresponda, dibujar en cada figura por lo menos 1 eje de simetría:



b. Dibujar una figura que tenga:

- Un eje de simetría.
- Dos ejes de simetría.
- Infinitos ejes de simetría.

c. Completar el siguiente dibujo que ha sido cortado verticalmente por un eje de simetría:



Actividad 5

Rotar figuras en 45°, 90° y 180°. Identificar los elementos de una rotación.

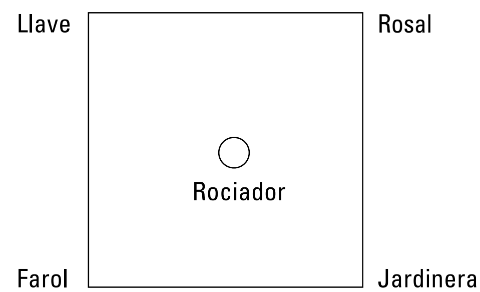
Por ejemplo:

a. La siguiente imagen corresponde a una ampliación de un control de balance de un equipo musical. Su movimiento está dado entre R (Right), B (Balance) y L (Left):

- ¿De cuántos grados debe ser el giro del control, para que el indicador del balance quede en L?

- Suponiendo que el indicador de balance está en R, ¿de cuántos grados debe ser el giro del control, para que el indicador del balance quede en L?
- Si el sonido del equipo está desbalanceado, porque el indicador de balance está ubicado en L, ¿de cuántos grados es el giro del control, para que el indicador del balance quede en B? ¿Qué ocurre con este tipo de giro?

b. El siguiente esquema corresponde a un jardín cuadrado, en el cual se señalan los elementos de sus cuatro esquinas. Para regarlo siempre se coloca un rociador angular justo al centro del jardín:



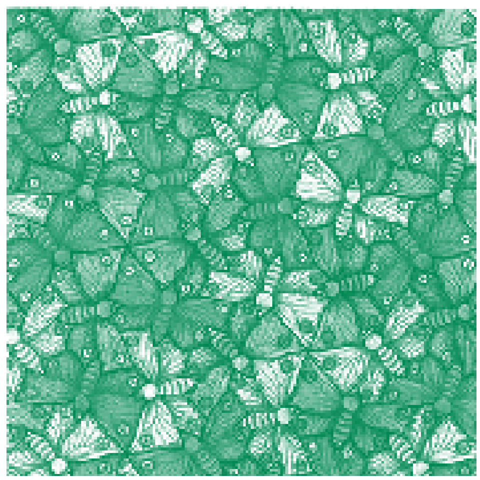
- Si se coloca el rociador apuntando hacia el rosal y es programado para girar en 90°, hacia ambos lados, ¿hasta qué punto del jardín se regará?
- Si cambia el rociador y queda apuntando hacia el farol y se programa para girar en 180°, sólo hacia la derecha, ¿hasta qué punto del jardín se regará?
- Si se vuelve a cambiar el rociador y se deja apuntando hacia la llave y programado para girar en 90°, sólo hacia la izquierda, ¿hasta qué punto del jardín se regará?
- Si se cambia el rociador y se deja apuntando hacia la jardinera y es programado para girar en 45°, solo hacia la izquierda, ¿hasta qué punto del jardín se regará?

Actividad 6

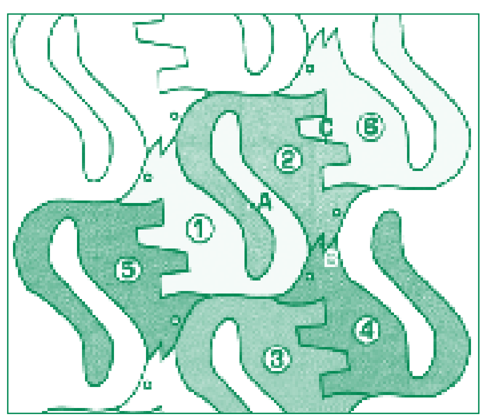
Reconocer las distintas transformaciones isométricas utilizadas en algunas composiciones artísticas.

Por ejemplo:

a. Elige 2 mariposas cualesquiera de la siguiente pintura de M.C. Escher e indica qué transformación isométrica te permiten pasar de una a otra:



b. Observa el siguiente dibujo. ¿Qué transformación isométrica permite pasar de la figura 1 a la 4?, ¿y de la 2 a la 6?:



Sugerencias metodológicas

El objetivo de la actividad 1 es que los estudiantes adultos y adultas reconozcan y analicen las transformaciones isométricas presentes en distintas situaciones del quehacer cotidiano y que sean frecuentes para ellos. Se sugiere que busquen otras situaciones y discutan sobre el tipo de movimiento realizando. Se debe tener en consideración que estos ejemplos son una forma de aproximar al concepto de transformaciones isométricas, ya que estos movimientos ocurren en el plano.

En el desarrollo de la actividad 2, es importante destacar la forma de cómo está compuesto un par ordenado, las coordenadas son (x, y), donde el valor de la primera coordenada se ubica en el eje de las abscisas y la segunda coordenada se ubica en el eje de las ordenadas. Otro aspecto a considerar es la ubicación de los valores negativos en los distintos ejes coordenados.

Para las actividades de simetría axial, se sugiere que las personas del curso realicen simetrías en el plano coordenado con respecto a los ejes "*X*" e "*Y*" para figuras geométricas conocidas.

Para las actividades de rotaciones, se sugiere introducir el trabajo con figuras geométricas simples, donde los estudiantes adultos y adultas sean capaces de nombrar las nuevas coordenadas de los vértices de la figura rotada en ángulos de 45°, 90° y 180°, utilizando como centro de rotación el origen del sistema de coordenadas.

Módulo IV

Estadística y probabilidades

Introducción

Uno de los propósitos de este módulo es actualizar los conocimientos relacionados con algunas nociones de estadística descriptiva que los estudiantes adultos y adultas ya han trabajado en los anteriores niveles, tales como gráficos estadísticos y medidas de tendencia central. En esta segunda mirada, el trabajo está focalizado tanto en la profundización de conceptos como en la contextualización de los mismos, de acuerdo a la información estadística habitual que aparece en los medios de comunicación.

Ligado a los conceptos estadísticos, además se introduce a las personas del curso en las nociones de fenómeno aleatorio y probabilidad de un suceso. Se propone un trabajo en el cual reconozcan que el estudio de las probabilidades y el modelamiento del azar adquieren en la actualidad una mayor importancia en cuanto a la interpretación y análisis de situaciones del mundo real.

Las diversas situaciones planteadas permiten reconocer en la estadística una disciplina con amplias repercusiones en la vida diaria de las personas, dejando en evidencia su inclusión en variadas temáticas, tales como educación, salud, economía, política, social, etc.

Se propone revisar cada uno de los temas señalados en los Contenidos Mínimos Obligatorios, en la perspectiva y profundidad de los Objetivos Fundamentales, a partir de situaciones que no sean una simple repetición de las que se abordaron en la Educación Básica, sino más bien planteando actividades y problemas que profundicen en contenidos que permitan avanzar a cada estudiante, tanto en su aprendizaje como en el desarrollo de las capacidades.

El módulo está constituido por 3 unidades:

Unidad 1: Gráficos estadísticos y medidas de tendencia central.
Unidad 2: Tablas de distribución de frecuencias.
Unidad 3: Juegos de azar y probabilidades.

El propósito de la primera unidad es que los estudiantes adultos y adultas revisen y profundicen en nociones básicas de estadística descriptiva, interpreten información en contextos reales a partir de ciertos gráficos estadísticos y utilicen medidas de tendencia central para el análisis de datos. Además, se propone la construcción de algunos gráficos tales como los de barras y el gráfico circular.

En la segunda unidad se construyen e interpretan tablas de frecuencia, utilizando datos de diversos contextos. El propósito es que las personas del curso puedan, por una parte interpretar información desde alguna tabla y, por otra, organizar un conjunto de datos usando una tabla de frecuencias.

En la tercera unidad se inician en conceptos básicos de probabilidad y fenómeno aleatorio, a través de juegos de azar y del cálculo de probabilidades sencillas en situaciones de equiprobabilidad. El propósito es que los estudiantes adultos y adultas analicen diversas situaciones en el contexto donde interviene el azar.

Contenidos del módulo

1. Actualización y profundización de contenidos de la Educación Básica en relación con:
   - Nociones de gráfico de barras, gráfico circular, medidas de tendencia central y su uso para analizar y comparar información contenida en conjuntos de datos no agrupados.
2. Interpretación y construcción de tablas de frecuencia de datos no agrupados en intervalos, (frecuencia absoluta, relativa y porcentual) extraídos de contextos cotidianos.
3. Descripción y análisis de juegos de azar sencillos. Cálculo de probabilidades para eventos equiprobables mediante la razón entre casos favorables y posibles (regla de Laplace). Análisis de situaciones de diversos ámbitos donde interviene el azar (por ejemplo, las acciones en la bolsa, resultados de juegos deportivos, etc.).

Aprendizajes esperados del módulo[7] y sugerencias de evaluación

APRENDIZAJES ESPERADOS	SUGERENCIAS DE EVALUACIÓN
A partir del desarrollo de este módulo se espera que los estudiantes adultos y adultas: • Interpreten información, en contextos reales, presentada en gráficos de barras y circulares.	Para la evaluación de este aprendizaje se recomienda usar situaciones reales que sean significativas para las personas del curso. Es importante que los estudiantes adultos y adultas trabajen con actividades que presenten información similar a las que aparecen en diarios y revistas.
• Construyan gráficos de barra y circulares, a partir de un conjunto de datos.	Al igual que en el aprendizaje anterior, se recomienda utilizar datos extraídos de contextos reales y significativos. Además es importante que los estudiantes adultos y adultas no sólo comuniquen los resultados, sino también los procedimientos utilizados.
• Calculen e interpreten medidas de tendencia central: media, moda y mediana en conjuntos de datos.	Para evaluar este aprendizaje es necesario presentar a los estudiantes situaciones en las que sea necesario realizar los cálculos para obtener cada medida de tendencia central, utilizando procedimientos escritos, calculadora o planillas de cálculo. Además se debe proponer instancias en las que ellos interpreten, en un contexto dado, cuál es el significado de cada una de dichas medidas.
• Interpreten información contenida en una tabla de frecuencias.	La evaluación de este aprendizaje requiere que las personas del curso sean capaces de interpretar la información contenida en una tabla de frecuencias. Al igual que en el caso de los gráficos, se recomienda usar situaciones reales que sean significativas para ellos. Lo importante es que tengan claro los conceptos de frecuencia, frecuencia relativa y porcentual.
• Construyan una tabla de frecuencias, a partir de un conjunto de datos en un contexto determinado.	La evaluación de este aprendizaje requiere que los estudiantes adultos y adultas sean capaces de confeccionar adecuadamente una tabla de frecuencias considerando: frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.
• Analicen e interpreten los resultados de experimentos aleatorios o juegos de azar sencillos.	Para evaluar este aprendizaje, se recomienda que desarrollen distintas situaciones con experimentos aleatorios o juegos de azar sencillos. Es importante que los estudiantes adultos y adultas tomen contacto con el azar y distingan esta experiencia de situaciones de tipo determinista. Además, en cada experimento aleatorio deben ser capaces de determinar los sucesos posibles de acuerdo a los resultados obtenidos.
• Apliquen la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades en situaciones sencillas.	En la evaluación de este aprendizaje es importante que las personas del curso sean capaces de calcular distintas probabilidades “a priori” en contextos de juegos de azar sencillos, estableciendo la razón entre casos favorables y casos posibles y reconociendo que para ello es necesario que los sucesos sean equiprobables.
• Relacionen la frecuencia relativa con la probabilidad de un suceso y conozcan empíricamente la Ley de los grandes números.	En este aprendizaje es importante que los estudiantes adultos y adultas trabajen el concepto de frecuencia relativa como una manera de aproximarse experimentalmente a la probabilidad de un suceso. En este sentido las personas realizan la experiencia, de lanzar una moneda o un dado, una cierta cantidad de veces determinado la frecuencia relativa, por ejemplo, del suceso “sale cara” o bien “sale un 6”. Si el dado o moneda se lanza 5 ó 10 veces, los resultados tal vez no digan nada. Sin embargo, si se realizan 100, 500 ó 1000 lanzamientos entonces es posible observar alguna regularidad o tendencia. En este punto los estudiantes se aproximan experimentalmente a la Ley de los grandes números.

7 A continuación se describen los aprendizajes esperados para este módulo, los cuales se encuentran precisados posteriormente en el desarrollo de cada unidad a través de la descripción de sus respectivos indicadores de evaluación. Se incorporan sugerencias generales para la evaluación. No obstante, para este efecto es muy importante orientarse por los indicadores señalados.

Unidad 1: Gráficos estadísticos y medidas de tendencia central

Introducción

El propósito de esta unidad es profundizar en contenidos trabajados en los niveles anteriores, tales como el uso de gráficos y el cálculo de medidas de tendencia central. La idea es que alumnos y alumnas se enfrenten a situaciones de mayor reflexión y análisis de los temas.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Interpreta información, en contextos reales, presentada en gráficos de barras y circulares.	Cada estudiante: • Identifica información específica, considerando las variables en juego. • Compara datos presentes en los gráficos. • Obtiene conclusiones a partir de la información entregada por el gráfico.
• Construye gráficos de barra y circulares, a partir de un conjunto de datos.	• Ordena datos en gráficos de barra, identificando adecuadamente los ejes. • Da título tanto al gráfico como a los ejes. • Ordena datos en gráficos circulares, relacionando frecuencias y porcentajes con la medida del ángulo central de cada sector circular. • Da título al gráfico circular.
• Calcula e interpreta medidas de tendencia central: media, moda y mediana en conjuntos de datos.	• Calcula medidas de tendencia central para un conjunto de datos, empleando si es pertinente una calculadora o una planilla de cálculo. • Interpreta las medidas de tendencia central como valores representativos de un conjunto de datos.

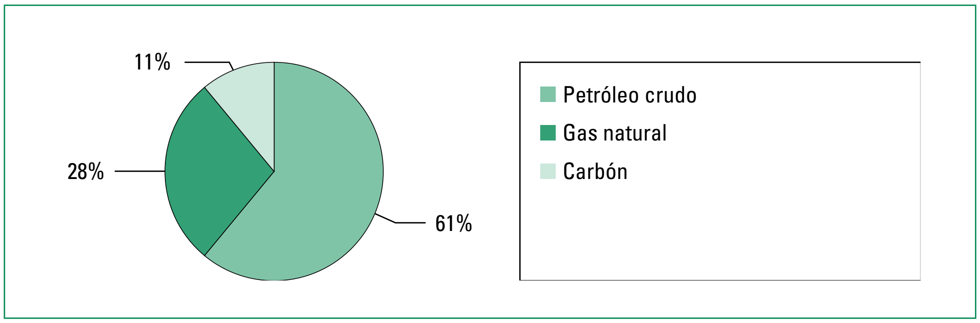
Ejemplos de actividades

Actividad 1

Interpretar información contenida en un gráfico, extraído de algún medio de comunicación.

Por ejemplo:

El siguiente gráfico muestra la importación de energía primaria y secundaria en el año 2001 en nuestro país:



Fuente: Comisión Nacional de Energía (CNE).

a. ¿Qué energía es la que más se importa en nuestro país?

b. ¿Qué energía es la que menos se importa en nuestro país?

c. Si el total de importación de energía es de 173.819 teracalorías, ¿qué cantidad de teracalorías de gas natural importa nuestro país?

Actividad 2

Construir gráficos de acuerdo a una cierta información proporcionada.

Por ejemplo:

La siguiente tabla entrega el número de días con preemergencia y emergencia ambientales por emisiones contaminantes en la atmósfera en Santiago, desde 1997 a 2002:

AÑOS	PREEMERGENCIAS	EMERGENCIAS
1997	13	0
1998	12	1
1999	14	1
2000	11	0
2001	4	0
2002	9	0

Fuente: Servicio de Salud Metropolitano del Ambiente (SESMA).

a. Construye un gráfico de barras donde se muestre el número de días con preemergencias ambientales en Santiago, entre los años 1997 y 2002.

b. ¿En qué año se registraron la mayor cantidad de preemergencias ambientales?

c. ¿En qué año se registraron la menor cantidad de preemergencias ambientales?

d. ¿En qué años se registraron emergencias ambientales?

Actividad 3

Dada una tabla de frecuencias, calcular medidas de tendencia central e interpretar estos valores de acuerdo al contexto del problema.

Por ejemplo:

En la siguiente tabla se entregan las tasas de desempleo, a nivel nacional, entre los años 1998 y 2006:

AÑO	TASA DE DESEMPLEO (%)
1998	5,7
1999	10,1
2000	9,3
2001	10,3
2002	9,9
2003	9,8
2004	10,7
2005	9,6
2006	8,8

Fuente: **www.mintrab.cl** (Ministerio del Trabajo).

a. Calcular la media aritmética de las tasas de desempleo en el período 1998-2006. Interpreta este valor de acuerdo al contexto.

b. ¿En qué año se produce la menor tasa de desempleo?

c. ¿En qué año se produce la mayor tasa de desempleo?

d. A partir de la información de la tabla y los datos recién obtenidos, ¿cómo ha variado la tasa de desempleo en los últimos 9 años?

Actividad 4

Dado un conjunto de datos, calculan medidas de tendencia central.

Por ejemplo:

La siguiente información corresponde a la cantidad de goles realizados por los equipos de fútbol en el último mundial del año 2006 en Alemania (Fuente: **www.mundial2006.com**):

12 - 14 - 10 - 9 - 3 - 4 - 5 - 3 - 5 - 2 - 1 - 2- 0 - 2 - 3 -
5 - 2 - 4 - 8 - 6 - 5 - 2 - 3 - 2 - 1 - 5 - 3 - 3 - 2 - 11

a. Calcular la media aritmética y la moda. Interpretar estos valores de acuerdo al contexto.

Sugerencias metodológicas

Para la actividad 1 se sugiere investigar acerca de las unidades utilizadas para medir las importaciones de energía en nuestro país.

En la actividad 2 se sugiere averiguar acerca de los agentes contaminantes que producen dichas preemergencias y emergencias. Junto con lo anterior, es necesario propiciar que los estudiantes adultos y adultas participen continuamente en análisis de diversas tablas, dejando espacio para la valoración de la información que se puede obtener efectivamente. En este sentido, las personas del curso deben incorporar elementos de juicios necesarios para formarse una opinión y en algunos casos para tomar decisiones.

En la actividad 3, se sugiere que el profesor o profesora verifique la validez y el fundamento de las conclusiones que presentan los estudiantes a partir de sus cálculos.

En la actividad 4, se sugiere incorporar situaciones similares al interior de la sala de clases, buscando acercar las distintas temáticas a las realidades existentes, así como también, favorecer el conocimiento entre los pares, por ejemplo, el número de hermanos que cada persona tiene, el número de transportes públicos que utilizan para llegar a sus lugares de trabajo, etc. Buscar una situación donde se use la mediana como indicador estadístico más "justo" que el promedio, de manera que comprendan su uso y sentido. Por ejemplo, en mediciones de pobreza, donde los datos son muy dispersos y hay una minoría que se escapa muy fuerte del resto del grupo. En este tipo de información se usa la mediana como indicador, más que el promedio, puesto que el grupo pequeño desbalancea el promedio corriéndolo artificialmente hacia arriba.

Unidad 2: Tablas de distribución de frecuencias

Introducción

En esta unidad se abordan situaciones que permiten profundizar en la interpretación de la información contenida en tablas de frecuencias, así como también su construcción. De manera particular, se trabajará con tablas que contienen frecuencias relativas y porcentuales, lo cual a su vez permitirá más adelante una mejor entrada a la unidad de probabilidades.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Interpreta información contenida en una tabla de frecuencias.	Cada estudiante: • Identifica información específica proporcionada en tablas, considerando las variables en juego. • Compara datos presentados en tablas. • Saca conclusiones a partir de la lectura de una tabla.
• Construye una tabla de frecuencias, a partir de un conjunto de datos en un contexto determinado.	• Organiza un conjunto de datos en una tabla de frecuencias, ubicando correctamente las variables representadas y las unidades de medida correspondientes. • Completa una tabla de frecuencias.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Interpretar la información contenida en una tabla de frecuencias.

Por ejemplo:

La siguiente tabla entrega información acerca del número de hombres y mujeres matriculados en los diferentes niveles de educación superior en el país, en el 2007:

MATRÍCULA DE PRIMER AÑO POR TIPO DE INSTITUCIÓN Y GÉNERO								
Índices 2007								
Matrícula Primer Año	Universidades		Inst. Profesionales		C. Formación Técnica		Total	
Femenina	58.452	50%	23.921	44%	17.368	49%	99.741	48%
Masculina	57.449	50%	30.791	56%	18.386	51%	106.626	52%
Total	**115.901**		**54.712**		**35.754**		**206.367**	

Fuente: Consejo Superior de Educación.

a. ¿En qué tipo de institución se matriculó la mayor cantidad de mujeres?

b. ¿En qué tipo de institución se matriculó la mayor cantidad de hombres?

c. Considerando que la población femenina es levemente mayor en nuestro país, ¿qué opinión te merecen las cifras anteriores?

d. ¿Qué porcentaje del total de matrículas en el 2007, corresponde a mujeres?

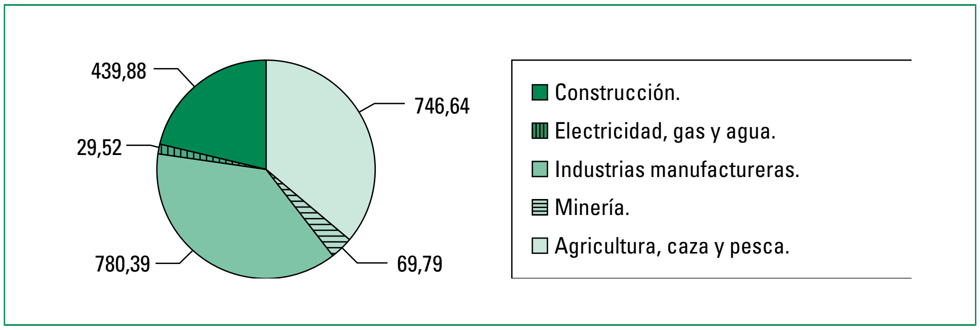
e. Construye un gráfico de barras comparativo por sexo.

Actividad 2

Construir una tabla de frecuencias a partir de un gráfico dado.

Por ejemplo:

El siguiente gráfico muestra la fuerza de trabajo ocupada, por rama económica, en el trimestre octubre-diciembre del año 2002 (en miles):



Fuente: "Compendio estadístico 2003 del INE".

a. ¿A cuánto asciende la fuerza laboral en el trimestre octubre-diciembre del año 2002?

b. Construye la tabla de frecuencias a partir del gráfico circular.

c. ¿Qué rama representa la mayor fuerza de trabajo para el país?

d. ¿Qué rama representa la menor fuerza de trabajo para el país?

e. Si la fuerza laboral dicho trimestre fue de 5.531,26, ¿qué porcentaje representa la rama de agricultura, caza y pesca?

Actividad 3

Construir una tabla de frecuencias a partir de ciertos datos organizados.

Por ejemplo:

El ministerio de Salud publicó información respecto a la población de menores de 6 años en control, por estado de nutrición, según grupos de edad en el período 2001-2002:

GRUPO	CON RIESGO (%)	DESNUTRIDOS (%)	SOBREPESO (%)	TOTAL
0-5 meses	0,7	0,1	16,3	85.151
6-1 meses	4,3	0,6	18,5	86.380
12-23 meses	7,6	1,4	15,5	175.505
2-5 años	1,9	0,3	15,0	694.697

Fuente: "Compendio Estadístico 2003 del INE".

a. Confecciona tres tablas de frecuencias absolutas con los distintos estados de nutrición y los respectivos grupos de edad.

b. Confecciona un gráfico de barras comparativo con los tres estados de nutrición.

c. ¿Qué grupo de edad tiene el mayor número de niños con un estado de nutrición de riesgo?

d. ¿Qué estado de nutrición es el que tiene mayor incidencia en los distintos grupos de edad?

e. ¿Qué opinión te merecen los niveles alcanzados por el sobrepeso en nuestros niños? Coméntalo con tus compañeros y compañeras.

Actividad 4

Completar una tabla de distribución de frecuencias con las frecuencias relativas y porcentuales.

Por ejemplo:

En la siguiente tabla se entrega el número de ocupados y desempleados (en miles) por región en el trimestre marzo-mayo del 2007:

REGIÓN	OCUPADOS	DESOCUPADOS
I	189,8	16
II	207,4	16,4
III	112,3	8,8
IV	245,7	15,3
V	6.641,5	44,1
VI	327,6	16,5
VII	367,9	22,0
VIII	693,0	61,0
IX	357,2	19,1
X	454,5	23,2
XI	45,7	1,7
XII	63,8	1,9
RM	2.741,9	220,3

Fuente: **www.mintrab.cl** (Ministerio del Trabajo).

a. ¿Cuál es la fuerza laboral del país? ¿Cuál es el número de desempleados del país?

b. Completa la tabla de frecuencias con las columnas correspondientes a las frecuencias relativas y porcentuales tanto para los ocupados como para los desempleados.

c. Al sumar las columnas de las frecuencias absolutas correspondientes a los ocupados y desempleados, ¿qué valores obtienes? y ¿cuál es su interpretación?

d. Al sumar las columnas de las frecuencias relativas correspondientes a los ocupados y desempleados, ¿qué valores obtienes? y ¿cuál es su interpretación?

e. Al sumar las columnas de las frecuencias porcentuales correspondientes a los ocupados y desempleados, ¿qué valores obtienes? y ¿cuál es su interpretación?

Sugerencias metodológicas

En la actividad 1 se pretende dejar en evidencia la gran cantidad de información a la que estamos sometidos y de qué manera somos capaces de procesarla e interpretarla para que los y las estudiantes se formen una opinión al respecto y eventualmente tomen decisiones.

La actividad 3 se puede complementar con análisis de información y estadísticas acerca de las tasas de mortalidad infantil, etc.

En la última actividad al completar una tabla de frecuencias con las columnas de frecuencias relativas y porcentuales, se busca un acercamiento con la siguiente unidad.

Unidad 3: Juegos de azar y probabilidades

Introducción

Esta unidad es un primer encuentro con los conceptos de azar y probabilidad. En ella se introducen elementos básicos de la teoría de probabilidades tales como suceso y espacio muestral, entre otros. Partiendo de ejemplos prácticos las personas del curso se introducen por una parte al concepto teórico de la probabilidad mediante la regla de Laplace en casos equiprobables, mientras que por otro lado contrastan con lo experimental trabajando con la frecuencia relativa y la Ley de los grandes números.

El objetivo principal de esta unidad es desarrollar el concepto de probabilidad a partir de situaciones que sean interesantes y cercanas para los estudiantes adultos y adultas. Es importante que se interprete diferentes informaciones expresadas en términos de probabilidades en campos como la economía, educación, salud, etc.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Analiza e interpreta los resultados de experimentos aleatorios o juegos de azar sencillos.	Cada estudiante: • Practica diversos juegos de azar sencillos; tabula, grafica y analiza los resultados obtenidos e infiere la noción de fenómeno aleatorio.
• Aplica la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades en situaciones sencillas.	• Determina el conjunto de los resultados posibles (espacio muestral) de un experimento aleatorio, o bien identifica el número de sucesos que lo componen. • Identifica sucesos equiprobables. • Identifica los casos favorables (sucesos que cumplen una determinada condición) a partir del espacio muestral. • Establece la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, obteniendo la probabilidad de un cierto suceso.
• Relaciona la frecuencia relativa con la probabilidad de un suceso y conoce empíricamente la Ley de los grandes números.	• Relaciona la noción de probabilidad con la información estadística que deriva de la repetición de un fenómeno aleatorio.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Calcular los espacios muestrales para distintos experimentos aleatorios.

Por ejemplo:

Para cada uno de los experimentos aleatorios escribe todos los resultados posibles:

a. Al lanzar una moneda al aire.

b. Existen dos caminos para ir desde la ciudad A a la ciudad B y existen tres caminos para dirigirse desde la ciudad B a la ciudad C. ¿De cuántas maneras es posible viajar desde A hasta C, pasando por B?

c. Al lanzar un dado o dos dados.

d. Al tomar una carta de un naipe inglés, ¿de cuántas maneras distintas lo puedo hacer?

Actividad 2

Confeccionar tablas de frecuencias relativas y porcentuales, a partir de información conocida.

Por ejemplo:

a. Un experimento consiste en lanzar simultáneamente dos monedas y registrar el número de caras que ocurren. Los únicos resultados posibles son 0, 1 y 2 caras. Las monedas se lanzan 10 veces y se obtienen los siguientes datos:

2C, 1C, 1C, 2C, 1C, 0C, 1C, 1C, 1C, 2C.

- Confeccionar una tabla de frecuencias con frecuencias relativas y porcentuales, registrando cada resultado.
- ¿Cuánto suman las frecuencias relativas?
- ¿Cuánto suman las frecuencias porcentuales?
- Construir un gráfico de barras porcentual.

b. En el siguiente experimento necesitas lanzar 20 veces un dado y registrar los resultados obtenidos después de cada lanzamiento:

- Calcular la frecuencia porcentual de obtener 1.
- Calcular la frecuencia porcentual de obtener 2.
- Calcular la frecuencia porcentual de obtener 3.
- Calcular la frecuencia porcentual de obtener 4.
- Calcular la frecuencia porcentual de obtener 5.
- Calcular la frecuencia porcentual de obtener 6.

Actividad 3

Calcular las probabilidades de sucesos relacionados con dados, cartas y monedas.

Por ejemplo:

a. Lanzar dos dados 10 veces, registrando los resultados. Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

- El número obtenido en uno de los dados sea impar.
- La suma de los números obtenidos sea 6.
- El número obtenido en ambos dados sea impar.
- El número obtenido en uno de los dados sea mayor que el otro.

b. Lanzar un dado y una moneda, registrando sus resultados:

- Confecciona un diagrama de árbol que represente los resultados posibles.
- Calcula la probabilidad de obtener una cara en la moneda y un 5 en el dado.
- Calcula la probabilidad de obtener un número par en el dado y un sello en la moneda.

Sugerencias metodológicas

En la actividad 1, se busca que los estudiantes adultos y adultas generen diferentes formas de expresar una serie de resultados posibles. De igual manera el profesor o profesora puede introducir los diagramas de árbol y entregar de esta manera una herramienta de apoyo para el trabajo de cada estudiante.

A partir de la actividad 3, se puede introducir la probabilidad de ciertos sucesos que arrojen como resultado 0 ó 1, es decir, cuando se trata de un evento imposible o un evento seguro. Al utilizar la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades, es importante que las y los estudiantes tengan claro el concepto de equiprobabilidad como condición necesaria para obtener una probabilidad "a priori".

Bibliografía

Módulo I

- Mineduc, *Programas de Matemáticas NB3, NB4, NB5, NB6 y NM1*.

Módulo II

- Mineduc, *Aprender por la palabra*.
- Mineduc, *Programas de Matemáticas NB3, NM1 y NM2*.
- De las Heras, Fuenzalida, Lara, Riveros, *Álgebra y Geometría*, Ed. Santillana, 1993.
- Vergara, Moreno, López, *Matemática I*, Ed. Santillana, 2002.
- Mercado Schuler, *Matemática II Medio*, Ed. Universitaria, 1984.

Sitios web sugeridos

http://www.unlu.edu.ar/~mapco/apuntes/330/mapco330.htm

http://personal5.iddeo.es/ztt/graf/G2_Funcion_Lineal.htm

http://soko.com.ar/matem/matematica/funcion_lineal.htm

http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Funcion_afin/

http://descartes.cnice.mecd.es/3_eso/Ecuaciones_primer_grado_resolucion_problemas/

http://ponce.inter.edu/cremc/traduccion.htm

Módulo III

- Lehmann, *Geometría Analítica*.
- Campusano, Soto y Ulloa, *Matemática 2º medio*, Arrayán Editores, 2001.
- Mineduc, *Programa de Matemáticas NM1 y NM2*.
- Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M.; Hernández, J., *Iniciación al álgebra*, Editorial Síntesis, Madrid, 1989.
- Vergara, Moreno, López, *Matemática I*, Ed. Santillana, 2002.

Sitios web sugeridos

http://www.venaventours.com/sistemacoord.asp, (sistema de coordenadas)

http://www.personal.us.es/cmaza/egipto/superficies1.htm

http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo

http://es.wikipedia.org/wiki/Ajedrez#El_tablero_de_ajedrez

Módulo **IV**

- Canavos, George C., *Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos*, Mc. Graw-Hill, 1988.

- De Groot, Morris, *Probabilidad y Estadística*, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., 1988.

- Meyer, Paul, *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*, Addison Wesley Longman de México S.A., 1988.

- Mineduc, *Programa de Matemáticas NM1 y NM2*.

- Peña Sánchez de Rivera, Daniel, *Estadística, Modelos y Métodos, Fundamentos* (Tomo I), Alianza Universidad Textos, 1991.

Sitios web sugeridos

http://www.recursosmatematicos.com

Segundo Nivel de
Educación Media

Presentación

Como señala la presentación del marco curricular para la Enseñanza Media de Adultos, los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios han sido elaborados considerando las herramientas y habilidades que los estudiantes necesitan para comprender su entorno, y los tópicos que presentan otras áreas del conocimiento, así como también para continuar estudios post secundarios.

A través de este currículum, traducido pedagógicamente en la propuesta de los Programas de Estudio para cada ciclo, se busca profundizar el conocimiento y dominio del lenguaje matemático que los adultos y adultas traen tanto de su Educación Básica como de su experiencia de vida. Se busca una comprensión mayor de conceptos, estrategias (o procedimientos) y estructuras matemáticas, que le permiten llegar a dominar un lenguaje capaz de describir regularidades y situaciones más complejas que los vistos en Educación Básica.

Este programa propone un conjunto de módulos con sus respectivas unidades orientadas, por una parte, a profundizar y ampliar nociones matemáticas abordadas en el ciclo anterior, como también a incorporar nuevas herramientas que permiten modelar diversos fenómenos y resolver problemas nuevos o ya conocidos. Por ejemplo, en el nivel anterior se abordan las potencias con base racional y exponente entero, y la función lineal con temas afines, notación y gráfica. En este nivel, y sobre esta base, se aborda la raíz cuadrada como un proceso recíproco a la potenciación, con sus propiedades y asociada a distintos fenómenos que hacen interesante su aplicación, y se contemplan las funciones exponencial y logaritmo, como aquellas que permiten modelar un tipo de crecimiento diferente al lineal.

El programa está constituido por cuatro módulos: Números; Álgebra y funciones; Geometría, Estadística y probabilidades. Por la relación de contenidos y la repercusión que tiene uno dentro del otro, los tres primeros módulos son secuenciados y deben ser tratados en orden; no obstante el cuarto, a pesar de que está al final del programa, puede ser tratado en cualquier momento. A su vez, cada módulo está compuesto por unidades, las que se describen y detallan en la introducción de cada una de ellas.

Siguiendo las orientaciones del marco curricular, tal como allí se señala, la profundización en la comprensión de conceptos y habilidades matemáticas obedece a dos grandes aspiraciones. Por un lado, mejorar la capacidad de razonar en forma lógica, desarrollando aspectos como el pensamiento deductivo y la argumentación matemática y, por otra, fomentar el uso de herramientas matemáticas en el planteo y solución de problemas de la vida cotidiana de los estudiantes adultos y adultas en situaciones que les son significativas o de interés.

La relación que se puede establecer entre situaciones concretas y expresiones matemáticas ayudan a desarrollar la noción de modelamiento matemático, especialmente en contenidos algebraicos, geométricos y de estadística y probabilidad.

En el desarrollo del programa es importante considerar, por una parte, los conocimientos que los estudiantes adultos y adultas poseen a partir de sus experiencias de vida y de su formación escolar previa y, por otra, sus necesidades. De este modo, las actividades propuestas pueden ser permanentemente adaptadas, ampliadas, reducidas o complementadas cuando sea pertinente.

Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios

Objetivos Fundamentales

Al término del Segundo Nivel de Enseñanza Media, los estudiantes adultos y adultas habrán desarrollado la capacidad de:

1. Comprender el significado de la raíz cuadrada de un número, establecer relaciones con las potencias de exponente dos y aplicar sus propiedades en la resolución de diversos problemas.
2. Conocer las funciones cuadrática, exponencial y logaritmo, sus gráficos, la dependencia de sus parámetros y utilizarlas para modelar diversas situaciones en variados ámbitos del conocimiento (biología, física, demografía, etc.).
3. Utilizar ecuaciones de segundo grado para resolver problemas provenientes de diversos ámbitos.
4. Conocer las razones trigonométricas y utilizarlas para resolver problemas geométricos.
5. Analizar información presente en los medios de comunicación, identificando factores claves para determinar su validez, tales como método de muestreo, tamaño y representatividad de la muestra.
6. Reconocer que la estadística tiene dos fines: Uno descriptivo, que presenta y resume información, y otro predictivo, que ayuda a inferir las características de una población a partir de una muestra tomada.
7. Resolver problemas simples en los que interviene el azar y que implican independencia de sucesos; suma o producto de probabilidades y probabilidad condicional.
8. Percibir la matemática como una disciplina vinculada con otras áreas del saber y en permanente desarrollo.

Contenidos Mínimos Obligatorios

I. Números

a. Raíz cuadrada como proceso inverso de potencias con exponente dos y como potencias de exponente fraccionario $\frac{1}{2}$. Deducción, verificación y aplicación de las propiedades de las raíces de índice dos.

II. Álgebra y funciones

a. Análisis de situaciones en diversos ámbitos que pueden ser modelados a través de funciones cuadráticas.
b. Resolución de problemas simples, mediante el uso de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
c. Función logaritmo y exponencial. Gráficos de la función logaritmo y exponencial. Análisis de situaciones en diversos ámbitos que pueden ser modelados por funciones exponenciales y logarítmicas (por ejemplo, crecimiento exponencial de población, interés compuesto, decaimiento del precio de un artículo, etc.).

III. Geometría

a. Determinación de razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en el triángulo rectángulo.
b. Resolución de problemas que involucran el uso de trigonometría como el cálculo de alturas o distancias inaccesibles. Análisis y pertinencia de las soluciones.

IV. Estadística y probabilidades

a. Lectura y construcción de tablas de frecuencia e histogramas para datos agrupados en intervalos, para interpretar información presentada en los medios de comunicación.
b. Definición y distinción entre población y muestra. Muestras al azar considerando situaciones cotidianas. Caracterización de una población a partir de los datos de una muestra tomada.
c. Establecimiento de diferencias entre la estadística descriptiva y la estadística inferencial, a partir de diversas situaciones o ejemplos.
d. Resolución de problemas sencillos que involucren probabilidad condicional, y suma o producto de probabilidades.

Organización del programa

Para que los estudiantes adultos y adultas alcancen las capacidades expresadas en los Objetivos Fundamentales y se aborden todos los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO), se ha organizado cada nivel del subsector en una estructura curricular modular. Los módulos se definen como bloques unitarios de aprendizaje de duración variable que pueden ser aplicados en las diversas modalidades de la Educación Media de Adultos y que en su conjunto abordan la totalidad de CMO del nivel.

Cada módulo considera seis componentes:

a. **Introducción,** donde se presenta de manera sintética el propósito del módulo en el contexto del nivel y subsector, y se dan algunas recomendaciones metodológicas, que sugieren al docente enfoques específicos para tratar los contenidos y las actividades con el fin de optimizar el logro de los aprendizajes en el aula.

b. **Contenidos del módulo,** que corresponden a los Contenidos Mínimos Obligatorios que se abordan en el módulo.

c. **Aprendizajes esperados.** Esta sección es el eje fundamental de la propuesta, ya que en ella se define lo que se espera logren los estudiantes adultos y adultas, es un listado de aprendizajes concretos, precisos y observables. El programa se construye para realizar estos aprendizajes.

d. **Sugerencias de evaluación,** donde se hacen recomendaciones que buscan ayudar al docente en el diseño del proceso de evaluación y, en algunos casos, se entregan recomendaciones metodológicas.

e. **Unidades.** El módulo está compuesto por unidades, que son ordenaciones temáticas breves que abordan parte de los aprendizajes del módulo, y en su conjunto dan cuenta de todos los aprendizajes de éste. Las unidades pretenden ser una orientación pedagógica para el logro de los aprendizajes esperados. En cada unidad se consideran los siguientes componentes:

- *Introducción*, que explica el foco temático de la unidad y los aprendizajes que en ella se potencian.
- *Aprendizajes esperados e indicadores de evaluación*. En un cuadro se detallan los aprendizajes esperados que se trabajan en la unidad, señalándose para cada uno de ellos indicadores. Los indicadores corresponden a acciones realizadas por los estudiantes adultos y adultas, observables y verificables en el ambiente educativo, que permiten determinar si se ha logrado el aprendizaje esperado. Los indicadores no son exhaustivos, pero desglosan los aspectos o elementos principales del aprendizaje con el propósito de apoyar la evaluación, ofreciendo al docente un conjunto de elementos que puede observar durante el proceso o al final para conocer si el aprendizaje se logró y en qué medida. Esto busca apoyar al profesor o profesora para que la evaluación que realice esté directamente relacionada con los aprendizajes relevantes del nivel.
- *Ejemplos de actividades*, que pretenden ser un apoyo práctico, que aporten ideas del tipo de actividades que se pueden realizar para el logro de los aprendizajes. En las

actividades se incluyen sugerencias metodológicas que orientan la realización y el propósito, y son relevantes, porque ponen especial énfasis en la especificidad de la educación de adultos y adultas. Los ejemplos de actividades no agotan el logro de los aprendizajes de la unidad, por lo que el docente, considerando la situación del curso en particular, debe complementar y reforzar aquellos aprendizajes más débiles o que no estén abordados.

f. **Bibliografía.** Al final del nivel se incluye un listado de libros y páginas Web que el profesor o profesora puede consultar para buscar información adicional.

Cabe señalar que este programa se ha elaborado considerando que pueda ser implementado en las diversas modalidades de la educación de adultos: nocturna regular, flexible, etc. Por lo tanto, el tiempo asignado a cada uno de los módulos puede variar. La distribución de horas para el tratamiento de las unidades de cada módulo debiera estar en referencia a las características propias de los estudiantes adultos y adultas que se atiende. En el caso de que se asigne un número desigual de horas para cada una de ellas, se debe tener presente el cumplimiento de los aprendizajes esperados para el conjunto del módulo. Sin perjuicio de lo anterior, la carga horaria estimada para este sector en éste nivel, en la modalidad educativa presencial tradicional, es de 4 horas semanales para la modalidad Humanístico-Científica, 3 horas para el nivel 2 (3° medio), y 2 horas para el nivel 3 (4° medio) en la modalidad Técnico-Profesional.

El conjunto de módulos y unidades de este nivel se especifican en la siguiente matriz:

Matriz de módulos y sus unidades

Módulos			
I Números.	**II** Álgebra y funciones.	**III** Geometría.	**IV** Estadística y probabilidades.
Unidades			
Unidad 1: Raíces cuadradas.	**Unidad 1:** Función cuadrática. **Unidad 2:** Ecuación cuadrática. **Unidad 3:** Funciones y problemas de crecimiento.	**Unidad 1:** Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.	**Unidad 1:** Estadística en la vida de hoy. **Unidad 2:** Azar y probabilidad.

Módulo I

Números

Introducción

En este módulo se presentan situaciones que permiten a los estudiantes adultos y adultas abordar la raíz cuadrada, como un proceso inverso de la potencia cuadrada de un número. Es un módulo breve, con sólo una unidad, que pretende introducir y analizar una herramienta matemática que aparece posteriormente en otros módulos, y que permite comprender, analizar modelos y resolver problemas.

Este módulo está constituido por una unidad:

Unidad 1: Raíces cuadradas.

En esta unidad se estudia la relación que existe entre la raíz cuadrada con la potencia de exponente dos, para expresar algunas igualdades y sus propiedades.

Es importante, que el docente considere las experiencias de los y las estudiantes, por una parte, y que proponga situaciones que sean significativas, en contextos variados.

Contenidos del módulo

En este módulo se consideran los siguientes Contenidos Mínimos Obligatorios presentes en el marco curricular:

1. Raíz cuadrada como proceso inverso de potencias con exponente dos y como potencias de exponente fraccionario $\frac{1}{2}$. Deducción, verificación y aplicación de las propiedades de las raíces de índice dos.

Aprendizajes esperados del módulo[8] y sugerencias para la evaluación

APRENDIZAJES ESPERADOS	SUGERENCIAS PARA LA EVALUACIÓN
A partir del desarrollo de este módulo se espera que los estudiantes adultos y adultas: • Utilicen la reciprocidad entre potencia cuadrada con raíz cuadrada y la relación que tiene ésta con la potencia de exponente fraccionario $\frac{1}{2}$, para interpretar situaciones y resolver problemas.	La evaluación de este aprendizaje requiere presentar diversas expresiones de potencias en que tenga sentido encontrar una solución para comprender la situación, que sean formuladas como raíz cuadrada.
• Utilicen propiedades de la raíz cuadrada para encontrar expresiones equivalentes.	La evaluación de este aprendizaje implica presentar diversas expresiones que incluyan potencias reducibles a una potencia cuadrada y raíz cuadrada, que requieran, para una mayor compresión, de una manipulación, utilizando expresiones equivalentes que se basan en las propiedades de la raíz cuadrada.
• Resuelvan problemas en los cuales es necesario utilizar raíces cuadradas y sus propiedades, tanto para modelar como para encontrar su solución.	Para la evaluación de este aprendizaje, es necesario presentar problemas simples a las personas del curso, donde se pueda utilizar indistintamente expresiones equivalentes de potencias de exponente racional 1/2 o de raíz cuadrada para su modelamiento. También se requiere aplicar las propiedades de la raíz cuadrada para encontrar una solución.

8 A continuación se describen los aprendizajes esperados para este módulo, los cuales se encuentran precisados posteriormente en el desarrollo de la unidad a través de la descripción de sus respectivos indicadores de evaluación. Se incorporan sugerencias generales para la evaluación. No obstante, para este efecto es muy importante orientarse por los indicadores señalados.

Unidad 1: Raíces cuadradas

Introducción

El foco de esta unidad está puesto, esencialmente, en abordar y analizar la raíz cuadrada como un proceso íntimamente ligado a la potencia cuadrada. Es necesario llamar la atención sobre ellos como procesos inversos. El profesor o profesora puede evocar otros procesos u operaciones que presentan también una faceta de este tipo: la multiplicación y la división, por ejemplo, permitiendo a los estudiantes adultos y adultas analizarlos en detalle, cuidando que efectivamente los comprendan en profundidad. Es posible también, comenzar pidiendo a las personas del curso que evoquen procesos en que se da esta relación inversa, con el fin de actualizar sus conocimientos, y que los relacionen con estas nuevas herramientas.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Utiliza la reciprocidad entre potencia cuadrada con raíz cuadrada y la relación que tiene ésta con la potencia de exponente fraccionario $\frac{1}{2}$, para interpretar situaciones y resolver problemas.	Cada estudiante: • Reconoce la igualdad entre expresiones en potencia cuadrada y raíz cuadrada. • Expresa potencias de exponente fraccionario $\frac{1}{2}$ como raíz cuadrada. • Interpreta y compara los gráficos de $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$. • Calcula el valor de raíces cuadradas.
• Utiliza propiedades de la raíz cuadrada para encontrar expresiones equivalentes.	• Encuentra el valor a expresiones formadas con varias raíces cuadradas.
• Resuelve problemas en los cuales es necesario utilizar raíces cuadradas y sus propiedades tanto para modelar, como para encontrar su solución.	• Utiliza indistintamente expresiones equivalentes de potencias de exponente racional $\frac{1}{2}$ o de raíz cuadrada. • Aplica propiedades de la raíz cuadrada para encontrar la solución. • Comunica soluciones y describe procedimientos de cálculos • Analizan la pertinencia de las soluciones con relación al contexto.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Observar situaciones en que se analiza la relación que existe entre la potencia cuadrada, cuadrado perfecto y raíz cuadrada de un número.

Por ejemplo:

Una característica de los cuerpos acelerados, como un automóvil o una piedra en caída libre, es que recorren diferentes distancias en intervalos regulares de tiempo. Al ser diferente la rapidez media de cada intervalo, la distancia recorrida durante el mismo es también diferente.

TIEMPO	RAPIDEZ MEDIA	DISTANCIA RECORRIDA	DISTANCIA TOTAL RECORRIDA
1 s	$5 \frac{m}{s}$	5 m	5 m
2 s	$15 \frac{m}{s}$	15 m	20 m
3 s	$25 \frac{m}{s}$	25 m	45 m
4 s	$35 \frac{m}{s}$	35 m	80 m

La tabla anterior muestra datos del movimiento de un móvil acelerado uniformemente, donde observamos que la rapidez cambia en 10 $\frac{m}{s}$ cada segundo, es decir, tiene una aceleración de 10 $\frac{m}{s^2}$.

Como el cambio de la velocidad en cada intervalo es siempre el mismo, 10 $\frac{m}{s^2}$, se trata de un movimiento de aceleración constante o uniformemente acelerado.

Otra conclusión que podemos sacar de los datos anteriores es que la distancia total recorrida es directamente proporcional al cuadrado del tiempo. Es decir, al cabo de 2 *s* la distancia total recorrida es 4 (2^2) veces la recorrida en el primer segundo; a los 3 *s* la distancia recorrida es 9 (3^2) veces mayor que la del primer segundo y a los 4 *s* es 16 veces (4^2) mayor que la del primer segundo.

Los cuerpos que se mueven con aceleración constante recorren distancias directamente proporcionales al cuadrado del tiempo.

a. A partir de esta relación, a los 5 *s*, ¿cuántas veces mayor será esa distancia?

b. Por el contrario, si sabemos que la distancia total recorrida es de 180 m, ¿en qué segundo fue medida esta distancia?

c. ¿Qué distancia habrá recorrido el móvil a los 10 *s*?

Actividad 2

Expresar como raíz cuadrada un número con exponente racional $\frac{1}{2}$ e identificar equivalencias de notación. Introducir el uso de calculadora.

Por ejemplo:

Un paracaidista profesional sabe que desde el momento en que se lanza de un avión hasta que abre su paracaídas, desciende en caída libre afectado principalmente por la fuerza de gravedad de la tierra.

La distancia "*d*" que recorre un cuerpo que se deja caer en caída libre desde el reposo en un tiempo de "*t*" segundos, está dada por la fórmula:

$$d = \frac{1}{2} g t^2$$

donde $g = 9{,}8$ y representa la fuerza de la gravedad de la Tierra, que es constante.

A partir de esta fórmula, se obtiene el tiempo que a transcurrido en la caída, despejando la variable "t" y aplicando propiedades de potencia:

$$\left(\frac{2d}{g}\right) = t^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2d}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = t \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$$

Los paracaidistas profesionales se lanzan en caída libre, en promedio, desde unos 3.700 m de altura hasta que llegan a unos 760 m del suelo, momento en que deben abrir su paracaídas; durante la caída libre ejecutan maniobras controlando la posición del cuerpo:

a. ¿Cuánta distancia ha recorrido el paracaidista a los 4 segundos?

b. ¿Cuánta distancia ha recorrido el paracaidista a los 10 segundos?

c. ¿Cuántos segundos han transcurrido, desde que se lanza, hasta que abre su paracaídas?

d. Con esta información, ¿cuánto tiempo permanece un paracaidista en caída libre?

Actividad 3

Demostrar algunas propiedades de la raíz cuadrada. Inicialmente con ejemplos numéricos y usando calculadora y luego utilizando propiedades de potencias.

Por ejemplo:

a. Resolver operatoria que involucra raíces cuadradas:

- $(7+\sqrt{5})\cdot(7-\sqrt{5})$
- $\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}$
- $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$

b. Discutir sobre la generalización de los ejemplos, utilizando propiedades de potencia:

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ y $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Actividad 4[9]

Resolver situaciones en que se analiza la reciprocidad de $x^{\frac{1}{2}}$ y $\sqrt{2}$, como también las regularidades que se presentan en números grandes.

Por ejemplo:

Calcular el área de varios cuadrados. Registrar los resultados en una tabla como la siguiente:

Lado	13	14	15	20	30	40	50
Área	169	196	225	400			

Una vez completada la tabla, plantear la siguiente pregunta: ¿Qué pasaría si invirtiéramos las filas de la tabla y debiéramos encontrar los valores de la segunda fila? Luego de una discusión, proponer la tabla por llenar a la inversa:

Área	169	196	225	400	900	1600	
Lado	13	14					

9 Actividad adaptada de *De question en Question. Mathématiques 3*, Groupe d'enseignement mathématique, Didier-Hatier, Bélgica, 1993.

Construir un gráfico en que se representen los valores de la primera tabla.

Agregar medidas que no son números naturales (por ejemplo, lado $\frac{3}{2}$) o que no correspondan a cuadrados perfectos para trabajar la aproximación y el uso de calculadora.

Discutir las conclusiones obtenidas a partir del análisis.

Actividad 5

Aplicar la raíz cuadrada a problemas simples.

Por ejemplo:

El Índice de Masa Corporal (*IMC*) es un índice del peso de una persona en relación con su altura, que pretende determinar el rango más saludable de masa que puede tener una persona. Se utiliza como indicador nutricional desde principios de 1980. El *IMC* resulta de la división de la masa en kilogramos entre el cuadrado de la estatura expresada en metros. A pesar de que no hace distinción entre los componentes grasos y no grasos de la masa corporal total, éste es el método más práctico para evaluar el grado de riesgo asociado con la obesidad.

$$IMC = \frac{masa\ (kg)}{[estatura\ (m)]^2}$$

Para una persona que pesa 70 kg y mide 1,7 m (1 m 70 cm), el *IMC* se calculará:

$$IMC = \frac{70}{(1{,}7)^2} = \frac{70}{2{,}89} = 24{,}22$$

En adultos, entre 25 y 34 años, se establece un rango de 18-25 como saludable (el *IMC* en niños es específico para edad y sexo, que está dado por tablas). Un *IMC* por debajo de 18,5 indica desnutrición o algún problema de salud, mientras que un *IMC* superior a 25 indica sobrepeso. Por encima de 30 hay obesidad leve, y por encima de 40 hay obesidad mórbida que puede requerir una operación quirúrgica.

Estos rangos aumentan en 1 punto por cada diez años por encima de 25. Así, un *IMC* de 28 es normal para personas de 55-65 años.

a. Calcular el *IMC* de cada estudiante, a partir de su altura y peso.

b. Una mujer mide 1 m 55 cm y pesa 55 kilos, ¿cuál es su *IMC*?

c. ¿Cuál es la estatura aproximada, que debe medir un hombre, que pesa 95 kilos y tiene un *IMC* de 35?

d. ¿Cuál es el peso ideal para una persona, que mide 1,6 m, para no tener sobre peso?

Sugerencias metodológicas

Los primeros ejemplos en las actividades propuestas (1, 2 y 3) permiten afianzar los mecanismos que permiten expresar las igualdades y practicar las expresiones recíprocas. Son actividades orientadas a trabajar las propiedades, siendo de real importancia comenzar con ejemplos numéricos, donde el profesor o profesora debe orientar la justificación del uso de estas propiedades, eventualmente también proponer demostraciones simples a partir del uso de propiedades ya conocidas, por ejemplo, como las propiedades de las potencias. Una vez que los estudiantes adultos y adultas se familiaricen con la operatoria con raíces cuadradas y descubran su aplicabilidad en la vida diaria, es conveniente que sean capaces de ordenar la relación entre los distintos tipos de notación por medio, por ejemplo, de una tabla como la siguiente:

Nº NATURAL		POTENCIA CUADRADA		CUADRADO PERFECTO	RAÍZ CUADRADA
1	→	1^2	=	1	$\sqrt{1} = 1$
2	→	2^2	=	4	$\sqrt{4} = 2$
3	→	3^2	=	9	$\sqrt{9} = 3$
4	→	4^2	=	16	$\sqrt{16} = 4$
5	→	5^2	=	25	$\sqrt{25} = 5$
6	→	6^2	=	36	$\sqrt{36} = 6$

Y sean capaces a su vez de completar tablas, a partir de una secuencia dada y apoyada en la notación inicial, por ejemplo:

Nº NATURAL		POTENCIA CUADRADA		CUADRADO PERFECTO	RAÍZ CUADRADA
7	→	7^2	=		$\sqrt{49} =$
8	→	8^2	=		$\sqrt{64} =$
9	→	9^2	=		$\sqrt{81} =$
10	→		=	100	$\sqrt{} = 10$
11	→		=	121	$\sqrt{} = 11$
12	→		=	144	$\sqrt{} = 12$

Las últimas actividades constituyen una base para establecer, las propiedades de la raíz cuadrada, las que, a su vez, permiten realizar cálculos con nuevos números. Es importante que el profesor o profesora otorgue el tiempo necesario para que las personas del curso desarrollen las actividades con calma, haciendo preguntas que les permitan visualizar los procesos, y establecer conclusiones. En el caso particular de la actividad 4, al proponer la segunda tabla, es importante incorporar algunos valores (áreas) que no aparecen en la primera tabla con el fin de conducir la reflexión más allá de los valores que ya están puestos en evidencia en la primera tabla (ver gráfico 1). La construcción del gráfico permite visualizar la ecuación $y = x^2$ (ver gráfico 2). Hacer ver que teóricamente se puede asignar cualquier valor como medida para el lado de un cuadrado.

GRÁFICO 1

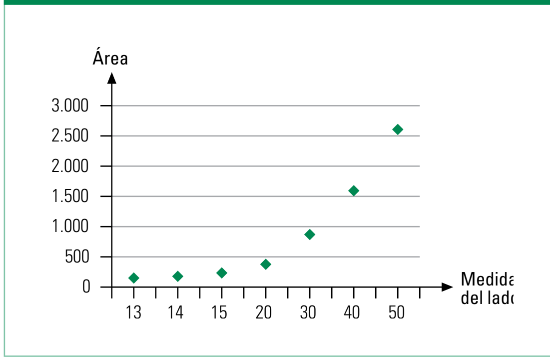
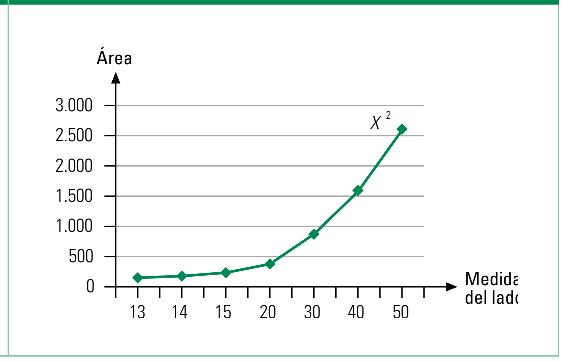


GRÁFICO 2



Si bien el gráfico 1 representa los valores dados en la primera tabla, donde a cada valor del lado del cuadrado se asocia al valor del área correspondiente, el gráfico 2 muestra que a los valores comprendidos entre dichos valores, también les corresponde un cuadrado perfecto, con lo cual podemos dar continuidad a la curva que se proyecta en el gráfico 1. Esto también da la base para realizar comentarios y hacer la asociación y continuidad con los siguientes contenidos, en especial con la función cuadrática que se presentan en el segundo módulo.

Posteriormente, se deben mostrar los gráficos correspondientes a la segunda tabla, aquella en que se han permutado los ejes, las áreas en el eje de las abscisas y la medida de los lados en el eje de las ordenadas. Es decir, la ordenada es, entonces, la raíz cuadrada de la abscisa.

GRÁFICO 3

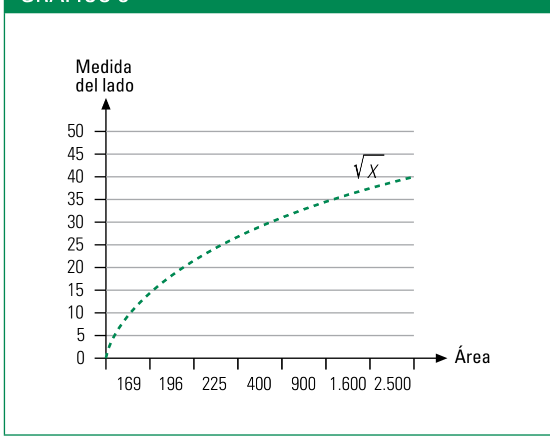
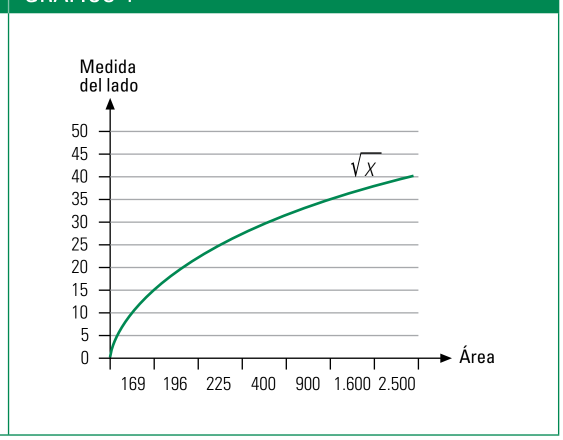


GRÁFICO 4



Los dos gráficos muestran la siguiente relación: a mayor área, mayor medida del lado. En el gráfico 3, se muestran los valores colocados en la segunda tabla, pero el gráfico 4 reafirma la idea de que entre los valores dados en la tabla existen áreas que corresponde a valores determinados de medidas para los lados no consideradas, dando continuidad al gráfico.

Módulo II

Álgebra y funciones

Introducción

Con el propósito de profundizar y ampliar el concepto de función, en este módulo se incorporan las funciones cuadrática, exponencial y logaritmo, generando una instancia de comparación entre aquellas funciones de carácter lineal con aquellas que no lo son y los problemas que pueden ser modelados por unas y otras. En este mismo contexto se incorpora la ecuación de segundo grado con una incógnita, conjuntamente y en relación con la función cuadrática.

Se proponen, también, diversas situaciones y problemas que permiten comparar diversos tipos de crecimientos, que pueden ser modelados por las funciones mencionadas. A partir de ellas, se lleva a los estudiantes adultos y adultas a analizar las expresiones algebraicas de las funciones y sus correspondientes gráficos, para luego compararlas, con el fin de que puedan comprender, analizar y resolver diversos problemas que resulten ser relativamente familiares pero que no necesariamente han sido anteriormente abordados haciendo uso de este tipo de modelamiento matemático.

Es importante que el profesor o profesora proponga múltiples problemas, con distinto nivel de complejidad, significativos para los estudiantes en el sentido de que se relacionen con su vida y sus preocupaciones y que, al enfrentarlos y resolverlos, les entreguen información sobre diversos fenómenos. Por ejemplo, sobre los sismos.

Este módulo está constituido por tres unidades:

Unidad 1: Función cuadrática.
Unidad 2: Ecuación cuadrática.
Unidad 3: Funciones y problemas de crecimiento.

Contenidos del módulo

1. Análisis de situaciones en diversos ámbitos que pueden ser modelados a través de funciones cuadráticas.
2. Resolución de problemas simples, mediante el uso de ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
3. Función logaritmo y exponencial. Gráficos de la función logaritmo y exponencial. Análisis de situaciones en diversos ámbitos que pueden ser modelados por funciones exponenciales y logarítmicas (por ejemplo, crecimiento exponencial de población, interés compuesto, decaimiento del precio de un artículo, etc.).

Aprendizajes esperados del módulo[10] y sugerencias para la evaluación

APRENDIZAJES ESPERADOS	SUGERENCIAS PARA LA EVALUACIÓN
A partir del desarrollo de este módulo se espera que los estudiantes adultos y adultas: • Resuelvan problemas que se modelan a través de la función cuadrática.	La evaluación de este aprendizaje implica que las personas del curso modelen diferentes situaciones en una estructura cuadrática a partir de datos entregados y determinen su solución.
• Analicen e interpreten un problema modelado por medio de una ecuación cuadrática. • Resuelvan problemas que se desarrollan con ecuaciones de segundo grado.	En la evaluación de estos aprendizajes los estudiantes adultos y adultas deben poder identificar la ecuación de segundo grado, que permite modelar una situación y encontrar una solución al problema interpretando las raíces de la ecuación. Para resolver la ecuación deben poder conocer diversos métodos y aplicar el que más les acomode.
• Analicen situaciones o fenómenos en diversos ámbitos, donde la relación funcional entre las variables siguen un crecimiento exponencial o logarítmico.	Al evaluar este aprendizaje es importante proponer situaciones significativas que sean de fácil entendimiento para las personas del curso, para que puedan interpretar situaciones modeladas por este tipo de funciones, caracterizarlas en términos del tipo de crecimiento que modelan, comparar ambos crecimientos y representarlas gráficamente.
• Grafiquen una función lineal, cuadrática, exponencial y logarítmica, analizando el crecimiento de cada una de ellas y en conjunto.	La evaluación de este aprendizaje requiere proponer de manera inde pendiente, pero simultánea, los cuatro tipos de funciones con el fin de que los estudiantes adultos y adultas pongan en juego los aprendizajes que les permiten tanto caracterizarlas, en términos del tipo de crecimiento que modelan, como expresar las diferencias entre ellas al comparar sus gráficos. Del mismo modo, es importante que puedan identificar los gráficos correspondientes y construirlos correctamente.

10 A continuación se describen los aprendizajes esperados para este módulo, los cuales se encuentran precisados posteriormente en el desarrollo de cada unidad a través de la descripción de sus respectivos indicadores de evaluación. Se incorporan sugerencias generales para la evaluación. No obstante, para este efecto es muy importante orientarse por los indicadores señalados.

Unidad 1: Función cuadrática

Introducción

En esta unidad, con un propósito de continuidad, se incorpora la función cuadrática como una función distinta a la lineal, vista en el nivel anterior. Con la finalidad de ampliar y profundizar este concepto, la función cuadrática es utilizada como una herramienta matemática que permite analizar, interpretar y obtener información relevante de situaciones o fenómenos nuevos o ya conocidos.

Como en las unidades anteriores, es importante que el profesor o profesora proponga múltiples problemas, con distinto nivel de complejidad, significativos para los estudiantes adultos y adultas en el sentido que se relacionen con su vida y sus preocupaciones y que, al enfrentarlos y resolverlos, les entreguen información sobre diversos fenómenos.

En las primeras actividades se proponen algunos ejercicios de evaluación de funciones con el fin de evocar procedimientos abordados previamente. Posteriormente, en las siguientes actividades, se proponen algunos problemas. No obstante, el profesor o profesora puede incorporar los problemas que encuentre adecuados cada vez que lo estime necesario y conveniente.

Aprendizaje esperado	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Resuelve problemas que se modelan a través de la función cuadrática.	Cada estudiante: • Interpreta la información entregada correctamente. • Evalúa valores en la función cuadrática. • Grafica la función. • Relaciona la función cuadrática con la ecuación de segundo grado. • Compara y analiza resultados en términos del contexto de la situación estudiada.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Tenemos que $h(t) = 16 - t^2$, ésta es la función que representa la caída de una piedra lanzada de una altura "h" medida en metros. Donde "t" es el tiempo medido en segundos:

a. ¿De qué altura fue lanzada la piedra?

b. ¿Qué altura lleva luego de 2,5 s. de haber sido lanzada?

c. ¿Cuánto demora en tocar el suelo?

Actividad 2

Al lanzar un objeto verticalmente hacia arriba, éste llega a una determinada altura e inicia su descenso. En este caso, el objeto está sometido a una fuerza inicial que lo lanza hacia arriba y otra constante que lo tira hacia abajo. La altura del objeto en un instante "t" está dada por la función $h(t) = v_0 t - 5t^2$; en que "v_0" es la velocidad inicial en el momento del lanzamiento hacia arriba y "t" es el tiempo medido en segundos (con el supuesto de que el objeto se lanza desde una altura igual a cero y con g aproximado a $10 \frac{m}{s^2}$):

a. Suponiendo una velocidad inicial igual a $8 \frac{m}{s}$, determinar la función para este lanzamiento.

b. Graficar dicha función.

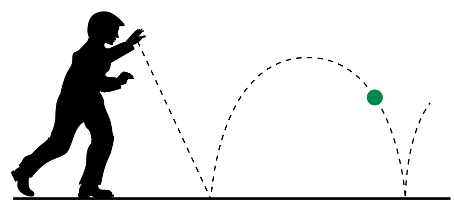
c. Determinar el momento en que el objeto llega al suelo

d. ¿Cuánto tiempo se mantuvo en el aire?

e. ¿Qué altura tiene a los 1,2 segundos?

Actividad 3

Se hace dar bote a una pelota con un determinado ángulo de inclinación, de tal manera que su trayectoria parabólica esta representada por la función $y = -5t^2 + 30t$. Donde "y" es la altura medida en centímetros y "t" es el tiempo medido en segundos:



a. Calcula la altura que alcanza la pelota a los 2,5 segundos

b. Calcula la altura máxima que alcanza la pelota y en qué instante

c. ¿Cuánto tiempo se demora en caer la pelota nuevamente al suelo?

Actividad 4

Para la fiesta de año nuevo una municipalidad planifica realizar una exhibición de fuegos artificiales. Éstos serán lanzados desde un edificio de 60 metros, con una velocidad inicial de 55 $\frac{m}{s}$. Se ha calculado que cuando hallan transcurrido "t" segundos desde su lanzamiento, la altura de cada proyectil está dada por la función $h(t) = -5t^2 + 55t + 60$, explotando éstos cuando alcancen su altura máxima:

a. ¿A qué altura explotan los proyectiles que contienen los fuegos artificiales?

b. Determinar el tiempo que tardan en alcanzar la altura máxima.

Actividad 5

El nivel básico de monóxido de carbono está dado por la función $f(n) = 1{,}5n$, donde "n" es el número de habitantes de cierta ciudad. Pero se estima que la población de esta ciudad, crece con el tiempo según la función $n(t) = 1{,}6 + 0{,}2t^2$, donde "t" es el tiempo medido en años:

a. ¿Qué nivel de monóxido de carbono tendrán los habitantes de la ciudad dentro de 10 años?

b. ¿Cuántos años han transcurrido para llegar a un nivel de 79,05 de monóxido de carbono?

c. En el año 1996 la Región Metropolitana fue declarada Zona Saturada por 4 contaminantes: ozono (*O3*), material particulado respirable (*PM10*), partículas en suspensión (*PTS*) y monóxido de carbono (*CO*); y Zona Latente por los elevados niveles de dióxido de nitrógeno (*NO2*) presentes en el aire (Ley 19.300 sobre Bases Generales del Medio Ambiente). Las normas de calidad del aire para Santiago (Resolución 1215 Ministerio de Salud 1978 y D.S. Nº 59 de la Secretaría General de la Presidencia) para *CO* es:

Monóxido de Carbono (CO)	40.000	$\frac{\mu g}{m^3}$	Media aritmética horaria.
	10.000	$\frac{\mu g}{m^3}$	Promedio aritmético móvil de 8 horas consecutivas.

Fuente: http://www.conama.cl/rm/568/article-1168.html

¿Qué población debiera tener Santiago para llegar a 40.000 $\frac{\mu g}{m^3}$, suponiendo que la contaminación de CO fuera producida sólo por sus habitantes?

Actividad 6

Un automóvil registra el siguiente nivel de rendimiento, según la velocidad a la cual es conducido:

Velocidad $\frac{km}{h}$	10	20	25	30	35	...
Rendimiento	37,77	71,11	86,11	100	112,77	...

Si "x" es la velocidad en $\frac{km}{h}$, el nivel de rendimiento está dado por la función:

$$r(x) = 4x - \frac{x^2}{45}$$

a. Completar la tabla de rendimiento para otras velocidades:

Velocidad $\frac{\mathbf{km}}{\mathbf{h}}$	40	45	50	55	60	65
Rendimiento						

b. ¿A qué velocidad se obtiene el máximo rendimiento?

Actividad 7

La ganancia P en millones de dólares (US$) obtenida al construir un edificio de x pisos puede aproximarse mediante la función $P(x) = 0{,}02x^2 + 0{,}1x - 0{,}3$. Considerando siempre la cantidad de pisos como un valor positivo y los valores negativos resultantes de la función, como pérdida:

a. Determinar la ganancia aproximada obtenida al hacer un edificio de 3 pisos.

b. ¿Con cuántos pisos como mínimo se debe construir un edificio para que la ganancia sea de 1,78 millones de US$?

c. ¿Cuál es la cantidad mínima de pisos que se deben construir para no tener pérdida?

Sugerencias metodológicas

Las cuatro primeras actividades presentan un problema clásico que puede ser estudiado por medio de funciones cuadráticas, y problemas relacionados con el lanzamiento. En cada uno de ellos es importante recalcar lo significativo que resulta evaluar distintos valores en las funciones y las conclusiones que pueden derivar de ahí, como también la forma de cómo encontrar los ceros de la función por medio de la ecuación cuadrática asociada a ella, por simple factorización y aplicación de la raíz cuadrada. Algunos de estos conceptos ya fueron vistos en el nivel anterior y otros en la unidad anterior.

Por otro lado, hacer una representación gráfica de la situación ayuda a las personas del curso a tomar mayor conciencia del fenómeno, dándole así una interpretación más clara y precisa, como se muestra en la tercera actividad. Al igual que la unidad anterior, se sugiere utilizar alguna herramienta computacional de libre disponibilidad para graficar estas funciones.

Las tres últimas actividades son problemas que refuerzan la aplicación de la función cuadrática en distintos ámbitos del conocimiento. Particularmente, en la quinta actividad se puede trabajar la comparación entre una función lineal y una cuadrática, además de la relación que se da entre ellas (composición de funciones). La tercera y secta actividad sugieren trabajar un método que permita determinar el punto máximo que alcanza la curva, como por ejemplo, el punto medio entre los ceros de la función, con posterior evaluación de este valor.

Este tipo de ejercicio le permite al profesor o profesora ampliar la discusión para otros valores, reforzar contenidos, graficar y promover la participación de los estudiantes adultos y adultas en el análisis de cada situación o fenómeno.

Unidad 2: Ecuación cuadrática

Introducción

Esta unidad introduce el concepto de ecuación cuadrática como ecuación de segundo grado, estudiando la representación gráfica de sus soluciones y el tipo de problemas que pueden llegar a modelarse a partir de ella.

La incorporación de la ecuación cuadrática, tiene un propósito de modelar y resolver problemas que sean fáciles de entender e interpretar por las personas del curso. También debe servir de base para el posterior estudio de situaciones o fenómenos que estén modelados, por ejemplo, por una función cuadrática, pero que requieran ser resueltos por medio de una ecuación cuadrática, con métodos conocidos que permiten determinar ceros de la ecuación e intersección con los ejes.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Analiza e interpreta un problema modelado por medio de una ecuación cuadrática.	Cada estudiante: • Aplica diversos métodos para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado e intersección con el eje Y. • Interpreta las raíces de una ecuación de segundo grado en términos de la o las soluciones de un problema.
• Resuelve problemas que requieren un modelamiento por medio de una ecuación cuadrática.	• Identifica una ecuación de segundo grado que permite modelar un cierto problema. • Encuentra ceros de la ecuación e intersección con el eje Y. • Interpreta las soluciones en términos de la situación y el contexto en que ésta se da.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Resolver problemas algebraicos por medio de ecuaciones de segundo grado.

Por ejemplo:

a. Se quiere distribuir $80.000 en partes iguales a cierto número de personas. En el momento de la repartición, 5 personas se retiraron, lo que significa que la cantidad que le corresponde a las otras aumentó en $800. ¿Cuántas personas eran inicialmente?

b. El producto de dos números enteros consecutivos es 552. ¿Cuáles son los números?

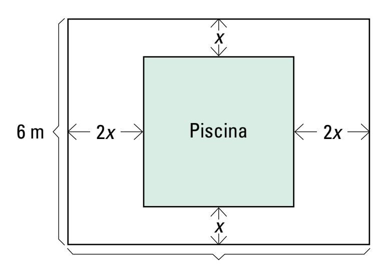
c. Un estanque de agua se llena con dos mangueras abiertas simultáneamente en 4 horas. Al usar sólo una manguera, ésta se demora 4 horas más que la otra. ¿Cuánto tiempo se demora cada una de las mangueras por separado?

Actividad 2

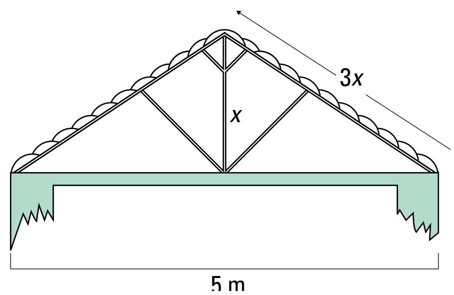
Resolver problemas aplicando una ecuación de segundo grado en diversos contextos.

Por ejemplo:

a. Don Mario y la Sra. Érica han decidido construir una piscina en el patio de su casa, justo al centro, como muestra la figura, de tal manera que la distancia a uno de los muros sea el doble que la distancia al otro muro. Si el patio mide 6 metros de fondo por 8 metros de largo y el área ocupada por la piscina debe ser de 16 m^2, encuentre la medida de los lados de la piscina. ¿De qué forma queda la piscina?:



b. Se desea construir el techo de una ampliación, de tal manera que la caída del techo sea el triple de la altura, como muestra la figura. Si la ampliación es una pieza de 5 metro cuadrados, ¿qué altura debe tener el techo?:



c. Siempre ocurre que en una reunión o encuentro de amigos, éstos se saludan de mano. Si sólo fueran dos amigos, habrá 1 apretón de mano; con 3 amigos, habrán 3 apretones de manos; con 4 amigos, 6 apretones. Esta relación entre amigos y apretones de mano, se puede interpretar por la expresión:

$$A = \frac{n(n-1)}{2}$$

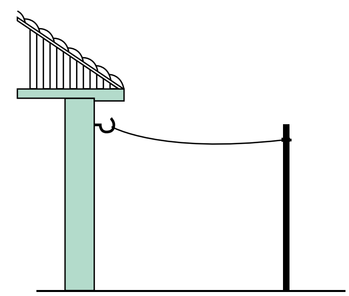
donde "A" corresponde a la cantidad de apretones de manos y "n" el numero de amigos que asisten.

Con lo cual podemos comprobar, si son 4 amigos:

$$A = \frac{4(4-1)}{2} = 2 \cdot 3 = 6 \text{ apretones de mano en total}$$

- ¿Cuántos apretones de mano habrán en total si asisten 20 personas a una reunión?
- ¿Cuántas personas deben asistir a una reunión para que, por lo menos, se realicen 100 apretones de mano?

d. La señora Gloria le pedía a su marido habilitar algunos cordeles para tender la ropa y secarla. Esto ocurría cada vez que llegaban a su casa de veraneo en la playa. En el muro de la casa que daba para el patio había 1 gancho colocado para tal efecto, del cual don Sergio ataba un cordel a un poste, que se ubicaba más o menos en la mitad del patio, como lo muestra la figura:



Debido a la insistencia de la señora Gloria, de que el tendedero se le hacía insuficiente cuando llegaba toda su familia, don Sergio enterró otro poste y pudo habilitar 2 cordeles más utilizando el mismo gancho del muro.

Esta relación gancho-postes y número de cordeles está dada también por la expresión:

$$C = \frac{p(p-1)}{2}$$

donde C es el número de cordeles que se pueden colocar y p el número de postes o ganchos habilitados.

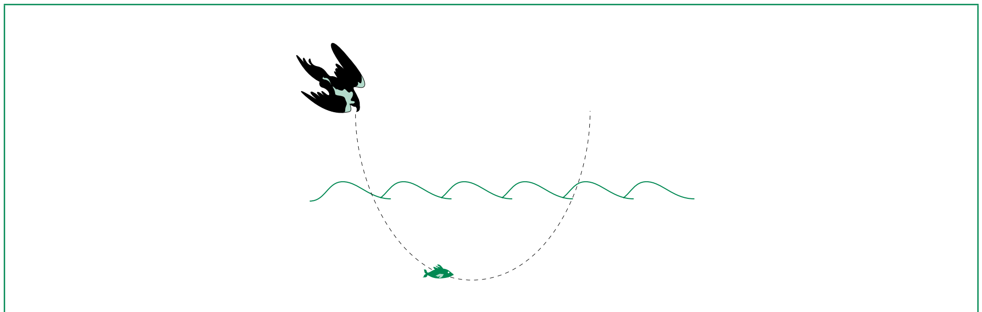
- ¿Cuántos cordeles se pueden habilitar si se colocan 3 postes más?
- ¿Cuántos postes se necesitan para habilitar 66 cordeles?

Actividad 3

Analizar cuándo una ecuación de segundo grado tiene una, dos o ninguna solución en el conjunto de los números reales y la interpretación gráfica de estas situaciones.

Por ejemplo:

La zambullida que realiza un ave en el mar para poder pescar describe una trayectoria claramente parabólica. Para poder tener éxito en su cometido, ésta debe ingresar al agua, tomar su presa y volver a salir, tal como lo muestra la figura.



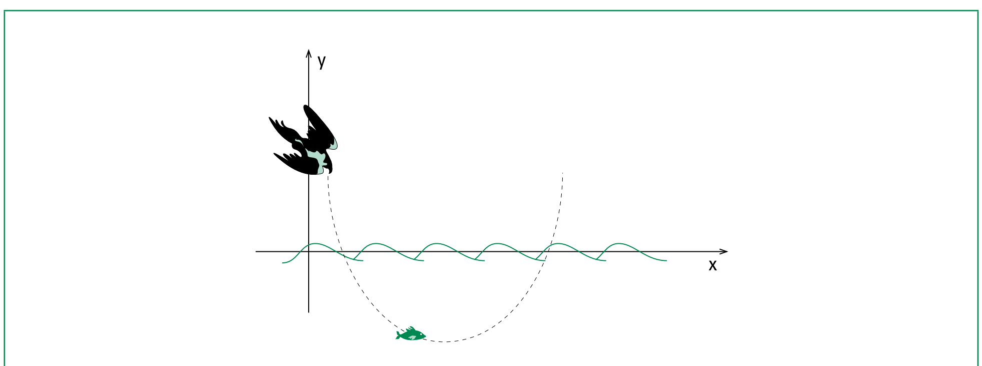
A continuación, se presentan tres ecuaciones asociadas a la curva de vuelo que realiza el ave:

a. $x^2 - 14x + 50 = 0$

b. $x^2 - 14x + 49 = 0$

c. $x^2 - 14x + 33 = 0$

Si consideramos el nivel del mar como referencia para el eje *X*, ¿qué ecuación representa una caza exitosa? Explique lo que ocurre en cada caso y por qué con las otras dos ecuaciones el ave no tiene éxito.



Sugerencias metodológicas

Es evidente que la ecuación de segundo grado tiene muchas aplicaciones y se ha demostrado con las actividades propuestas, separándolas por área matemática, pero el profesor o profesora puede iniciar el estudio de esta unidad con cualquier tipo de problemas, no necesariamente geométricos o algebraicos; incluso, de un nivel simple a uno con problemas más complejos.

Al realizar actividades como las propuestas, es importante que las personas del curso puedan trabajar en pequeños grupos, donde desarrollen estrategias de ensayo y error, propuestas en común y síntesis, y que intenten imaginar las situaciones, representándolas por medio de esquemas.

En los problemas que se propongan para desarrollar actividades como la número 3, la variedad en que éstas se presenten es muy importante para asegurar que todas las situaciones posibles sean analizadas (una, dos o ninguna solución) y que los estudiantes adultos y adultas logren interpretar adecuadamente lo que ello significa en función de las situaciones particulares.

Se sugiere el uso de algún programa computacional de libre distribución que apoye el trabajo gráfico, por ejemplo, GraphEquation, GraphMathica u otro, que en sus versiones betas y freeware se encuentran disponibles en Internet y son bastantes útiles.

Unidad 3: Funciones y problemas de crecimiento

Introducción

En el nivel anterior, los estudiantes adultos y adultas han analizado, graficado y resuelto diversas situaciones que se modelan con funciones lineales. En este nivel, han tenido la oportunidad de ampliar este conocimiento familiarizándose con aplicaciones y resolución de problemas por medio de ecuaciones y funciones cuadráticas. Continuando con este estudio, en esta unidad los contenidos y actividades que se sugieren introducen el trabajo con dos nuevas funciones, realizando una comparación tanto en su expresión algebraica como a partir de sus gráficos. Ahora se propone a las personas del curso que analicen e interpreten situaciones relacionadas con diversos fenómenos en los cuales se puede identificar otro tipo de crecimiento y que se modelan por medio de las funciones exponencial y logaritmo. Por ejemplo, crecimiento demográfico, cultivo de bacterias o fenómenos naturales como los sismos.

Estas situaciones requieren que el profesor o profesora dé tiempo a los y las estudiantes para imaginar cada situación, comprenderla a cabalidad y eventualmente realizar esquemas para clarificar ideas, para luego enfrentarla a partir de herramientas matemáticas conocidas e incorporando otras nuevas.

Es importante señalar que estas funciones modelan situaciones a menudo conocidas, en términos del tipo de crecimiento que se establece por la relación entre las variables. Además, estas herramientas matemáticas permiten comprenderlas más amplia y profundamente, también en forma más general cuando se requiera encontrar soluciones a problemas específicos.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Analiza situaciones o fenómenos en diversos ámbitos, donde la relación funcional entre las variables siguen un crecimiento exponencial o logarítmico.	Cada estudiante: • Interpreta la función que modela una determinada situación de crecimiento exponencial. • Interpreta una situación modelada por medio de una función logarítmica. • Evalúa las funciones correspondientes.
• Grafica una función lineal, cuadrática, exponencial y logaritmo, analizando el crecimiento de cada una de ellas y en conjunto.	• Identifica, a partir del modelamiento, si una variable tiene crecimiento exponencial o logarítmico. • Grafica la función correspondiente. • Describe y compara los distintos tipos de crecimiento de la variable dependiente en cada caso.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Analizar en un contexto amplio alguna situación que involucre el uso de una función exponencial para describir crecimiento poblacional, como una de las aplicaciones más típicas para este tipo de función.

Por ejemplo:

La vida humana comienza con una célula que, por medio de un proceso de división celular, llamada bipartición o mitosis, permite el crecimiento de los organismos vivos en una situación ideal donde no mueren células ni hay efectos colaterales, el número de células presentes en un instante dado obedece a la ley de crecimiento no inhibido. Sin embargo, en la realidad, después de cierto tiempo este crecimiento exponencial se detiene debido a factores externos como la falta de espacio, disminución de la fuente alimenticia, etc. La ley de crecimiento no inhibido sólo refleja de manera exacta las primeras etapas de la mitosis.

La ameba, que es un ser unicelular, se reproduce partiéndose en dos, es decir bajo la ley de crecimiento no inhibido. Esta bipartición se produce más o menos rápido según las condiciones del medio. La ameba se encuentra generalmente en vegetación en descomposición. Sin embargo, debido a la facilidad con la que se pueden obtener y guardarse en laboratorios, es objeto común de estudios.

Supongamos que tenemos inicialmente una sola ameba y que se reproduce cada una hora. Si ordenamos estos datos en una tabla y observamos su comportamiento, tendremos:

Tiempo en horas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de amebas	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Este ejemplo es un caso de crecimiento asimilable a una función exponencial de la forma:

$$C(t) = 2^t$$

donde, “t” es el tiempo en horas y “2” es la constante del crecimiento.

Supongamos ahora, que tenemos 20 amebas inicialmente que se reproducen en el mismo tiempo indicado. Completa la tabla:

Tiempo en horas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de amebas										

Este tipo de crecimiento está dado siempre de la misma forma y se representa por medio de la función:

$$C(t) = C_0 \cdot 2^t$$

donde, “C_0” es la población inicial en estudio.

a. Si consideramos una población inicial de 30 amebas, con una reproducción cada una hora, ¿qué población total de amebas habrá al cabo de 5 horas?

b. Si consideramos una población inicial de 4 amebas, con una reproducción cada dos horas, ¿qué población total de amebas habrá al cabo de 1 día?

c. Una colonia de bacterias crece bajo la ley de crecimiento no inhibido. Si la cantidad de bacterias se reproduce cada tres horas, ¿cuántas bacterias habrán en total al cabo de 12 horas?

Actividad 2

Estudiar otro tipo de crecimiento poblacional, en el que intervengan otras variables.

Por ejemplo:

Chile, el año 1996, 1997 y 1998, tenía una población aproximada de 14.419.000, 14.622.000 y 14.822.000 habitantes, respectivamente. Actualmente, según el censo del año 2002, tiene una población aproximada de 15,5 millones de habitantes y está creciendo a una tasa anual de 1,3 %. Crecimiento que se ha ido desacelerando desde el año 1992.

Si se observan estos datos, o si se estudia esta situación con datos más completos en las páginas del Instituto Nacional de Estadística (INE), se puede observar que este crecimiento no es constante;

y si lo fuese, tendríamos un crecimiento lineal, pero no ocurre así, este tipo de crecimiento atiende más bien a un crecimiento exponencial que está determinado por la función:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$$

donde, "P_0" es la población inicial (cuando $t = 0$),

"k" es la tasa de crecimiento en porcentaje anual,

"t" es el tiempo en años,

"P" es la población en el tiempo "t".

A partir de estos datos, responder:

a. ¿Qué población habrá en Chile en 10 años más y en 50 años más si sigue creciendo a esta misma tasa?

b. Qué población habrá en Chile en 10 años más, si la tasa de crecimiento cae a la mitad de la actual?

c. Aproximadamente, la población mundial el año 2000 era de 6.000 millones de personas. Si consideramos una tasa de crecimiento anual es del 1,3%, ¿cuántas personas habrán el año 2050 sobre la tierra?

Actividad 3

Estudiar situaciones que no estén relacionadas con crecimiento poblacional, pero que están modeladas por medio de una función exponencial.

Por ejemplo:

En Chile existen dos cuerpos legales que regulan la conducción bajo los efectos del alcohol. La Ley de Alcoholes Nº 17.105 del año 1969 contempla la figura penal del conductor de vehículo motorizado en estado de ebriedad y la obligación a la prueba de alcoholemia. La Ley de Tránsito Nº 18.290 de 1984 establece el concepto de conducir bajo la influencia del alcohol sin estar ebrio y lo tipifica como una infracción gravísima.

La diferencia entre estos dos cuerpos legales está basada en una interpretación de las alcoholemias hechas por el Servicio Médico Legal en 1972 y que la Corte Suprema de Justicia recomendó a los Tribunales del país, donde con 1 gramo de alcohol por litro de sangre se considera al conductor en estado de ebriedad, y entre 0,5 hasta 0,99 $\frac{\text{gr}}{\text{litro}}$ será considerado bajo la influencia del alcohol sin estar ebrio.

Investigaciones médicas recientes han propuesto un modelo matemático que indica porcentualmente la probabilidad de tener un accidente automovilístico al conducir bajo los efectos del alcohol, la cual está dada por la función de riesgo "*R*":

$$R = 6 \cdot e^{kx}$$

donde, "*x*" es la concentración de alcohol en la sangre,

"*k*" es una constante,

"*R*" probabilidad de tener un accidente (expresada en porcentaje).

a. Al suponer que una concentración de 1 gr. de alcohol en la sangre produce un riesgo del 100% (R = 100) de sufrir un accidente, en este caso el valor de la constante es 2,81, aproximadamente. Utilizando este valor de "*k*", calcular el riesgo de sufrir un accidente si la concentración de alcohol en la sangre es de 0,5 $\frac{\text{gr}}{\text{litro}}$.

b. Al suponer que una concentración de 1 gr. de alcohol en la sangre produce un riesgo del 80% (R = 80) de sufrir un accidente, el valor de la constante baja a 2,6. Utilizando este valor de "*k*", calcular el riesgo de sufrir un accidente si la concentración de alcohol en la sangre es de 1,5 $\frac{\text{gr}}{\text{litro}}$.

Actividad 4

Analizar alguna situación que involucre el uso de una función logaritmo para describir un fenómeno natural.

Por ejemplo:

Chile está ubicado en lo que los científicos llaman el cordón de fuego, por la gran cantidad de volcanes que existen en su territorio, esto se debe por ser uno de los países con mayor extensión de montaña en el planeta. Pero, no tan sólo esto hace peligroso vivir en este país, sino que también su ubicación sobre una de las placas tectónicas que rodean el océano Pacífico con más movimiento de la tierra, convirtiéndolo en uno de los países más sísmicos del mundo y donde se han registrados los terremotos más fuertes registrados en la historia de nuestro planeta.

Los terremotos más fuertes han sido los siguientes:

MAGNITUD	LUGAR	AÑO
9,5	Valdivia, Chile	1960
8,5	Kansu, China	1920
8,25	San Fco., EEUU	1906

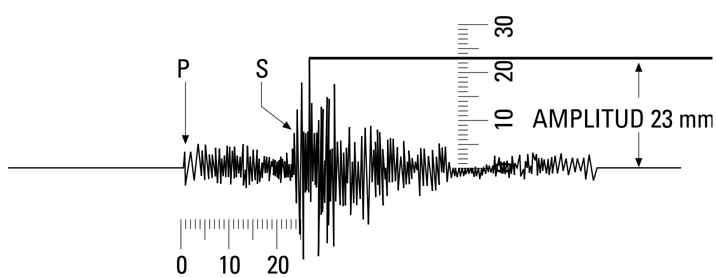
Los terremotos son medidos por medio de dos escalas: la de Richter, que mide la magnitud de un sismo y que da a conocer la energía liberada, y la escala de Mercalli, que representa la violencia con que se siente un sismo en diversos puntos de la zona afectada, siendo más subjetiva, porque la intensidad aparente de un terremoto depende de la distancia al epicentro a la que se encuentra el observador; es una escala que va desde I a XII, y describe y puntúa los terremotos más en términos de reacciones y observaciones humanas que en términos matemáticos, a diferencia de como lo hace la escala de Richter. Ésta mide la energía del sismo en su epicentro y se basa en un modelamiento logarítmico común de la amplitud máxima de onda medida en milímetros por medio de la función:

$$M = \log(A \cdot 10^3)$$

donde, "M" es la magnitud del sismo,

"A" es la amplitud del sismo medida en milímetros (mm) por medio de un sismógrafo.

El sismógrafo, dentro de otros valores, mide la amplitud del movimiento, en este caso, según la imagen, el sismo ha tenido una amplitud de 23 mm:



a. Calcular la magnitud del sismo.

b. ¿Qué magnitud tiene un sismo de amplitud 25 mm?

c. ¿Qué efectos prácticos tiene que la escala utilizada para medir magnitud esté modelada por medio de una función logaritmo? Discutir en el curso.

Como la magnitud no es una variable física, los sismólogos han buscado otras fórmulas de relacionar la magnitud u otros valores con, por ejemplo, la energía liberada como onda sísmica. Producto de este trabajo, Richter encontró esta fórmula:

$$\log E = 1{,}5 \cdot M + 11{,}8$$

donde, "M" es la magnitud del sismo.

"E" es la energía liberada medida en ergios[11].

a. Calcular la energía, en ergios, liberada por un sismo de magnitud 3,5.

b. Calcular la energía, en ergios, liberada por un sismo de magnitud 4,5.

c. Calcular la energía, en ergios, liberada por un sismo de magnitud 5,5.

d. Realizar una comparación entre los valores obtenidos y sacar algunas conclusiones.

e. Calcular la energía, en ergios, liberada por el terremoto de Valdivia registrado en el año 1960.

f. ¿Cuántos grados tiene un sismo que libera 1020 ergios?

Actividad 5

Analizar una situación que involucre el uso de una función logaritmo para describir un fenómeno auditivo.

La gama de sonido que es capaz de percibir el oído humano está dada por la intensidad de una onda sonora que se mide en $\frac{W}{m^2}$ (watt por metro cuadrado, generalmente en la vida cotidiana se habla sólo de Watt). Esta intensidad va desde 10-12, que es la menor que el oído humano puede detectar, lo que se llama umbral auditivo. Hasta 104, sonidos que perforan el tímpano. Al medir esta intensidad en decibeles se genera la medida llamada intensidad β (dB), que está dada por la fórmula:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = t^2 \text{ o la equivalente } \beta = 10 \cdot \log(I \cdot 10^{12})$$

Donde β es la intensidad del sonido medida en decibeles e I es la intensidad del sonido medida en $\frac{W}{m^2}$.

11 Unidad de trabajo del Sistema Cegesimal, equivalente al realizado por una dina cuando su punto de aplicación recorre un centímetro. (Símb. erg). Definición del Diccionario de la RAE.

Por ejemplo, el despegue de un Jet genera una intensidad de 102 $\frac{W}{m^2}$, es decir, 100 $\frac{W}{m^2}$. Esta medida en decibeles queda de la siguiente manera:

$$\beta = 10 \cdot \log(100 \cdot 10^{12})$$

$$\beta = 10 \cdot \log(10^2 \cdot 10^{12})$$

$$\beta = 10 \cdot \log(10^{14})$$

$$\beta = 10 \cdot 14\log(10)$$

$$\beta = 10 \cdot 14 = 140\ dB$$

Es decir 140 decibeles.

a. Una casa comercial ofrece un equipo musical que tiene una potencia de 3.000 Watt ($\frac{W}{m^2}$) de salida. ¿A qué cantidad de decibeles está expuesto el oído humano al escuchar este equipo a toda su potencia?

b. El tráfico vehicular intenso en una avenida produce una intensidad de sonido de 10 – 5 $\frac{W}{m^2}$. ¿A cuántos decibeles están expuestos los transeúntes de esa avenida?

c. En Santiago se aplica la misma norma para los niveles de contaminación acústica según la Organización Mundial de la Salud (OMS).

TABLA 1. NIVELES DE RUIDO SUGERIDOS POR LA OMS PARA AMBIENTES ESPECÍFICOS

Ambientes	*dB*(A)	Intensidad
Viviendas	50 *dB*(A)	
Escuelas	35 *dB*(A)	
Discotecas	90 *dB*(A) x 4h	
Conciertos, festivales	100 *dB*(A) x 4h	
Comercio y tráfico	70 *dB*(A)	

Completar la tabla, con la intensidad de sonido que produce cada cantidad de decibeles según el ambiente.

d. La agencia protectora del medio ambiente de los Estados Unidos (EPA) ha llegado recientemente a la conclusión de que existe el riesgo de pérdida auditiva permanente después de 40 años de exposición a un nivel de ruido diario de 75 *dB* durante 8 horas diarias y de 84 *dB* durante 1 hora diaria. ¿A qué intensidad de sonido está expuesta una persona para sufrir daños auditivos para cada uno de estos niveles medidos en decibeles?

Actividad 6

Analizar situaciones que involucren un decrecimiento exponencial o logarítmico.

a. Para poder determinar la edad de restos humanos o de animales, los arqueólogos se apoyan en las propiedades radiactivas de las sustancias que están presentes en todos los tejidos vivos debido a la interacción con los rayos cósmicos. Dentro de estas sustancias se encuentra el Carbono 14 con cierta cantidad en cada organismo. Cuando el organismo muere la cantidad de Carbono 14 empieza a decaer exponencialmente, siendo su vida media de 5.730 años.

   Esto significa, por ejemplo, que si se tienen 12 g de Carbono 14, después de 5.730 años se tendrán 6 g, 11.460 años después se tendrán 3 g, 17.190 años después se tendrán 1,5 g, y así sucesivamente.

   - Graficar este tipo de comportamiento. ¿Es creciente o decreciente la curva?
   - Encontrar una expresión algebraica que represente este tipo de crecimiento, donde la cantidad de Carbono 14 (C) presente en un organismo esté en función de la cantidad inicial (C_0) y al tiempo transcurrido (t).

b. El crecimiento de una colonia de mosquitos sigue un crecimiento exponencial que puede ser modelado con la siguiente ecuación. $A(t) = A_0e^{kt}$. Si inicialmente habían 1.000 mosquitos y después de un día la población de éstos aumenta a 1.800, ¿cuántos mosquitos habrán en la colonia después de 3 días? ¿Cuánto tiempo tendría que pasar para que la colonia tenga 10.000 mosquitos?

c. Por otro lado, la degradación de la basura varía enormemente de acuerdo con las sustancias y materiales de que están hechas y por las condiciones del aire, luz solar y humedad. La siguiente tabla muestra el tiempo de degradación de algunas materias conocidas:

TIEMPO (AÑOS)	MATERIAL
5	Chicle.
10	Lata de bebida o cerveza.
100 a 1.000	Botella de plástico, al aire libre. Enterradas duran mucho más.
1.000	Una pila.
4.000	Botella de vidrio.

   - Este tipo de comportamiento que tiene la basura para degradarse, ¿es exponencial o lineal?
   - ¿Por qué no se habla de vida media de la basura?
   - Investigar el tiempo de degradación de otros elementos que habitualmente arrojamos a la basura.

Sugerencias metodológicas

Las actividades propuestas tienen como propósito incorporar las funciones exponencial y logaritmo y en ellas la importancia del uso de herramientas algebraicas y la profundización de la noción de función que se trabajaron en el nivel y unidades anteriores.

Como se puede observar, las actividades propuestas están dadas en un contexto amplio, pero a su vez preparadas con bastante información, con la finalidad de motivar a las personas del curso al estudio de la situación planteada. Es importante recordar que éstas son sugerencias de algunas actividades que será necesario complementar de acuerdo con las necesidades de aprendizaje de los y las estudiantes, así como de sus experiencias.

Para complementar estas actividades y relacionar los distintos tipos de crecimientos estudiados existe la posibilidad de que al final de la unidad se puedan aplicar, sobre los mismos ejemplos, preguntas adicionales que lleven a los estudiantes adultos y adultas a usar la función inversa a la contemplada en una función o fórmula. Por ejemplo, para la segunda actividad se pueden agregar preguntas como: "¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que la población en Chile aumente en un 50% con respecto a la actual?, ¿en cuánto tiempo se triplicará?". Para la actividad 3, se puede considerar el siguiente problema: "Calcular la concentración de alcohol en la sangre que provocaría un riesgo de 40% ($k = 2{,}6$)". La actividad 3 puede ser complementada con: "Se calcula, que en una persona sana de 70 kilos la presencia de alcohol disminuye a razón de 0,1 $\frac{\text{gr}}{\text{litro}}$ cada hora después de haber dejado de beber, ¿cuánto tiempo debe esperar una persona que registra 0,8 $\frac{\text{gr}}{\text{litro}}$ de alcohol en la sangre?, ¿cómo es este comportamiento, lineal o exponencial?, graficar". Esto permitirá realizar la comparación y relacionar los diferentes tipos de crecimientos que se dan en la vida diaria en fenómenos tan simples como los vistos.

Con algunas preguntas de la actividad 6, se espera que las personas del curso puedan discriminar entre crecimiento logarítmico y lineal.

Si se considera la opción de graficar algunas funciones, se sugiere que parta con algunas más simples como $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = 2^x$, en un mismo gráfico para permitir la posibilidad de compararlas entre ellas y relacionarlas con el crecimiento que representan. Este trabajo puede ser por la construcción de tabla de valores o por algún programa computacional como se ha señalado en las unidades anteriores.

Es importante fomentar el trabajando en grupo, ya que le permite a los estudiantes adultos y adultas resolver problemas por medio de la discusión e intercambios de ideas, como también generar instancias de investigación, llevando el problema matemático a un contexto mucho más amplio.

Módulo III

Geometría

Introducción

Sobre la base de los contenidos tratados en Geometría en Educación Básica para Adultos y a la actualización y profundización de contenidos en el nivel anterior, el presente módulo propone actividades que los amplía y profundiza. Al mismo tiempo, se presentan nuevas herramientas matemáticas para el análisis de otras situaciones o fenómenos que requieren no tan solo de la aplicación de un teorema o una propiedad determinada, sino de las relaciones que se pueden determinar dentro de una figura geométrica, en especial en el triángulo rectángulo, abordándose las relaciones trigonométricas seno, coseno y tangente que en él se presentan, y sus aplicaciones a la resolución de problemas, como por ejemplo, el cálculo de distancias y alturas inaccesibles.

Este módulo está constituido por sólo una unidad:

Unidad 1: Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Contenidos del módulo

1. Determinación de razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) en el triángulo rectángulo.
2. Resolución de problemas que involucran el uso de trigonometría como el cálculo de alturas y distancias inaccesibles. Análisis y pertinencia de las soluciones.

Aprendizajes esperados del módulo[12] y sugerencias para la evaluación

APRENDIZAJES ESPERADOS	SUGERENCIAS PARA LA EVALUACIÓN
A partir del desarrollo de este módulo se espera que los estudiantes adultos y adultas: • Reconozcan las razones seno, coseno y tangente para ángulos de 30º, 45º, 60º y 90º en un triángulo rectángulo y determinen sus respectivos valores a partir de ellas.	Es importante que en la evaluación de este aprendizaje los estudiantes adultos y adultas reconozcan y diferencien correctamente las razones trigonométricas seno, coseno y tangente que se dan en un triángulo rectángulo.
• Resuelvan problemas en los que es necesario establecer y utilizar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente con ángulos de 30º, 45º, 60º y 90º.	Al evaluar este aprendizaje es importante poner atención en el cálculo de los valores de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente referidos a ángulos específicos. No obstante, es esencial proponer situaciones o problemas que requieran aplicar dichos conceptos, tanto para interpretarlos como para resolverlos.
• Determinen valores de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente con ángulos distintos a 30º, 45º, 60º y 90º, usando calculadora.	La evaluación del logro de este aprendizaje implica que las personas del curso identifican las funciones trigonométricas en la calculadora y las utilizan adecuadamente para encontrar valores frente a situaciones determinadas, que presentan ángulos no comunes. Su evaluación puede realizarse en conjunto con otros aprendizajes esperados puesto que la calculadora es sólo un instrumento de apoyo para los cálculos.

12 A continuación se describen los aprendizajes esperados para este módulo, los cuales se encuentran precisados posteriormente en el desarrollo de la unidad a través de la descripción de sus respectivos indicadores de evaluación. Se incorporan sugerencias generales para la evaluación. No obstante, para este efecto es muy importante orientarse por los indicadores señalados.

Unidad 1: Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Introducción

Esta unidad introduce el trabajo con las razones trigonométricas seno, coseno y tangente que se presentan en el triángulo rectángulo, como también, la definición de conceptos, la descripción de los elementos que forman estas relaciones y la resolución de problemas que requieren del uso de estas razones en el cálculo de altura o distancias inaccesibles.

Si bien el trabajo con ángulos que miden 30º, 45º, 60º y 90º, que pueden ser enseñados por medio de una tabla o por deducción a partir de un triángulo equilátero y un triángulo isósceles rectángulo, puede facilitar el cálculo en algunos problemas planteados, se sugiere que se incorpore el uso de calculadora científica con el fin de realizar cálculos de valores trigonométricos con ángulos distintos a 30º, 45º, 60º y 90º.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Reconoce las razones seno, coseno y tangente para ángulos de 30º, 45º, 60º y 90º en un triángulo rectángulo y determina sus respectivos valores a partir de ellas.	Cada estudiante: • Encuentra el valor del seno, coseno y tangente de un ángulo de 30º, 45º, 60º y 90º determinado en un triángulo rectángulo.
• Resuelve problemas en los que es necesario establecer y utilizar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente con ángulos de 30º, 45º, 60º y 90º.	• Identifica y selecciona los datos para resolver un problema de altura o distancia utilizando razones trigonométricas seno, coseno o tangente dadas en un triángulo rectángulo.
• Determina los valores de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente con ángulos distintos a 30º, 45º, 60º y 90º, usando calculadora.	• Calcula el valor del seno, coseno y tangente de un ángulo cualquiera por medio del uso de calculadora.

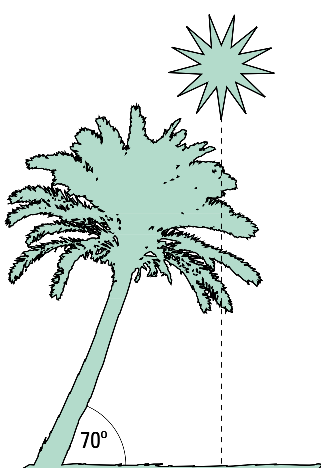
Ejemplos de actividades

Actividad 1

Resolver problemas para introducir el concepto de razón trigonométrica.

Por ejemplo:

Por la fuerza del viento, un árbol ha crecido inclinado formando con el suelo un ángulo de 70°, tal como se muestra en la imagen:



a. Si el árbol mide 2 metros, ¿qué medida tiene su sombra al medio día?

b. Calcular la medida de la sombra del árbol para las siguientes alturas y completar la tabla:

Altura árbol	2,5 m	3 m	3,5 m	4 m	4,5 m	5 m
Medida de la sombra						
Razón $\frac{\textbf{sombra}}{\textbf{altura árbol}}$						

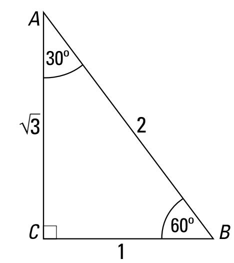
Actividad 2

Resolver problemas para identificar las razones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Por ejemplo:

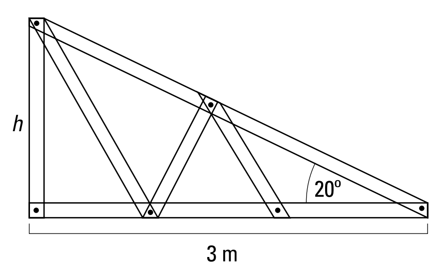
a. Sea el triángulo ΔABC rectángulo en C. Determinar:

- sen 30º
- cos 30º
- tg 60º
- sen 60º
- cos 60º
- tg 90º

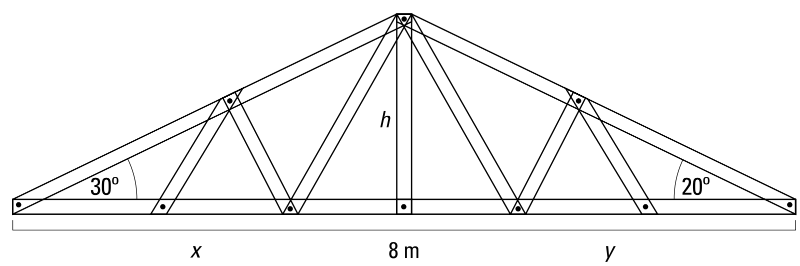


b. Por la forma física de Chile, existen en nuestro país diferentes tipos de climas. Esto, además de ser el principal factor entre las diferentes zonas, marca el tipo de arquitectura en sus casas. En el norte se puede observar que las casas casi no tienen pendiente en sus techumbres, porque las lluvias son muy escasas. En la medida en que nos movemos hacia el sur, los techos tienen más pendiente por ubicarse en zonas más lluviosas. Esto facilita el mejor y más rápido desplazamiento de las aguas.

- Para construir una casa en la zona central con una media agua, se requiere que las cerchas tengan 3 metros de base y un ángulo de inclinación de 20º, como se muestra en la figura. ¿Cuánto debe medir la altura "*h*" del pilar de refuerzo que debe ponerse para apoyar el techo?



- Si las cerchas a construir son para una casa de una agua, que tenga 8 metros de base y ángulo de inclinación de 20º y 30º por agua, como muestra la figura, ¿cuánto debe medir la altura "*h*" del pilar de refuerzo que debe ponerse para apoyar el techo?, ¿a cuántos metros de la orilla del ángulo de 30º debe ir el pilar aproximadamente?



- Si las cerchas a construir son para una casa de una agua al sur de Chile, de 10 metros de base y ángulos de inclinación de 50º por agua, ¿en qué lugar de la base debe ir el pilar de refuerzo que debe ponerse para apoyar el techo y cuánta altura debe medir?

Actividad 3

Reconocer regularidades en el comportamiento de las razones trigonométricas con ángulos de 30º, 45º, 60º y 90º deducidas desde un triángulo equilátero o desde un cuadrado.

Por ejemplo:

Observar la secuencia presentada en la siguiente tabla y completar con los valores que faltan:

	$\alpha = 0º$	$\alpha = 30º$	$\alpha = 45º$	$\alpha = 60º$	$\alpha = 90º$
sen α	$\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{} = 1$
cos α	$\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{}$	$\frac{1}{2}\sqrt{}$	$\frac{1}{2}\sqrt{} = 0$
tg α	0				No existe

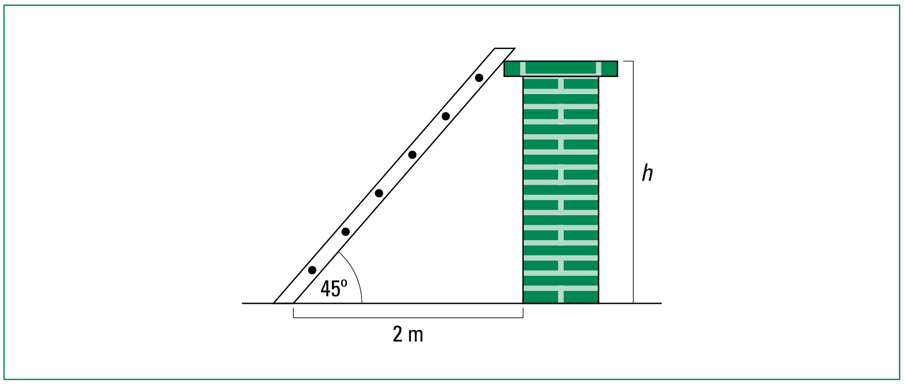
Actividad 4

Resolver problemas de cálculo de alturas y distancias con ángulo de 30º, 45º, 60º y 90º.

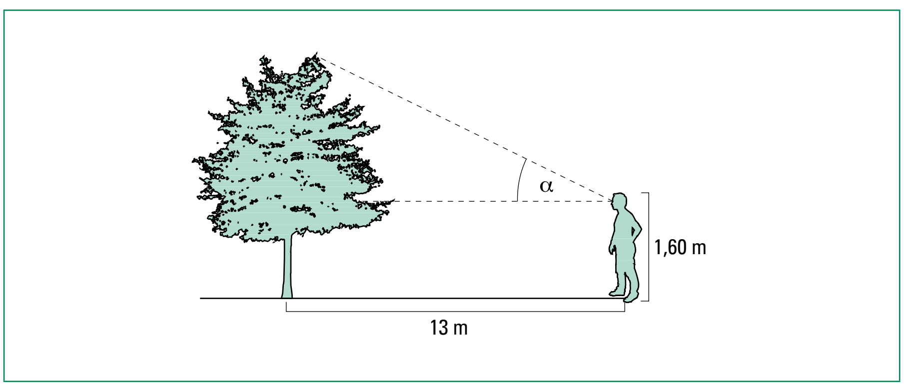
Por ejemplo:

a. Una escalera está apoyada en un muro formando con el suelo un ángulo de 45º, tal como lo muestra la imagen.

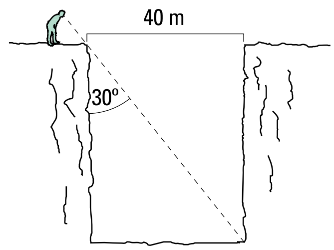
- Si el pie de la escalera está a 2 metros del muro, calcular la altura del muro.
- ¿Cuánto mide la escalera?



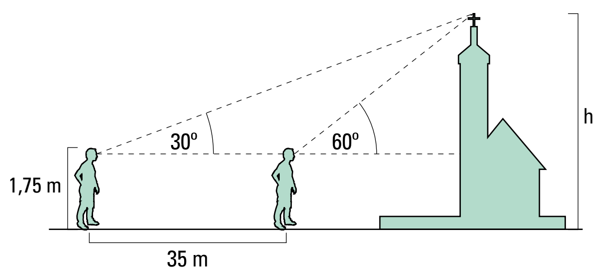
b. Estimar la altura de un árbol si un observador, que mide 1,60 metros, se encuentra a 13 metros del pie del árbol y el ángulo de visión es de 30º (α):



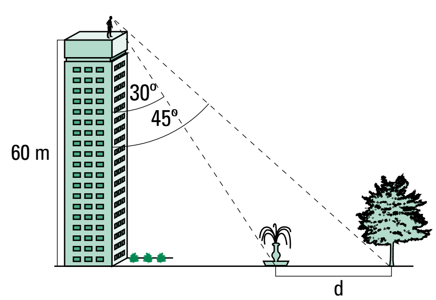
c. Una persona se encuentra a 40 metros de la otra orilla de una quebrada, y puede observar su fondo, formando un ángulo con la horizontal de 30º. Determinar la profundidad de la quebrada:



d. Una persona observa la cruz de una iglesia que se ubica en la parte más alta de su torre con un ángulo de elevación de 30º. Si avanza 35 metros en línea recta hacia la base de la iglesia, queda mirando la cruz con un ángulo de elevación de 60º. Considerando que la vista del observador está a 1,75 metros del suelo, ¿cuál es la altura aproximada de la torre?:



e. Desde un edificio se puede observar una plaza, en ella es claramente distinguible un árbol y una pileta de agua. La pileta es observada con un ángulo de 30º y el árbol con un ángulo de 45º. Si el edificio tiene 60 metros de altura, ¿a qué distancia se encuentra el árbol de la pileta?:

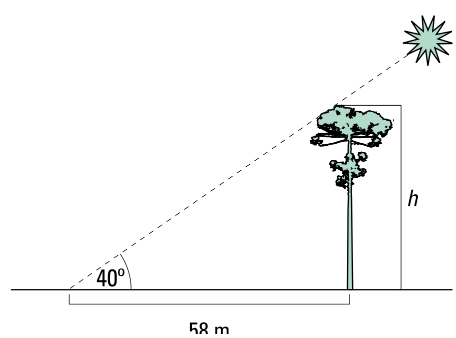


Actividad 5

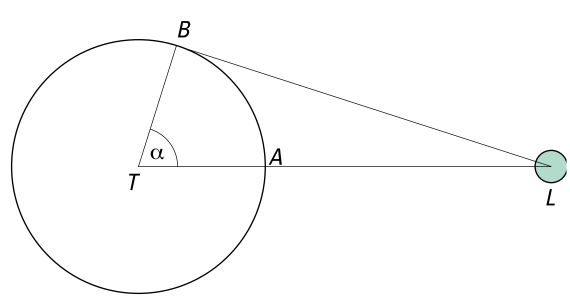
Resolver problemas de cálculo de alturas y distancias con ángulo distintos a 30º, 45º, 60º y 90º para usar calculadora.

Por ejemplo:

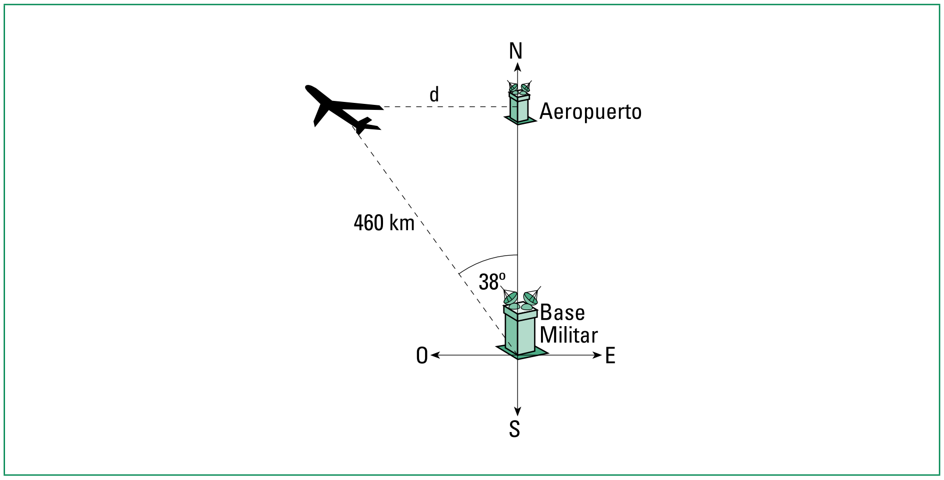
a. Una araucaria proyecta una sombra de 58 metros de largo cuando la elevación del sol determina con el suelo un ángulo de 40º, como lo muestra la figura. Determinar la altura de la araucaria:



b. Supongamos dos observadores terrestres *A* y *B* situados sobre un mismo meridiano pero en dos latitudes distintas. Al mismo tiempo que *A* observa la luna verticalmente, *B* ve la luna levantarse en el horizonte. Calcular la distancia aproximada de la tierra a la luna sabiendo que la diferencia de latitud entre los 2 observadores es de 89º (α) y que el radio de la tierra mide aproximadamente 6.378 km:



c. Un avión instruccional despega de una base área militar y vuela en línea recta en dirección 38º hacia el N.O. Cuando lleva recorrido 460 km presenta una falla que lo obliga a desviarse a un aeropuerto comercial como alternativa más inmediata de recibir ayuda. ¿Qué distancia deberá recorrer el avión desde el punto en que se encuentra hasta el aeropuerto comercial como lo muestra la figura?:

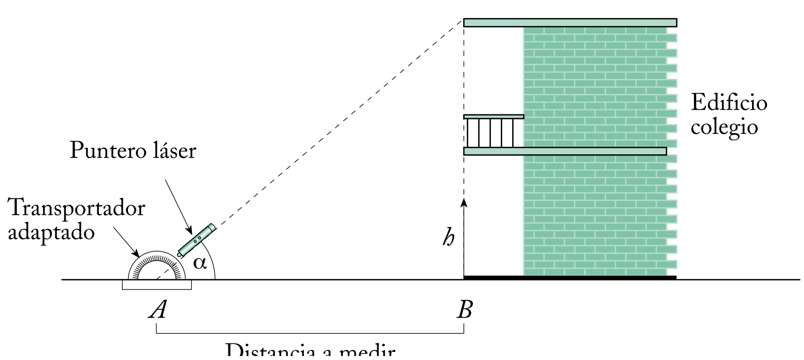


Sugerencias metodológicas

Si bien las actividades propuestas para esta unidad, corresponden a problemas clásicos de trigonometría, son necesarios para introducir los conceptos asociados a este tipo de problemas y de preparación para resolver otros de mayor dificultad.

Es recomendable que el profesor o profesora inicie el trabajo con ejercicios que contemplen ángulos simples, no requiriéndose calculadora, donde el valor de la razón trigonométrica se obtenga por medio de algún método de deducción o por tabla de valores, obligando a los estudiantes adultos y adultas a usar la notación radical en muchos resultados que quedan expresados generalmente por una raíz cuadrada, asociando así este concepto con el visto en la primera unidad de este nivel. La introducción del uso de calculadora se debe justificar sólo si los problemas lo requieren, es decir, cuando la medida de los ángulos sea distinta a 30º, 45º, 60º y 90º.

Resulta muy conveniente poder realizar un trabajo práctico donde puedan reforzar la aplicación real de estos conceptos, relacionándolo con alguna actividad laboral o profesional, por ejemplo el topográfico, que podrían investigar. Una actividad de aula sugiere sacar al grupo curso a medir alturas con instrumentos muy simples: una huincha de medir, un transportador grande (o habilitar algún instrumento que mida ángulo, por ejemplo, el compás de pizarra), un puntero láser y una calculadora. Con estos materiales, desde un punto A, con el transportador y el puntero láser se apunta al borde superior de una muralla o del edificio midiendo el ángulo formado con el suelo (α), con la huincha se mide la distancia desde el punto A al pie de la muralla (B). Con los datos reunidos y aplicando conceptos vistos se puede dar una medida aproximada de la altura estudiada (h).



Módulo IV

Estadística y probabilidades

Introducción

En este módulo se profundizan y amplían las nociones y procedimientos para el análisis de información estadística que constantemente es presentada por diversos medios de comunicación, la que debiera ser de interés para los estudiantes adultos y adultas o ser atingentes a su realidad, como por ejemplo, encuestas políticas, rentabilidad previsional, estados económicos o de productividad y fenómenos sociales. Además, se continúa con el estudio de cálculo de probabilidades iniciado en el nivel anterior abordando experimentos de índole aleatorio, eventos mutuamente excluyentes y de probabilidad, incorporando la noción de dependencia y cálculo de probabilidad condicional. Para ello se proponen diversas actividades que permiten a las personas del curso obtener resultados de experimentos, analizarlos y hacer predicciones de probabilidades específicas, las cuales se van abordando paulatinamente en situaciones más complejas.

Es importante que el profesor y profesora considere las actividades que se sugieren a partir de lo trabajado en el nivel anterior y genere un trabajo, tanto grupal como individual, que permita recordar y evocar lo trabajado anteriormente. Para ello se puede proponer, además de las actividades sugeridas en este módulo, otras actividades como juegos sencillos de azar, que permitan dicha actualización de conocimientos.

Este módulo esta constituido por dos unidades:

Unidad 1: Estadística en la vida de hoy.
Unidad 2: Azar y probabilidad.

Contenidos del módulo

1. Lectura y construcción de tablas de frecuencia e histogramas para datos agrupados en intervalos, para interpretar información presentada en los medios de comunicación.
2. Definición y distinción entre población y muestra. Muestras al azar considerando situaciones cotidianas. Caracterización de una población a partir de los datos de una muestra tomada.
3. Establecimiento de diferencias entre la estadística descriptiva y la estadística inferencial, a partir de diversas situaciones o ejemplos.
4. Resolución de problemas sencillos que involucren probabilidad condicional, y suma o producto de probabilidades.

Aprendizajes esperados del módulo[13] y sugerencias para la evaluación

APRENDIZAJES ESPERADOS	SUGERENCIAS PARA LA EVALUACIÓN
A partir del desarrollo de este módulo se espera que los estudiantes adultos y adultas: • Interpreten información estadística presente en los medios de comunicación sobre diversas situaciones de la vida real.	La evaluación de este aprendizaje requiere proponer a los estudiantes adultos y adultas variadas situaciones de la vida real donde sea necesario analizar e interpretar información estadística y sacar conclusiones a partir de ella.
• Analicen, ordenen y representen información por medio de tablas de frecuencias. • Representen la información ordenada en una tabla de frecuencia en forma gráfica.	Al evaluar estos aprendizajes los estudiantes deben contar con información que sea de su interés y que les permita interpretarla, ordenarla y construir a partir de ella tablas de frecuencia y gráficos.
• Resuelvan problemas de distintas índoles que implican el cálculo de probabilidad de ocurrencia de sucesos independientes y de probabilidad condicional y suma o productos de probabilidades, haciendo uso de propiedades y fórmulas.	Al evaluar el logro de este aprendizaje esperado es importante que las personas del curso sean enfrentadas a situaciones diversas que requieran identificar y discriminar los datos necesarios para efectuar cálculos de probabilidades.

13 A continuación se describen los aprendizajes esperados para este módulo, los cuales se encuentran precisados posteriormente en el desarrollo de cada unidad a través de la descripción de sus respectivos indicadores de evaluación. Se incorporan sugerencias generales para la evaluación. No obstante, para este efecto es muy importante orientarse por los indicadores señalados.

Unidad 1: Estadística en la vida de hoy

Introducción

Como forma de actualizar y profundizar los contenidos de estadística del nivel anterior, es necesario que el profesor o profesora proponga situaciones en las cuales la información estadística presentada esté relacionada con el entorno de los estudiantes adultos y adultas como, por ejemplo, informe de la situación previsional, inflación económica, fenómenos sociales, etc.

Esta información debe permitir a las personas del curso poder iniciar una discusión y generar sus conclusiones posteriores, propiciando el trabajo en grupo, la participación y la tolerancia frente a la diversidad de opiniones.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Interpreta información estadística presente en los medios de comunicación sobre diversas situaciones de la vida real.	Cada estudiante: • Identifica factores claves como población, muestra, dato, método del muestreo y tamaño de la muestra. • Identifica e interpreta valores de la frecuencia absoluta, acumulada y relativa. • Calcula valores de medidas de tendencia central.
• Analiza, ordena y representa información por medio de tablas de frecuencias.	• Recolecta o analiza datos entregados relacionados con alguna información estadística. • Construye tablas de frecuencia.
• Representa la información ordenada en una tabla de frecuencia en forma gráfica.	• Construye un histograma con su respectivo polígono de frecuencia a partir de una tabla de frecuencia.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

En grupo, analizar datos entregados en una tabla, determinar estadígrafos de tendencia central que permiten describir la situación de una población (o muestra) y construir tabla de frecuencia.

Por ejemplo:

a. La siguiente tabla muestra la edad en que dijeron haberse casado 50 mujeres elegidas al azar, en una encuesta telefónica realizada en Santiago:

EDAD EN QUE SE CASARON	FRECUENCIA
22 años	5
25 años	12
26 años	5
27 años	4
28 años	8
30 años	16

Según esta información:

- Calcular el promedio de edad en que se casaron las mujeres encuestadas.
- Determinar la moda de edad en que se casaron las mujeres encuestadas.
- ¿Qué tipo de frecuencia corresponde la entregada en la tabla?
- Completar tabla con frecuencia absoluta, acumulada y relativa.
- ¿Qué porcentaje de mujeres se casó antes de los 27 años?
- ¿A qué edad corresponde el porcentaje más alto de mujeres casadas?

b. La siguiente información hace referencia a los niños nacidos vivos según la edad de la madre en Chile en el periodo 2000-2004:

AÑO	TOTAL	EDAD DE LA MADRE			
		menores de 15 años	15 a 19 años	20 a 34 años	35 años y más
2000	248.893	1.055	39.257	171.628	36.953
2001	246.116	1.162	38.722	168.278	37.954
2002	238.981	1.118	36.500	163.764	37.599
2003	234.486	994	33.838	161.536	38.118
2004	230.352	906	33.518	158.264	37.664

Fuente: Depto. de Estadísticas e información de salud. Ministerio de Salud. Chile.

- ¿A qué edad se produce el mayor número de nacimientos de niños vivos?
- Crear una tabla de frecuencia con datos agrupados, considerando la edad de la madre para el intervalo y el total de los 5 años como frecuencia absoluta para dicho intervalo.
- Determinar el promedio de niños nacidos vivos por cada intervalo de edad de la madre.
- ¿Qué porcentaje de niños vivos nace con madres menor o igual a 34 años?
- Crear el histograma asociado a la tabla de frecuencia, con su respectivo polígono de frecuencia.

c. La siguiente información corresponde a la Matrícula de Primer Año por Género y Área realizadas el año 2007:

ÁREA DEL CONOCIMIENTO	MATRÍCULA 1º AÑO POR GÉNERO	UNIVERS.	INSTIT. DE FORMACIÓN PROFESIONAL	CENTROS DE FORM. TÉCNICA	TOTAL
Administración y comercio	Femenina	5.298	5.010	5.950	16.258
	Masculina	6.132	5.009	4.877	16.018
Agropecuaria	Femenina	2.836	457	492	3.785
	Masculina	2.764	709	846	4.319
Arte y arquitectura	Femenina	3.970	2.504	329	6.803
	Masculina	3.786	3.666	478	7.930
Ciencias	Femenina	2.414	31	144	2.589
	Masculina	2.293	25	135	2.453
Ciencias Sociales	Femenina	8.523	2.305	408	11.236
	Masculina	4.645	1.397	216	6.258
Derecho	Femenina	4.680	3.113	2.228	10.021
	Masculina	4.884	2.544	1.137	5.565
Educación	Femenina	13.141	4.239	1.283	18.663
	Masculina	7.752	2.060	428	10.240
Humanidades	Femenina	1.706	279	41	2.026
	Masculina	1.304	161	25	1.490
Salud	Femenina	11.912	3.834	5.479	21.225
	Masculina	6.062	1.054	1.149	8.265
Tecnología	Femenina	3.972	2.149	1.014	7.135
	Masculina	17.827	14.166	9.095	41.088

Fuente: Consejo Superior de Educación.

- Calcular totales por centro de educación superior y totales nacionales.
- Determinar porcentajes por área del conocimiento para el género femenino, con respecto al total de matrícula nacional.
- ¿En qué área se concentra la preferencia femenina al momento de elegir una carrera profesional universitaria?

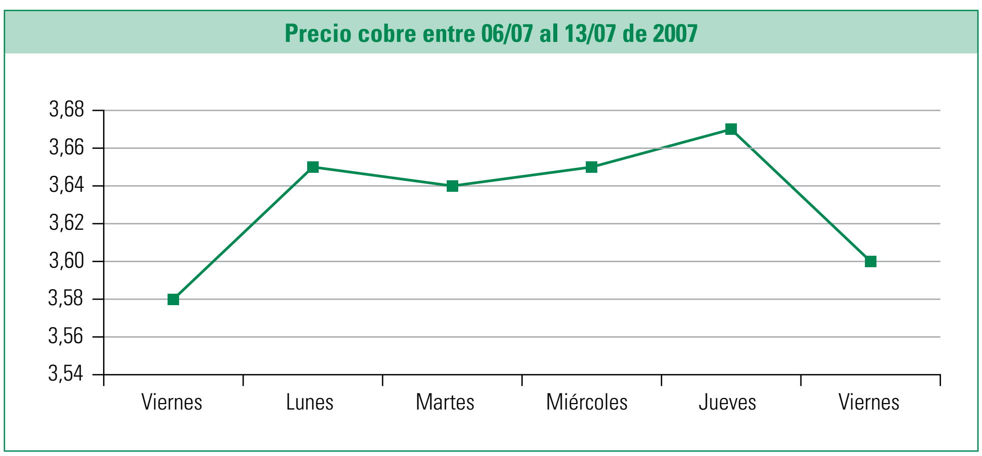
- ¿Qué porcentaje corresponde el área de salud dentro de las preferencias femeninas en relación a las demás áreas?
- Determinar promedios de matrícula por institución y género.
- ¿En qué institución los hombres presentan mayor número de matriculados con respecto a las mujeres?
- Si la tendencia de elegir una carrera se mantuviera para el próximo año, por área de estudio y sexo:
  - ¿Qué carrera tiene mayor posibilidad de ser elegida por ambos sexos?
  - ¿Qué posibilidad tiene la carrera de Educación de ser elegida por los hombres?

Actividad 2

Analizar la información presentada gráficamente.

Por ejemplo:

El siguiente gráfico representa la información semanal de las variaciones que sufre el precio del cobre en dólares en el lapso de una semana:



Fuente: COCHILCO, julio 2007.

a. ¿Qué día de la semana registró el precio más bajo? ¿Cuánto?

b. ¿Qué día de la semana registró el precio más alto? ¿Cuánto?

c. ¿Qué precio promedio presentó el cobre en la semana?

d. ¿Qué valor de la semana podría corresponder al valor de la moda en el precio del cobre?

e. A partir del gráfico crear la tabla de frecuencia asociada.

f. Completar el gráfico con el histograma correspondiente.

g. ¿Se puede asegurar que en la siguiente semana el precio del cobre se mantenga cerca del valor promedio?

Sugerencias de evaluación

Las actividades propuestas pretenden familiarizar a las personas del curso con situaciones que presenten información de la vida real, que esté en estrecha relación con el quehacer nacional y que es de libre acceso para ellos o que verán constantemente en los medios de comunicación, especialmente en los escritos. Esto permitirá no tan solo actualizar los conocimientos adquiridos en niveles anteriores de estadística, sino también fomentar la formación de ciudadanos y ciudadanas más informados.

Con preguntas como (g) de la actividad 2, se pretende hacer comprender que la inferencia estadística no siempre asegura la ocurrencia de algún fenómeno, ya que su ocurrencia está sujeta a variables que en algunos momentos son difíciles de predecir y controlar.

Se sugiere al profesor o profesora que promueva el trabajo grupal con el fin de que se refuercen entre ellos y compartan estrategias a utilizar para interpretar la información dada. En la medida que se propongan nuevas actividades, éstas deben ser en lo posible en un contexto simple y de interés para los estudiantes, de tal manera que ellos puedan tener acceso a fuentes confiables y permanentes, como por ejemplo, ministerios sociales, INE u otro organismo que maneje información estadística.

Unidad 2: Azar y probabilidad

Introducción

En continuidad con el módulo de probabilidades del nivel anterior, es importante que el profesor o profesora proponga situaciones en las cuales las probabilidades jueguen un papel esencial para la previsión de resultados de un determinado suceso. Es necesario que las situaciones se refieran a eventos conocidos por las personas del curso.

Básicamente, esta unidad hace una síntesis de muchos de los conceptos vistos de estadística y de probabilidad que han sido abordados en el nivel anterior. Siendo importante que las actividades seleccionadas y propuestas conduzcan a los estudiantes adultos y adultas a ser capaces de interpretar datos e informaciones estadísticas que aparecen de manera habitual en los medios de comunicación, de tal manera que pueda determinar el grado de probabilidad que esta información encierra. Es decir, se trata de proponer actividades en que las personas del curso, además de informarse, sean capaces de interpretar la información y sacar conclusiones a partir de ella.

Aprendizajes esperados	Indicadores de evaluación
Cada estudiante: • Resuelve problemas de distintas índoles que implican el cálculo de probabilidad de ocurrencia de sucesos independientes, y de probabilidad condicional y suma o productos de probabilidades, haciendo uso de propiedades y fórmulas.	Cada estudiante: • Determina el espacio muestral para un suceso, identificando casos totales y casos favorables para el cálculo de probabilidad clásica por medio de la fórmula de Laplace. • Discrimina entre sucesos independientes y de aquellos que presentan condicionalidad, calcula sus respectivas probabilidades. • Aplica el principio aditivo y multiplicativo en el cálculo de probabilidades que implican sumas y multiplicaciones de probabilidades. • Interpreta información científica en la cuál interviene el concepto de probabilidad.

Ejemplos de actividades

Actividad 1

Calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, determinando el espacio muestral y a partir de él, los casos totales y favorables.

Por ejemplo:

a. La siguiente tabla muestra la población de 15 años o más por religión declarada, de ambos sexos y agrupados por edad:

EDAD AMBOS SEXOS	POBLACIÓN TOTAL DE 15 AÑOS O MÁS	CATÓLICA	EVANGÉLICO	TESTIGO DE JEHOVÁ	NINGUNA, ATEO, AGNÓSTICO
15 a 29	3.674.239	2.431.689	564.650	34.940	407.644
30 a 44	3.566.949	2.449.523	572.249	41.232	301.395
45 a 59	2.267.643	1.650.789	328.949	24.909	145.640
60 a 74	1.247.307	948.938	174.850	13.778	59.195
75 o más	470.171	372.489	59.027	4.596	18.116
Total	11.226.309	7.853.428	1.699.725	119.445	931.990

Fuente: Extracto - Censo 2002. Características Sociales y Culturales, INE.

- ¿Cuál es la probabilidad de elegir a una persona de 20 años al azar, y que ésta sea católica?
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir a una persona de 50 años al azar, y que ésta sea evangélica?
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir a una persona de toda la muestra al azar, y que ésta no tenga ninguna religión?

b. En una encuesta de opinión sobre una campaña para elección de alcalde, se ha registrado la siguiente información de los votantes, según sus preferencias, si las votaciones fueran hoy:

Candidato A: 546 votos

Candidato B: 658 votos

Candidato C: 265 votos

Sin candidato: 31 votos

- ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona al azar que haya votado por el candidato B?
- ¿Cuál es la probabilidad de elegir una persona al azar que no haya votado por el candidato B?

c. El juego de la ruleta tiene 37 casillas iguales, numeradas del 0 al 36. La casilla 0 es de color blanco y las 36 restantes se organizan en 18 casillas rojas y 18 casillas negras. Luego de lanzar la bola y de hacer girar libremente la ruleta hasta que se detenga sola. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola caiga en una casilla numerada con un número par mayor que 30?

Actividad 2

Analizar situaciones experimentales en las que interviene el azar y responder preguntas específicas respecto de ellas.

Por ejemplo:

Lanzar una moneda al aire 10 veces y registrar el resultado obtenido en cada lanzamiento con una X en la siguiente tabla:

	NÚMERO DE LANZAMIENTO									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cara										
Sello										

a. Contar el número de caras y sacar el porcentaje con respecto al total de lanzamientos.

b. Realizar 10 lanzamientos más y registrar el resultado obtenido a continuación de la tabla.

c. Volver a contar el número de caras y sacar el porcentaje con respecto a los 20 lanzamientos.

d. Realizar 30 lanzamientos más y registrar el resultado obtenido.

e. Contar el número de caras y sacar el porcentaje con respecto a los 50 lanzamientos.

f. Organizarse en grupos para realizar y registrar el lanzamiento de una moneda 100 veces, 200 veces, 300 veces. Obtener el porcentaje de las caras obtenidas. ¿Qué porcentaje de caras se obtendría si se repitiera el experimento para 1.000 lanzamientos?

g. ¿Cuál es la incidencia que tiene la ley de los grandes números en la pregunta anterior?

Actividad 3

Resolver problemas que involucren cálculo de probabilidad condicional.

Por ejemplo:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar de un naipe inglés una carta, la carta extraída sea el as de corazones, sabiendo que la carta extraída es de corazones?

b. A partir de la tabla de la actividad 1(a):

- ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir a una persona al azar, la persona sea católica, sabiendo que tiene 60 años?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir a una persona al azar, la persona no practique alguna religión, sabiendo que tiene 18 años?

Actividad 4

Resolver problemas donde tengan que sumar o multiplicar probabilidades:

a. De un naipe inglés de 52 cartas se extraen al azar 2 de ellas sucesivamente, sin reposición de la carta. Calcular la probabilidad de que éstas sean:

- Ambas de trébol.
- Una de trébol y otra menor que 5.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer una carta de un mazo de 52 cartas, ésta sea un 5 o una reina?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado, el número obtenido sea 2 o impar?

d. A partir de la siguiente información:

MATRÍCULA DE PRIMER AÑO POR TIPO DE INSTITUCIÓN Y GÉNERO								
Índices 2007								
Matrícula Primer Año	Universidades		Inst. Profesionales		C. Formación Técnica		Total	
Femenina	58.452	50%	23.921	44%	17.368	49%	99.741	48%
Masculina	57.449	50%	30.791	56%	18.386	51%	106.626	52%
Total	115.901		54.712		35.754		206.367	

Fuente: CSE, 2007.

Al elegir al azar a un estudiante matriculado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté matriculado en la Universidad?

Actividad 5

Resolver problemas de cálculo de probabilidades por su complemento, en variados contextos.

a. En un curso de 32 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que un determinado alumno o alumna no sea elegida para ocupar el cargo de presidente de curso, si todos los estudiantes tienen la misma probabilidad de ser elegidos?

b. Considere el siguiente juego: "se lanza un dado tres veces y usted puede apostar a favor o en contra de que al menos salga una vez el número 6". ¿Es conveniente apostar a favor o en contra?

c. Para ocupar cierta vacante se presentan 3 candidatos: Sergio, José y María. La probabilidad que tiene Sergio de ser contratado es de 7 contra 5 y la de José es de 1 contra 3. Entonces, ¿cuál es la probabilidad que tiene María de ser contratada?

Actividad 6

Resolver problemas en contextos variados de la vida cotidiana en que es necesario interpretar, seleccionar y relacionar datos estadísticos.

Por ejemplo:

a. Un censo realizado para estudiar las condiciones educacionales de una población comprobó que el 36% de ella tiene menos de 18 años y de éstos el 15% no ha terminado la enseñanza media. Si se selecciona una persona de esa población al azar, calcular la probabilidad de que sea:

   - Menor de 18 años.
   - Menor de 18 años y no haya terminado sus estudios de enseñanza media.

b. En la asignatura de matemática, se sabe que el 35% de los alumnos y alumnas no realizan la guía de ejercicios y que de los estudiantes que sí la hacen, el 80% aprueba el ramo. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que realice la guía y no apruebe la asignatura?

Sugerencias metodológicas

Por tratarse de una ampliación de nociones y procedimientos abordados en el nivel anterior, resulta interesante que el profesor o profesora haga una síntesis sobre dichos aspectos, para luego dejar que los estudiantes adultos y adultas trabajen en grupos, aborden las situaciones propuestas y tengan la oportunidad de evocar dichos contenidos.

En las diferentes actividades propuestas se señala un ejercicio tipo para cada propósito, pero es importante que los y las estudiantes del curso puedan ser capaces de realizar representaciones gráficas de los espacios muestrales correspondientes a los problemas en algunas o en todas las situaciones planteadas y que utilicen estrategias espontáneas antes de entregar algún procedimiento algorítmico con sus resultados. Pueden, además, desarrollar de manera práctica la actividad, tal como se hizo en el nivel de estudios anterior, con el fin, justamente, de aprovecharla para la evocación de conocimientos. Es importante enfatizar en el lenguaje que está implícito en los enunciados de los problemas con suma o producto de probabilidades, asociado a los conectivos "o" e "y", respectivamente.

En la actividad 2, independientemente de orientar a los estudiantes del curso para que imaginen la situación, ésta tiene un carácter experimental donde se busca el análisis y la comprensión del suceso, de lo que significa repetirlo para llegar a la comprobación de principios o leyes fundamentales en el cálculo de probabilidades, como por ejemplo la Ley de los grandes números. Para apoyar este tipo de actividad, hoy en día existen muchos programas computacionales que permiten simular experimentos como éste (experimento de Kerrich, John). Uno de ellos es el programa SIMPUC, distribuido gratuitamente por la Pontificia U. Católica de Chile desde el sitio web del Depto. de Estadística y Matemática (**www.mat.puc.cl/articulo81.html**), correspondiente a la página de material docente.

Las actividades siguientes, particularmente los últimos ejemplos, tienen como propósito de que los estudiantes adultos y adultas discutan sobre la aplicación de las probabilidades más allá de los juegos de azar. El profesor o profesora deberá proponer otras actividades, además de las que acá se sugieren, o adaptarlas, con el fin de tener presentes los intereses de las personas y su propia realidad.

Bibliografía

Módulo I

- Corvalán F., *La matemática aplicada a la vida cotidiana*, Editorial Grau, España, 1995.
- Kaczor, Pablo et al., *Matemática I*, Ediciones Santillana, Argentina, 1999.
- Ramo García, Arturo, *Potencias y raíz de aplicaciones didácticas*, Teruel, México, 1999.
- Mineduc, *Programas de Estudio NM2*.
- Enciclopedia Microsoft® *Encarta® 2003*. © 1993-2002 Microsoft Corporation.

Sitios web sugeridos

http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/desarrolloconcepto/potencias_desarrollo.htm

http://www.aplicaciones.info/decimales/potin04.htm

Módulo II

- Corvalán, F., *La matemática aplicada a la vida cotidiana*, Editorial Grau, España, 1995.
- Kaczor, Pablo et al., *Matemática I*, Ediciones Santillana, Argentina, 1999.
- Mineduc, *Programas de Estudio NM2*.
- Blanco, De las Heras, Fuenzalida, Riveros, *Matemática Educación Media*, Plan Común III, IV Medio, Plan Electivo III y IV Medio, Ed. Santillana, 1994-1995.
- Tapia, Hormazábal, Olivares, López, *Manual Preparación Matemática*, Ediciones Universidad Católica de Chile, 2003.
- Riera, Gonzalo, *Matemática Aplicada 3º Medio*, Ed. Zig-Zag, 1999.
- Riera, Gonzalo, *Matemática Cuarto Medio*, Ed. Zig-Zag, 2000.

Sitios web sugeridos

http://www.pediatraldia.cl/beber_conducción.htm

Ficha Nº 15, Alcohol y conducción. Conaset Chile. http://www.conaset.cl

http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/2.1.html

http://www.descartes.es, Función exponencial

http://www.ssn.unam.mx/SSN/Doc/Cuaderno1/ch3.html

http://www.ssn.unam.mx/SSN/Doc/Richter/richter.html

http://soko.com.ar/matem/matematica/logaritmos.htm

http://www.mec.es/educa/jsp/plantilla.jsp?id=82&area=sistema-educativo

http://www.onemi.cl

Módulo **III**

- Corvalán, F., *La matemática aplicada a la vida cotidiana*, Editorial Grau, España, 1995.
- Gerard, B.; Daviaud, D.; Revranche, B., *Mathématique 3ª Le nouveau Pythagore*, Hatier, París, 1999.
- Hojman, R.; Huerta, L.; Yutronic, J., *Matemática 4º*, Editorial Zig-Zag, Santiago, 2002.
- Orellana, Bernard, *Trigonometría Plana*, Ediciones Pedagógicas Chilenas, Santiago, 1985.
- Blanco, De las Heras, Fuenzalida, Riveros, *Matemática Educación Media*, Plan Electivo III y IV Medio, Ed. Santillana, 1995.
- Tapia, Hormazábal, Olivares, López, *Manual Preparación Matemática*, Ediciones Universidad Católica de Chile, 2003.
- Mineduc, *Programas de Estudio NM3*.

Sitios web sugeridos

http://es.wikipedia.org/wiki/Trigonometría

Módulo **IV**

- Gaymann M.; Varga, T., *Las probabilidades en la escuela*, Editorial Teide, Barcelona, 1975.
- Hojman, R.; Huerta, L.; Yutronic, J., *Matemática 4º*, Editorial Zig-Zag, Santiago, 2002.
- Blanco, De las Heras, Fuenzalida, Riveros, *Matemática Educación Media*, Plan Común IV Medio, Ed. Santillana, 1994.
- Tapia, Hormazábal, Olivares, López, Manual *Preparación Matemática*, Ediciones Universidad Católica de Chile, 2003.
- Mineduc, *Programas de Estudio NM2, NM3 y NM4*.
- Sociedad Chilena de Educación Matemática, *Aportes Monográficos para el profesor*, SOCHIEM, Chile, 2002.
- Spíegel, Murray, *Estadística*, McGraw-Hill, Mexico, 1970.

Sitios web sugeridos

http://es.wikipedia.org/wiki/Probabilidad

http://www.mintrab.cl/programas_mujer_estadiasticas4.php

http://www.mintrab.cl/programas_mujer_temas_02.php

http://www.mintrab.cl/programas_mujer_estadiasticas.php

http://www.mintrab.cl/programas_mujer_estadiasticas4.php

http://deis.minsal.cl/deis/pob_censo2002.htm

http://www.minsal.cl/estadisticas.htm

http://www.cse.cl

http://www.ine.cl

http://www.sernam.cl

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN